

Ασκήσεις στα παραλληλόγραμμα II

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι:

i) ορθογώνιο, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα, ποια όχι και γιατί;

Απαντήσεις: i) ορθογώνιο

Το (α) είναι ορθογώνιο, αφού **οι διαγώνιοί του διχοτομούνται** (παραλληλόγραμμα) και είναι **ίσες** (ορθογώνιο). (2^ο κριτήριο)

Το (β) είναι ορθογώνιο, αφού είναι **παραλληλόγραμμα** (οι απέναντι πλευρές είναι ίσες) και έχει **μία ορθή γωνία**. (1^ο κριτήριο)

Για το (γ), **οι πληροφορίες που δίνονται με συμβολισμό**, δεν αρκούν για να πούμε ότι είναι ορθογώνιο, αφού δεν «ικανοποιούνται» οι απαιτήσεις κανενός κριτηρίου, και δεν μας δίνουν το δικαίωμα να πούμε ότι δεν είναι, αφού δεν βρίσκονται σε αντίφαση με τις ιδιότητες των ορθογώνιων.

Σχόλιο: Στο (γ), οι πληροφορίες που δίνονται με συμβολισμό, «μιλάνε» για το σύνολο των (κυρτών) τετράπλευρων που έχουν δύο **τουλάχιστον** ορθές γωνίες. Στο σύνολο αυτό, ανήκουν τα (κυρτά) τετράπλευρα που έχουν **ακριβώς δύο ορθές** γωνίες και τα (κυρτά) τετράπλευρα που έχουν **ακριβώς τέσσερις ορθές** γωνίες, δηλαδή τα ορθογώνια. **Αν λέγαμε ότι το (γ) δεν είναι ορθογώνιο**, θα εννοούσαμε ότι το (γ) δεν έχει τέσσερις ορθές γωνίες, και επομένως έχει δύο ορθές, μία ορθή ή καμία ορθή. **Προφανώς αυτό θα ήταν λάθος.**

Το (δ) είναι ορθογώνιο, αφού **έχει τρεις γωνίες ορθές**. (3^ο κριτήριο)

ii) ρόμβοι

Το (α) δεν είναι ρόμβος, αφού δεν είναι παραλληλόγραμμα.

(οι διαγώνιοί του δε διχοτομούνται)

Το (β) είναι ρόμβος, αφού είναι **παραλληλόγραμμα** (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται), και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες ($AB = AD$, στο ισοσκελές τρίγωνο ABD). (2^ο κριτήριο)

Για το (γ), **οι πληροφορίες που δίνονται**, δεν αρκούν για να αποφανθούμε, αφού ούτε τις απαιτήσεις ενός κριτηρίου «καλύπτουν», ούτε βρίσκονται σε αντίφαση με τις ιδιότητες των ρόμβων.

Προσοχή: Το σχήμα **φαίνεται**, «κραυγαλέα», να μην αντιστοιχεί σε ρόμβο, αλλά εμείς δεν κάνουμε «εκπτώσεις» στο «φαίνεται» · συνεχίζουμε να χαρακτηρίζουμε «**βάσει πληροφοριών**».

iii) τετράγωνα

Για το (α) **οι πληροφορίες που δίνονται με συμβολισμό**, δεν επαρκούν για να αποφανθούμε, αφού ούτε οι απαιτήσεις ενός κριτηρίου προκύπτουν, ούτε αντιφάσκουν με τις ιδιότητες των τετραγώνων.

Στο (β), το **παραλληλόγραμμα** (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται) είναι **τετράγωνο**, αφού είναι **ορθογώνιο** (οι διαγώνιοί του είναι ίσες) και **ρόμβος** (έχει κάθετες διαγώνιες). (6^ο κριτήριο)

Το (γ) δεν είναι τετράγωνο, αφού δεν είναι ορθογώνιο, δεδομένου ότι οι διαγώνιοί του δεν είναι ίσες.

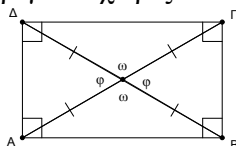
2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι:

i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος

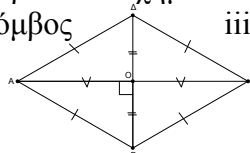
Απαντήσεις: i) Με τα κριτήρια της §5.3 και ii) Με τα κριτήρια της §5.4

3. Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγώνίους τους;

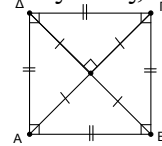
i) Ορθογώνιο



ii) Ρόμβος



iii) Τετράγωνο



Απαντήσεις: i) **Όλα** τα ορθογώνια, χωρίζονται σε τέσσερα **ισοσκελή** τρίγωνα, τα οποία μοιράζονται σε δύο ζευγάρια ίσων (ΠΠ) τριγώνων, με ίσες γωνίες τις κατακορυφήν γωνίες.

ii) **Όλοι** οι ρόμβοι, χωρίζονται σε τέσσερα **ίσα ορθογώνια** τρίγωνα.

iii) **Όλα** τα τετράγωνα, χωρίζονται σε τέσσερα **ίσα ισοσκελή ορθογώνια** τρίγωνα.

Γενικό σχόλιο: Όταν αναφερόμαστε σε «ιδιότητες» των ορθογωνίων, εννοούμε όλων των ορθογωνίων(στο σύνολο), και ομοίως όταν αναφερόμαστε στους ρόμβους, στα τετράγωνα, και λοιπά. Η επισήμανση αυτή είναι κρίσιμη, στο παρακάτω θέμα, όπου ζητείται να αναφερθούν ομοιότητες και διαφορές, ανάμεσα σε σχήματα, όπου το ένα σύνολο μπορεί να είναι υποσύνολο του άλλου.

4. Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:

i) Τετράγωνο – Ρόμβος: Όλα(στο σύνολό τους) τα τετράγωνα και όλοι οι ρόμβοι, έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες(1) και τις διαγωνίες τους να τέμνονται κάθετα(2).

Όλα(στο σύνολό τους) τα τετράγωνα, έχουν όλες τις γωνίες τους ορθές (1) και ίσες διαγωνίους(2), ενώ αυτό δε συμβαίνει σε όλους τους ρόμβους.

ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο: Όλα τα τετράγωνα και όλα τα ορθογώνια, έχουν ορθές γωνίες(1) και ίσες διαγωνίους(2). Όλα τα τετράγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες(1) και τις διαγωνίες τους να τέμνονται κάθετα(2), ενώ αυτό δε συμβαίνει σε όλα τα ορθογώνια.

iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος: Όλα τα ορθογώνια και όλοι οι ρόμβοι, έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες(1) και τις απέναντι γωνίες τους ίσες(2). Όλα τα ορθογώνια, έχουν ορθές γωνίες(1) και ίσες διαγωνίους(2), ενώ αυτό δε συμβαίνει σε όλους τους ρόμβους.

5. Χαρακτηρίστε σωστή(Σ) ή λάθος(Λ) κάθε πρόταση:

- | | |
|---|---|
| i) Οι διαγωνίοι του ρόμβου δεν είναι ίσες (<u>σε όλους τους ρόμβους</u>). | Σ |
| ii) Όλες οι γωνίες του (<u>κάθε</u>) ρόμβου είναι ίσες | Λ |
| iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. | Σ |
| iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. | Σ |

Ασκήσεις Εμπέδωσης

3. Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.

Απόδειξη: Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την **Εφαρμογή** της §4.4 στη σελίδα 84, γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι των διαδοχικών γωνιών του παραλληλογράμμου τέμνονται κάθετα, αφού είναι διχοτόμοι των «εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών», των παραλλήλων πλευρών του παραλληλογράμμου. Έτσι, αν δε συντρέχουν θα δημιουργείται ένα ορθογώνιο.

Σχόλιο: Προφανώς, οι διχοτόμοι των γωνιών του παραλληλογράμμου συντρέχουν «όταν και μόνο όταν» τα Κ, Μ ταυτίζονται, που βέβαια τότε θα ταυτίζονται με αυτά και τα Λ, Ν. Τότε όμως θα δημιουργούνται τέσσερις διαδοχικές γωνίες ορθές, που ανά δύο εφεξής θα δημιουργούν ευθείες γωνίες, επομένως οι διχοτόμοι ΔΛ, ΒΝ θα ταυτίζονται με τη διαγώνιο ΒΔ, και ομοίως οι ΑΝ, ΓΛ με τη διαγώνιο ΑΓ, και συνεπώς το ΑΒΓΔ θα είναι ρόμβος. Επομένως το ορθογώνιο ΚΛΜΝ υπάρχει «αν και μόνο αν» το ΑΒΓΔ δεν είναι ρόμβος. Προφανώς όταν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, μπορούμε να πούμε ότι το ορθογώνιο ΚΛΜΝ, εκφυλίζεται σε σημείο.

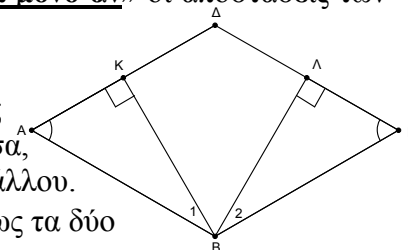
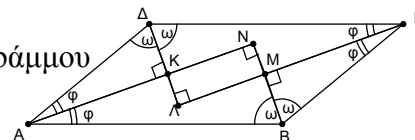
4. Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, «αν και μόνο αν» οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Απόδειξη: Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, και ΒΚ, ΒΛ ύψη του.

Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΒ και ΛΓΒ, όταν υπάρχουν, προφανώς έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία*, και επομένως για να είναι ίσα, αρκεί μία πλευρά του ενός, να είναι ίση με μια αντίστοιχη πλευρά του άλλου.

• Αν το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε $AB = BG$, επομένως τα δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα(ίσες υποτείνουσες, και ίσες οξείες γωνίες Α, Γ, που είναι απέναντι γωνίες ρόμβου), και συνεπώς $BK = BL$ (βρίσκονται σε ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες). Αφού τα ύψη ΒΚ, ΒΛ του ρόμβου ΑΒΓΔ είναι ίσα, επομένως τα μήκη τους θα είναι ίσα, και συνεπώς οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ίσες.

• Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ίσες, τότε τα μήκη των υψών του θα είναι ίσα, δηλαδή $BK = BL$, συνεπώς τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΓΒ θα είναι ίσα(ίσες κάθετες πλευρές, και ίσες οι προσκείμενες οξείες γωνίες B_1, B_2), επομένως οι υποτείνουσές τους ΑΒ και ΒΓ, που είναι διαδοχικές πλευρές του ΑΒΓΔ θα είναι ίσες, και εξασφαλίζουν ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



* Τα ορθογώνια τρίγωνα KAB και ΛΓΒ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, αφού οι γωνίες A, Γ είναι ίσες ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, και οι γωνίες B₁, B₂ είναι ίσες ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών.

Σχόλια: (1) Όταν επικαλεστήκαμε τα ορθογώνια τρίγωνα KAB και ΛΓΒ, γράψαμε «όταν υπάρχουν», αφού η απόδειξη αφορά παραλληλόγραμμα,

δηλαδή και ορθογώνια, όπου οι πλευρές είναι και ύψη. Προφανώς, στα ορθογώνια δε σχηματίζονται ορθογώνια τρίγωνα KAB και ΛΓΒ, αλλά η αλήθεια της πρότασης είναι προφανής. Για τα παραλληλόγραμμα που δεν είναι ορθογώνια, προφανώς πάντα υπάρχει ζευγάρι αμβλειών γωνιών, και επομένως η απόδειξή μας που σιωπηρά επέλεξε τα ύψη από την κορυφή μιας αμβλείας γωνίας, είναι γενική. Αν όμως επιχειρούσαμε να αξιοποιήσουμε τα ύψη από την κορυφή μιας οξείας γωνίας, τότε το μόνο που θα άλλαζε θα ήταν το επιχείρημα για την ισότητα των γωνιών των ορθογωνίων τριγώνων (ZBA και ΕΔΑ), όπου οι γωνίες A₁, A₂ είναι ίσες ως συμπληρωματικές της γωνίας A, και οι γωνίες B₃, Δ₁ είναι ίσες ως παραπληρωματικές των ίσων απέναντι γωνιών B, Δ του παραλληλογράμμου ABΓΔ.

(2) Η έκφραση «αν και μόνο αν» δηλώνει ισοδυναμία, και αν η απόδειξη γίνει αναλυτικά, απαιτεί «δύο βήματα», όπου η υπόθεση στο «ένα βήμα» γίνεται συμπέρασμα στο άλλο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ABΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.

Απόδειξη: $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ «ως εντός εναλλάξ» των ΔΕ//ΒΓ, με τέμνουσα τη ΒΔ.

Έτσι, το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές, με ΕΒ = ΕΔ, αφού $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$, άρα η διάμεσος ΕΜ που αντιστοιχεί στη βάση ΒΔ είναι και ύψος, δηλαδή ΕΖ ⊥ ΒΔ, επομένως στο τρίγωνο ΒΕΖ η διχοτόμος ΒΜ είναι και ύψος, συμπερασματικά το τρίγωνο είναι ισοσκελές, και συνεπώς η ΒΜ είναι και διάμεσος (ΕΜ = ΜΖ). Χωρίς αμφιβολία πλέον, το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (παραλληλόγραμμα) και τέμνονται κάθετα (ΕΖ ⊥ ΒΔ). (3^ο κριτήριο)

2^η λύση: Αποδεικνύοντας ότι τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΒΖ είναι ίσα (ΓΠΓ), έχουμε ΕΔ = ΒΖ, με τελικό συμπέρασμα ότι το τετράπλευρο ΒΖΔΕ είναι ρόμβος, σαν παραλληλόγραμμα (δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και ίσες [ΕΔ// = ΒΖ]), του οποίου η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία Β.

4. Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη: Έστω ΚΛ, ΜΝ δύο τέτοια τμήματα. Αν ΚΡ ⊥ ΑΒ και ΝΤ ⊥ ΒΓ, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, αφού έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία*, και ΚΡ = ΝΤ σαν ύψη ρόμβου (Άσκηση Εμπέδωσης 4).

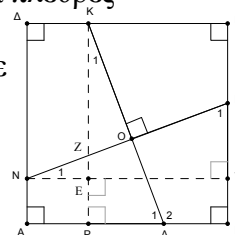
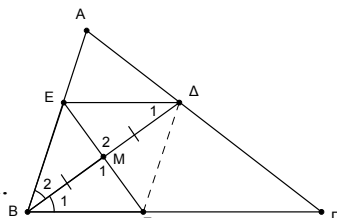
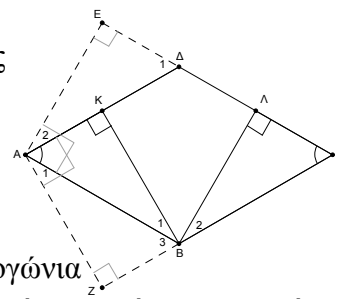
Έτσι, ΚΛ = ΜΝ, σαν υποτείνουσες ίσων ορθογωνίων τριγώνων.

* $\hat{M}_1 = \hat{\Lambda}_1$ σαν παραπληρωματικές της $\hat{\Lambda}_2$. (Στο τετράπλευρο ΟΜΒΛ υπάρχουν δύο ορθές γωνίες, και συνεπώς οι άλλες δύο γωνίες του, «μοιράζονται» το υπόλοιπο του αθροίσματος των γωνιών του) Έτσι, $\hat{K}_1 = \hat{N}_1$, ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών.

Σχόλια: (1) $\hat{K}_1 = \hat{N}_1$, από τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΖΝ και ΟΖΚ, σε συμπληρωματικές των ίσων κατακορυφήν γωνιών στην κοινή κορυφή Ζ.

(2) $\hat{M}_1 = \hat{\Lambda}_1$ και $\hat{K}_1 = \hat{N}_1$, αφού είναι ομοειδείς (οξείες γωνίες, σε γωνίες προσκείμενες στην υποτείνουσα), και έχουν κάθετες πλευρές (§4.7 στη σελίδα 89 – «εκτός ύλης»).

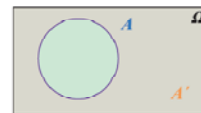
(3) ΚΡ = ΑΔ = ΑΒ = ΝΤ από τα ορθογώνια ΑΔΚΡ και ΑΒΤΝ.



Συμπλήρωμα

Στο σχολικό βιβλίο (Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ σελίδα 17), έγινε εισαγωγή της έννοιας συμπλήρωμα συνόλου. Στις ερωτήσεις κατανόησης 1.ι). (γ), μπορούμε να αξιοποιήσουμε την έννοια αυτή.

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A' .



Δηλαδή είναι:

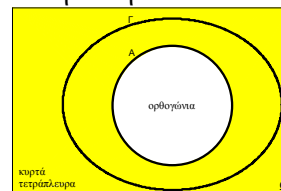
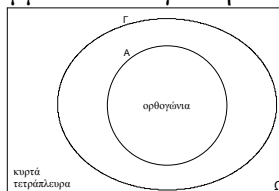
$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Με βασικό σύνολο Ω , το σύνολο των κυρτών τετραπλεύρων, και σύνολο A το σύνολο των ορθογώνιων, η **ισοδύναμη έκφραση** στο «χώρο» των συνόλων, για το παραπάνω ερώτημα, είναι αν το σύνολο των τετραπλεύρων που περιγράφεται στο σχήμα είναι ίσο με A ή με A' .

Θεωρήσαμε, ότι οι πληροφορίες που δίνονται με «συμβολισμό», «μιλάνε» για το **σύνολο** Γ των (κυρτών) τετράπλευρων που έχουν δύο **τουλάχιστον** ορθές γωνίες. Έτσι, προφανώς το σύνολο A , είναι υποσύνολο του Γ ($A \subseteq \Gamma$), και επομένως τα διαγράμματα Venn για την περίπτωση αυτή είναι:

Με **κίτρινο χρώμα**, οριοθετείται το συμπλήρωμα του συνόλου A , δηλαδή το **σύνολο A'** , των κυρτών τετραπλεύρων που **δεν είναι ορθογώνια**.

Προφανώς το Γ δεν είναι ίσο ούτε με το σύνολο A , ούτε με το συμπλήρωμα του A , σύνολο A' ($\Gamma \neq A$ και $\Gamma \neq A'$).



Σχόλιο: Οι Ερωτήσεις Κατανόησης, δε συνοδεύονται από «prospectus», με την έννοια των «οδηγιών χρήσης». Έτσι, εμείς προσπαθήσαμε να αντιληφθούμε «τι παίζει», από τα «συμφραζόμενα», και παρατηρώντας το διπλανό σχήμα είπαμε:

α) Πρέπει να θεωρήσουμε δεδομένη τη συνέπεια, με την έννοια ότι αυτό που εννοείται, είναι το ίδιο για όλες τις ερωτήσεις και τα σχήματα.

β) Το αν οι πληροφορίες υπονοούν το «**τουλάχιστον**», όπως είναι λογικό, ή το «**μόνο ή ακριβώς**», φαίνεται από το σχήμα της 1.ι). (δ), όπου η πληροφορία «**το τετράπλευρο έχει ακριβώς τρεις ορθές γωνίες**» είναι **απαράδεκτη**, αφού το τετράπλευρο που έχει εξασφαλίσει τρεις ορθές γωνίες, σίγουρα έχει και τέταρτη ορθή, αφού είναι ορθογώνιο (3^ο κριτήριο στα ορθογώνια).

γ) Συνδυάζοντας τις δύο πρώτες παρατηρήσεις, θα πρέπει να θεωρηθεί προφανές, ότι «ο ποιητής» πάντα εννοεί «**τουλάχιστον**», όταν δίνει πληροφορίες.

«Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος,

«**αν και μόνο αν**» οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.»

(3) **Μία ενιαία απόδειξη:** Έστω ένα παραλληλόγραμμο που δεν είναι ορθογώνιο, και επομένως από μια κορυφή του, τα ύψη του σχηματίζουν ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσες δύο διαδοχικές πλευρές του. Τα ορθογώνια τρίγωνα αυτά έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, αφού το ένα ζευγάρι των οξείων γωνιών τους: (α) είναι οι ίσες απέναντι οξείες γωνίες του παραλληλογράμμου, αν η κορυφή που διαλέξαμε είναι κορυφή αμβλείας γωνίας, ενώ αν η κορυφή που επιλέξαμε είναι κορυφή οξείας γωνίας, (β) είναι ίσες γωνίες, ως συμπληρωματικές της γωνίας αυτής.

Το παραλληλόγραμμο θα είναι ρόμβος, «**αν και μόνο αν**», είναι ίσες δύο διαδοχικές πλευρές του.

Για να είναι ίσες δυο διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου, «**πρέπει και αρκεί**», να είναι ίσα τα αντίστοιχα ορθογώνια τρίγωνα που περιγράψαμε παραπάνω, αφού αυτές οι διαδοχικές πλευρές είναι οι υποτείνουσές τους. Για να είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα αυτά, «**πρέπει και αρκεί**», να έχουν ένα ζευγάρι ίσων κάθετων πλευρών, αφού η ισότητα των οξείων γωνιών τους είναι δεδομένη. Για να έχουν τα ορθογώνια τρίγωνα αυτά, ένα ζευγάρι ίσων κάθετων πλευρών, «**πρέπει και αρκεί**», να είναι ίσα τα δύο ύψη του παραλληλογράμμου, που περιγράψαμε παραπάνω σαν κάθετες πλευρές των ορθογώνιων τριγώνων, και για να συμβεί αυτό, «**πρέπει και αρκεί**», οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου να είναι ίσες. Τέλος, όταν το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, τότε οι πλευρές του είναι και ύψη, και επομένως η ισότητα δύο διαδοχικών πλευρών του, είναι ισοδύναμη με την ισότητα των αποστάσεων, των απέναντι πλευρών του παραλληλογράμμου.