

Ασκήσεις -Εφαρμογές των παραλληλογράμμων στα τρίγωνα

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στα διπλανά σχήματα να υπολογίσετε τα x και y .

(a) Επειδή Δ, E μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$,

$$\text{και επομένως } x = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow 2x = x+2 \Leftrightarrow 2x-x=2 \Leftrightarrow x=2$$

(b) Επειδή Δ μέσο της AG και $\Delta E \parallel B\Gamma$, επομένως το E είναι μέσο

$$\text{της } AB, \text{ συνεπώς } x = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ και } 2,5 = \Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{y}{2},$$

δηλαδή $y = 2 \cdot 2,5 = 5$.

(c) Εδώ θα πρέπει να συμπληρώσουμε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$.

Επειδή $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$, και ορίζουν δύο ίσα τμήματα στη δ_1 , επομένως θα ορίζουν ίσα τμήματα και στη δ_2 , δηλαδή $x = 3,5$. Αφού $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$, και ορίζουν τρία ίσα τμήματα στη δ_2 , επομένως θα ορίζουν ίσα τμήματα και στη δ_1 , δηλαδή $y = 3$.

(d) Επειδή η AM είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, επομένως $AM = x = y = MB$, άρα το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές με οξεία γωνία ίση με 60° , δηλαδή ισόπλευρο, και συνεπώς $y = x = 4$.

(e) Επειδή το Δ είναι μέσο της AG , και $\Delta E \parallel AB$, επομένως το E είναι μέσο $B\Gamma$, δηλαδή $E\Gamma = 5$, και $x = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Προφανώς $ME = M\Gamma$, δηλαδή η y είναι διάμεσος στο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$, και αφού $E\Delta \parallel BA$, και $BA \perp AG$, επομένως $E\Delta \perp AG$, άρα η y είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta E\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, και συνεπώς $y = \frac{E\Gamma}{2} = \frac{5}{2}$.

(f) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η AM , είναι η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, και συνεπώς $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM = 5$. Επειδή AM και $\Gamma\Delta$ είναι προφανώς διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$, επομένως το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, και έτσι: $x = A\Theta = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}$ και $y = \Theta M = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$.

2. Στα διπλανά σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω .

(i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η κάθετη πλευρά AG , είναι

το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, επομένως η απέναντί της οξεία $\hat{B}$, είναι ίση με 30° , και συνεπώς $\hat{\omega} = 60^\circ$, ως συμπληρωματική της $\hat{B}$.

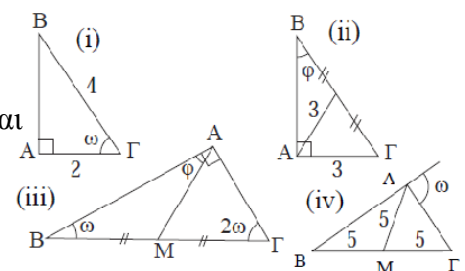
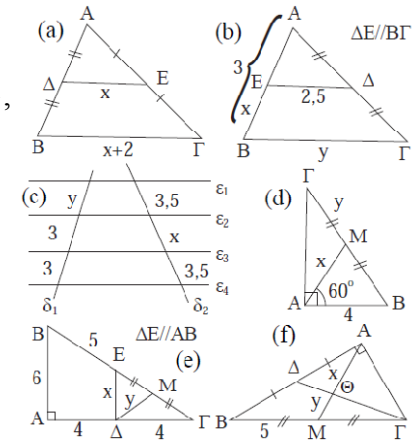
(ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η κάθετη πλευρά AG , είναι το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, αφού είναι ίση με τη διάμεσο που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας, και επομένως, για την απέναντί της οξεία γωνία θα έχουμε: $\hat{\varphi} = \hat{B} = 30^\circ$.

(iii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), προφανώς $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\omega} + 2\hat{\omega} = 90^\circ$, και επομένως $\hat{\omega} = 30^\circ$.

Η AM , είναι η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, συνεπώς $AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM$,

και επομένως στο ισοσκελές τρίγωνο MAB θα έχουμε: $\hat{\varphi} = \hat{\omega} = 30^\circ$.

(iv) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος AM είναι προφανώς το μισό της πλευράς $B\Gamma$ στην οποία αντιστοιχεί, επομένως η $B\Gamma$ είναι υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), και έτσι $\hat{\omega} = \hat{A}_{\varepsilon\zeta} = 90^\circ$.

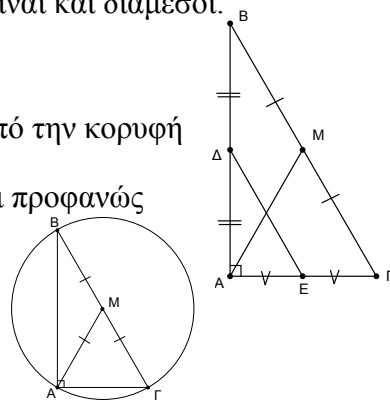


3. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;

Απάντηση: Προφανώς τέτοιο τρίγωνο είναι το ισόπλευρο, όπου τα ύψη είναι και διάμεσοι.

4. Στο διπλανό σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα $AM = \Delta E$.

Απάντηση: $AM = \frac{B\Gamma}{2} = \Delta E$, αφού η AM, είναι η διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας, του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), και η ΔE έχει προφανώς για άκρα της, τα μέσα Δ , E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



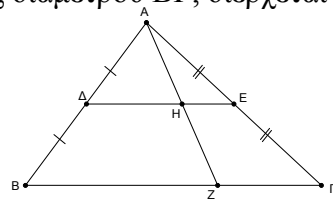
5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), ο κύκλος διαμέτρου $B\Gamma$, διέρχεται από το A; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση: Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε $MB = M\Gamma = \rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου, και η AM, σαν διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας, του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, δηλαδή $AM = \rho$. Έτσι, ο κύκλος διαμέτρου $B\Gamma$, διέρχεται από το A, αφού το A απέχει από το κέντρο M, όσο η ακτίνα ρ .

Ασκήσεις Εμπέδωσης

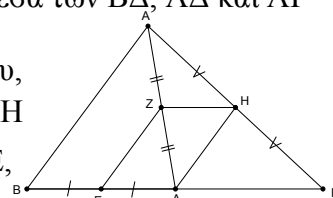
1. Αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ και Z τυχαίο σημείο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η ΔE διχοτομεί την AZ .

Απόδειξη: Επειδή Δ , E είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ αντίστοιχα, επομένως $\Delta E \parallel B\Gamma$ (Θεώρημα I σελ. 109). Στο τρίγωνο ABZ , ανεξάρτητα ποιο είναι το **εσωτερικό** σημείο Z της $B\Gamma$, η ΔE τέμνει την AZ στο H , το οποίο είναι μέσο της AZ , αφού το Δ είναι μέσο της AB και $\Delta H \parallel BZ$ (Θεώρημα II σελ. 110), και επομένως η ΔE διχοτομεί την AZ , στο H . Στις ειδικές περιπτώσεις, που το Z ταυτίζεται με τα άκρα του $B\Gamma$, εάν $Z \equiv B$, τότε το H ταυτίζεται με το Δ , που είναι μέσο του AB , δηλαδή του AZ , και αν $Z \equiv \Gamma$, τότε το H ταυτίζεται με το E , που είναι μέσο του $A\Gamma$, δηλαδή του AZ .



2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$. Αν E , Z και H είναι τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.

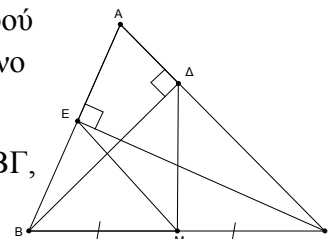
Απόδειξη: Το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο, αφού δύο απέναντι πλευρές του, είναι ίσες και παράλληλες ($ZH \parallel \Delta E$). $ZH \parallel \Delta E$, αφού στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, Z , H είναι μέσα των πλευρών $A\Delta$, $A\Gamma$ αντίστοιχα (Θεώρημα I σελ. 109), και $ZH \parallel \Delta E$, αφού από το προαναφερθέν θεώρημα $ZH = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\Delta B}{2} = \Delta E$. (Δ μέσο της $B\Gamma$, και E μέσο της $B\Delta$)



Σχόλιο: Θα μπορούσαμε να είχαμε επικαλεστεί το γεγονός ότι $ZE \parallel H\Delta$, αφού καθεμιά τους είναι παράλληλη και ίση με το μισό της AB , η μεν ZE στο τρίγωνο ΔAB , και η $H\Delta$ στο τρίγωνο ΓAB . (Θεώρημα I σελ. 109)

3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE . Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

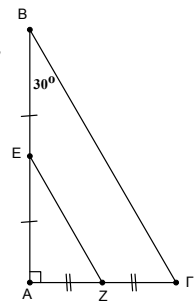
Απόδειξη: Στα ορθογώνια τρίγωνα $EB\Gamma$ ($\hat{E} = 90^\circ$), και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$), τα EM και ΔM , είναι αντίστοιχα οι διάμεσοι που άγονται από την κορυφή της ορθής γωνίας, στην υποτείνουσά τους $B\Gamma$, που είναι κοινή. Επομένως $EM = \frac{B\Gamma}{2} = \Delta M$. (Θεώρημα I σελ. 114)



Σχόλιο: Γνωρίζουμε «την ιδιαιτερότητα» των υψών, αφού γνωρίζουμε ότι τέμνουν τις αντίστοιχες πλευρές, όταν αυτές περιέχουν οξεία γωνία, ταυτίζονται με τις πλευρές, όταν αυτές περιέχουν ορθή γωνία, και τέμνουν τις αντίστοιχες πλευρές στις προεκτάσεις τους, όταν αυτές περιέχουν αμβλεία γωνία. Όμως, στην περίπτωση μας, το σχήμα μπορεί να θεωρηθεί «αντιπροσωπευτικό» των διαφορετικών περιπτώσεων, αφού δεν επικαλεστήκαμε την ιδιαιτερότητά του, αλλά μόνο το κοινό χαρακτηριστικό όλων των περιπτώσεων, δηλαδή την ύπαρξη ορθογωνίων τριγώνων με κοινή υποτείνουσα.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EZ = A\Gamma$.

Απόδειξη: $EZ = \frac{B\Gamma}{2} = A\Gamma$, το μεν EZ είναι το μισό της $B\Gamma$ (Θεώρημα I σελ. 109), ενώ το $A\Gamma$ είναι το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$ (Πόρισμα σελ. 114).

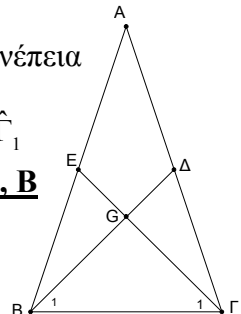


5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, (ίσες διάμεσοι) να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.

Απόδειξη: Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, με $B\Delta = \mu_\beta = \mu_\gamma = \Gamma E$, και G το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Το τρίγωνο $GB\Gamma$ είναι ισοσκελές, αφού $\mu_\beta = \mu_\gamma \Rightarrow \frac{2}{3}\mu_\beta = \frac{2}{3}\mu_\gamma \Rightarrow BG = \Gamma G$, κατά συνέπεια

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, επομένως τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma B$ είναι ίσα (Π-Γ-Π), αφού $\Delta B = E\Gamma$, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και $B\Gamma = B\Gamma$ ($B\Gamma$ κοινή), και συνεπώς οι γωνίες $\Delta\Gamma B$ και $E\Gamma B$, **δηλαδή οι γωνίες Γ, B του τριγώνου $AB\Gamma$** , είναι ίσες σαν αντίστοιχες γωνίες των ίσων τριγώνων. Έτσι, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, με $\beta = \gamma$, αφού οι προσκείμενες γωνίες στην πλευρά $B\Gamma$ είναι ίσες ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$).



Σχόλιο: Από τα ίσα τρίγωνα $\Delta\Gamma B$ και $E\Gamma B$, προκύπτει το συμπέρασμα ότι και οι τρίτες τους πλευρές είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma\Delta = BE$, και επομένως $\beta = \gamma$, αφού τα μισά τους είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), και το ύψος του AD .

i) Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90^\circ$.

ii) Αν M είναι το μέσο της EZ , να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.

Απόδειξη: (i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAB ($\hat{A} = 90^\circ$), η ΔE σαν διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας AB , δηλαδή $\Delta E = EA$, επομένως το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές, και συνεπώς $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ (1). Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η ΔZ σαν διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας $A\Gamma$, δηλαδή $\Delta Z = ZA$, επομένως το τρίγωνο ZAD είναι ισοσκελές, και συνεπώς $\hat{\Delta}_2 = \hat{A}_2$ (2).

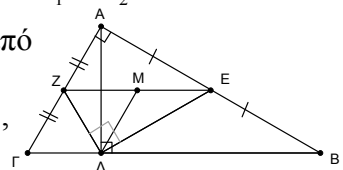
Έτσι, προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $E\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$.

(ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEZ ($\hat{A} = 90^\circ$), η ΔM σαν διάμεσος που άγεται από

την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι $\Delta M = \frac{EZ}{2}$, και αφού στο $\Delta B\Gamma$, $EZ = \frac{B\Gamma}{2}$,

επομένως $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.

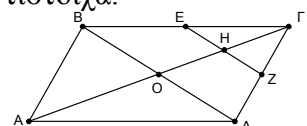
* τα E, Z , είναι μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα (Θεώρημα I σελ. 109).



2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E και Z των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

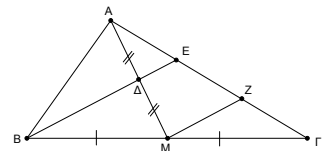
Αν η EZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο H , να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.

Απόδειξη: Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$, επειδή τα E, Z είναι μέσα των πλευρών $\Gamma B, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, έχουμε $EZ \parallel B\Delta$ (Θεώρημα I σελ. 109). Έτσι, στο τρίγωνο $\Gamma B O$, το H είναι μέσο της ΓO , αφού $E H \parallel B O$, και E μέσο της ΓB (Θεώρημα II σελ. 110), και συνεπώς $\Gamma H = \frac{\Gamma O}{2}$. Όμως, $\Gamma O = \frac{A\Gamma}{2}$, αφού $A\Gamma, B\Delta$ διχοτομούνται, σαν διαγώνιοι του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$, και έτσι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.



6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, Δ είναι το μέσο της διαμέσου AM .

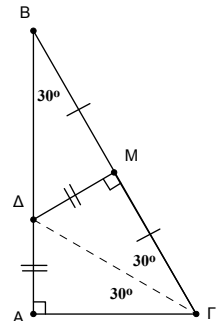
Αν η $B\Delta$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι $AE = \frac{E\Gamma}{2}$.



Απόδειξη: Στο τρίγωνο ΓBE , αν Z μέσο της ΓE , τότε προφανώς η MZ θα είναι παράλληλη στην EB . Στο τρίγωνο AMZ , αφού $\Delta E \parallel MZ$ και Δ μέσο της AM , επομένως το E θα είναι μέσο της AZ , άρα $AE = EZ$, και επειδή $EZ = \frac{E\Gamma}{2}$ (Z μέσο της ΓE), κατά συνέπεια θα έχουμε $AE = \frac{E\Gamma}{2}$.

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 30^\circ$, η κάθετος στο μέσο M της υποτείνουσας $B\Gamma$, τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Να αποδείξετε ότι: (i) $M\Delta = A\Delta$, (ii) $M\Delta = \frac{AB}{3}$.

Απόδειξη: (i) Το σημείο Δ , σα σημείο της μεσοκαθέτου της $B\Gamma$, ισαπέχει από τα άκρα του $B\Gamma$, άρα $\Delta B = \Delta \Gamma$, επομένως $\hat{\Delta} \hat{M} = \hat{B} = 30^\circ$, και συνεπώς $\hat{\Delta} \hat{A} = 30^\circ$, αφού η $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, σα συμπληρωματική της $\hat{B} = 30^\circ$, στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Έτσι το σημείο Δ , σα σημείο της διχοτόμου της $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{\Gamma}$, και συνεπώς $\Delta M = \Delta A$.

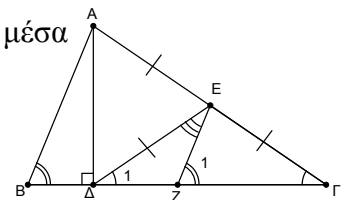


(ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο MBA , $M\Delta = \frac{AB}{2}$, σαν κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° . Έτσι $\Delta B = 2 \cdot M\Delta$, και $AB = A\Delta + \Delta B = M\Delta + 2 \cdot M\Delta = 3 \cdot M\Delta$ και συνεπώς $M\Delta = \frac{AB}{3}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του, $A\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $\hat{\Delta} \hat{E} Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

Απόδειξη: $\hat{\Delta} \hat{E} Z = \hat{B} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Delta} \hat{E} Z + \hat{\Gamma} = \hat{B}$ και επομένως αρκεί να αποδειχθεί η σχέση $\hat{\Delta} \hat{E} Z + \hat{\Gamma} = \hat{B}$. Για να ισχύει η σχέση αυτή, στο τρίγωνο ΔEZ που έχουμε $\hat{\Delta} \hat{E} Z + \hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, αρκεί $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{Z}_1 = \hat{B}$. Επειδή το ΔE είναι διάμεσος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου $\Delta \hat{A} \hat{\Gamma}$, ισχύει $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$, επομένως $\Delta E = E\Gamma$ και συνεπώς $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$, στο ισοσκελές $\Delta \hat{E} \hat{\Gamma}$.



Στο τρίγωνο ΓAB , το EZ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓA και ΓB , επομένως είναι παράλληλο στην AB και συνεπώς $\hat{Z}_1 = \hat{B}$, «ως εντός εκτός και επί τα αυτά».

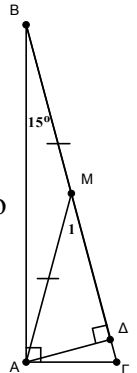
Αφού αποδείξαμε τις σχέσεις που **αρκεί** να ισχύουν για να ισχύει και το ζητούμενο, μπορούμε να πούμε ότι ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

Σχόλιο: Το σχήμα μπορεί να θεωρηθεί «αντιπροσωπευτικό» των διαφορετικών περιπτώσεων, όπου η γωνία B μπορεί να είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία, αφού δεν επικαλεστήκαμε την ιδιαιτερότητά του.

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε το ύψος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{B} = 15^\circ$, τότε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$, και αντίστροφα, δηλαδή ότι: $\hat{B} = 15^\circ \Leftrightarrow A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$.

Απόδειξη: Αν M μέσο της $B\Gamma$, τότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ (2), δηλαδή $AM = MB$, επομένως το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές, και συνεπώς $\hat{M}_1 = 2\hat{B}$ (1), σαν εξωτερική γωνία, του τριγώνου MBA .

Έτσι, $\hat{B} = 15^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{M}_1 = 30^\circ \stackrel{\text{Πόρισμα σελ. 114}}{\Leftrightarrow} A\Delta = \frac{AM}{2} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$.



Σχόλιο: Επειδή η γωνία M_1 είναι διπλάσια της γωνίας B , προφανώς είναι ίση με 30° , «αν και μόνο αν» η γωνία B είναι ίση με 15° . Επίσης, επειδή η AM είναι το μισό της $B\Gamma$, η $A\Delta$ είναι το μισό της AM , δηλαδή το μισό του μισού της $B\Gamma$, «αν και μόνο αν» είναι το ένα τέταρτο της $B\Gamma$.