

Κατασκευές τριγώνων

Είδαμε τις τρεις βασικές κατασκευές τριγώνων, από τρία **κύρια στοιχεία** τους, όπου η μοναδικότητα της λύσης τεκμηριώνεται από τα αντίστοιχα τρία **κριτήρια ισότητας τριγώνων**. Έτσι, ξέρουμε να κατασκευάζουμε τρίγωνο, από δύο πλευρές του και την περιεχόμενη γωνία, από μία πλευρά του και τις δυο προσκείμενες της γωνίες, και από τις τρεις πλευρές του. Τώρα θα αξιοποιήσουμε τη γνώση αυτή για κατασκευές τριγώνων, όπου τα κύρια στοιχεία θα αντικατασταθούν σταδιακά, από δευτερεύοντα.

1. Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, από τις πλευρές του β , γ και τη διάμεσο μ_α .

1^ο βήμα (Ανάλυση): Στο 1^ο βήμα, κατασκευάζουμε αυθαίρετα ένα τρίγωνο, για να παρατηρήσουμε πάνω του τα στοιχεία που μας δίνονται, και να ανακαλύψουμε σχέσεις που θα μας επιτρέψουν αξιοποιώντας την πείρα μας από απλές κατασκευές να πραγματοποιήσουμε τη ζητούμενη κατασκευή. Έστω λοιπόν ότι κατασκευάστηκε το τρίγωνο και είναι «κάτι σαν το διπλανό».

Παρατηρούμε ότι για την κατασκευή δίνονται τρία ευθύγραμμα τμήματα, και θυμόμαστε ότι με τρία ευθύγραμμα τμήματα ξέρουμε να κατασκευάζουμε τρίγωνο, αρκεί αυτά να είναι οι τρεις πλευρές του, κάτι που δε συμβαίνει στην περίπτωση μας. Ο συνειρμός που κάναμε δεν έδωσε λύση, όμως βρίσκεται στη σωστή κατεύθυνση, αφού μόνο έτσι ξέρουμε να αξιοποιούμε τρία ευθύγραμμα τμήματα για την κατασκευή τριγώνου. Δοκιμάζουμε αλλαγές στο σχήμα, έτσι ώστε, ή αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα ή κάποια που κατασκευάζονται από αυτά, να βρεθούν στη θέση των τριών πλευρών ενός τριγώνου. Θυμόμαστε την άσκηση Α.Ε. 3(σελίδα 48) αφού τότε μας είχε εντυπωσιάσει, η λύση που στηρίχτηκε στην **προέκταση της διαμέσου κατά ίσο τμήμα** και στη συνέχεια επιβεβαιώσαμε τη χρησιμότητα μιας τέτοιας παρέμβασης στα παραλληλόγραμμα, όπου είναι κριτήριο για το αν ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του να διχοτομούνται.

Πραγματοποιούμε την ιδέα μας, και βλέπουμε ότι προκύπτει το τρίγωνο $A\Gamma A'$ που είναι «**κατασκευάσιμο**», αφού διαθέτουμε τις τρεις πλευρές του.

2^ο βήμα (Σύνθεση): Πραγματοποιούμε την κατασκευή του τριγώνου $A\Gamma A'$, σύμφωνα με την εφαρμογή 3(σελίδα 75), αφού όμως πρώτα κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα διπλάσιο της διαμέσου, και **έχουμε ήδη τις κορυφές Α, Γ** του τριγώνου $AB\Gamma$. Βρίσκουμε το μέσο M της AA' , και κατασκευάζουμε την ημιευθεία GM . Κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα MB ίσο με το GM , και **έχουμε την τρίτη κορυφή Β**.

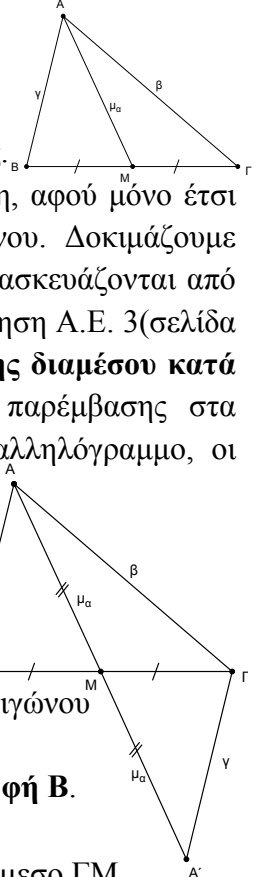
3^ο βήμα (Απόδειξη): Το τρίγωνο $AB\Gamma$ που κατασκευάσαμε, είναι το ζητούμενο.

Κατασκευάσαμε τρίγωνο $A\Gamma A'$, με πλευρές $A\Gamma = \beta$, $\Gamma A' = \gamma$, και $AA' = 2\mu_\alpha$, τη διάμεσο GM , και στην προέκτασή της, πήραμε ίσο τμήμα MB . Το τετράπλευρο $A\Gamma A'B$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, επομένως οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, και συνεπώς $AB = \gamma$. Έτσι, το τρίγωνο $AB\Gamma$, έχει $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, και $AM = \mu_\alpha$.

4^ο βήμα (Διερεύνηση): Προφανώς, η κατασκευή γίνεται, αρκεί να γίνει η κατασκευή του τριγώνου $A\Gamma A'$. Έτσι, αν τα ευθύγραμμα τμήματα β , γ και $2\mu_\alpha$, ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, το πρόβλημα έχει λύση, και μάλιστα μοναδική, αφού μοναδικό είναι το τρίγωνο που κατασκευάζεται από τις τρεις πλευρές του.

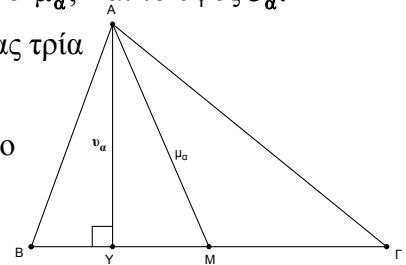
Σχόλια: (1) Οι κατασκευές που κάνουμε, είναι «**γεωμετρικές κατασκευές**», δηλαδή κατασκευές που πραγματοποιούνται αποκλειστικά, με τη χρήση των εργαλείων: του «**κανόνα**», που είναι εργαλείο κατασκευής ευθειών, ημιευθειών και ευθυγράμμων τμημάτων, και του «**διαβήτη**», που είναι εργαλείο κατασκευής ίσων ευθυγράμμων τμημάτων.

(2) Όταν λέμε: «Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, από τις πλευρές του β , γ και τη διάμεσο μ_α », εννοούμε ότι θα πρέπει να κατασκευασθεί τρίγωνο από τρία **τυχαία** ευθύγραμμα τμήματα, που στο καθένα να έχει «**ανατεθεί**» ο αντίστοιχος ρόλος. Έτσι δικαιολογείται και η διερεύνηση, που θέτει τις αναγκαίες προδιαγραφές των προσφερόμενων τμημάτων, προκειμένου η κατασκευή να είναι δυνατή.



2. Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, από την πλευρά α , τη διάμεσο μ_α , και το ύψος υ_α .

Λύση: (i) Αν $\mu_\alpha \neq \upsilon_\alpha$. Υποτίθεται ότι **κάθε φορά** είναι στη διάθεσή μας τρία ευθύγραμμα τμήματα. Ένα που προορίζεται για πλευρά α , ένα για τη διάμεσο μ_α , και ένα για το ύψος υ_α . Έστω ότι κατασκευάστηκε τρίγωνο $AB\Gamma$, από την πλευρά α , τη διάμεσο μ_α , και το ύψος υ_α .



Προφανώς το ορθογώνιο τρίγωνο YAM , είναι «**κατασκευάσιμο**», αφού μας δίνεται η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του, αρκεί το τμήμα που μας έχει διατεθεί για να παίξει το ρόλο της υποτείνουσας, να έχει τις προδιαγραφές μιας υποτείνουσας, δηλαδή να είναι μεγαλύτερη από κάθε κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου. **Προϋπόθεση κατασκευής:** $\mu_\alpha > \upsilon_\alpha$.

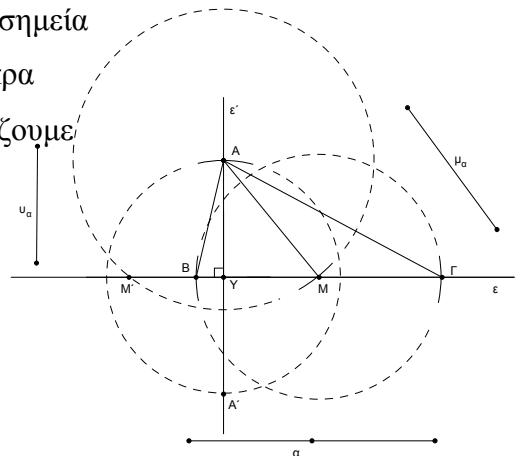
Κατασκευή: Κατασκευάζουμε κάθετες ευθείες ϵ, ϵ' , με σημείο τομής Y (πρόβλημα 3 σελίδα 74). Ανοίγουμε το διαβήτη μας, έτσι ώστε τα άκρα του να ταυτιστούν με τα άκρα του υ_α , και με κέντρο Y σχεδιάζουμε κύκλο, που τέμνει την ϵ' , και έστω A ένα από τα σημεία τομής ($YA = \upsilon_\alpha$). Ανοίγουμε το διαβήτη μας έτσι ώστε τα άκρα

του να ταυτιστούν με τα άκρα του μ_α , και με κέντρο A σχεδιάζουμε κύκλο που τέμνει την ϵ , και έστω M ένα από τα σημεία τομής

($AM = \mu_\alpha$). Με κέντρο M και ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ σχεδιάζουμε κύκλο,

που τέμνει την ευθεία ϵ στα σημεία B, Γ . $MB = M\Gamma = \frac{\alpha}{2}$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

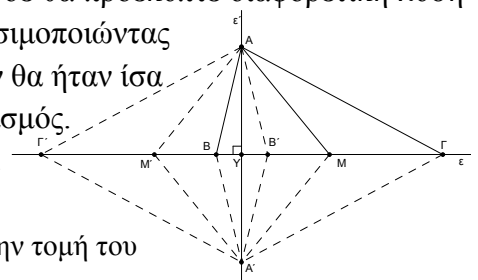


Σχόλια: (1) Τα σημεία προκύπτουν σαν τομή δύο γραμμών. Έτσι, το σημείο A εντοπίστηκε σε μια τομή του κύκλου με κέντρο Y και ακτίνα υ_α , με την ευθεία ϵ' . Για να μη «φορτώνουμε» το σχήμα με περιττές γραμμές, αλλά και για «οικονομία», συνήθως σχεδιάζουμε κομμάτι του κύκλου, εκεί που συναντάει ο κύκλος την άλλη γραμμή. Στο σχήμα μας, κάθε περιττή γραμμή φαίνεται διακεκομμένη.

(2) Αν αντί για το A , επιλέγαμε το A' , είτε αντί για το M , το M' , δε θα προέκυπτε διαφορετική λύση του προβλήματος, αφού εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, χρησιμοποιώντας τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, ότι τα τρίγωνα που θα προέκυπταν θα ήταν ίσα με το $AB\Gamma$. Η μόνη διαφορά, θα ήταν ο διαφορετικός προσανατολισμός.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB'\Gamma'$, $A'\beta\Gamma$ και $A'\beta'\Gamma'$, είναι ίσα μεταξύ τους.

Έτσι το πρόβλημα κατασκευής, έχει μοναδική λύση.



(3) Με την πλευρά $B\Gamma = \alpha$, πάνω σε ευθεία ϵ , η κορυφή A βρίσκεται στην τομή του κύκλου με κέντρο M , και ακτίνα μ_α , και των παραλλήλων της ϵ , που ισαπέχουν από αυτήν, απόσταση (υ_α).

(4) Όταν είπαμε «έστω ότι κατασκευάστηκε», δώσαμε στο «πρόχειρο» σχέδιό μας, μία από τις «δυνατές» μορφές που μπορεί να πάρει η κατασκευή. Εύκολα μπορούμε να φανταστούμε, κοιτάζοντας το σχήμα, ότι αν η πλευρά α ήταν μικρότερη, θα μπορούσε το σημείο B να ταυτιστεί με το Y , οπότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο, με $AB = AY = \upsilon_\alpha$. Με μια ακόμα μικρότερη πλευρά α , το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα ήταν αμβλυγώνιο, με αμβλεία γωνία τη γωνία B , όπου το σημείο B , θα ήταν ανάμεσα στα σημεία Y και M . Έτσι, μπορούμε να διαπιστώσουμε για άλλη μια φορά, ποσό προσεκτικοί θα πρέπει να είμαστε, όταν εμπλέκονται στο πρόβλημα τα ύψη του τριγώνου.

(ii) Αν $\mu_\alpha = \upsilon_\alpha$, τότε προφανώς το σχήμα που προκύπτει είναι ισοσκελές τρίγωνο, και η κατασκευή είναι απλή. Αρκεί να σχεδιάσουμε τμήμα $B\Gamma = \alpha$, στη συνέχεια να σχεδιάσουμε τη μεσοκάθετό του Mx (M το μέσο του $B\Gamma$), και τέλος πάνω στη μεσοκάθετο να πάρουμε τμήμα $AM = \mu_\alpha = \upsilon_\alpha$.

3. Αν υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\gamma < \beta < \alpha$, που να έχει για ύψος v_α , πλευρά γ ,

και διχοτόμο δ_α , τρία δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευασθεί.

Λύση: Προφανώς, οι γωνίες B, Γ θα είναι οξείες, αφού η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά, που είναι η α .

Έστω ότι κατασκευάστηκε τρίγωνο $AB\Gamma$, με τις προδιαγραφές που μας όρισαν. Η μορφή του σχήματός μας, είναι η μοναδική δυνατή, αφού όπως έχουμε αποδείξει, το ύψος που δεν βρίσκεται ανάμεσα σε «ίσα σκέλη», «τοποθετείται» σε σχέση με τη διχοτόμο, από τη μεριά που βρίσκεται το μικρότερο από τα «άνισα σκέλη» του τριγώνου. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα που διαθέτουμε, έχουν τις προδιαγραφές των ρόλων τους, το ορθογώνιο τρίγωνο $Y\Delta$, είναι «κατασκευάσιμο», και αν «καρφώσουμε» το διαβήτη μας στο σημείο A , ο κύκλος ακτίνας γ , θα τμήσει την ευθεία $Y\Delta$ σε δύο* σημεία, και όπως έχουμε εξηγήσει η κορυφή B , είναι το σημείο που μαζί με το Δ , θα έχουν ανάμεσά τους το Y . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε γωνία $\Delta A\chi$ εφεξής με την γωνία $B\Delta\alpha$ και ίση** της, απλά φέρνοντας από το B κάθετο στην $A\Delta$, που την τέμνει στο σημείο K , εντοπίζοντας στη συνέχεια, το σημείο Σ της $A\chi$, στην τομή^(a) της ημιευθείας BK , με τον κύκλο κέντρου A και ακτίνας γ . Έτσι, προκύπτει το Γ σαν η τρίτη κορυφή του τριγώνου $AB\Gamma$, στην τομή^(b) (οι τομές a, b υπάρχουν, αν υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$) της ευθείας $Y\Delta$ με την ευθείας $A\chi$.

* Προφανώς, $\gamma > v_\alpha$, αφού αν ήταν ίσα, τότε η γωνία B θα ήταν ορθή, και επομένως η πλευρά β θα ήταν η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$, ενώ στις προδιαγραφές δηλώνεται ότι $\gamma < \beta < \alpha$.

** Το τρίγωνο $AB\Sigma$ είναι ισοσκελές ($AB = \gamma = A\Sigma$), και επομένως το ύψος AK στη βάση του, είναι και διχοτόμος της γωνίας κορυφής του. (οι γωνίες BAK και KAS είναι ίσες)

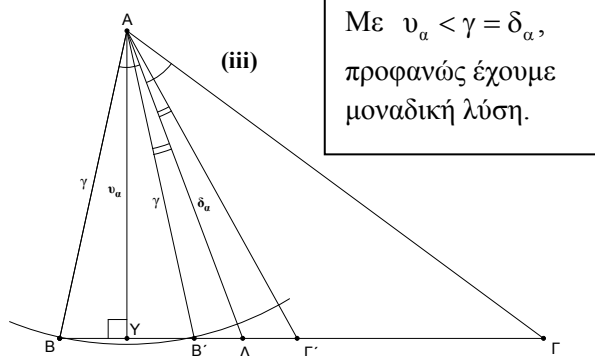
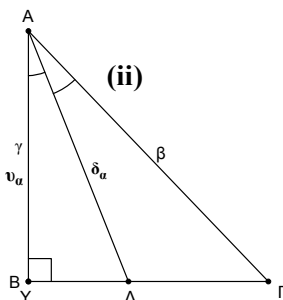
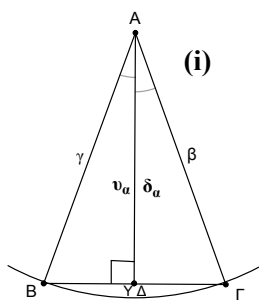
Σχόλια: (1) Προφανώς, με τις προδιαγραφές να ικανοποιούνται, υπάρχει κάθε φορά, μοναδική λύση.

(2) Αν δεν υπάρχει η απαίτηση $\gamma < \beta < \alpha$, τότε το πρόβλημα γίνεται σύνθετο, με περισσότερες λύσεις.

(i) Αν $v_\alpha = \delta_\alpha$, τότε υπάρχει μοναδική λύση το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = \gamma$.

(ii) Αν $v_\alpha = \gamma$, τότε υπάρχει μοναδική λύση το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$.

(iii) Αν $v_\alpha < \gamma < \delta_\alpha$, τότε το πρόβλημα κατασκευής έχει δύο λύσεις. Μία λύση το τρίγωνο $AB\Gamma$, όπου η γωνία B είναι οξεία, και μια λύση το τρίγωνο $AB\Gamma'$, όπου η γωνία B είναι αμβλεία.



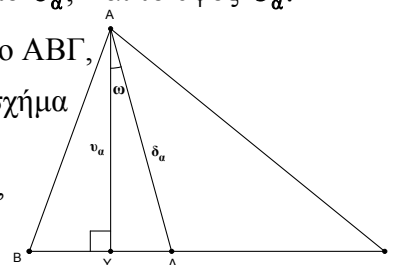
Με $v_\alpha < \gamma = \delta_\alpha$,
προφανώς έχουμε
μοναδική λύση.

(iv) Αν $v_\alpha < \delta_\alpha < \gamma$, τότε έχουμε την ίδια κατάσταση με το (iii), και θα μπορούσαμε να συγχωνεύσουμε τις δυο περιπτώσεις, γράφοντας: «Αν $\gamma \neq v_\alpha \neq \delta_\alpha$ ». Θα μπορούσαμε να δώσουμε ένα νέο σχήμα, όμως αξίζει περισσότερο να φανταστούμε πάνω στο υπάρχον. Ας φανταστούμε λοιπόν το B , να απομακρύνεται από το Y , πάνω στην ημιευθεία YB . Αντίστοιχα το B' , θα απομακρύνεται από το Y , πάνω στην ημιευθεία YB' , έτσι ώστε, η AY να είναι σταθερά μεσοκάθετος του BB' . Όταν το B' , βρεθεί στην προέκταση του $Y\Delta$, τότε θα έχουμε την περίπτωση (iv). Η συνέχεια είναι γνωστή, με τις δυο λύσεις να προκύπτουν με την κατασκευή των ίσων και εφεξής γωνιών, με τις γωνίες $B\Delta\alpha$ και $B'\Delta\alpha$ αντίστοιχα. (Πάντα με την προϋπόθεση, να υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$, με τα δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα)

4. Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, από την πλευρά α , τη διχοτόμο δ_α , και το ύψος u_α .

Λύση: (i) Αν $v_a \neq \delta_a$, τότε $\hat{B} \neq \hat{\Gamma}$, και έστω ότι κατασκευάστηκε τρίγωνο $AB\Gamma$,

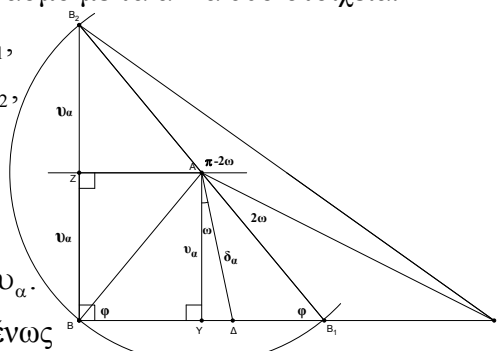
όπου ονομάσαμε **B**, τη **μεγαλύτερη** από τις δυο γωνίες B, Γ. Επειδή το σ μας, είναι ένα από τα «**δυνατά**», αφού ανάλογα με το μέγεθος των τριών ευθυγράμμων τμημάτων που δίνονται, η γωνία B **δύναται** να είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία, θα προσπαθήσουμε να μην επηρεαστούμε από τις ιδιαιτερότητές του.



Παρατηρήσεις: (1) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΥΑΔ είναι «**κατασκευάσιμο**», αρκεί $\nu_\alpha < \delta_\alpha$, και επομένως «**κατασκευάσιμη**» είναι και η $Υ\hat{A}\Delta = \hat{\omega} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$. (Αποδεικτική άσκηση 3 – σελίδα 92)

(2) Δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε την πλευρά **α**, σε συνδυασμό με τα άλλα δυο στοιχεία.

(3) Ο κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ, τέμνει την ΒΓ στο Β₁, και την κάθετο της ΒΓ στο Β, στο σημείο Β₂. Τα σημεία Β₁, Β₂, είναι αντιδιαμετρικά, αφού η εγγεγραμμένη γωνία Β₁ΒΒ₂ είναι ορθή, και συνεπώς τα Β₁, Α, Β₂, είναι συνευθειακά. Η κάθετος από το Α στην χορδή ΒΒ₂, είναι προφανώς μεσοκάθετος, και επειδή ΒΖ = υ_α, από το ορθογώνιο ΑΖΒΥ, θα έχουμε ΒΒ₂ = 2υ_α.



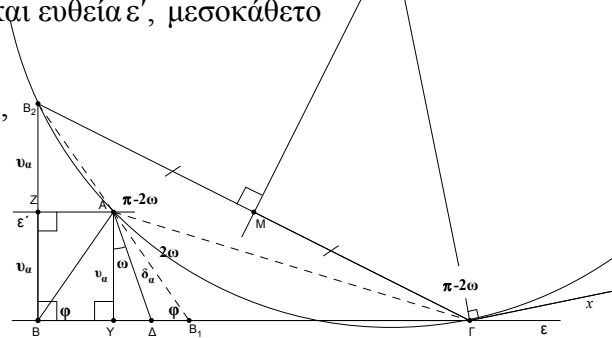
Επειδή $\hat{B} = \hat{\phi} = B\hat{B}_1A$, όπου B γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$, επομένως στο τρίγωνο $B_1\hat{A}\Gamma$, θα έχουμε $B_1\hat{A}\Gamma = \hat{\phi} - \hat{\Gamma} = \hat{B} - \hat{\Gamma} = 2\hat{\omega}$, και συνεπώς $\Gamma\hat{A}B_2 = \pi - 2\hat{\omega}$.

Έτσι, το σημείο Α, **βρίσκεται στην τομή**, της μεσοκαθέτου του BB_2 , και **τόξου χορδής** ΓB_2 , που δέχεται γωνία $\pi - 2\hat{\omega}$. (για την κατασκευή τέτοιου τόξου, δείτε το ΠΡΟΒΛΗΜΑ, ~~ο~~ στη σελίδα 132)

Κατασκευή: Σε ευθεία ε , «τοποθετούμε» τμήμα $B\Gamma = \alpha$. Κατασκευάζουμε τμήμα $BB_2 = 2\upsilon_\alpha$, σε ευθεία κάθετη στην ε , στο σημείο B , και ευθεία ε' , μεσοκάθετο

του BB_2 . Κατασκευάζοντας ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα δ_α και κάθετο υ_α , προκύπτει η γωνία ω , κατασκευάζεται η $B_2\hat{\Gamma}x = \pi - 2\hat{\omega}$ και η κάθετη στην Γx , η οποία τέμνει τη μεσοκάθετη του $B_2\Gamma$ στο O .

Κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο Ο, και ακτίνα ΟΓ. Η ζητούμενη τρίτη κορυφή Α, του τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκεται στην τομή του προαναφερθέντος **τόξου**, (τόξο χορδής Β,Γ που δέχεται γωνία $\pi - 2\hat{\omega}$) και της



Απόδειξη: Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο, αφού «εκ κατασκευής» έχει πλευρά $B\Gamma = \alpha$, και ύψος $AY = v_\alpha$. Η ημιευθεία B_2A , τέμνει τη $B\Gamma$ στο B_1 , και επειδή στο τρίγωνο B_2BB_1 η ZA είναι παράλληλη στη BB_1 και διέρχεται από το μέσο Z της B_2B , θα διέρχεται και από το μέσο της B_2B_1 , επομένως $B_2A = AB_1$, και αφού $AB_2 = AB$ (AZ μεσοκάθετη της B_2B), συνεπώς $AB = AB_1$. Έτσι, $\hat{B} = \hat{\phi} = \hat{B\hat{B}_1A} = 2\hat{\omega} + \hat{\Gamma}$, άρα

$$\hat{\omega} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} = Y\hat{A}\Delta, \text{ και επομένως } A\Delta = \delta_{\alpha}.$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα: ΥΑΔ, και αυτό με υποτείνουσα δ_α και κάθετο υ_α , είναι ίσα, αφού $AY = \upsilon_\alpha$, και διαθέτουν προσκείμενη οξεία $\hat{\omega}$.

(ii) Αν $v_a = \delta_a$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι ισοσκελές και η κατασκευή του είναι απλή.

Σε ευθεία ε «τοποθετούμε» τμήμα $B\Gamma = \alpha$, και στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$, που τέμνει τη $B\Gamma$ σε σημείο M , παίρνουμε τμήμα $MA = \upsilon_{\alpha} = \delta_{\alpha}$.

Σχόλια: (1) Η κατασκευή απαιτούσε καλή γνώση της διδακτέας ύλης, και πείρα από προβλήματα κατασκευών. Αξίζει να τη μελετήσετε, χωρίς να σας αποθαρρύνει η δυσκολία της.

(2) Το κείμενο, αφιερώνεται στη μαθήτριά Φ. Μ. που έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην τάξη, και αφιέρωσε χρόνο για μελέτη.