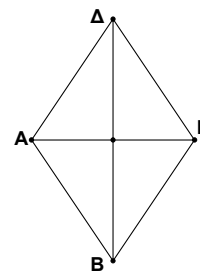


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Καθεμία από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το γράμμα Σ, αν είναι λάθος κυκλώστε το Λ.

- (i). $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$ ☐ Σ ☐ Λ (ii). $\vec{AB} = \vec{B\Delta}$ ☐ Σ ☐ Λ
- (iii). $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$ ☐ Σ ☐ Λ (iv). $|\vec{AB}| = |\vec{\Delta\Gamma}|$ ☐ Σ ☐ Λ
- (v). $\vec{AB} = \vec{A\Delta}$ ☐ Σ ☐ Λ (vi). $|\vec{AB}| = |\vec{B\Gamma}|$ ☐ Σ ☐ Λ

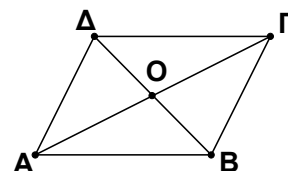


2. Αν Α, Β, Γ και Δ είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- (i) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ (vi) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} - \vec{B\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta B} = \vec{AB}$
- (ii) $\vec{AB} - \vec{\Delta B} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{A\Delta}$ (vii) $\vec{\Gamma B} + \vec{B\Delta} - \vec{A\Delta} = \vec{\Gamma B} + \vec{B\Delta} + \vec{\Delta A} = \vec{\Gamma A}$
- (iii) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta}$ (viii) $\vec{A\Delta} + \vec{\Delta B} + \vec{B A} = \vec{AA} = \vec{0}$
- (iv) $\vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} = \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Gamma}$ (ix) $\vec{AB} + \vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{A\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{AA} = \vec{0}$
- (v) $\vec{AB} - \vec{\Delta B} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma}$

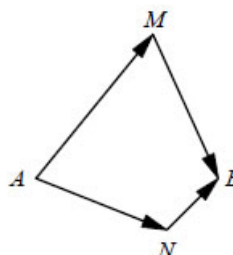
3. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- (i) $2\vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{AB} + \vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma}$
- (ii) $\frac{1}{2}\vec{A\Gamma} + \frac{1}{2}\vec{\Delta B} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$
- (iii) $\vec{A\Gamma} + \vec{AO} - \vec{GO} = \vec{A\Gamma} + \vec{AO} + \vec{OG} = \vec{A\Gamma} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{A\Gamma}$
- (iv) $2\vec{A\Gamma} - \vec{B\Gamma} - 2\vec{AB} = 2\vec{A\Gamma} - 2\vec{AB} - \vec{B\Gamma} = 2(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) - \vec{B\Gamma} = 2\vec{B\Gamma} - \vec{B\Gamma} = \vec{B\Gamma}$
- (v) $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{A\Gamma}$



4. Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

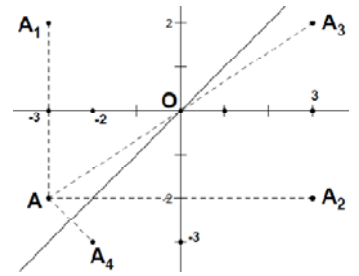
- (i) $|\vec{AM} + \vec{MB}| > |\vec{AN} + \vec{NB}|$
- ☒ (ii) $|\vec{AM} + \vec{MB}| = |\vec{AB}| = |\vec{AN} + \vec{NB}|$
- (iii) $|\vec{AM} + \vec{MB}| < |\vec{AN} + \vec{NB}|$



5. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο δίνεται το σημείο $A(-3,-2)$.

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

- (i) Συμμετρικό του A ως προς τον x' : $A_1(-3,2)$
(ii) Συμμετρικό του A ως προς τον $y'y$: $A_2(3,-2)$
(iii) Συμμετρικό του A ως προς την αρχή O : $A_3(3,2)$
(iv) Συμμετρικό του A ως προς την διχοτόμο της xOy : $A_4(-2,-3)$



6. Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$, $B(6,5)$, $\Gamma(-4,-2)$, $\Delta(3,-3)$ και $E(-3,5)$. Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε διάνυσμα της πρώτης στήλης με τις συντεταγμένες του στη δεύτερη στήλη.

Διάνυσμα	Συντεταγμένες διανύσματος
$\vec{AB} = (6-3, 5-1)$	$(3,4)$
$\vec{A\Gamma} = (-4-3, -2-1)$	$(-7,-3)$
$\vec{AE} = (-3-3, 5-1)$	$(-6,4)$
$\vec{A\Delta} = (3-3, -3-1)$	$(0,-4)$
$\vec{BE} = (-3-6, 5-5)$	$(-9,0)$

7. Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$, $B(-4, 5)$, $\Gamma(-3, -2)$, $\Delta(3, -4)$. Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε τμήμα της πρώτης στήλης με τις συντεταγμένες του μέσου του στη δεύτερη στήλη.

Τμήμα	Συντεταγμένες μέσου
AB	$\left(\frac{3+(-4)}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}\right)$
$B\Gamma$	$\left(\frac{(-4)+(-3)}{2}, \frac{5+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{-7}{2}, \frac{3}{2}\right)$
$\Gamma\Delta$	$\left(\frac{(-3)+3}{2}, \frac{(-2)+(-4)}{2}\right) = (0, -3)$
$A\Gamma$	$\left(\frac{(-3)+3}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right) = (0, 0)$

8. Να βάλετε σε κύκλο τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(i) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, -2)$ και τα σημεία $A(4,-1)$, $B(-2,7)$, $\Gamma(0,3)$ και $\Delta(1,5)$. Ποιο από τα διανύσματα είναι ίσο με το $\vec{\alpha}$:

1. $\vec{AB}$ 2. $\vec{A\Gamma}$ 3. $\vec{\Delta B}$ 4. $\vec{B\Delta} = (1-(-2), 5-7) = (3, -2) = \vec{\alpha}$ 5. $\vec{\Delta\Gamma}$

(ii) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, -2)$. Ποιο από τα διανύσματα είναι παράλληλο με το $\vec{\alpha}$:

1. $\vec{\beta} = (8, 4)$ 2. $\vec{\gamma} = (-4, 2)$ 3. $\vec{\delta} = (-6, 3)$ 4. $\vec{\epsilon} = (-6, 4) = (-2 \cdot 3, -2 \cdot (-2)) = -2 \cdot (3, -2) = -2 \cdot \vec{\alpha}$

Σχόλιο: Οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\varepsilon}$ είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\varepsilon}} = \frac{-2}{3}$, ενώ του $\vec{\beta}$ είναι $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{2}$ και των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ $\lambda_{\vec{\gamma}} = \lambda_{\vec{\delta}} = -\frac{1}{2}$. Έτσι, $\vec{\alpha} // \vec{\varepsilon}$ και μάλιστα $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\varepsilon}$, αφού $\vec{\varepsilon} = -2 \cdot \vec{\alpha}$, με $\lambda = -2 < 0$.

9. Δίνονται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και πλευρά α. Να βρείτε ως συνάρτηση του α τα εσωτερικά γινόμενα:

(i) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 = 0 \cdot \alpha$, αφού $\vec{AB} \perp \vec{AD}$.

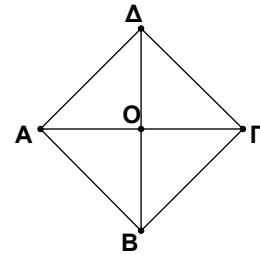
(ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AG}| \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \alpha \cdot \alpha \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha^2$

(iii) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 = 0 \cdot \alpha$, αφού $\vec{OA} \perp \vec{OB}$.

(iv) $\vec{OA} \cdot \vec{OG} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OG}| \cdot \sin \pi = \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = -\frac{\alpha^2}{2}$

(v) $\vec{AB} \cdot \vec{DG} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{AB})^2 = |\vec{AB}|^2 = \alpha^2$, αφού $\vec{AB} = \vec{DG}$.

(vi) $\vec{AB} \cdot \vec{GD} = \vec{AB} \cdot (-\vec{DG}) = -(\vec{AB} \cdot \vec{DG}) = -(\vec{AB} \cdot \vec{AB}) = -(\vec{AB})^2 = -|\vec{AB}|^2 = -\alpha^2$, αφού $\vec{AB} = \vec{DG}$.



Σχόλιο: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $(AG)^2 = \alpha^2 + \alpha^2$, άρα $(AG)^2 = 2\alpha^2$

και επομένως $(AG) = \alpha\sqrt{2}$. Έτσι, $(OA) = \frac{(AG)}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

10. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ έχουν μέτρα 2 και 3 αντιστοίχως. Να βρείτε το γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$, αν η γωνία των διανυσμάτων αυτών είναι:

(i) 0° : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 0^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$

(ii) 30° : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

(iii) 60° : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

(iv) 90° : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0$, $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$

(v) 120° : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 120^\circ = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot (-\sin 60^\circ) = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$

(vi) 150° : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 150^\circ = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot (-\sin 30^\circ) = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

(vii) 180° : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 180^\circ = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$

11. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

Αν $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ και $\vec{u} \neq \vec{0}$, τότε: Α. $\vec{v} = \vec{w}$, Β. $\vec{v} // \vec{w}$, Γ. $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} - \vec{w}}$, Δ. $\vec{u} \perp \vec{v} + \vec{w}$

Αιτιολόγηση: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$

12. Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε ζεύγος διανυσμάτων της πρώτης στήλης με το είδος της γωνίας τους που αναφέρονται στη δεύτερη στήλη.

Διανύσματα	Γωνία
$\vec{u} = (7, 5), \vec{v} = (-1, 2): \vec{u} \cdot \vec{v} = 7 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = -7 + 10 = 3 > 0 \Rightarrow \sin \vartheta > 0$	$\vartheta < 90^\circ$ (οξεία)
$\vec{u} = (-3, 4), \vec{v} = (2, -1): \vec{u} \cdot \vec{v} = (-3) \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -6 + (-4) = -10 < 0 \Rightarrow \sin \vartheta < 0$	$\vartheta > 90^\circ$ (αμβλεία)
$\vec{u} = (3, 5), \vec{v} = (6, 0): \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 18 + 0 = 18 > 0 \Rightarrow \sin \vartheta > 0$	$\vartheta < 90^\circ$ (οξεία)
$\vec{u} = (0, -1), \vec{v} = (-5, 4): \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot (-5) + (-1) \cdot 4 = 0 + (-4) = -4 < 0 \Rightarrow \sin \vartheta < 0$	$\vartheta > 90^\circ$ (αμβλεία)
$\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (3, 2): \vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \sin \vartheta = 0$	$\vartheta = 90^\circ$ (ορθή)
$\vec{u} = (\kappa, \lambda), \vec{v} = (-\lambda, \kappa): \vec{u} \cdot \vec{v} = \kappa \cdot (-\lambda) + \lambda \cdot \kappa = -\kappa\lambda + \lambda\kappa = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$	$\vartheta = 90^\circ$ (ορθή)

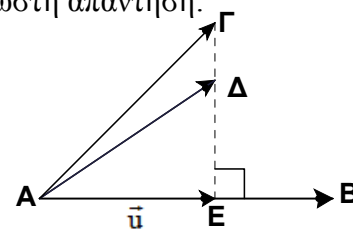
Σχόλιο: Στο τελευταίο, απαντήσαμε ορθή, αφού η απάντηση αυτή βρίσκεται στην «τομή» των ενδεχομένων. Συγκεκριμένα, αν $\kappa = \lambda = 0$, τότε $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$ και σα γωνία τους, μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε γωνία και επομένως και η ορθή. Σε κάθε άλλη περίπτωση η γωνία τους είναι η ορθή.

13. Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

(i) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} > \vec{AB} \cdot \vec{AG}$

(ii) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} < \vec{AB} \cdot \vec{AG}$

(iii) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AG}$



Αιτιολόγηση: Προφανώς τα $\vec{AD}, \vec{AG}$ έχουν την ίδια προβολή $\vec{u}$, πάνω στο $\vec{AB}$, και επομένως θα έχουμε:

$$\vec{AE} = \vec{u} = \text{προβ}_{\vec{AB}} \vec{AD} = \text{προβ}_{\vec{AB}} \vec{AG}. \quad \text{Έτσι, } \boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{u} = \vec{AB} \cdot \vec{AG}}.$$