

Τράπεζα Θεμάτων στις Πιθανότητες

1. Θέμα 2^ο (κωδικός αριθμός: 1102)

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(A - B) = \frac{5}{8} \text{ και } P(B) = \frac{1}{4}.$$

α. Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$ (Μονάδες 9)

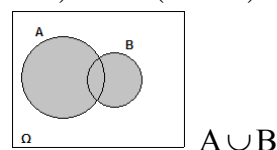
β. i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: « A ή B » (Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου. (Μονάδες 9)

Απαντήσεις: α. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A - B)$ και $P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

β. i) « A ή B » – (μετάφραση) $\rightarrow A \cup B$

$$\text{ii) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$



Σχόλια: Για μια «αξιοπρεπή» κατασκευή του διαγράμματος Venn.

$$(1) P(A \cap B) = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} > 0 \Rightarrow N(A \cap B) > 0 \text{ και επομένως οι «κύκλοι» έχουν κοινό μέρος.}$$

$$(2) \left\{ P(B) = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{8} \right\} \Rightarrow P(B) > P(A \cap B) \Rightarrow \frac{N(B)}{N(\Omega)} > \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Rightarrow \boxed{N(B) > N(A \cap B)}$$

και επειδή $A \cap B \subseteq B$, υπάρχουν στοιχεία του B έξω από την τομή, επομένως και έξω από το A , και έτσι ο «κύκλος» του B δεν είναι μέσα στον «κύκλο» του A .

(3) $P(A) > P(B)$, επομένως το A δεν είναι υποσύνολο του B , και έτσι ο «κύκλος» του A δεν είναι μέσα στον «κύκλο» του B .

$$\boxed{\text{Αν } A \subseteq B, \text{ τότε } P(A) \leq P(B).}$$

(4) $P(A) > P(B) \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} > \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow N(A) > N(B)$ και επομένως, για λόγους κυρίως αισθητικής, ο «χώρος» του A θα πρέπει να φαίνεται ευρύτερος από το «χώρο» του B .

2. Θέμα 2^ο (1287)

Δίνεται ο πίνακας:

Επιλέγουμε τυχαία έναν από εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων.

A : ο διψήφιος αυτός να είναι άρτιος

(Μονάδες 7)

B : ο διψήφιος αυτός να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο* του 3

(Μονάδες 9)

Γ : ο διψήφιος αυτός να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

(Μονάδες 9)

Λύση: $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$ και Δ το ενδεχόμενο «ο διψήφιος αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 3».

Άρα $\Delta = \{12, 21, 33\}$ και $A = \{12, 22, 32\}$. Επομένως $B = A \cap \Delta = \{12\}$ και $\Gamma = A \cup \Delta = \{12, 21, 22, 32, 33\}$.

$N(\Omega) = 9$, $N(A) = 3$, $N(B) = 1$, $N(\Gamma) = 5$ και συνεπώς

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9}, P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9} \text{ και } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}.$$

* Τα πολλαπλάσια του 3, έχουν για διαιρέτη τους το 3, δηλαδή έχουν άθροισμα ψηφίων που να διαιρείται με το 3.

3. Θέμα 2^ο (3383)

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο κάτοικος αυτός να έχει αυτοκίνητο, M: ο κάτοικος αυτός να έχει μηχανάκι.

α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα: i) $A \cup M$, ii) $M - A$, iii) M' (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε:

i) Να μην έχει μηχανάκι (Μονάδες 7)

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)

Απαντήσεις: α) (i) «ο κάτοικος αυτός να έχει αυτοκίνητο ή μηχανάκι»

(ii) «ο κάτοικος αυτός να έχει μόνο μηχανάκι», (iii) «ο κάτοικος αυτός να μην έχει μηχανάκι»

β) (i) $P(M') = 1 - P(M) = 100\% - 40\% = 60\%$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad P((A \cup M)') &= 1 - P(A \cup M) = 1 - [P(A) + P(M) - P(A \cap M)] = \\ &= 1 - (70\% + 40\% - 20\%) = 100\% - 90\% = 10\% \end{aligned}$$

4. Θέμα 2^ο (3878)

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α' τάξης.

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ' τάξης. (Μονάδες 10)

β) Το πλήθος των μαθητών της Β' τάξης. (Μονάδες 5)

γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β' τάξης. (Μονάδες 10)

Απαντήσεις: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα, A: «ο μαθητής αυτός πηγαίνει στην Α' τάξη»,

B: «ο μαθητής αυτός πηγαίνει στην Β' τάξη» και Γ: «ο μαθητής αυτός πηγαίνει στην Γ' τάξη».

$N(\Omega) = 400$, $N(A) = 200$ και $P(\Gamma) = 20\%$.

$$\alpha) \quad P(\Gamma) = 20\% \Rightarrow \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{20}{100} \Rightarrow N(\Gamma) = \frac{20}{100} \cdot N(\Omega) = \frac{20}{100} \cdot 400 = 80 \Rightarrow \boxed{N(\Gamma) = 80}$$

$$\beta) \quad N(A) + N(B) + N(\Gamma) = N(\Omega) \Rightarrow N(B) = N(\Omega) - N(A) - N(\Gamma) = 400 - 200 - 80 = 120 \Rightarrow \boxed{N(B) = 120}$$

$$\gamma) \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{120}{400} = \frac{30}{100} = 30\% \Rightarrow \boxed{P(B) = 30\%}$$

5. Θέμα 2^ο (3384)

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: A: ο μαθητής αυτός συμμετέχει στη θεατρική ομάδα,

B: ο μαθητής αυτός συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$, ii) $B - A$, iii) A' (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 9)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου. (Μονάδες 7)

Απαντήσεις: α) (i) «ο μαθητής αυτός συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου»

(ii) «ο μαθητής αυτός συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου»

(iii) «ο μαθητής αυτός δεν συμμετέχει στη θεατρική ομάδα»

$$\beta) \quad \text{(i)} \quad P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left(\frac{20}{180} + \frac{30}{180} - \frac{10}{180} \right) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\text{(ii)} \quad P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{30}{180} - \frac{10}{180} = \frac{20}{180} = \frac{1}{9}$$

6. Θέμα 2^ο (1506)

Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{1, 2, 4, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$.

α. Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το Ω , τα σύνολα A και B . Κατόπιν να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B' . (Μονάδες 13)

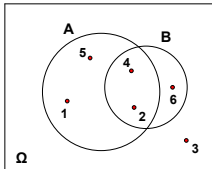
β. Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A . (Μονάδες 4)

(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B . (Μονάδες 4)

(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A , B . (Μονάδες 4)

Απαντήσεις: α. $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A' = \{3, 6\}$, $B' = \{1, 3, 5\}$.



$$\beta. (i) P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} \left(= \frac{1}{3} \right), \quad (ii) P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} \left(= \frac{1}{3} \right)$$

$$(iii) P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

7. Θέμα 2^ο (1520)

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

B : ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 12)

β) Ο σπουδαστής αυτός να μη μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα. (Μονάδες 13)

Απαντήσεις: $50\% = \frac{50}{100} = 0,50 \left(= \frac{1}{2} \right)$ $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,1$

$$\alpha) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,1 = 0,8$$

$$\beta) P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

8. Θέμα 4^ο (1868)

Σε ένα τμήμα της A' Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

α) Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

i) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών; (Μονάδες 9)

ii) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες; (Μονάδες 9)

β) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος; (Μονάδες 7)

Απαντήσεις: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: A : ο μαθητής αυτός παρακολουθεί μαθήματα Αγγλικών.

Γ : ο μαθητής αυτός παρακολουθεί μαθήματα Γαλλικών.

$$P(\Gamma') = 0,8 \quad P(\Gamma) = 1 - P(\Gamma') = 1 - 0,8 = 0,2 \quad P(A) = 4 \cdot P(\Gamma) = 4 \cdot 0,2 = 0,8 \quad P(A \cup \Gamma) = 0,9$$

$$\alpha) (i) P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) \Rightarrow P(A \cap \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cup \Gamma) = 0,8 + 0,2 - 0,9 = 0,1$$

$$\alpha) (ii) P((A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)) = P(A) + P(\Gamma) - 2P(A \cap \Gamma) = 0,8 + 0,2 - 2 \cdot 0,1 = 0,8$$

$$\beta) \boxed{N(A - \Gamma) = 14} \quad P(A - \Gamma) = \frac{N(A - \Gamma)}{N(\Omega)} \quad \boxed{N(\Omega) = \frac{N(A - \Gamma)}{P(A - \Gamma)} = \frac{N(A - \Gamma)}{P(A) - P(A \cap \Gamma)} = \frac{14}{0,8 - 0,1} = \frac{14}{0,7} = 20}$$

9. Θέμα 4^ο (1936)

Η εξέταση σε έναν διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα, έπρεπε να απαντήσουν ΣΩΣΤΑ και στα δύο θέματα, ενώ, για να περάσουν την εξέταση, έπρεπε να απαντήσουν ΣΩΣΤΑ σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάστηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

- α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα. (Μονάδες 13)
 β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής: (Μονάδες 12)
 i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.
 ii) Να βαθμολογηθεί με άριστα.
 iii) Να περάσει την εξέταση.
 iv) Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

Απαντήσεις: α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής αυτός απάντησε σωστά στο πρώτο θέμα.

B: ο μαθητής αυτός απάντησε σωστά στο δεύτερο θέμα.

$$N(\Omega) = 100, N(A) = 60, N(B) = 50, N(A \cap B) = 30$$

$$\beta) \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{100} = 0,6 \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{50}{100} = 0,5 \quad P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{30}{100} = 0,3$$

- i) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$
 ii) $P(A \cap B) = 0,3$
 iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$
 iv) $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$

Σχόλιο: Στο ερώτημα β) (iv), θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε την $P(A' \cap B')$, αφού το ενδεχόμενο είναι:

«δεν απάντησε σωστά στο A και δεν απάντησε σωστά στο B». Όμως, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, η αναζήτηση αυτή θέλει περισσότερο χρόνο.

10. Θέμα 4^ο (2064)

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

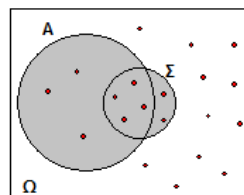
α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο, το άτομο που επιλέχθηκε:

- i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)
 ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)
 β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε, να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 13)

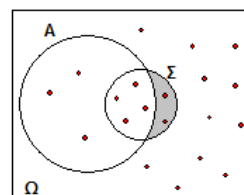
Απαντήσεις: α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: το άτομο που επιλέχθηκε, να είναι άνδρας. $N(A) = 7$

Σ: το άτομο που επιλέχθηκε, να παίζει σκάκι. $N(\Sigma) = 6$



(i) $A \cup \Sigma$



(ii) $A' \cap \Sigma$

β) Το ενδεχόμενο να είναι γυναίκα, είναι ίσο με το ενδεχόμενο A' , να μην είναι άνδρας. Επομένως μας ζητάνε την

$$\text{πιθανότητα } P(A' \cap \Sigma) = P(\Sigma \cap A') = P(\Sigma - A) = P(\Sigma) - P(\Sigma \cap A) = \frac{N(\Sigma)}{N(\Omega)} - \frac{N(\Sigma \cap A)}{N(\Omega)} = \frac{6-4}{20} = \frac{2}{20} = 0,1$$

Σχόλιο: Τα ενδεχόμενα A και «Γ: το άτομο που επιλέχθηκε, να είναι γυναίκα» είναι συμπληρωματικά, και επομένως σχεδιάζοντας τον «κύκλο» του ενός, έχουμε αυτομάτως και το χώρο του άλλου (εξωτερικό μέρος του κύκλου, «μέσα στο Ω»). Ο σχεδιασμός «κύκλων» και για τα δύο, μόνο σύγχυση θα προσέφερε.

11. Θέμα 4^ο (6144)

Μια ημέρα, στο τμήμα Α1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής αυτός να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Γ: ο μαθητής αυτός να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων, τα δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής αυτός: (Μονάδες 8)

i) να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

ii) να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δύο μαθήματα.

γ) Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής αυτός: (Μονάδες 8)

i) να έχει διαβάσει Γεωμετρία

ii) να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Απαντήσεις: α) Έχουμε «σκιάσει» τα ενδεχόμενα: (σχήμα 1) «ο μαθητής αυτός δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία» $(A \cup \Gamma)'$ και (σχήμα 2) «ο μαθητής αυτός έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα» $A \cap \Gamma$.

Δεδομένα: Στη γλώσσα των συνόλων, $P((A \cup \Gamma)') = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{3}$.

Διάγραμμα Venn: Οι «κύκλοι» των ενδεχομένων A και Γ τέμνονται, αφού $P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{3} > 0$ και επομένως $A \cap \Gamma \neq \emptyset$. Αν $A \cap \Gamma = \emptyset$, τότε $P(A \cap \Gamma) = P(\emptyset) = 0$. Επίσης $A \neq \Gamma$, αφού $P(A \cup \Gamma) > P(A \cap \Gamma)$.

Αν $A = \Gamma$, τότε $A \cup \Gamma = A \cap \Gamma = A$ και $P(A \cup \Gamma) = P(A \cap \Gamma)$. Όμως, δεν είμαστε σε θέση να πούμε αν το ένα ενδεχόμενο μπορεί να είναι υποσύνολο του άλλου ή όχι. Έτσι, το σχήμα μας είναι ένα από τα σχήματα που θα μπορούσε κάποιος να σχεδιάσει.

$$\beta) \text{ (i) } P(A \cup \Gamma) = 1 - P((A \cup \Gamma)') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{(ii) } P((A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)) =$$

$$= \underline{P(A)} - \underline{P(A \cap \Gamma)} + \underline{P(\Gamma)} - \underline{P(A \cap \Gamma)} = \underline{P(A \cup \Gamma)} - \underline{P(A \cap \Gamma)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\gamma) N(\Gamma) = \frac{1}{2} N(\Omega) \Rightarrow \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(i) } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2},$$

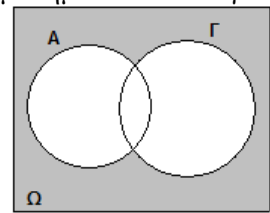
$$\text{(ii) } P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma)$$

$$\text{και επομένως } P(A) = P(A \cup \Gamma) - P(\Gamma) + P(A \cap \Gamma) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

Σχόλιο: Το ενδεχόμενο «ο μαθητής δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία», στη γλώσσα των συνόλων καταγράφεται και ως $A' \cap \Gamma'$. Επομένως $A' \cap \Gamma' = (A \cup \Gamma)'$.

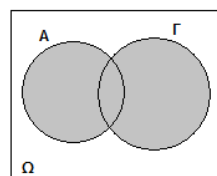
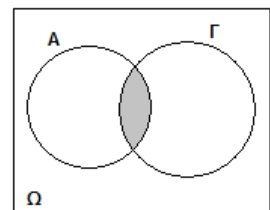
Σχήμα 1:

$$(A \cup \Gamma)'$$



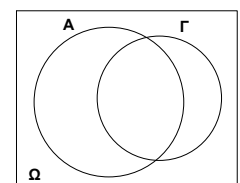
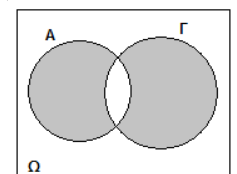
Σχήμα 2:

$$A \cap \Gamma$$



$$A \cup \Gamma$$

$$(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)$$



12. Θέμα 4^ο (2073)

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετρανήπιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δένδρουδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων (Μονάδες 12)

A: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

B: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

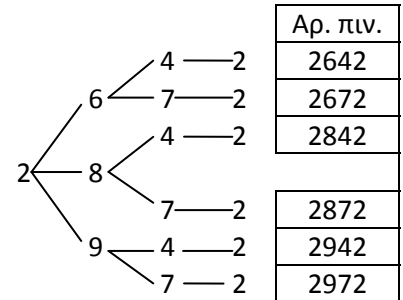
Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

Απαντήσεις: (α) $\Omega = \{2642, 2672, 2842, 2872, 2942, 2972\}$

β) $A = \{2672, 2872, 2972\}$ και επομένως $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6}$,

$B = \{2642, 2672, 2842, 2872\}$ και έτσι $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6}$,

$\Gamma = \{2642, 2672\}$ και έτσι $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$.



13. Θέμα 4^ο (2080)

Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί.

Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής αυτός πίνει γάλα

B: ο μαθητής αυτός τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

α) Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα: (Μονάδες 12)

i) ο μαθητής αυτός ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

ii) ο μαθητής αυτός να πίνει γάλα και να τρώει δύο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

iii) ο μαθητής αυτός να πίνει μόνο γάλα.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

Απαντήσεις: α) (i): $A' \cap B' = (A \cup B)'$, (ii): $A \cap B$, (iii): $A - B$

$P(A \cup B) = 0,8$, $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,45$

β) (i): $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$

(ii): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

και επομένως $P(A \cap B) = 0,6 + 0,45 - 0,8 = 0,25$

(iii): $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,25 = 0,35$

B' Ομάδα άσκηση 3: Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

Λύση: $P(A') = 1 - P(A)$, και αν αντικαταστήσουμε στην $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, τότε $\frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{3}{4}$.

$\frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot P(A) = 3 \cdot [1 - P(A)] \Leftrightarrow 4 \cdot P(A) = 3 - 3 \cdot P(A) \Leftrightarrow 4 \cdot P(A) + 3 \cdot P(A) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7 \cdot P(A) = 3 \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{7}$. Αντικαθιστώντας τώρα στην $P(A') = 1 - P(A)$, έχουμε $P(A') = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.