

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Σε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να κυκλώσετε το Α, αν είναι αληθής, και το Ψ, αν είναι ψευδής:

- Η ευθεία $y = -3x + 5$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα xx'

Α ☐ Ψ

Αιτιολόγηση: Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = -3 < 0$, επομένως η εφαπτομένη της γωνίας είναι αρνητική και συνεπώς η γωνία είναι αμβλεία.

- Οι ευθείες $x = 5$ και $y = -2$ είναι κάθετες.

Α ☐ Ψ

Αιτιολόγηση: Η ευθεία $x = 5$ είναι κάθετη στον άξονα xx' και επομένως είναι κάθετη και στην $y = -2$ που είναι παράλληλη στον άξονα xx' .

- Η εξίσωση $(\alpha + 1)x + (\alpha^2 - 1)y + 10 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνει πάντοτε ευθεία

Α ☐ Ψ

Αιτιολόγηση: Για $\alpha = -1$, προκύπτει η εξίσωση $0 \cdot x + 0 \cdot y + 10 = 0$, που προφανώς δεν είναι εξίσωση ευθείας.

- Η ευθεία $3x + 4y - 1 = 0$ δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Α ☐ Ψ

Αιτιολόγηση: Η εξίσωση δεν επαληθεύεται από το $O(0,0)$, αφού $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 1 = 0$ είναι λάθος ή αλλιώς: «επειδή ο σταθερός όρος της εξίσωσης δεν είναι 0».

- Η εξίσωση $y - 2 = \lambda(x - 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(3,2)$

Α ☐ Ψ

Αιτιολόγηση: Η ευθεία $x = 3$ που προφανώς διέρχεται από το $A(3,2)$, δεν «παράγεται» από την εξίσωση, αφού δεν ορίζεται γι αυτήν συντελεστής διεύθυνσης.

2. Να αντιστοιχίσετε κάθε σημείο της πρώτης στήλης στην ευθεία της δεύτερης στήλης στην οποία ανήκει:

Αιτιολόγηση: Στην ευθεία $x = 2$, ανήκουν τα σημεία που έχουν τετμημένη 2.

Στην ευθεία $y = 3$, ανήκουν τα σημεία που έχουν τεταγμένη

3.

Το $E(0,0)$ ανήκει στην ευθεία $3x - 2y = 0$ που έχει σταθερό όρο το 0.

Γενικά, για να ανήκει ένα σημείο σε μια ευθεία θα πρέπει να επαληθεύει την εξίσωσή της.

Σημείο	Ευθεία
A(2,1)	$x = 2$
B(2,3)	$y = 3$ και $x = 2$ και $3x - 2y = 0$
Γ(1,2)	$2x - 5y = -8$
Δ(0,3)	$y = 3$
E(0,0)	$3x - 2y = 0$
Z(2,8)	$x = 2$

3. Να κυκλώσετε τη σωστή, κάθε φορά, απάντηση:

- Οι ευθείες $2x - y - 4 = 0$ και $x - 3y + 3 = 0$ τέμνονται στο σημείο:

$O(0,0)$ $A(2,0)$ $B(0,1)$ ☐ $\Gamma(3,2)$ $\Delta(1,1)$

Εύρεση: (1) Με επαλήθευση, (2) με την επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων.

Σχόλιο: Το $O(0,0)$ δεν επαληθεύει καμία αφού και οι δύο έχουν σταθερό όρο διάφορο του μηδενός.

Το $A(2,0)$ δεν επαληθεύει τη δεύτερη αφού ένας άρτιος δε μπορεί να είναι ίσος με ένα περιττό, και ομοίως το $B(0,1)$ δεν επαληθεύει την πρώτη. Το $\Delta(1,1)$ δεν επαληθεύει την δεύτερη, αφού η διαφορά δύο περιττών είναι άρτιος και την πρώτη, αφού η διαφορά ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός.

- Αν η ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης, τότε συμπεραίνουμε ότι:

$\Gamma = 0$ $A \neq 0$ ☐ $B \neq 0$ $A = 0$

Αιτιολόγηση: Αν $B = 0$, τότε $\varepsilon \perp xx'$ και δε θα ορίζεται γι' αυτήν συντελεστής διεύθυνσης. (ΑΤΟΠΟ)

- Μια ευθεία κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = x$ είναι η:

$$y = x + 5 \quad y = 2 \quad \boxed{x + y = 8} \quad y = -2x \quad x = -1$$

Αιτιολόγηση: Έχουμε $\lambda_\varepsilon = 1$ και επειδή $x + y = 8 \Leftrightarrow y = -x + 8$, η ευθεία $\delta : x + y = 8$ έχει $\lambda_\delta = -1$.

Έτσι, $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = 1 \cdot (-1) = -1$ και επομένως $\varepsilon \perp \delta$.

4. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = 3x + 8$. Να γράψετε:

- Δύο ευθείες παράλληλες στην ε .

$$\varepsilon_1 : y = 3x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = 3x + 1$$

Αιτιολόγηση: Χρησιμοποιήσαμε τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ε , που είναι $\lambda_\varepsilon = 3$.

Για σταθερό όρο θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει οποιονδήποτε άλλο αριθμό.

- Δύο ευθείες κάθετες στην ε .

$$\varepsilon_3 : y = -\frac{1}{3}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_4 : y = -\frac{1}{3}x + 1$$

Αιτιολόγηση: Χρησιμοποιήσαμε τον αντίθετο του αντίστροφου του συντελεστή διεύθυνσης της ε .

Για σταθερό όρο θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει οποιονδήποτε άλλο αριθμό.

- Την ευθεία την παράλληλη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων: $\boxed{\varepsilon_1 : y = 3x}$

Αιτιολόγηση: Χρησιμοποιήσαμε, ίδιο με την ε συντελεστή διεύθυνσης και για σταθερό όρο το 0.

- Την ευθεία την κάθετη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων: $\boxed{\varepsilon_3 : y = -\frac{1}{3}x}$

Αιτιολόγηση: Χρησιμοποιήσαμε, τον αντίθετο του αντίστροφου του συντελεστή διεύθυνσης της ε και για σταθερό όρο το 0.

5. Να κυκλώσετε την ευθεία που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων

$$\bullet \varepsilon_1 : 3x - 10y - 1 = 0 \quad \bullet \varepsilon_2 : 3x - 10y - 6 = 0$$

$$\bullet \boxed{\varepsilon_3 : 3x - 10y - 9 = 0} \quad \bullet \varepsilon_4 : 3x - 10y + 6 = 0$$

Αιτιολόγηση: (1) Και οι τέσσερις ευθείες, έχουν τα ίδια A και B και διαφέρουν μόνο στο Γ , και επειδή για

$$\text{το } O(0,0), \text{ έχουμε } d(O, \varepsilon) = \frac{|A \cdot 0 + B \cdot 0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των}$$

αξόνων έχει η ε_3 , αφού αυτή έχει το Γ με το μεγαλύτερο μέτρο.

(2) Προφανώς, και οι τέσσερις ευθείες σχηματίζουν με τους άξονες ορθογώνια τρίγωνα. Τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια, επειδή οι ευθείες μας έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Είναι λογικό, αφού όλες έχουν το ίδιο B , η ευθεία που έχει την εξίσωση με το μεγαλύτερο μέτρο σταθερού όρου, να «δίνει» τρίγωνο με τις μεγαλύτερες πλευρές και επομένως με το μεγαλύτερο ύψος προς την υποτείνουσα.

6. Οι ευθείες $\varepsilon : 2x + y + 2 = 0$ και $\delta : 2x - y + 2 = 0$, είναι:

A. Παράλληλες

B. Κάθετες

$\boxed{\Gamma}$. Συμμετρικές ως προς τον άξονα xx'

Δ . Συμμετρικές ως προς τον άξονα yy'

Αιτιολόγηση: $\delta : 2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 2x + 2}$ και $\varepsilon : 2x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2 \Leftrightarrow \boxed{y = -(2x + 2)}$,

και επομένως για κάθε x έχουν αντίθετα y . (Τα σημεία με την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα xx' .)

Σχόλιο: Οι συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών, είναι $\lambda_\delta = 2$ και $\lambda_\varepsilon = -2$.

Επομένως, $\lambda_\delta \neq \lambda_\varepsilon \Rightarrow \delta \not\parallel \varepsilon$ και $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = 2 \cdot (-2) = -4 \neq -1 \Rightarrow \delta \not\perp \varepsilon$.