

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Πεδίο ορισμού για ρίζες: Για $\sqrt[n]{x}$, πρέπει $x \geq 0$ (και $n \geq 1$, n -φυσικός αριθμός).

Προσοχή: Όλες οι ιδιότητες των ριζών, ισχύουν για μη αρνητικούς αριθμούς, δηλαδή για αριθμούς που είναι **θετικοί** ή μηδέν.

Για $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ πραγματικούς αριθμούς, και $n \geq 1, \mu \geq 1, \kappa \geq 1$ φυσικούς αριθμούς, έχουμε:

$$1. \sqrt[n]{\alpha} \geq 0 \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0. \quad \sqrt[n]{\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$$

$$2. \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha = \sqrt[n]{\alpha^n}.$$

$$\text{Για } x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0 \text{ και επομένως } |x| = \sqrt[n]{|x|^n} = \left(\sqrt[n]{|x|}\right)^n.$$

$$\text{Αν } x < 0, \text{ τότε } x = -|x| = -\left(\sqrt[n]{|x|}\right)^n = -\sqrt[n]{|x|^n}.$$

Προσοχή: Ο αρνητικός αριθμός x , «άφησε» το πρόσημό του έξω από τη ρίζα, και «έβαλε μέσα» στη ρίζα το μέτρο του, που είναι θετικός αριθμός.

$$\text{Για } x \in \mathbb{R} : \sqrt[2n]{x^{2n}} = \sqrt[n]{|x|^{2n}} = |x|, \text{ αφού } |x| \geq 0. \quad \text{Έτσι } \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$3 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \quad \text{«κάθε θετικός αριθμός, γράφεται σαν τετράγωνο της ρίζας του»}$$

Προσοχή: Είναι γνωστό ότι $A = B \Leftrightarrow B = A$.

Έτσι η παρουσίαση των ιδιοτήτων παρακάτω, έχει το στοιχείο του πλεονασμού.

$$3. \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$$

$$4. \text{Για } \beta > 0, \quad \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}$$

$$5. \sqrt[n]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^\kappa \quad \text{και} \quad \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^\kappa = \sqrt[n]{\alpha^\kappa}$$

$$6. \sqrt[n]{\alpha^n} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\beta} \quad \text{και} \quad \alpha \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n} \cdot \sqrt[n]{\beta}$$

$$\text{Αν } \alpha < 0, \text{ τότε } \alpha = -|\alpha| \text{ και συνεπώς } \alpha \cdot \sqrt[n]{\beta} = -|\alpha| \cdot \sqrt[n]{\beta} = -\sqrt[n]{|\alpha|^n} \cdot \sqrt[n]{\beta}.$$

$$7. \sqrt[n]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[n \cdot \mu]{\alpha} \quad \text{και} \quad \sqrt[n \cdot \mu]{\alpha} = \sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}}$$

$$8. \sqrt[n \cdot \kappa]{\alpha^{\mu \cdot \kappa}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\kappa}} \quad \text{και} \quad \sqrt[\mu]{\alpha^{\kappa}} = \sqrt[n \cdot \kappa]{\alpha^{\mu \cdot \kappa}}$$

$$9. \text{Για } \alpha > 0, \text{ και } n \geq 2 : \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} = \frac{1 \cdot \sqrt[n]{\alpha^{n-1}}}{\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\alpha^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}}{\sqrt[n]{\alpha \cdot \alpha^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}}{\sqrt[n]{\alpha^n}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}}{\alpha}$$

$$10. \alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta}, \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{\beta} \quad \text{και} \quad \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{\alpha} \leq \sqrt[n]{\beta} \quad (\text{ιδιότητα 4, σελ.30})$$

Εξισώσεις της μορφής $x^v = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και $v \geq 1$, (v -φυσικός αριθμός)

1. Για $a > 0$.

$$x^{2v} = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[2v]{a} \quad \text{και} \quad x^{2v+1} = a \Leftrightarrow x = \sqrt[2v+1]{a}$$

2. Για $a < 0$ και επομένως $a = -|a|$.

$$x^{2v} = a \quad \text{αδύνατη} \quad \text{και}$$

$$x^{2v+1} = a \Leftrightarrow x^{2v+1} = -|a| \Leftrightarrow -x^{2v+1} = |a| \Leftrightarrow (-x)^{2v+1} = |a| \Leftrightarrow -x = \sqrt[2v+1]{|a|} \Leftrightarrow x = -\sqrt[2v+1]{|a|}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της παράστασης $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{12-x}}$.

Λύση: Θα πρέπει $\{x-5 \geq 0 \text{ και } 12-x > 0\}$, δηλαδή $\{x \geq 5 \text{ και } 12 > x\}$, και επομένως $5 \leq x < 12$.

2. Να μετατραπούν τα κλάσματα $\frac{1}{\sqrt[5]{27}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$,

σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή.

$$\text{Λύση:} \quad \frac{1}{\sqrt[5]{27}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^2}} = \frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^3 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^2}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

3. $x^2 = 5$

Λύση: $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ ή $x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ (δες σελίδα 48)

$x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow |x|^2 = |\sqrt{5}|^2 \Leftrightarrow |x| = |\sqrt{5}| \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ (ιδιότητα 4, σελίδα 30)

4. $x^3 = 5$. Λύση: $x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$ ή $x^3 = 5 \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{5})^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$

5. $x^4 = -5$ Λύση: $x^4 = -5$ αδύνατη, αφού $x^4 \geq 0$, ενώ $-5 < 0$.
ή $x^4 = -5 \Leftrightarrow x^4 + 5 = 0$ αδύνατη, αφού $x^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 5 \geq 5 > 0 \Rightarrow x^4 + 5 > 0$

6. $x^7 = -5$ Λύση: $x^7 = -5 \Leftrightarrow -x^7 = 5 \Leftrightarrow (-x)^7 = 5 \Leftrightarrow -x = \sqrt[7]{5} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{5}$
ή $x^7 = -5 \Leftrightarrow x^7 = -(\sqrt[7]{5})^7 \Leftrightarrow x^7 = (-\sqrt[7]{5})^7 \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{5}$ (δες σελίδα 48)

7. $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

$$x^2 = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{(1+\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow x = \pm(1+\sqrt{2})$$

$$3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$$

8. $x^4 = \sqrt{2}$. Λύση: $x^4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[8]{2}$