

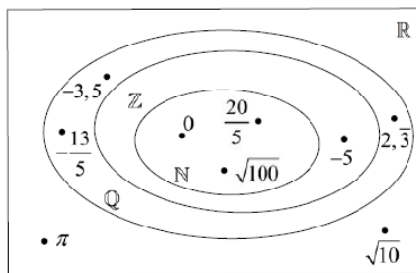
Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1.1. Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο "ν" εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.
2. Πως ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής ;
3. Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ και να τοποθετήσετε σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.

	-3,5	0	$\sqrt{10}$	$-\frac{13}{5}$	π	$2,\bar{3}$	$\frac{20}{5}$	$\sqrt{100}$	-5
$\mathbb{N}$		ν					ν	ν	
$\mathbb{Z}$		ν					ν	ν	ν
$\mathbb{Q}$	ν	ν		ν		ν	ν	ν	ν
$\mathbb{R}$	ν	ν	ν	ν	ν	ν	ν	ν	ν

Οι αριθμοί της τελευταίας γραμμής ονομάζονται πραγματικοί.



$$\frac{20}{5} = 4 \in \mathbb{N} \text{ και } \sqrt{100} = 10 \in \mathbb{N}$$

$$-3,5 = -\frac{35}{10} \in \mathbb{Q} \text{ και } 2,\bar{3} = 2 + 0,\bar{3} = 2 + \frac{3}{9} =$$

$$= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$$

$$2,\bar{3} = 2,3333\ldots$$

Οι $\pi = 3,141592653589\ldots$ και $\sqrt{10} = 3,162277660168\ldots$ έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία και δεν είναι περιοδικοί. Δεν είναι ρητοί και ανήκουν στο σύνολο των αρρήτων $\mathbb{Q}'$. Αυτό αποδεικνύεται, ξεφεύγει όμως από τις δικές μας ικανότητες και προτεραιότητες.

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 16\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ διαιρέτης του } 24\}$, τότε:

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16\} \text{ και } B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \quad * \quad \boxed{16 = 2^4 \text{ και } 24 = 2^3 \cdot 3}$$

$$\alpha) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\} \quad \beta) A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$$

Σχόλιο: Κάθε φυσικός αριθμός, εκτός του μηδενός, έχει «εξασφαλισμένους» διαιρέτες, τον εαυτό του και τη μονάδα. Αν έχει μόνο αυτούς, και είναι διαφορετικοί, λέγεται **πρώτος**. Έτσι, οι φυσικοί αριθμοί, είναι οι **πρώτοι**, οι **0, 1** και οι υπόλοιποι που λέγονται **σύνθετοι**.

*Για να βρω τους διαιρέτες ενός **σύνθετου**, τον αναλύω σε γινόμενο «πρώτων παραγόντων».

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του

$$A = \{x \in \Omega \mid x \text{ φωνήεν}\} \text{ και } B = \{x \in \Omega \mid x \text{ σύμφωνο}\}. \text{ Τότε :}$$

$$\alpha) A \cup B = \Omega, \quad \beta) A \cap B = \emptyset, \quad \gamma) A' = B, \quad \delta) B' = A.$$

Σχόλιο: Οι παραπάνω διαπιστώσεις στη γλώσσα των Μαθηματικών, «λένε» αυτό που γνωρίζουμε. Ότι δηλαδή το ελληνικό αλφάβητο αποτελείται από σύμφωνα και φωνήεντα, ότι δε μπορεί ένα σύμφωνο να είναι και φωνήεν και συνεπώς το γράμμα που δεν είναι φωνήεν είναι σύμφωνο και αυτό που δεν είναι σύμφωνο είναι φωνήεν.

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλους τις σωστές απαντήσεις :

1. Έστω δύο σύνολα A και B . Τότε :

α) $A \subseteq A \cap B$

β) $B \subseteq A \cap B$

γ) $A \cap B \subseteq A$ (σωστό)

δ) $A \cap B \subseteq B$ (σωστό)

2. Έστω δύο σύνολα A και B . Τότε :

α) $A \subseteq A \cup B$ (σωστό)

β) $B \subseteq A \cup B$ (σωστό)

γ) $A \cup B \subseteq A$

δ) $A \cup B \subseteq B$

Σχόλια: (1) Τα 1.(γ) και 1.(δ) είναι πάντα σωστά, αφού τα στοιχεία της τομής, τα κοινά δηλαδή στοιχεία, προφανώς ανήκουν πάντα και στα δύο σύνολα.

Τα 2.(α) και 2.(β) είναι πάντα σωστά, αφού τα στοιχεία κάθε συνόλου, προφανώς ανήκουν πάντα στην ένωσή του με οποιοδήποτε άλλο σύνολο.

(2) Χαρακτηρίζοντας (λάθος) τις υπόλοιπες περιπτώσεις, κάνουμε κάτι που δε μας ζήτησαν. Αυτό, σε εξετάσεις, μπορεί μόνο να μας ζημιώσει.

(3) Όταν λέμε «έστω δύο σύνολα A και B », προφανώς εννοούμε δυο οποιαδήποτε σύνολα, και συνεπώς μια σχέση που τα αφορά, για να χαρακτηριστεί «σωστή», θα πρέπει να ισχύει πάντα, δηλαδή για κάθε ζευγάρι συνόλων A, B .

Ας δούμε λοιπόν, μια διατύπωση που βοηθά στην κατανόηση του θέματος.

- Χαρακτηρίστε με σωστό ή λάθος την παρακάτω πρόταση:

«Για κάθε ζευγάρι συνόλων A, B , ισχύει η σχέση $A \subseteq A \cap B$ » (λάθος)

Αιτιολόγηση: Λάθος, αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι συνόλων A, B , για το οποίο δεν ισχύει η σχέση $A \subseteq A \cap B$ και είναι π.χ. τα σύνολα της ερώτησης (II. 1.).

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \text{ και } A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}.$$

IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, $\emptyset$ το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$. Τότε :

α) $\emptyset' = \Omega$

β) $\Omega' = \emptyset$

γ) $(A')' = A$

2. Έστω $A \subseteq B$. Τότε :

α) $A \cap B = A$

Απόδειξη: Αφού $A \subseteq B$, επομένως «κάθε $x \in A$, σίγουρα ανήκει και στο B »

➤ Έστω $x \in A$, τότε $x \in B$, (αφού $A \subseteq B$) και επομένως $x \in A \cap B$.

Αφού για το τυχαίο $x \in A$, ισχύει και $x \in A \cap B$, επομένως για κάθε $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$ και συνεπώς $A \subseteq A \cap B$.

➤ Έστω $x \in A \cap B$, τότε $\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \text{και} \\ x \in B \end{array} \right\}$ και επομένως $x \in A$.

Αφού για το τυχαίο $x \in A \cap B$, ισχύει και $x \in A$, επομένως για κάθε $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ και συνεπώς $A \cap B \subseteq A$.

Έτσι, $A \subseteq A \cap B$ και $A \cap B \subseteq A$ και επομένως $A \cap B = A$.

β) $A \cup B = B$

Σχόλιο: Αξίζει τον κόπο, με την ίδια διαδικασία, να κάνετε την απόδειξη του (β).