ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές:

α) $y = 2\eta\mu x + 3$ β) $y = -2 + 5\sigma\upsilon\nu x$ γ) $y = 5 - 3\eta\mu x$

δ) $y = 2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ ε) $y = \frac{1}{3+\eta\mu x}$ στ) $y = \frac{1}{2-\sigma\upsilon\nu x}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων :

α) $A = \eta\mu 100° - \sigma\upsilon\nu 200° - \varepsilon\varphi 1000°$.

β) $B = \eta\mu 1 - \sigma\upsilon\nu 2 \cdot \varepsilon\varphi 4$.

<u>Υπόδειξη</u> :

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βασικές ιδιότητες των Ανισοτήτων από την Α΄ Λυκείου!

<u>Ιδιότητες των Ανισοτήτων</u>

1. α) $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
   β) $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$
2. α) α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$
   β) α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
3. $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in R$.
4. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
5. α) Αν $\gamma > 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
   β) Αν $\gamma < 0$, τότε : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
6. Αν $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$.
7. Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β,γ,δ ισχύει : $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$
8. Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$.
9. Αν α, β <u>ομόσημοι</u>, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

   <u>Σημείωση</u> : Δεν αφαιρούμε ανισότητες της ίδιας φοράς κατά μέλη!
   Είναι 10 > 6 και 7 > 2, αλλά 10 -7 < 6-2, δηλ. 3 < 3 ?

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ 1

Γνωρίζουμε ότι : $\mathbf{-1 \leq ημx \leq 1}$ και $\mathbf{-1 \leq συνx \leq 1}$

ή ισοδύναμα :

$\mathbf{|ημx| \leq 1}$ και $\mathbf{|συνx| \leq 1}$, **για κάθε γωνία x.**

α) $-1 \leq ημx \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2ημx \leq 2 \Leftrightarrow 3-2 \leq 3+2ημx \leq 3+2 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$.

β) $-1 \leq συνx \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq 5συνx \leq 5 \Leftrightarrow -2-5 \leq -2+5συνx \leq -2+5 \Leftrightarrow -7 \leq y \leq 3$.

γ) $-1 \leq ημx \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq -3ημx \geq -3 \Leftrightarrow 5+3 \geq 5-3ημx \geq 5-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 8$.

δ) $-1 \leq συνx \leq 1 \Leftrightarrow |συνx| \leq 1 \Leftrightarrow |συνx|^2 \leq 1^2 \Leftrightarrow συν^2x \leq 1$.

Άρα : $\mathbf{0 \leq συν^2x \leq 1}$.

$0 \leq συν^2x \leq 1 \Leftrightarrow 2+0 \leq 2+συν^2x \leq 2+1 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3$.

ε) $-1 \leq ημx \leq 1 \Leftrightarrow 3-1 \leq 3+ημx \leq 3+1 \Leftrightarrow 2 \leq 3+ημx \leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3+ημx} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$.

στ) $-1 \leq συνx \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -συνx \geq -1 \Leftrightarrow 2+1 \geq 2-συνx \geq 2-1 \Leftrightarrow 3 \geq 2-συνx \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \leq 2-συνx \leq 3 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{2-συνx} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 1$.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ 2α)

Να βρούμε το πρόσημο της παράστασης Α = ημ100° – συν200° – εφ1000°,

αρκεί να βρούμε το πρόσημο των αριθμών ημ100°, συν200° και εφ1000°.

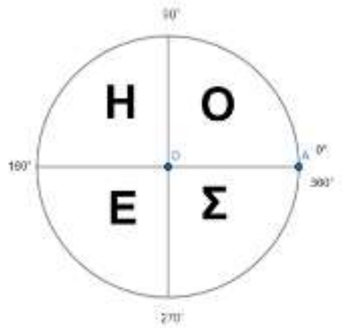
ΘΕΩΡΙΑ

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου συμπληρώσαμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευράς της:

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	–	–
συνω	+	–	–	+
εφω	+	–	+	–
σφω	+	–	+	–

(Σελ.54 σχολικού βιβλίου)

Μνημονικός Κανόνας Προσήμων Τριγ. Αριθμών



Ο : **Ό**λα θετικά

Η : Μόνο το **η**μω > 0

Ε : **ε**φω > 0 και επομένως και σφω >0

Σ : **σ**υνω > 0.

Επειδή 90°< 100° < 180°, τότε η τελική πλευράς της γωνίας 100° βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Επομένως **ημ100° > 0 (Ι)**

Επειδή 180°< 200° < 270°, τότε η τελική πλευράς της γωνίας 200° βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.

Επομένως συν200° < 0. Άρα : **–συν200° > 0 (ΙΙ)**

✓ **1000° = 2·360° + 280°**

✓ Έχουμε: εφ1000° = εφ(2·360° + 280°) = εφ280°.

Επειδή 270° < 280° < 360°, τότε η τελική πλευράς της γωνίας 280° βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

Έχουμε: εφ1000° = εφ280° < 0. Άρα : **–εφ1000° > 0 (ΙΙΙ)**

Προσθέτουμε τις σχέσεις (Ι), (ΙΙ) και (ΙΙΙ) κατά μέλη:

ημ100° + (– συν200°) + (– εφ1000°) > 0 ⇔ ημ100° – συν200° – εφ1000° > 0 ⇔ Α > 0.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ 2α)

Β = ημ1 – συν2 · εφ4.

Εδώ οι γωνίες μετριούνται σε **rad.**

Επειδή $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, τότε η τελική πλευράς της γωνίας 1rad βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Επομένως **ημ1 > 0** (IV)

Επειδή $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, τότε η τελική πλευράς της γωνίας 2rad βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Επομένως **συν2 < 0** (V)

Επειδή $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, τότε η τελική πλευράς της γωνίας 3rad βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.

Επομένως **εφ4 > 0** (VI)

Από τις σχέσεις : (V), (VI) έχουμε: συν2 · εφ4 < 0 ⇔ **– συν2 · εφ4 > 0** (VII)

Προσθέτουμε τις σχέσεις (IV), (VII) κατά μέλη και έχουμε :

ημ1+ (– συν2 · εφ4) > 0 ⇔ ημ1 – συν2 · εφ4 > 0 ⇔ Β > 0.

.