

Μαθηματική Λογική και Απόδειξη

Σύντομο ιστορικό σημείωμα:

- Η πρώτη απόδειξη στην ιστορία των μαθηματικών, αποδίδεται στο Θαλή το Μιλήσιο (~600 π.χ.).
- Ο Θαλής απέδειξε, ότι η διάμετρος διαιρεί τον κύκλο σε δυο ίσα τμήματα.
 - Ο πρώτος άνθρωπος που ασχολήθηκε συστηματικά με τη **Λογική** και διατύπωσε κανόνες **απόδειξης**, ήταν ο **Αριστοτέλης** (384-322 π.χ.).
 - Αυτός που αξιοποίησε τη διδασκαλία του **Αριστοτέλη**, κάνοντας **αποδείξεις** στα μαθηματικά, ήταν ο **Ευκλείδης** (~350 π.χ.).
- Ο **Ευκλείδης**, όταν τελείωνε μια απόδειξη, έγραφε: «**ὅπερ ἔδει δείξαι**», δηλαδή, «αυτό που έπρεπε να αποδειχθεί (εννοείται) αποδείχθηκε».
- Ο πρώτος που κατάλαβε πόσο σημαντική ήταν η εισαγωγή **συμβολισμού**, στην παρουσίαση μιας **λογικής διαδικασίας**, ήταν ο **G. Leibniz** (1646-1716).
- Θεμελιωτές της «Συμβολικής» ή «Τυπικής» ή «**Μαθηματικής**» **Λογικής**, θεωρούνται οι **A. De Morgan** (1806-1871) και **G. Boole** (1815-1864).
- Τέλος, από τους νεότερους, ξεχωρίζουν οι:
G. Frege (1848-1925), **B. Russel** (1872-1970) και **K. Gödel** (1906-1978).

Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής:

- α) Λογική Πρόταση ή σκέτο **Πρόταση**, είναι κάθε δήλωση (διατύπωση), που μπορεί (δύναται) να χαρακτηριστεί αληθής (**A**) ή ψευδής (**Ψ**).
Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε, αντί για το αληθές (**A**), το σωστό (**Σ**), και αντί για το ψευδές (**Ψ**), το λάθος (**Λ**), προκειμένου να εξυπηρετήσουμε καλύτερα τους διδακτικούς μας στόχους.
Συνηθισμένα σύμβολα (ονόματα) προτάσεων είναι τα: **p, q, r, s, ...**

Παραδείγματα:

1. Η **p**: «ο 4 είναι περιττός αριθμός»,
είναι πρόταση, αφού μπορεί να χαρακτηριστεί (**Λ**).
2. Η **q**: «ο 1728841 είναι πρώτος αριθμός»,
είναι πρόταση, αφού **δύναται** να χαρακτηριστεί (**Σ**) ή (**Λ**).
Ασφαλώς, δυσκολευόμαστε να απαντήσουμε αν ταιριάζει το (**Σ**) ή (**Λ**), αν και γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο τη μέθοδο «κόσκινο του Έρατοσθένη». Όμως, δεν θα πρέπει να μπερδέψουμε τη δικιά μας δυσκολία ή αδυναμία, με το **δύναται**, που σημαίνει «η ανθρωπότητα δύναται».
3. Η **r**: «Πάντα **υπάρχει** στον κόσμο άνθρωπος, τέτοιος, που κανείς άνθρωπος δεν έχει περισσότερες τρίχες από αυτόν».
Προφανώς η (**r**) είναι πρόταση και μάλιστα σωστή (**Σ**).

Σημαντικό:

- Στα λεγόμενα «**Θεωρήματα Ύπαρξης**», αποδεικνύουμε την ύπαρξη Μαθηματικών «αντικειμένων», χωρίς να εξασφαλίζομαστε ότι θα «δούμε» τα αντικείμενα αυτά.
4. Η **s**: «ο x είναι μεγαλύτερος του 3» δεν είναι πρόταση, αφού δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε (**Σ**) ούτε (**Λ**).

- β) Ανοικτή πρόταση ή **Προτασιακός τύπος**, είναι μια δήλωση (διατύπωση), η οποία εξαρτάται από **μεταβλητές**, οι οποίες παίρνουν τιμές από ένα **σύνολο αναφοράς**, παράγοντας προτάσεις.
Ο **s(x)**: «ο x είναι μεγαλύτερος του 3», με **σύνολο αναφοράς** το **R**, είναι **προτασιακός τύπος**, και παράγει προτάσεις, κάθε φορά που ο x παίρνει μια τιμή από το σύνολο αναφοράς.
Έτσι για $x=1$, η **s(1)**: «ο 1 είναι μεγαλύτερος του 3», είναι πρόταση και μάλιστα (**Λ**).
Το $(3, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται **σύνολο αληθείας** του **s(x)**, αφού για κάθε $x \in (3, +\infty)$, προκύπτει πρόταση (**Σ**).

γ) Προτασιακοί **σύνδεσμοι**, λέγονται οι:

- (a) «και» σύζευξη, με σύμβολο ($\wedge$)
- (b) «είτε» διάζευξη, με σύμβολο ($\vee$)
- (c) «όχι» άρνηση, με σύμβολο ($\neg$)
- (d) «αν ...τότε», με σύμβολο ($\Rightarrow$)
- (e) «αν και μόνο αν», με σύμβολο ($\Leftrightarrow$)

δ) Απλές και σύνθετες προτάσεις.

- ❖ Αρχική ή απλή πρόταση, λέγεται η πρόταση που δεν περιλαμβάνει συνδέσμους.
- ❖ Σύνθετη λέγεται η πρόταση που περιλαμβάνει συνδέσμους.

Πίνακες αλήθειας:

Στους πίνακες αλήθειας, βλέπουμε πώς μπορούμε να συμπεράνουμε τις τιμές αλήθειας [(Σ) ή (Λ)] μιας σύνθετης πρότασης, από τις τιμές αλήθειας των απλών προτάσεων που τη συνθέτουν.

(a) Πίνακας αληθείας για το σύνδεσμο σύζευξης «και», με σύμβολο ($\wedge$).

p	q	$p \wedge q$
Σ	Σ	Σ
Σ	Λ	Λ
Λ	Σ	Λ
Λ	Λ	Λ

Παρατηρούμε ότι αν p, q είναι δυο προτάσεις, τότε η **σύζευξή** τους $p \wedge q$, είναι σωστή (Σ), όταν και μόνο όταν και οι δυο προτάσεις είναι σωστές (Σ).

Ενώ για να είναι η $p \wedge q$ λάθος (Λ), αρκεί μία (τουλάχιστο) από τις p, q να είναι λάθος (Λ).
π.χ.: Η σύνθετη πρόταση r : « $\frac{3 < 2}{(\Lambda)} \wedge \frac{5 < 7}{(\Sigma)}$ » (Λ).

(b) Πίνακας αληθείας για το σύνδεσμο διάζευξης «είτε», με σύμβολο ($\vee$).

p	q	$p \vee q$
Σ	Σ	Σ
Σ	Λ	Σ
Λ	Σ	Σ
Λ	Λ	Λ

Παρατηρούμε ότι αν p, q είναι δυο προτάσεις, τότε η **διάζευξή** τους $p \vee q$, είναι λάθος (Λ), όταν και μόνο όταν και οι δυο προτάσεις είναι λάθος (Λ).

Ενώ για να είναι η $p \vee q$ σωστή, αρκεί μία (τουλάχιστο) από τις p, q να είναι σωστή (Σ).
π.χ.: Η σύνθετη πρόταση r : « $\frac{3 < 2}{(\Lambda)} \vee \frac{5 < 7}{(\Sigma)}$ » (Σ).

Προσοχή: Στα σχολικά βιβλία, αντί για το «είτε», χρησιμοποιείται το σύμβολο «ή».

(c) Πίνακας αληθείας για το σύνδεσμο άρνησης «όχι», με σύμβολο ($\neg$).

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
Σ	Λ	Λ
Λ	Σ	Λ

Παρατηρούμε ότι μια πρόταση p αληθεύει (Σ), «τότε και μόνο τότε» αν η άρνησή της, $\neg p$, είναι λάθος (Λ).
Ομοίως η p είναι (Λ), «τότε και μόνο τότε» αν η $\neg p$ είναι (Σ).
Συνεπώς η σύζευξή τους είναι πάντα (Λ).

Η σύζευξη μιας πρότασης p και της άρνησής της $\neg p$, λέγεται **αντίφαση**, αφού είναι (Λ), για κάθε πρόταση p .

Έτσι η ύπαρξη αντίφασης, είναι εγγύηση ύπαρξης λάθους.

Παραδείγματα:

- (a) p : «ο αριθμός 2 είναι άρτιος» (Σ), $\neg p$: «ο αριθμός 2 **δεν** είναι άρτιος» (Λ)
και επειδή όταν ένας φυσικός αριθμός δεν είναι άρτιος είναι περιττός,
μια «ισοδύναμη» έκφραση της $\neg p$ είναι η $\neg p$: «ο αριθμός 2 είναι περιττός» (Λ).
 $\neg(\neg p)$: «ο αριθμός 2 **δεν** είναι περιττός» (Σ) και ομοίως μια «ισοδύναμη»
έκφραση είναι $\neg(\neg p)$: «ο αριθμός 2 είναι άρτιος» (Σ).
Παρατηρούμε δηλαδή ότι η άρνηση της άρνησης μιας πρότασης,
«είναι» η ίδια η πρόταση.

(b) $p: \langle 3 > 12 \rangle$ (Λ)

$\neg p: \langle 3 \leq 12 \rangle$ (Σ) Παρατηρούμε ότι η πρόταση $3 \leq 12$ είναι σωστή, αφού σωστό είναι ένα από τα δύο που δηλώνει.

(c) $p: \langle 3 = 1 + 1 \rangle$ (Λ)

$\neg p: \langle 3 \neq 1 + 1 \rangle$ (Σ) Στους πραγματικούς αριθμούς η $\neg p$ γράφεται, σε «ισοδύναμη» έκφραση: $\neg p: \langle 3 < 1 + 1 \text{ ή } 3 > 1 + 1 \rangle$ (Σ).

Λογική, και αποδεικτική διαδικασία:

(d) Πίνακας αληθείας για το σύνδεσμο «αν ...τότε», με σύμβολο ($\Rightarrow$).

p	q	$p \Rightarrow q$
Σ	Σ	Σ (1)
Σ	Λ	Λ (2)
Λ	Σ	Σ (3)
Λ	Λ	Σ (4)

Παρατηρούμε ότι: (1), (2) Με **Σωστή** συνεπαγωγή,

Σωστή πρόταση p , συνεπάγεται πάντα **Σωστή** πρόταση q .

(3) Με **Σωστή** συνεπαγωγή, **Λάθος** πρόταση p ,

μπορεί να συνεπάγεται σωστή πρόταση q .

(2), (4) Με **Σωστή** συνεπαγωγή,

Λάθος πρόταση q , συνεπάγεται **μόνο από Λάθος** πρόταση p .

Ευθεία απόδειξη (συνθετική μέθοδος)

Η ευθεία απόδειξη, είναι η πλέον συνηθισμένη διαδικασία απόδειξης.

Ο εκπαιδευόμενος οφείλει να αξιοποιήσει τα δεδομένα για να αποδείξει ότι τα ζητούμενα ισχύουν (είναι σωστά).

Ξεκινώντας από την **υπόθεση** (δεδομένα) του «προβλήματος», που θεωρείται **σωστή**, και αξιοποιώντας τις γνώσεις από τη **Θεωρία**, που επίσης θεωρείται **σωστή**, κάνουμε λογικά βήματα με **σωστές συνεπαγωγές**, (που είτε η **ορθότητά** τους είναι γνωστή από τη θεωρία, είτε τις αποδεικνύουμε), καταλήγοντας στο **ζητούμενο**.

Έτσι, επειδή όπως είδαμε, με **σωστή** συνεπαγωγή, «**σωστό**» συνεπάγεται πάντα «**σωστό**», έχουμε το νόμιμο δικαίωμα να ισχυριστούμε ότι αποδείξαμε το ζητούμενο.

Άσκηση 1^η:

Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Απόδειξη: Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε⁽¹⁾ $\alpha + \beta = -\gamma$, επομένως⁽²⁾ $(\alpha + \beta)^3 = (-\gamma)^3$,

άρα⁽³⁾ $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = -\gamma^3$, δηλαδή⁽⁴⁾ $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$,

δηλαδή⁽⁵⁾ $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta(-\alpha - \beta)$ και συνεπώς⁽⁶⁾ $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Σημειώσεις: Τα «τότε», «επομένως», «άρα» και «συνεπώς» είναι συμπερασματικά και μπορούν να αντικατασταθούν από το σύμβολο της συνεπαγωγής ($\Rightarrow$).

Το «δηλαδή» δηλώνει ισοδυναμία και μπορεί να αντικατασταθεί από το σύμβολο της ισοδυναμίας ($\Leftrightarrow$) ή για «οικονομία» από το σύμβολο της συνεπαγωγής ($\Rightarrow$), αφού όπου ισχύει ισοδυναμία ισχύει και συνεπαγωγή.

Η ισοδυναμία είναι ισχυρότερη από τη συνεπαγωγή και επομένως έχουμε λιγότερες πιθανότητες να την εξασφαλίσουμε. Στην **ευθεία απόδειξη**, αρκεί συνεπαγωγή, και επομένως όποιος απαιτεί ισοδυναμία, ζητά περισσότερα από τα αναγκαία, θέτοντας σε κίνδυνο την επιτυχία της απόδειξης. Ακόμα κι όταν διαπιστώνουμε ισοδυναμία, μπορούμε να μην την καταγράψουμε αν η αιτιολόγησή της απαιτεί επιπλέον χρόνο.

Επεξηγήσεις: (1) «τότε⁽¹⁾» Σχολικό βιβλίο σελίδα 12. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + (-\gamma) = 0 + (-\gamma) \Rightarrow \alpha + \beta = -\gamma$$

(2) «επομένως⁽²⁾» Σχολικό βιβλίο σελίδα 16. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^k = \beta^k$.

(3) «άρα⁽³⁾» Έχουμε δικαίωμα να αντικαθιστούμε παραστάσεις, με άλλες που είναι εκ ταυτότητος ίσες τους.

(4) «δηλαδή⁽⁴⁾» Όπως στο (1).

(5) «δηλαδή⁽⁵⁾» Όπως στο (3). Με ταυτότητες παραγοντοποίησης.

(6) «συνεπώς⁽⁶⁾» Από την υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\alpha - \beta$ και αντικατέστησα.

Προσοχή: Η σχολαστικότητα, είχε εκπαιδευτικό χαρακτήρα, και δεν προτείνεται.

Μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο

Όταν δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι **Σωστή** η ζητούμενη πρόταση (**p**), αποδεικνύουμε ότι η άρνησή της η (**¬p**) είναι **Λάθος**.

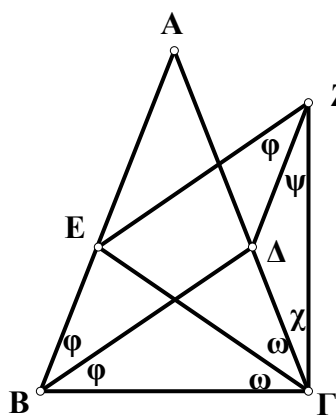
Για να αποδείξουμε ότι η (**¬p**) είναι **Λάθος**, αποδεικνύουμε ότι συνεπάγεται **Λάθος**. Όπως έχουμε δει: «**Λάθος** πρόταση q, συνεπάγεται **μόνο από Λάθος** πρόταση p». Η **αντίφαση** είναι το εμφανέστερο **Λάθος**, είναι το πλέον χαρακτηριστικό **ΑΤΟΠΟ**.

Άσκηση 2^η:

Σε τρίγωνο ABΓ, να αποδειχθεί ότι αν $\delta_\beta = \delta_\gamma$, τότε $\beta = \gamma$. ($\delta_\beta, \delta_\gamma$ διχοτόμοι)

Απόδειξη: Επειδή, με δεδομένο $\delta_\beta = \delta_\gamma$ δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\beta = \gamma$, με ευθεία απόδειξη, θα δοκιμάσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω ότι ισχύει η άρνηση του ζητούμενου, δηλαδή έστω ότι $\beta \neq \gamma$.



Στο τρίγωνο ABΓ, $AB = \gamma$, $AG = \beta$ και $BD = \delta_\beta = \delta_\gamma = GE$.

Από το E φέρνουμε παράλληλο προς την BD και από Δ φέρνουμε παράλληλο προς την AB. Οι δυο αυτές ευθείες τέμνονται στο Z.

Αφού υποθέσαμε ότι $\beta \neq \gamma$, άρα $\beta > \gamma$ ή $\beta < \gamma$.

Έστω, «χωρίς βλάβη της γενικότητας», ότι $\beta > \gamma$.

Αφού $\beta > \gamma$, άρα^(α) $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, επομένως $\frac{\hat{B}}{2} > \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

και συνεπώς $\hat{\phi} > \hat{\omega}$.

Τα τρίγωνα EΓB και ΔBΓ έχουν τη BΓ κοινή,

$GE = BD$ από την υπόθεση και $\widehat{\Delta B \Gamma} = \hat{\phi} > \hat{\omega} = \widehat{E \Gamma B}$

(δυο ζεύγη ίσων αντίστοιχων πλευρών και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες) και επομένως^(β) απέναντι από τις άνισες γωνίες, θα βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές, δηλαδή $\Gamma\Delta > BE$ (1).

Επειδή το BEZΔ είναι παραλληλόγραμμο από κατασκευής, άρα $\widehat{E \Delta Z} = \hat{\phi}$, $BE = \Delta Z$ και $EZ = BD$, και αφού $BD = EG$, άρα $EZ = EG$, δηλαδή το τρίγωνο EΓZ είναι ισοσκελές και συνεπώς $\hat{\omega} + \hat{\chi} = \hat{\phi} + \hat{\psi}$. Όμως $\hat{\phi} > \hat{\omega}$ και επομένως^(γ) $\hat{\chi} > \hat{\psi}$.

Αφού $\hat{\chi} > \hat{\psi}$, στο τρίγωνο ΔΓZ θα έχουμε^(δ) $BE = \Delta Z > \Delta \Gamma$, και άρα $BE > \Gamma\Delta$ (2).

ΑΤΟΠΟ αφού έχουμε αντίφαση: $\Gamma\Delta > BE$ (1) και^(ε) $BE > \Gamma\Delta$ (2).

Σε **ΑΤΟΠΟ** μας οδήγησε η υπόθεση $\beta \neq \gamma$. Επομένως είναι μια λαθεμένη υπόθεση και συνεπώς σωστή είναι η άρνησή της η $\beta = \gamma$. «**Όπερ ἔδει δείξαι**»

Σημειώσεις: Όταν γράφουμε «χωρίς βλάβη της γενικότητας», εννοούμε ότι αυτό που φαίνεται ειδικό, στην πραγματικότητα υπηρετεί το γενικό.

Αποφεύγουμε τέτοιες δύσκολες διατυπώσεις, εκτός και αν είμαστε σίγουροι ότι αυτό που υποθέτουμε δεν βλάπτει την πληρότητα της απόδειξης.

Άλλη διατύπωση: Αφού υποθέσαμε ότι $\beta \neq \gamma$, άρα $\beta > \gamma$ ή $\beta < \gamma$.

Έστω $\beta > \gamma$ **ΑΤΟΠΟ**. Ομοίως αν $\beta < \gamma$.

Επεξηγήσεις: 1. «**άρα**^(α)» και «**έχουμε**^(δ)» Σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες και αντιστρόφως. Θεώρημα §3.11 (σ. 54)

2. «**επομένως**^(β)» Σχολικό βιβλίο Εφαρμογή 3^η, σελίδα 56.

3. «**και**^(ε)» Στην πραγματικότητα αντίφαση θα είχαμε αν $\Gamma\Delta > BE$ και $BE \geq \Gamma\Delta$.

Όμως $BE > \Gamma\Delta \Rightarrow BE \geq \Gamma\Delta$ «**Όπερ ἔδει δείξαι**».

4. «**επομένως**^(γ)» Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $\{\hat{\omega} + \hat{\chi} = \hat{\phi} + \hat{\psi} \text{ και } \hat{\omega} < \hat{\phi}\} \Rightarrow \hat{\chi} > \hat{\psi}$.

Απόδειξη με απαγωγής σε άτοπο: Έστω ότι $\hat{\chi} \leq \hat{\psi}$, δηλαδή ότι $\hat{\chi} < \hat{\psi}$ ή $\hat{\chi} = \hat{\psi}$.

Αν $\hat{\chi} = \hat{\psi}$, τότε $\hat{\omega} + \hat{\chi} = \hat{\phi} + \hat{\psi} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\phi}$, **ΑΤΟΠΟ** αφού $\hat{\omega} < \hat{\phi}$.

Αν $\hat{\chi} < \hat{\psi}$, προσθέτοντας κατά μέλη με την $\hat{\omega} < \hat{\phi}$, θα έχουμε $\hat{\omega} + \hat{\chi} < \hat{\phi} + \hat{\psi}$ **ΑΤΟΠΟ**, αφού $\hat{\omega} + \hat{\chi} = \hat{\phi} + \hat{\psi}$. Άρα το $\hat{\chi} \leq \hat{\psi}$ είναι **Λάθος** και συνεπώς το $\hat{\chi} > \hat{\psi}$ είναι **Σωστό**.

Άσκηση 3^η: Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Έστω ότι $\alpha = \beta = 0$. Τότε $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, και συνεπώς $\alpha^2 + \beta^2 = 0$.

($\Rightarrow$) (Με απαγωγή σε ΑΤΟΠΟ) Έστω ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, και **έστω ότι** $\alpha \neq 0$ είτε $\beta \neq 0$.

Τότε $\alpha^2 \neq 0$ είτε $\beta^2 \neq 0$, δηλαδή $\alpha^2 > 0$ είτε $\beta^2 > 0$ και επομένως $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

ΑΤΟΠΟ, αφού $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Άρα είναι λάθος $\alpha \neq 0$ είτε $\beta \neq 0$ και συνεπώς $\alpha = \beta = 0$.

(e) Πίνακας αληθείας για το σύνδεσμο «αν και μόνο αν», με σύμβολο ($\Leftrightarrow$)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
Σ	Σ	Σ (1)
Σ	Λ	Λ
Λ	Σ	Λ
Λ	Λ	Σ (2)

Παρατηρούμε ότι: (1) Με **Σωστή** ισοδυναμία,

Σωστή πρόταση p είναι πάντα ισοδύναμη με **Σωστή** πρόταση q .

(2) Με **Σωστή** ισοδυναμία,

Λάθος πρόταση p είναι πάντα ισοδύναμη με **Λάθος** πρόταση q .

Αναλυτική μέθοδος απόδειξης

Επειδή όταν δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες, είναι και οι δυο σωστές ή και οι δυο λαθεμένες, ξεκινάμε από το ζητούμενο και με σωστές ισοδυναμίες προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μια πρόταση προφανώς σωστή, ή πιο εύκολα αποδείξιμη από το ζητούμενο.

Άσκηση 4^η: Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$.

Απόδειξη: $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} ||\alpha| - |\beta||^2 \leq |\alpha + \beta|^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (|\alpha| - |\beta|)^2 \leq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + \beta^2 - 2|\alpha||\beta| \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow -\alpha\beta \leq |\alpha||\beta|$$

Όμως η $-\alpha\beta \leq |\alpha||\beta|$ είναι σωστή από τον Πίνακα 1 (σελίδα 38) του σχ. βιβλίου.

Επομένως και η ισοδύναμή της $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$ είναι επίσης σωστή.

Επεξηγήσεις: (1) Για $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ και $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha^n \leq \beta^n$, Πίνακας 4(σ. 30)

(2) $|\alpha|^2 = \alpha^2$, από τον Πίνακα 1 (σελίδα 38) του σχ. βιβλίου.

(3) $|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$, από τον Πίνακα 1 (σελίδα 40) του σχ. βιβλίου.

Σχόλιο: Στην αναλυτική μέθοδο, ζητάμε ισοδυναμία, ενώ θα μας ικανοποιούσε η συνεπαγωγή ($\Leftarrow$). Όμως μια τέτοια διαδικασία δεν είναι πάντα εύκολα διαχειρίσιμη.

Άσκηση 5^η: Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $\alpha - \beta \leq |\alpha| + |\beta|$.

Απόδειξη: Για να ισχύει η $\alpha - \beta \leq |\alpha| + |\beta|$, **αρκεί** να ισχύουν οι $\alpha \leq |\alpha|$ και $-\beta \leq |\beta|$,

γιατί τότε με πρόσθεση κατά μέλη θα έχω το ζητούμενο. Οι σχέσεις αυτές όμως ισχύουν, από τον Πίνακα 1 (σελίδα 38) του σχ. βιβλίου. «**όπερ ἔδει δείξαι**»

Σχόλιο: Χρησιμοποιήσαμε τη λέξη **αρκεί**, αντί για το σύμβολο ($\Leftarrow$).

Είναι σα μια ευθεία απόδειξη, που την «περπατάμε» ανάποδα.

Όταν αυτό είναι κατορθωτό, είναι περισσότερο πιθανό να επιτευχθεί, αφού αντί για την ισχυρή ($\Leftrightarrow$), ζητάμε την ασθενέστερη συνεπαγωγή ($\Leftarrow$).

Τα παρακάτω ισχύουν και για προτάσεις και για προτασιακούς τύπους.

Ανάγνωση:

1. Όταν $p \Rightarrow q$ διαβάζουμε: « p **συνεπάγεται** q » ή « p **αρκεί** για q » ή «για p **πρέπει** q » ή «για q **αρκεί** p » ή «αν p **τότε** q ».

Επίσης «η p είναι **ικανή συνθήκη** της q » ή «η q είναι **αναγκαία συνθήκη** της p ».

Παράδειγμα: Είναι γνωστό ότι, **αν** ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, **τότε** οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Η συνθήκη «οι διαγώνιοι του τετράπλευρου είναι ίσες», είναι **αναγκαία**, για τη συνθήκη «το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο».

Αναγκαία σημαίνει, ότι χωρίς αυτή, δεν ισχύει η συνθήκη «το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο».

Πράγματι, αν έχουμε ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του **δεν** είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο, δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο, γιατί αν είναι ορθογώνιο, **τότε** οι διαγώνιοί του θα είναι ίσες και θα έχουμε **ΑΤΟΠΟ**.

Νόμος της Αντιθετοαντιστροφής

Κάθε φορά που μας διαθέτουν μια συνεπαγωγή, έστω $p \Rightarrow q$,

μπορούμε να διατυπώσουμε και μια άλλη, την $\neg q \Rightarrow \neg p$.

(I) Στο προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζαμε ότι: Δίνεται τετράπλευρο.

«το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο» $\Rightarrow$ «οι διαγώνιοι του τετράπλευρου είναι ίσες» και διατυπώνουμε: «οι διαγώνιοι του τετράπλευρου **δεν** είναι ίσες» $\Rightarrow$

«το τετράπλευρο **δεν** είναι ορθογώνιο»

(II) Είναι γνωστό ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ισχύει $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^n = \beta^n$

Τώρα γνωρίζουμε επίσης ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ισχύει $\alpha^n \neq \beta^n \Rightarrow \alpha \neq \beta$.

2. Όταν $p \Leftrightarrow q$ διαβάζουμε: « p **ισοδυναμεί** με q » ή « p **τότε και μόνο τότε** αν q » ή « p **αν και μόνο αν** q » ή «για να είναι p **πρέπει και αρκεί** q »

Επίσης «η p είναι **ικανή και αναγκαία συνθήκη** της q ».

Επειδή $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ όλα τα παραπάνω γράφονται και ανάποδα, δηλαδή αν στη θέση του p γράψω q και στη θέση του q γράψω p .

Νόμοι του De Morgan

(a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$

Εφαρμογή: $p: \langle \alpha=0 \rangle$ και $q: \langle \beta=0 \rangle$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$\neg p: \langle \alpha \neq 0 \rangle$ και $\neg q: \langle \beta \neq 0 \rangle$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg\{\alpha=0 \text{ ή } \beta=0\} \Leftrightarrow \neg(\alpha \cdot \beta = 0) \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \neq 0$$

$$[(\neg p) \wedge (\neg q)] \Leftrightarrow \{\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \neq 0$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$$

(b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$

Εφαρμογή: $p: \langle \alpha=0 \rangle$ και $q: \langle \beta=0 \rangle$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$\neg p: \langle \alpha \neq 0 \rangle$ και $\neg q: \langle \beta \neq 0 \rangle$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg\{\alpha=0 \text{ και } \beta=0\} \Leftrightarrow \neg(\alpha^2 + \beta^2 = 0) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

$$[(\neg p) \vee (\neg q)] \Leftrightarrow \{\alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0\} \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$$

Ας δούμε τέλος, το νόμο της Αντιθετοαντιστροφής,

σε συνδυασμό με τους νόμους του **De Morgan**.

Είναι γνωστό ότι, αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$, Πίνακας 3, (σ. 38).

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta, \text{ δηλαδή } |x| < \theta \Rightarrow -\theta < x < \theta \text{ και } -\theta < x < \theta \Rightarrow |x| < \theta.$$

Επομένως (1) $\neg(-\theta < x < \theta) \Rightarrow \neg(|x| < \theta)$ και (2) $\neg(|x| < \theta) \Rightarrow \neg(-\theta < x < \theta)$

$$\text{Έτσι } \neg(-\theta < x < \theta) \Leftrightarrow \neg(|x| < \theta).$$

$$\neg(-\theta < x < \theta) \Leftrightarrow \neg(-\theta < x \text{ και } x < \theta) \Leftrightarrow [\neg(-\theta < x) \text{ ή } \neg(x < \theta)] \Leftrightarrow (-\theta \geq x \text{ ή } x \geq \theta)$$

$$\text{και } \neg(|x| < \theta) \Leftrightarrow |x| \geq \theta. \text{ Άρα } |x| \geq \theta \Leftrightarrow (x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta) \text{ Πίνακας 4, (σ.39).}$$