

Απόλυτη τιμή

- 1) $|7| = 7$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$ και γενικά $|\alpha| \geq 0$, $|\alpha| = |- \alpha|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Επίσης $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $|\alpha| > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

- 2) Για $\alpha > 0$, ισχύει $|\alpha| = \alpha$, ενώ για $\alpha < 0$, ισχύει $|\alpha| = -\alpha$ $|-7| = -(-7) = 7$.

Έτσι για $\alpha > 0$, ισχύει $\alpha = |\alpha|$, ενώ για $\alpha < 0$, ισχύει $\alpha = -|\alpha|$.

Επειδή $0 = -0 = +0$, το 0 μπορεί να «προσκολληθεί» και στις δυο ομάδες.

Έτσι για $\alpha \geq 0$, ισχύει $\alpha = |\alpha|$, και για $\alpha \leq 0$, ισχύει $\alpha = -|\alpha|$.

Γενικά $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ και $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$.

- 3) Ο ορισμός δίνεται με τη μορφή: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$.

Σύμφωνα όμως με τα παραπάνω, θα μπορούσε να πάρει και τις μορφές:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha \leq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad |\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

- 4) Παρατηρούμε ότι: αν $\alpha > 0$, τότε $-|\alpha| < 0 < \alpha = |\alpha|$, αφού $-|\alpha| < 0$,

αν $\alpha < 0$, τότε $-|\alpha| = \alpha < 0 < |\alpha|$, αφού $|\alpha| > 0$,

και αν $\alpha = 0$, τότε $-|\alpha| = 0 = \alpha = 0 = |\alpha|$.

Έτσι γενικά: $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή $\alpha \leq |\alpha|$ και $-\alpha \leq |\alpha|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Προσοχή: Δεν ισχύει ποτέ $-|\alpha| < \alpha < |\alpha|$.

- 5) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, και $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ με $\beta \neq 0$.

- 6) Επειδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $\alpha^2 \geq 0$, θα έχουμε $|\alpha^2| = \alpha^2$,

και λόγω του (5), τελικά ισχύει $|\alpha|^2 = |\alpha^2| = \alpha^2$.

Γνωρίζουμε ότι για $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και για φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ισχύουν:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n \quad \text{και} \quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$$

Γενικότερα ισχύει $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^n \geq \beta^n$, για $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$.

Έτσι $|x| \geq |y| \Leftrightarrow |x|^2 \geq |y|^2 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$, για κάθε x, y στο $\mathbb{R}$.

Το παραπάνω, αξιοποιείται για την απόδειξη ισοτήτων και ανισοτήτων «με απόλυτα», στις οποίες και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικοί αριθμοί, και συνεπώς υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, «διώχνω» κάποια απόλυτα.

- 7) Ισχύουν: $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Ειδικότερα: (i) αν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, ισχύει: $||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

(ii) αν $\alpha \cdot \beta > 0$ (α, β ομόσημοι), ισχύει $||\alpha| - |\beta|| < |\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

(iii) αν $\alpha \cdot \beta < 0$ (α, β ετερόσημοι), ισχύει $||\alpha| - |\beta|| = |\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$

- 8) Για $\vartheta > 0$, ισχύουν: $|x| = \vartheta \Leftrightarrow \{x = \vartheta \text{ ή } x = -\vartheta\} \Leftrightarrow x = \pm\vartheta$,
 $|x| < \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta < x < \vartheta$ και $|x| > \vartheta \Leftrightarrow \{x > \vartheta \text{ ή } x < -\vartheta\}$
 Και τελικά $|x| \leq \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta \leq x \leq \vartheta \Leftrightarrow x \in [-\vartheta, \vartheta]$, $|x| \geq \vartheta \Leftrightarrow \{x \geq \vartheta \text{ ή } x \leq -\vartheta\}$.

- 9) Γενικότερα, για $\vartheta \geq 0$, ισχύει $|x| \leq \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta \leq x \leq \vartheta$.

Για $\vartheta = 0$, $|x| \leq 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $-0 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

* Επειδή πάντα ισχύει $|x| \geq 0$, όταν έχουμε και $|x| \leq 0$, τότε θα έχουμε $|x| = 0$.

Χρησιμοποιήσαμε την αντισυμμετρική ιδιότητα της διάταξης: $\{\alpha \leq \beta \text{ και } \beta \leq \alpha\} \Rightarrow \alpha = \beta$

Η ιδιότητα αυτή, μας εφοδιάζει με μια μέθοδο απόδειξης.

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha = \beta$, λέμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$.

- 10) Ο αριθμός $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha| = d(\beta, \alpha)$, λέγεται απόσταση των α, β .

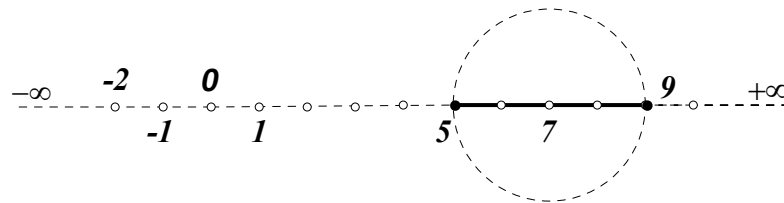
Η έννοια της απόστασης, χρησιμοποιείται όταν ορίζουμε ανοικτά ή κλειστά πεπερασμένα διαστήματα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, με τη βοήθεια του μέσου (κέντρο), και της απόστασης του μέσου από τα άκρα (ακτίνα).

π.χ.: $d(x, 7) = |x - 7| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 7 \leq 2 \Leftrightarrow 7 - 2 \leq x \leq 7 + 2 \Leftrightarrow x \in [7 - 2, 7 + 2] = [5, 9]$

Ζητάμε αριθμό που να απέχει από τον αριθμό 7 λιγότερο από 2, ή ίσο με 2.

Ο x παίρνει τιμές σε μια κλειστή **περιοχή**, με «κέντρο» τον αριθμό 7, και «ακτίνα» τον αριθμό 2.

Η περιοχή αυτή απεικονίζεται παρακάτω, από την διάμετρο του κύκλου.



Αντίστροφα, μπορούμε να περιγράψουμε ένα ανοικτό ή κλειστό πεπερασμένο διάστημα, σαν περιοχή με κέντρο και ακτίνα.

π.χ.: Για $\alpha < \beta$, μπορούμε να περιγράψουμε το ανοικτό διάστημα (α, β) , σαν ανοικτή περιοχή, με κέντρο το μέσο $\frac{\alpha + \beta}{2}$ και ακτίνα το μισό της απόστασης των άκρων $\frac{|\alpha - \beta|}{2}$.

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \quad x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow d\left(x, \frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{|\alpha - \beta|}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right| < \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

$$-1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3) \Leftrightarrow |x - 1| < 2 \Leftrightarrow d(x, 1) < 2$$

$$\text{κέντρο: } \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{και} \quad \text{ακτίνα: } \frac{|(-1) - 3|}{2} = \frac{|-4|}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- 11) Για $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει: $d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$ «τριγωνική ανισότητα»

$$d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \Leftrightarrow |\alpha - \gamma| \leq |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma|$$

Οι βασικές αποδείξεις για τα (7), (11) γίνονται, υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο.

- 12) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\alpha| + |\beta| \geq 0$

Ειδικότερα $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ και $|\alpha| + |\beta| > 0 \Leftrightarrow \{\alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0\}$.

Προφανώς και $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq 0$ κ.λ.π.

Άσκηση 1: Να αποδειχθεί ότι για κάθε ζευγάρι α, β πραγματικών αριθμών ισχύει:

$$\left| |\alpha| - |\beta| \right| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη: (i)} \quad & \left| |\alpha| - |\beta| \right| \leq |\alpha + \beta| \Leftrightarrow \left| |\alpha| - |\beta| \right|^2 \leq |\alpha + \beta|^2 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \leq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2|\alpha\beta| + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -2|\alpha\beta| \leq 2\alpha\beta \Leftrightarrow -|\alpha\beta| \leq \alpha\beta \end{aligned}$$

Η $-|\alpha\beta| \leq \alpha\beta$ είναι σωστή λόγω του **(4)**,

και επομένως η ισοδύναμή της σχέση $\left| |\alpha| - |\beta| \right| \leq |\alpha + \beta|$, είναι επίσης σωστή.

(ii) Η $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, αποδεικνύεται επίσης με τετραγωνισμό (σελ. 41 σχ. βιβλίου).

2^η απόδειξη: Επειδή $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ και $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$, με πρόσθεση κατά μέλη θα έχουμε $-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$, και από το **(9)** θα έχουμε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι για κάθε ζευγάρι a, b πραγματικών αριθμών ισχύει:

$$\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σαν εφαρμογή της Άσκησης 1, για $a=a$, και $\beta=-b$.

Ισχύει $\left| |a| - |-b| \right| \leq |a + (-b)| \leq |a| + |-b|$, και επομένως $\left| |a| - |b| \right| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

Άσκηση 3: Να απλοποιηθεί η παράσταση $f = x + |x - 2| - |x + 3|$.

Λύση: Για να απλοποιηθεί η f , θα πρέπει να «βγάλουμε τα απόλυτα».

(α) Βρίσκουμε τις ρίζες των παραστάσεων $x - 2$ και $x + 3$, δηλαδή τις τιμές που μηδενίζουν τις παραστάσεις του x που βρίσκονται μέσα στα απόλυτα.

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{και} \quad x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

(β) Κατασκευάζουμε τον «πίνακα πρόσημου» των παραστάσεων $x - 2$ και $x + 3$, για όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει ο x .

Αφού $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, η παράσταση $x - 2$ παίρνει αρνητικές τιμές, στο διάστημα $(-\infty, 2)$.

Αφού $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, η παράσταση $x - 2$ παίρνει θετικές τιμές, στο διάστημα $(2, +\infty)$.

Αφού $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$, η παράσταση $x + 3$, παίρνει αρνητικές τιμές στο $(-\infty, -3)$.

Αφού $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$, η παράσταση $x + 3$, παίρνει θετικές τιμές στο $(-3, +\infty)$.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+

(γ) Εργαζόμαστε σε κάθε διάστημα χωριστά.

$$\text{i) Αν } x < -3, \text{ τότε } \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \text{ και επομένως } \begin{cases} |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2 \\ |x + 3| = -(x + 3) = -x - 3 \end{cases}.$$

$$\text{Έτσι } f = x + |x - 2| - |x + 3| = x + (-x + 2) - (-x - 3) = x - x + 2 + x + 3 = x + 5.$$

$$\text{ii) Αν } -3 \leq x < 2, \text{ τότε } \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \text{ και επομένως } \begin{cases} |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2 \\ |x + 3| = x + 3 \end{cases}.$$

$$\text{Έτσι } f = x + |x - 2| - |x + 3| = x + (-x + 2) - (x + 3) = x - x + 2 - x - 3 = -x - 1.$$

$$\text{iii) Αν } 2 \leq x, \text{ τότε } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \text{ και επομένως } \begin{cases} |x - 2| = x - 2 \\ |x + 3| = x + 3 \end{cases}.$$

$$\text{Έτσι } f = x + |x - 2| - |x + 3| = x + (x - 2) - (x + 3) = x + x - 2 - x - 3 = x - 5.$$

Σημείωση: Επειδή οι τιμές της παράστασης f εξαρτώνται από τις τιμές του x ,

μπορούμε να πούμε ότι η f είναι συνάρτηση του x , και γράφουμε $f = f(x)$.

Άσκηση 4: Να λυθεί η εξίσωση $|x-1|=5$.

Λύση: $|x-1|=5 \Leftrightarrow \{x-1=5 \text{ ή } x-1=-5\} \Leftrightarrow \{x=5+1 \text{ ή } x=-5+1\} \Leftrightarrow \{x=6 \text{ ή } x=-4\}$

Άσκηση 5: Να λυθεί η εξίσωση $|2x-1|=|x+7|$.

Λύση: $|2x-1|=|x+7| \Leftrightarrow \{2x-1=x+7 \text{ ή } 2x-1=-(x+7)\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \{2x-x=7+1 \text{ ή } 2x-1=-x-7\} \Leftrightarrow \{x=8 \text{ ή } 2x+x=-7+1\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \{x=8 \text{ ή } 3x=-6\} \Leftrightarrow \left\{x=8 \text{ ή } x=\frac{-6}{3}\right\} \Leftrightarrow \{x=8 \text{ ή } x=-2\}$

Άσκηση 6: Να λυθεί η εξίσωση $|x-2|=2x+8$.

1^η Λύση: Επειδή πάντα $|x-2| \geq 0$, αν $2x+8 < 0$ η εξίσωση θα είναι αδύνατη.

Άρα θα ψάξουμε για λύσεις με δεδομένο ότι $2x+8 \geq 0$, δηλαδή στο διάστημα $[-4, +\infty)$.

$|x-2|=2x+8 \Leftrightarrow \{x-2=2x+8 \text{ ή } x-2=-(2x+8)\} \Leftrightarrow \{-2-8=2x-x \text{ ή } x-2=-2x-8\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \{-10=x \text{ ή } x+2x=2-8\} \Leftrightarrow \{x=-10 \text{ ή } 3x=-6\} \Leftrightarrow \{x=-10 \text{ ή } x=-2\}$

Μοναδική λύση της εξίσωσης, εννοείται στο $[-4, +\infty)$, είναι ο αριθμός -2 .

Η ιδέα να δώσουμε σαν λύση τον αριθμό -10 απορρίπτεται, αφού ο αριθμός αυτός δεν ανήκει στο $[-4, +\infty)$.

Έτσι τελικά μοναδική λύση της εξίσωσης, είναι ο αριθμός -2 .

2^η Λύση:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

(i) Αν $x < 2$, δηλαδή αν $x-2 < 0$, τότε $|x-2|=-(x-2)=-x+2$, και :

$|x-2|=2x+8 \Leftrightarrow -x+2=2x+8 \Leftrightarrow -8+2=2x+x \Leftrightarrow -6=3x \Leftrightarrow x=-2$

Επομένως ο αριθμός -2 , είναι λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(-\infty, 2)$.

(ii) Αν $x \geq 2$, δηλαδή αν $x-2 \geq 0$, τότε $|x-2|=x-2$, και :

$|x-2|=2x+8 \Leftrightarrow x-2=2x+8 \Leftrightarrow -8-2=2x-x \Leftrightarrow x=-10$

Προφανώς η εξίσωση είναι αδύνατη στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Η ιδέα να δώσουμε σαν λύση τον αριθμό -10 απορρίπτεται, αφού ο αριθμός αυτός δεν ανήκει στο $[2, +\infty)$.

Έτσι τελικά μοναδική λύση της εξίσωσης, είναι ο αριθμός -2 .

Άσκηση 7: Να λυθεί η ανίσωση $|x-2| < 2x+8$.

Λύση: Επειδή πάντα $|x-2| \geq 0$, αν $2x+8 \leq 0$ η ανίσωση θα είναι αδύνατη.

Άρα θα ψάξουμε για λύσεις με δεδομένο ότι $2x+8 > 0$, δηλαδή στο διάστημα $(-4, +\infty)$.

$|x-2| < 2x+8 \Leftrightarrow -(2x+8) < x-2 < 2x+8 \Leftrightarrow -2x-8 < x-2 < 2x+8 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x-8 < x-2 \\ \text{και} \\ x-2 < 2x+8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -8+2 < x+2x \\ \text{και} \\ -2-8 < 2x-x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -6 < 3x \\ \text{και} \\ -10 < x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2 < x \\ \text{και} \\ -10 < x \end{array} \right\} \Leftrightarrow -2 < x$

Το διάστημα των λύσεων είναι το $(-2, +\infty)$.

Εννοείται ότι θα μπορούσαμε και εδώ να λύσουμε, χρησιμοποιώντας τον πίνακα.