

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η ανίσωση $-x^2 + 2x + \gamma \geq 0$ είναι αδύνατη τότε:

A) $\gamma > -1$

B) $\gamma = -1$

Γ) $\gamma < -1$

Δ) $\gamma \geq -1$

Αιτιολόγηση: Αφού η ανίσωση είναι αδύνατη, επομένως «πάντα» αληθεύει η $-x^2 + 2x + \gamma < 0$, δηλαδή το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $-x^2 + 2x + \gamma$ είναι «πάντα» ομόσημο του $\alpha = -1$ και συνεπώς $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \gamma < 0$. Έτσι, $2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \gamma < 0 \Leftrightarrow 4 + 4\gamma < 0 \Leftrightarrow 4\gamma < -4 \Leftrightarrow \gamma < -1$.

Σχόλιο: Το «πάντα» σημαίνει «σε όλο το $\mathbb{R}$ », δηλαδή «για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ».

2. Αν η ανίσωση $x^2 - 2x + \gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

A) $\gamma < 1$

B) $\gamma = 1$

Γ) $\gamma > 1$

Δ) $\gamma \leq 1$

Αιτιολόγηση: Αφού η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $x^2 - 2x + \gamma$ είναι «πάντα» ομόσημο του $\alpha = 1$ και συνεπώς $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma < 0$.

Έτσι, $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma < 0 \Leftrightarrow 4 - 4\gamma < 0 \Leftrightarrow 4 < 4\gamma \Leftrightarrow 1 < \gamma \Leftrightarrow \gamma > 1$.

3. Αν η ανίσωση $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

A) $\lambda > 0$

B) $\lambda < 0$

Γ) $\lambda = 1$

Δ) $\lambda = 0$

Αιτιολόγηση: Αφού η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2$ είναι «πάντα» ή ομόσημο του $\alpha = -2$ ή **0** και συνεπώς $\Delta = (3\lambda)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-\lambda^2) \leq 0$.

Έτσι, $(3\lambda)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-\lambda^2) \leq 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 - 8\lambda^2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

4. Η εξίσωση $|x-1| + |x-5| = 4$ αληθεύει αν και μόνο αν:

A) $x < 1$

B) $x > 5$

Γ) $1 \leq x \leq 5$

Δ) $1 < x < 5$

Αιτιολόγηση: Με δεδομένο ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $|(x-1) + (x-5)| \leq |x-1| + |x-5|$, τότε:

$$\begin{aligned} |x-1| + |x-5| = 4 &\Rightarrow |(x-1) + (x-5)| \leq 4 \Rightarrow |2x-6| \leq 4 \Rightarrow |2(x-3)| \leq 4 \Rightarrow 2|x-3| \leq 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x-3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow -2+3 \leq x-3+3 \leq 2+3 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης, } 1 \leq x \leq 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \\ \text{και} \\ x \leq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x-1 \\ \text{και} \\ x-5 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-1| = x-1 \\ \text{και} \\ |x-5| = -(x-5) \end{array} \right\} \Rightarrow |x-1| + |x-5| = x-1-x+5 = 4.$$

$$\text{Έτσι, } |x-1| + |x-5| = 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

Σχόλιο: (1) Το «αν και μόνο αν», δηλώνει ισοδυναμία.

(2) Επειδή $-0 = 0$, ο ορισμός της απόλυτης τιμής μπορεί να είναι και: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha \leq 0 \end{cases}$

(3) Για $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ και $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$.

5. Η εξίσωση $|x-1| = x-1$;

A) Είναι αδύνατη B) Έχει μοναδική λύση τη $x=1$ Γ) Έχει άπειρες λύσεις Δ) Είναι ταυτότητα

Αιτιολόγηση: $|x-1| = x-1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty)$. Επομένως, έχει άπειρες λύσεις.

Π. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Η ανίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 > 0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. [A] Ψ

Αιτιολόγηση: $\Delta = \lambda^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda^2 = -3\lambda^2 < 0$, αφού $\lambda \neq 0$. Επομένως το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $x^2 + \lambda x + \lambda^2$ είναι «πάντα» ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό.

2. Η ανίσωση $\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 5 \leq 0$, με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. A [Ψ]

Αιτιολόγηση: $\Delta = (4\lambda)^2 - 4 \cdot \lambda^2 \cdot 5 = -4\lambda^2 < 0$, αφού $\lambda \neq 0$. Επομένως το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 5$ είναι «πάντα» ομόσημο του $\alpha = \lambda^2 > 0$, ($\lambda \neq 0$) δηλαδή θετικό.

3. Οι ανισώσεις $x^2(x-1) \geq 0$ και $x-1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A [Ψ]

Αιτιολόγηση: Η $x^2(x-1) \geq 0$ δέχεται προφανή λύση το **0**, κάτι που δε συμβαίνει με την $x-1 \geq 0$.

4. Οι ανισώσεις $x^2(x-1) \leq 0$ και $x-1 \leq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις. [A] Ψ

Αιτιολόγηση: Για $x \neq 0$, οι δύο ανισώσεις είναι ισοδύναμες, αφού από την «ιδιότητα διαγραφής του πολλαπλασιασμού» $\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma}$ έχουμε: $x-1 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{matrix} (x-1) \cdot x^2 \leq 0 \cdot x^2 \Leftrightarrow x^2(x-1) \leq 0$. Άρα οι δύο ανισώσεις είναι ισοδύναμες στο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ και επειδή δέχονται αμφότερες, σαν προφανή λύση το **0**, είναι ισοδύναμες στο $\mathbb{R}$, δηλαδή έχουν τις ίδιες λύσεις.

Παρατήρηση: Οι ερωτήσεις (Α-Ψ) που ακολουθούν, προορίζονταν για την §4.3, που όμως είναι «εκτός ύλης» για τη σχολική χρονιά 2014-15. Θα τις απαντήσουμε με τις δικές μας γνώσεις.

5. Οι ανισώσεις $\frac{2x-1}{x+1} > 1$ και $2x-1 > x+1$ έχουν τις ίδιες λύσεις. A [Ψ]

Αιτιολόγηση: $2x-1 > x+1 \Leftrightarrow 2x-x > 1+1 \Leftrightarrow x > 2$. Σύνολο λύσεων: $\boxed{(2, +\infty)}$

Η $\frac{2x-1}{x+1} > 1$ έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-1\}$, αφού $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Θα αναζητήσουμε λύσεις χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$.

(i) Στο $(-\infty, -1)$ όπου $x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0$: (Θα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $x+1 < 0$)

$\frac{2x-1}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} \cdot (x+1) < 1 \cdot (x+1) \Leftrightarrow 2x-1 < x+1 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x < -1 \\ x < -1 \end{matrix}$ Σύνολο λύσεων: $(-\infty, -1)$

(ii) Στο $(-1, +\infty)$, όπου $x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0$: (Θα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $x+1 > 0$)

$\frac{2x-1}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} \cdot (x+1) > 1 \cdot (x+1) \Leftrightarrow 2x-1 > x+1 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > -1 \\ x > 2 \end{matrix}$ Σύνολο λύσεων: $(2, +\infty)$

Άρα η $\frac{2x-1}{x+1} > 1$ στο $\mathbb{R} - \{-1\}$, έχει σύνολο λύσεων: $\boxed{(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}$

Σχόλια: (1) Θα μπορούσαμε να είχαμε σταματήσει στο βήμα (i), αφού ήδη εκεί διαπιστώσαμε λύσεις της μιας, που δεν ήταν λύσεις της άλλης. Όμως συνεχίσαμε, για να δούμε πλήρως αυτή τη λύση.

(2) Είχαμε την ελπίδα, μήπως ο αριθμός -1, που δε μπορεί να είναι λύση για την πρώτη, αφού δεν ανήκει στο σύνολο ορισμού της, είναι λύση για τη δεύτερη, αλλά ατυχήσαμε.

(3) Στα βήματα (i) και (ii) το σύνολο λύσεων, εννοείται ότι βρέθηκε με «συναλήθευση», αφού δε νοείται λύση έξω από το σύνολο εργασίας. Έτσι, στο (i) είπαμε $\{x < -1 \text{ και } x < -1\} \Rightarrow x < -1$

και στο (ii), $\{x > 2 \text{ και } x > -1\} \Rightarrow x > 2$.

6. Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $x-1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

A Ψ

Αιτιολόγηση: Η πρώτη έχει σύνολο ορισμού $\mathbb{R} - \{2\}$, αφού $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και επομένως δε μπορεί να δεχτεί για λύση τον αριθμό 2. Η δεύτερη όμως έχει προφανή λύση το 2.

7. Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq 0$ και $(x-1)(x-2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

A Ψ

Αιτιολόγηση: Η πρώτη έχει σύνολο ορισμού $\mathbb{R} - \{2\}$, αφού $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και επομένως δε μπορεί να δεχτεί για λύση τον αριθμό 2. Η δεύτερη όμως έχει προφανή λύση το 2.

8. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$ και $(x-2)(x-1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

A Ψ

Αιτιολόγηση: Η πρώτη έχει σύνολο ορισμού $\mathbb{R} - \{1\}$, αφού $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και επομένως δε μπορεί να δεχτεί για λύση τον αριθμό 1. Η δεύτερη όμως έχει προφανή λύση το 1.

9. Οι ανισώσεις $\frac{x-2}{x-1} < 0$ και $(x-2)(x-1) < 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

Α Ψ

Αιτιολόγηση: Η $\frac{x-2}{x-1} < 0$ ορίζεται στο $\mathbb{R} - \{1\}$, αφού $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, ενώ η $(x-2)(x-1) < 0$

ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Στο $\mathbb{R} - \{1\}$ έχουμε: $\frac{x-2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} \cdot (x-1)^2 < 0 \cdot (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) < 0$

και επομένως οι δύο ανισώσεις έχουν τις ίδιες λύσεις στο $\mathbb{R} - \{1\}$, αφού είναι ισοδύναμες σε αυτό.

Επειδή $(1-2)(1-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < 0$ (Λάθος), η $(x-2)(x-1) < 0$ δεν επαληθεύεται από το 1 και

συνεπώς οι δύο ανισώσεις έχουν τις ίδιες λύσεις.

10. Οι ανισώσεις $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+2}{x+1}$ και $(x+1)^2 < (x-1)(x+1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.

A Ψ

Αιτιολόγηση: Το 0 είναι προφανής λύση για την πρώτη, ενώ προφανώς δεν επαληθεύει τη δεύτερη.

Σχόλιο: Ατυχήσαμε, ελέγχοντας μήπως η δεύτερη δέχεται λύσεις τους αριθμούς -1, 1 και αν δε μας

προέκυπτε το 0, του οποίου ο έλεγχος είναι ο ευκολότερος όλων, θα αναγκαζόμαστε να λύσουμε τις

ανισώσεις. Στην πρώτη, θα λύναμε χωριστά (με απαλοιφή παρονομαστών), στα σύνολα $(-1, 1)$ και

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, αφού στο μεν πρώτο $(x-1)(x+1) < 0$, ενώ στο δεύτερο $(x-1)(x+1) > 0$.

III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α' ομάδας με την ισοδύναμη

μορφή του από τη Β' ομάδα.

	Α' ΟΜΑΔΑ	α
1	$-2x^2 + 6x - 4$	-2
2	$x^2 - 3x + 2$	1
3	$-x^2 + 3x - 2$	-1
4	$2x^2 - 6x + 4$	2

	Β' ΟΜΑΔΑ	α
A	$(x-1)(x-2)$	1
B	$-(x-1)(x-2)$	-1
Γ	$2(x-1)(x-2)$	2
Δ	$-2(x-1)(x-2)$	-2

Α' ΟΜΑΔΑ	Β' ΟΜΑΔΑ
1	Δ
2	A
3	B
4	Γ

Αιτιολόγηση: Η προτροπή, να αντιστοιχίσουμε καθένα από τα τριώνυμα της Α' ομάδας με το ίσο του

από τη Β' ομάδα και επειδή στη Β' ομάδα έχουμε τη γνωστή μορφή $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ η δουλειά μας

είναι εύκολη, αφού μας καθοδηγεί το α. Εναλλακτικά, βρίσκουμε τις ρίζες και χρησιμοποιούμε τον

τύπο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

IV. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η ανίσωση $(2x-6)(x-1) > 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(2x-6)(x-1) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-6 > 0 \\ \text{και} \\ x-1 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ \text{και} \\ x > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > 3$$

Όμως ο αριθμός **0**, αν και είναι μικρότερος του **3**, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

Εντοπισμός λάθους: Λάθος είναι η πρώτη ισοδυναμία. Γινόμενο θετικό, σημαίνει ότι οι δυο παράγοντες είναι ομόσημοι, δηλαδή ή και οι δύο θετικοί, ή και οι δύο αρνητικοί.

$$\text{Το σωστό είναι } (2x-6)(x-1) > 0 \Leftrightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{l} 2x-6 > 0 \\ \text{και} \\ x-1 > 0 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} 2x-6 < 0 \\ \text{και} \\ x-1 < 0 \end{array} \right\} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ \text{και} \\ x > 1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ \text{και} \\ x < 1 \end{array} \right\} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 3 \\ \text{ή} \\ x < 1 \end{array} \right\}$$

Σχόλιο: Η λύση για ανισώσεις σαν την $(2x-6)(x-1) > 0$ είναι απλή. Στη μορφή $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, φαίνονται αμέσως οι ρίζες. $(2x-6)(x-1) > 0 \Leftrightarrow 2(x-3)(x-1) > 0 \Leftrightarrow \{x < 1 \text{ ή } x > 3\}$ Έτσι και εμείς είπαμε: «Το δευτεροβάθμιο τριώνυμο γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha = 2$, εκτός των ριζών».

2. Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$ γράφεται ισοδύναμα: $x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

Όμως ο αριθμός **-1**, αν και είναι μεταξύ του **-2** και του **2**, δεν επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

Εντοπισμός λάθους: Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$ έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}^*$, ενώ η ισοδυναμία που ακολουθεί, απαιτεί $x > 0$. Το λάθος λοιπόν εντοπίζεται, στον ισχυρισμό: «γράφεται ισοδύναμα».

Σχόλιο: Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$, λύνεται εύκολα με γνώσεις της §4.3 που όμως είναι «εκτός ύλης» για τη σχολική χρονιά 2014-15. Ας δούμε όμως μια λύση με τις δικές μας γνώσεις.

Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$ έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Θα βρούμε τις λύσεις της, χωριστά

σε κάθε διάστημα: (1) Για $x \in (-\infty, 0)$, έχουμε: $x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x \cdot x > \frac{4}{x} \cdot x \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{x < -2 \text{ ή } x > 2\} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} x < -2 \text{ (εκτός των ριζών)} \text{ και έτσι για τις λύσεις ισχύει } \boxed{x \in (-\infty, -2]}.$$

(2) Για $x \in (0, +\infty)$, έχουμε: $x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x \cdot x < \frac{4}{x} \cdot x \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 2$

(εντός των ριζών) και έτσι για τις λύσεις ισχύει $\boxed{x \in (0, 2)}$.

Έτσι, το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $x < \frac{4}{x}$, είναι το $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

3. Η ανίσωση $(x+2)^2(x-1) \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα: $(x+2)^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Όμως ο αριθμός **-2**, αν και είναι μικρότερος του **1**, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση.

Εντοπισμός λάθους: Η ανίσωση $(x+2)^2(x-1) \geq 0$ έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$, ενώ η ισοδυναμία που ακολουθεί, απαιτεί $x+2 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -2$, για να εξασφαλίζεται ότι $(x+2)^2 > 0$, έτσι ώστε να μην αλλάξει η φορά της ανίσωσης, διαιρώντας και τα δύο μέλη με αυτό.

Το λάθος λοιπόν εντοπίζεται, στον ισχυρισμό: «γράφεται ισοδύναμα».