

Εφαπτομένη καμπύλης

1. Η εφαπτομένη του κύκλου

Έστω κύκλος (O, ρ) , δηλαδή κύκλος με κέντρο το σημείο O και ακτίνα με μήκος ρ .

Ορισμός: «Όταν ευθεία και κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο A , η ευθεία λέγεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A »

Σχόλια: (1) Η έννοια της εφαπτομένης, είναι «τοπική» έννοια, αφού αναφέρεται σε συγκεκριμένο σημείο του κύκλου.

(2) Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A , είναι κάθετη στην ακτίνα OA .

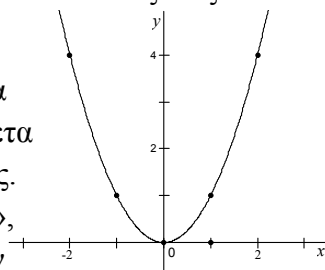
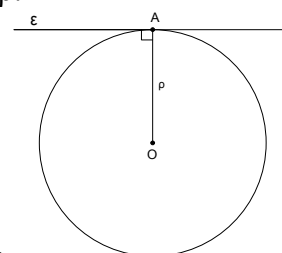
(3) Όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε μία εφαπτομένη ενός κύκλου σε σημείο A , αρκεί να κατασκευάσουμε ευθεία που να διέρχεται από το A , και να είναι κάθετη στην ακτίνα OA .

(4) Η εφαπτομένη μας βοηθά να αντιληφθούμε μια διαδικασία, όπου φωτεινή ακτίνα από το κέντρο O , ανακλάται στον κύκλο, και επιστρέφει στο O , αφού οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι 0 .

(5) Η «διαισθητική» αντίληψη της έννοιας εφαπτομένη, μας επιτρέπει να πούμε ότι «ο άξονας των x » είναι εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2$,

και να απορρίψουμε «τον άξονα των y ». Προφανώς, ο «ο άξονας των y » έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με την γραφική παράσταση, και αν είχαμε κάνει αυθαίρετα τη γενίκευση του ορισμού της εφαπτομένης κύκλου, θα είχαμε οδηγηθεί σε λάθος.

(6) Η παρατήρηση που κάναμε, μας υποχρεώνει να δώσουμε έναν άλλο «ορισμό», για την εφαπτομένη καμπυλών γενικά. Προφανώς, οι γνώσεις μας δεν επαρκούν για έναν αυστηρό ορισμό, και έτσι θα πρέπει να αρκεστούμε σε μια πρώτη, κυρίως «διαισθητική», γνωριμία με νέες προσεγγίσεις.



2. Η εφαπτομένη του κύκλου «αλλιώς»

Σε κύκλο (O, ρ) , έστω ε_1 τέμνουσα του κύκλου και A_1, K τα κοινά

σημεία της με τον κύκλο. Έστω A_2 το μέσο του $\widehat{A_1K}$, το οποίο βρίσκεται σαν τομή του κύκλου με τη μεσοκάθετο της χορδής A_1K . Τώρα μπορούμε να φανταστούμε την τέμνουσα ε_2 του κύκλου, που έχει κοινά σημεία με

τον κύκλο τα A_2, K . Ομοίως, αν A_3 το μέσο του $\widehat{A_2K}$, ε_3 θα είναι η τέμνουσα

του κύκλου που έχει κοινά σημεία με τον κύκλο τα A_3, K , σε μια διαδοχή, απείρου πλήθους ευθειών.

Επειδή κάθε τόξο έχει το μέσο του, προκύπτει η βεβαιότητα ύπαρξης μιας «ακολουθίας» τεμνουσών ευθειών του κύκλου, από τα «δεξιά», και ομοίως η αντίστοιχη από τα «αριστερά».

Θα λέμε, ότι οι δύο «ακολουθίες» των ευθειών, έχουν για κοινό «όριο» τους, την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο K , δηλαδή την ε .

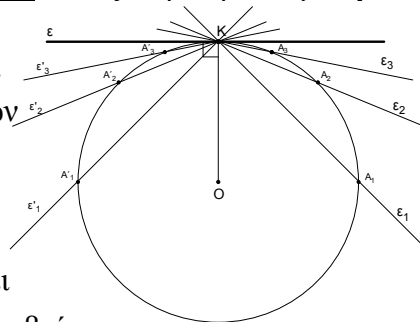
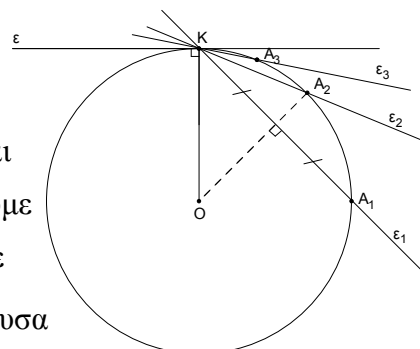
Σχόλια: (1) Είπαμε ακολουθία ευθειών, αφού μπήκαμε στη διαδικασία αρίθμησης κάποιων ευθειών, δηλαδή στη διαδικασία αντιστοίχισης των φυσικών αριθμών σε ένα σύνολο ευθειών.

(2) Προφανώς, όλες οι ευθείες των ακολουθιών, εκ κατασκευής, είναι διαφορετικές από την εφαπτομένη, όμως η εφαπτομένη δεν έχει χώρο «να αναπνεύσει», αφού για κάθε ευθεία που διέρχεται από το K , και είναι διαφορετική της ε , υπάρχουν άπειρες ευθείες από τις ακολουθίες μας, που βρίσκονται

ανάμεσα σε αυτήν και στην ε , και μάλιστα όλες από ένα δείκτη* και μετά.

Αυτή η τελευταία διαπίστωση, μας δίνει το δικαίωμα, βάσει ορισμού, να μιλήσουμε για όριο.

* Στις ακολουθίες των ευθειών $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots\}$ και $\{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \dots\}$, δείκτες είναι οι φυσικοί αριθμοί, $1, 2, 3, \dots$



3. Η εφαπτομένη της έλλειψης

Έστω K σημείο της έλλειψης με εστίες E_1, E_2 , και ϵ' η διχοτόμος της E_1KE_2 .

Η κάθετη της ϵ' στο K, είναι εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο K.

Σχόλιο: (1) Προφανώς, μπορούμε να ορίσουμε την εφαπτομένη της έλλειψης, σαν κοινό όριο δύο ακολουθιών τεμνουσών.

(2) Το O είναι μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων E_1E_2, AA' και BB' . Αν οι εστίες E_1, E_2 «ξεκινήσουν με την ίδια ταχύτητα να μετακινούνται προς το O», η έλλειψη θα θυμίζει όλο και πιο πολύ κύκλο. Όταν οι δυο εστίες συναντηθούν στο O, τότε θα έχουμε κύκλο, με κέντρο το O. ($E_1 \equiv O \equiv E_2$)

(3) Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο, έχει σχήμα έλλειψης, με τον Ήλιο να βρίσκεται σε μία εστία.

(4) **Για κάθε σημείο K** της έλλειψης, ισχύει $[E_1K] + (KE_2) = (AA')$. Έτσι, αν φανταστούμε φωτεινή ακτίνα να ξεκινά από μία εστία και να ανακλάται στην έλλειψη, πάντα καταλήγει στην άλλη εστία, αφού είναι εξασφαλισμένο ότι ακολουθεί τη συντομότερη διαδρομή, όπου οι γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης είναι ίσες.

4. Η έννοια της εφαπτομένης, είναι «τοπική» έννοια.

Στο διπλανό σχήμα, υπάρχουν δυο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά, η κοινή τους εφαπτομένη ϵ_2 , και η εφαπτομένη ϵ_1 του ενός κύκλου στο σημείο A, η οποία είναι τέμνουσα στον άλλο κύκλο.

Θα «κρύψουμε» κομμάτια του σχήματος, παρουσιάζοντάς τα με διακεκομμένη γραμμή, και επομένως «σχήμα» θα θεωρείται κάθε φορά, αυτό που θα φαίνεται με συνεχή έντονη γραμμή.

(1) Η καμπύλη μας στο σχήμα (α), είναι η έντονη γραμμή, που έχει το σημείο A για άκρο. Την ϵ_1 την «γνωρίσαμε» σαν εφαπτομένη του κύκλου με κέντρο K, στο σημείο A, και προφανώς το ότι διαγράψαμε το μεγαλύτερο μέρος του κύκλου, δεν δικαιολογεί την αλλαγή της σχέσης τους τοπικά. Έτσι, η ϵ_1 είναι εφαπτομένη της καμπύλης στο A.

(2) Η καμπύλη μας στο σχήμα (β), είναι η έντονη γραμμή. Προφανώς η ϵ_1 , που είναι εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A, την τέμνει στο σημείο H, και επομένως έχει δυο κοινά σημεία με την καμπύλη.

(3) Η καμπύλη μας στο σχήμα (γ), (έντονη γραμμή) έχει εφαπτομένη στο σημείο E την ϵ_2 , αφού η σχέση της με τους δύο κύκλους δεν άλλαξε τοπικά, παρότι τους «κουτσουρέψαμε».

(4) Η καμπύλη μας στο σχήμα (δ), έχει εφαπτομένη στο σημείο E την ϵ_2 , ομοίως με τα προηγούμενα.

Σχόλιο: Τα τελευταία παραδείγματα, θα μας φανούν χρήσιμα στη μελέτη συναρτήσεων, όπου καμπύλες σαν τις παραπάνω, θα είναι τμήματα γραφικών παραστάσεων. Επειδή τα παραδείγματα αυτά μας «ξενίζουν», καλό είναι να τα σκεφτούμε, προσεγγίζοντας τα με τις ακολουθίες των τεμνουσών. Επίσης το «σημείο επαφής», καλό είναι να το θεωρούμε σαν κοινό «διπλό σημείο», αφού η εφαπτομένη προκύπτει σαν φορέας «χορδής» που συρρικνώθηκε σε μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, όταν τα δυο άκρα της «έγιναν ένα».

5. Γραφική παράσταση και «κοινό διπλό σημείο»

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$ έχει γραφική παράσταση «παραβολή», που δεν έχει κοινό σημείο με «τον άξονα των x», αφού η διακρίνουσα του δευτεροβάθμιου τριωνύμου είναι αρνητική ($\Delta = -4 < 0$), και συνεπώς δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Όμως η εξίσωση $x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ έχει δυο λύσεις ίσες με 1, δηλαδή «διπλή λύση» το 1. Έτσι, η γραφική παράσταση έχει κοινό «διπλό σημείο» το (1,1), με την ευθεία $y = 1$, η οποία είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης.

