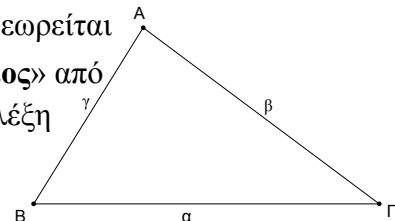


Η τριγωνική ανισότητα

Θεώρημα §3.12: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο, και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Σχόλια: (1) «Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο»

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, συμβολικά γράφουμε: $BΓ < ΒΑ + ΑΓ \Leftrightarrow \alpha < \gamma + \beta$, και θεωρείται αυτονόητο, αφού όλοι «διαισθητικά» θεωρούν ότι ο «συντομότερος δρόμος» από το Β στο Γ, είναι «απευθείας» και όχι «μέσω Α». Για να «τιμήσουμε» τη λέξη «κάθε» του θεωρήματος, γράφουμε χωρίς προβληματισμό, τις άλλες δυο μορφές: $ΑΒ < ΑΓ + ΓΒ \Leftrightarrow \gamma < \beta + \alpha$ και $ΓΑ < ΓΒ + ΒΑ \Leftrightarrow \beta < \alpha + \gamma$.



Παρατηρήστε ότι, γράφουμε τα σημεία με σειρά που να δείχνει τις δύο άνισες διαδρομές, «με την ίδια αφετηρία και το ίδιο τέρμα», για να ταιριάξουμε με τη «διαισθητική» αντίληψη του θεωρήματος.

(2) Στα Μαθηματικά, αποδεικνύουμε αυτό που οι άλλοι θεωρούν αυτονόητο, κυρίως για να έχουμε ακλόνητο επιχείρημα, όταν θα έρθουν τα δύσκολα και θα το χρειαστούμε, αφήνοντας χωρίς απόδειξη, μόνο τις «αρχικές αλήθειες», δηλαδή τα αξιώματα. Ο «κατάλογος των αξιωμάτων», «υπακούει στην ανάγκη», έχει συνταχθεί με «οικονομία», έτσι κανένα αξίωμα δε μπορεί να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα, δηλαδή περιέχει τις εντελώς απαραίτητες «αρχικές αλήθειες», που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(3) Μας προβληματίζει το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος: «Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά των άλλων δύο», αφού η διαφορά είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης, και εμείς γνωρίζουμε ότι δε μπορούμε να αφαιρέσουμε από ένα ευθύγραμμο τμήμα, ένα μεγαλύτερό του. Έτσι, για να διατυπώσουμε συμβολικά, απαιτούμε τη «διάταξη» των πλευρών (στη σειρά σε σχέση με το μέγεθος).

Στη «διάταξη» $\alpha > \beta > \gamma$ γράφουμε: $\boxed{\beta - \gamma < \alpha, \alpha - \beta < \gamma \text{ και } \alpha - \gamma < \beta}$. (ομοίως για $\alpha \geq \beta \geq \gamma$)

Προφανώς, για να υποστηρίξουμε τη σχέση $\beta - \gamma < \alpha$, χρησιμοποιώντας το πρώτο σκέλος του θεωρήματος, είχαμε να διαλέξουμε ανάμεσα στις σχέσεις $\gamma < \beta + \alpha$, $\beta < \alpha + \gamma$, αφού αυτές διαθέτουν το α «στη σωστή μεριά», δηλαδή στη μεγαλύτερη. Γνωρίζοντας ότι $\beta > \gamma$, διαλέξαμε την $\beta < \alpha + \gamma$ έτσι ώστε η μεγαλύτερη από τις β, γ , πλευρά β, να υποδεχθεί τη μικρότερη πλευρά γ, όταν αυτή θα μετακινηθεί από το δεύτερο μέλος, για να αφαιρεθεί από το πρώτο μέλος της ανισότητας.

Με αυτήν τη λογική: $\boxed{\alpha < \gamma + \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma < \beta}$, $\boxed{\alpha < \gamma + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < \gamma}$ και $\boxed{\beta < \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta - \gamma < \alpha}$.

(4) Αν μας δηλώσουν ότι τα α, β, γ αντιπροσωπεύουν τα μέτρα των πλευρών, δηλαδή τα μήκη των πλευρών (που είναι θετικοί αριθμοί), τότε χωρίς να λάβουμε υπόψη τη «διάταξη» των πλευρών γράφουμε:

$\boxed{\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma \text{ και } \gamma - \beta < \alpha < \beta + \gamma}$, $\boxed{\gamma - \alpha < \beta < \gamma + \alpha \text{ και } \alpha - \gamma < \beta < \gamma + \alpha}$ και $\boxed{\alpha - \beta < \gamma < \alpha + \beta \text{ και } \beta - \alpha < \gamma < \alpha + \beta}$.

Στα παραπάνω, υπάρχουν οι ειδικές περιπτώσεις σχέσεων, που είναι προφανείς, και ισχύουν ανεξάρτητα από το θεώρημα. Έτσι για παράδειγμα, αν $\beta = \gamma$, τότε $\beta - \gamma = 0 = \gamma - \beta$, και επομένως το ότι $\beta - \gamma = 0 < \alpha$ και $\gamma - \beta = 0 < \alpha$ ισχύει ανεξάρτητα από το θεώρημα, αφού ο θετικός α είναι εξ ορισμού μεγαλύτερος από το 0 . Επίσης αν $\beta > \gamma$, τότε η σχέση $\beta - \gamma < \alpha$, είναι μια σχέση που απορρέει από το θεώρημα και μας κάνει πιο ισχυρούς, ενώ η σχέση $\gamma - \beta < \alpha$ είναι σωστή μεν, αφού ο αρνητικός $\gamma - \beta$ είναι προφανώς μικρότερος από τον θετικό α , αλλά δεν μας προσφέρει τίποτα πιο ισχυρό.

Στην περίπτωση μας (όπου τα α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών), αν θέλουμε να καταγράψουμε με «οικονομία», μόνο όσα απορρέουν από το θεώρημα και επομένως μας κάνουν πιο ισχυρούς τότε γράφουμε:

$\boxed{|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma}$, $\boxed{|\gamma - \alpha| < \beta < \gamma + \alpha}$ και $\boxed{|\alpha - \beta| < \gamma < \alpha + \beta}$, αφού «εξ ορισμού της» η απόλυτη τιμή,

είναι μη αρνητικός αριθμός, και επομένως, για παράδειγμα το $|\beta - \gamma|$, «δεν έχει άλλη επιλογή», από το να ισούται με τη διαφορά, όπου (για $\beta \neq \gamma$) από τον μεγαλύτερο έχει αφαιρεθεί ο μικρότερος.

Εφαρμογές στις ανισοτικές σχέσεις

Εφαρμογή 4^η (σελίδα 62): Θα κάνουμε μια «δεύτερη ανάγνωση».

Έστω ευθεία ε , σημεία B, Γ έξω από αυτήν και στο ίδιο ημιεπίπεδο, Δ, A οι προβολές των Γ, B αντίστοιχα, (πάνω) στην ε , και Λ εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Delta$.

Προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα BA , κατά ίσο τμήμα AB' .

Να αποδειχθεί ότι το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $\Gamma\Lambda B$, είναι όσο το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $\Gamma\Lambda B'$.

Απόδειξη: Έστω Λ εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Delta$.

Επειδή $BA = AB'$ και $BB' \perp \varepsilon$, συνεπώς η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος BB' , και επομένως το σημείο Λ , σαν σημείο της μεσοκάθετου, ισαπέχει από τα άκρα του BB' , δηλαδή $\Lambda B = \Lambda B'$. Έτσι, $(\Lambda B) = (\Lambda B') \Rightarrow (\Gamma\Lambda) + (\Lambda B) = (\Gamma\Lambda) + (\Lambda B')$, και συνεπώς το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $\Gamma\Lambda B$, είναι όσο το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $\Gamma\Lambda B'$.

Σχόλια: (1) Το σημείο B' , όπως θυμόμαστε από το Γυμνάσιο, λέγεται συμμετρικό του B , ως προς την ε .

(2) Προφανώς οι γωνίες Λ_1, Λ_2 , είναι ίσες μεταξύ τους.

(3) Έστω M , το σημείο στο οποίο τέμνει η ευθεία $\Gamma B'$ την ευθεία ε .

Όποια θέση κι αν πάρει το Λ , ανάμεσα στα Δ, A , η τεθλασμένη γραμμή $\Gamma\Lambda B$, «δε θα γίνει ποτέ ευθεία», αφού η γωνία $\Gamma\Lambda B$ είναι μικρότερη από την ευθεία γωνία με κορυφή Λ και πλευρές, τις αντικείμενες ημιευθείες που προκύπτουν στην ε . Δε συμβαίνει το ίδιο με την γραμμή $\Gamma\Lambda B'$, αφού όταν το Λ ταυτιστεί με το M , «ευθυγραμμίζεται», και έτσι αποκτά το ελάχιστό της μήκος.

Η «αίσθηση» της ελάχιστης διαδρομής, ανάμεσα σε δύο σημεία, που μας οδήγησε να θεωρούμε αυτονόητο το θεώρημα της «τριγωνικής ανισότητας», δε θα μπορούσε ποτέ να μας βοηθήσει, να συγκρίνουμε τα μήκη των διαδρομών από το Γ στο B , «μέσω Λ », για τις διαφορετικές θέσεις που μπορεί να πάρει το Λ , στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος $A\Delta$.

Έτσι, από την «τριγωνική ανισότητα» στο $\triangle \Gamma\Lambda B'$, για κάθε Λ διαφορετικό του M , έχουμε $\Gamma\Lambda + \Lambda B' > \Gamma B'$, και συνολικά έχουμε τη σχέση: $\Gamma\Lambda + \Lambda B = \Gamma\Lambda + \Lambda B' > \Gamma B' = \Gamma M + MB' = \Gamma M + MB$.

Τέλος, μπορούμε να γράψουμε, ότι για κάθε Λ (εσωτερικό σημείο του $A\Delta$): $\Gamma\Lambda + \Lambda B \geq \Gamma M + MB$.

(4) Όταν το Λ ταυτιστεί με το M , και αν $M\chi$ κάθετος στην ευθεία ε :

έχουμε $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, από το ισοσκελές τρίγωνο MBB' , όπου το ύψος MA , είναι και διχοτόμος, $\hat{M}_2 = \hat{M}_3$, «ως κατακορυφήν», επομένως $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$,

και συνεπώς $\hat{M}_4 = \hat{M}_5$, ως συμπληρωματικές των ίσων $\hat{M}_3 = \hat{M}_1$.

(5) Στη θέση M , της ελάχιστης διαδρομής από το Γ , στο B «μέσω ε », οι γωνίες που σχηματίζουν οι $\Gamma M, BM$ με την $M\chi$ είναι ίσες. Στην οπτική, όπου μπορούμε να φανταστούμε την ΓM σαν φωτεινή ακτίνα, που ανακλάται στον καθρέπτη ε , και καταλήγει στο «μάτι» B , οι ίσες γωνίες M_4, M_5 (ίσες με ω), λέγονται γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης.

Έτσι έχουμε τον «νόμο της ανάκλασης»: «Η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης».

Ο νόμος της ανάκλασης απορρέει από την «αρχή του ελάχιστου χρόνου», που απλά λέει, ότι το φως με «οικονομία», ακολουθεί τη μικρότερη διαδρομή, που είναι και η συντομότερη.

