

Το «παιχνίδι» της απόδειξης

Πόρισμα Ι (σελίδα 42)

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

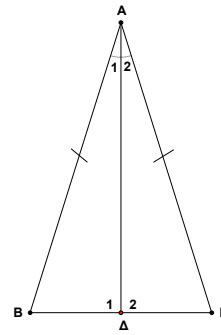
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες, είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη: Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, με $AB=AG$.

Σχεδιάζουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma\Delta$.

$$\begin{array}{l} \triangle AB\Delta \quad \triangle A\Gamma\Delta \\ \left. \begin{array}{l} AB = AG \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ A\Delta = A\Delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Π-Γ-Π} \\ \Rightarrow \triangle AB\Delta = \triangle A\Gamma\Delta \end{array} \end{array}$$

(αφού $A\Delta$ διχοτόμος)



Στα ίσα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma\Delta$, απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta=A\Delta$, βρίσκονται ίσες γωνίες, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, βρίσκονται ίσες πλευρές, άρα $B\Delta = \Delta\Gamma$. Συνεπώς το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και επομένως το $A\Delta$ είναι διάμεσος.

Ομοίως, αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της ευθείας γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, συνεπώς οι $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ είναι ορθές γωνίες και έτσι, αφού η $A\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$, το $A\Delta$ είναι ύψος.

Επειδή, για το τρίγωνο που χρησιμοποιήσαμε, δεν αξιοποιήσαμε κάποια πληροφορία που να το κάνει να ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα ισοσκελή τρίγωνα, τα συμπεράσματά μας ισχύουν σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο.

Σχόλια: (1) Στο «παιχνίδι» της απόδειξης υπάρχουν κανόνες και εμείς τους σεβαστήκαμε. Προκειμένου να καταλήξουμε, με λογικές διεργασίες, στα ζητούμενα συμπεράσματα, χρησιμοποιήσαμε αποκλειστικά τα δεδομένα, δηλαδή την υπόθεση του πορίσματος και τα όσα έχουμε συμφωνήσει μέχρι το πόρισμα αυτό. Έτσι, στηριχθήκαμε στην υπόθεση ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, στο 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π), στον ορισμό της ορθής γωνίας («η ορθή είναι μισή ευθεία γωνία», που βρίσκεται στην §2.13, σελ. 23) και στις γεωμετρικές έννοιες.

(2) Το ίδιο το πρόβλημα μας οδήγησε στο σχεδιασμό της $A\Delta$ και έτσι προέκυψαν τα δυο ίσα τρίγωνα που «μας έδωσαν τη λύση». Αυτό για μας είναι πλέον πείρα. Έτσι στην άσκηση που θα λέει: «Να αποδειχθεί ότι στα ισοσκελή τρίγωνα, οι γωνίες στη βάση είναι ίσες», μόνοι μας θα σκεφτούμε να σχεδιάσουμε τη διχοτόμο της γωνίας της κορυφής, σα βοηθητική γραμμή, για να προκύψουν τα δυο τρίγωνα και να λειτουργήσει πάνω τους το «εργαλείο» 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων. Γενικότερα, αποκτήσαμε την ιδέα της βοηθητικής γραμμής, δηλαδή της γραμμής που εμείς επινοούμε να σχεδιάσουμε, για να δώσουμε λύση αξιοποιώντας τα διαθέσιμα «εργαλεία».

(3) Ικανοποιήσαμε το 1^ο κριτήριο ισότητας τριγώνων, «δίνοντάς του» τις τρεις ισότητες που απαιτεί και τότε αυτό μας «τροφοδότησε» με τις υπόλοιπες τρεις ισότητες αντίστοιχων κύριων στοιχείων των δύο τριγώνων, οδηγώντας μας στα συμπεράσματα. Αυτό δε θα είχε συμβεί, αν δεν είχαμε φροντίσει να μεταφράσουμε τα δεδομένα σε ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων – γωνιών και στη συνέχεια να μεταφράσουμε τις ισότητες που προέκυψαν, στα συμπεράσματα.

π.χ.: «Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, με γωνία κορυφής την $\hat{A}$ » → «μετάφραση»: « $AB=AG$ »

«Η $A\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$, χωρίζοντάς την στις γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ » → «μετάφραση»: « $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ »

« $B\Delta = \Delta\Gamma$ » → «μετάφραση»: «Το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$, δηλαδή η $A\Delta$ είναι διάμεσος»

« $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ » → «μετάφραση»: «η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της ευθείας γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, ... $A\Delta$ είναι ύψος»

Η «μετάφραση» γίνεται ανάμεσα στη γλώσσα των Μαθηματικών και τη φυσική μας γλώσσα και συνδέει ισοδύναμες εκφράσεις, δηλαδή εκφράσεις που υπηρετούν ακριβώς την ίδια «ουσία».

(4) Στο σχήμα μας, «φαίνεται» ένα οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο. Τα συμπεράσματά μας όμως, ισχύουν «σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο», αφού πουθενά στους συλλογισμούς μας δεν επικαλεστήκαμε την ιδιαιτερότητα (οξυγώνιο) του δικού μας «ενδεικτικού σχήματος».

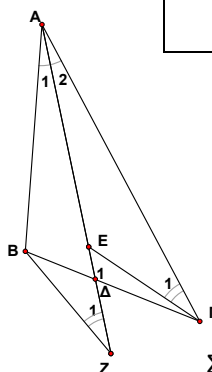
Πάντα, οι συλλογισμοί μας, πρέπει να στηρίζονται στα δεδομένα του προβλήματος και ποτέ δεν πρέπει να επικαλούμαστε το «φαίνεται». Σε ένα «καλό» σχήμα, αυτό που «φαίνεται», αν δεν έχει να κάνει με τις ιδιαιτερότητες του δικού μας σχήματος, μπορεί να μας δώσει ιδέες, αρκεί ότι ισχυριστούμε, να το αποδείξουμε στηριζόμενοι στα δεδομένα.

(5) Το ότι το ΑΔ είναι ύψος, αποδεικνύεται και χωρίς τον ορισμό της ορθής γωνίας.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \\ \text{και} \\ \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \\ \text{και} \\ \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \\ \text{και} \\ 2 \cdot \hat{\Delta}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 \\ \text{και} \\ \hat{\Delta}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{ΑΔ ύψος}}$$

Άσκηση 4 (ασκήσεις εμπέδωσης) – σελίδα 43: Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{A}$ στην οποία θεωρούμε τμήματα $AE=AB$ και $AZ=A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}\hat{\Gamma}E = \hat{A}\hat{Z}B$.

Απόδειξη:	Υπόθεση: $AE=AB$ $AZ=A\Gamma$ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$	Συμπέρασμα: $\hat{A}\hat{\Gamma}E = \hat{A}\hat{Z}B$
------------------	--	---



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle ABZ$ και $\triangle A\hat{E}\Gamma$.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABZ \quad \triangle A\hat{E}\Gamma \\ AB = AE \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AZ = A\Gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(αφού ΑΔ διχοτόμος)} \\ \text{Π-Γ-Π} \end{array} \Rightarrow \triangle ABZ = \triangle A\hat{E}\Gamma$$

Στα ίσα τρίγωνα $\triangle ABZ$ και $\triangle A\hat{E}\Gamma$, απέναντι από τις ίσες πλευρές $AB=AE$, βρίσκονται ίσες γωνίες, άρα $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και επομένως $\hat{A}\hat{Z}B = \hat{A}\hat{\Gamma}E$.

Σχόλιο: Όλη η δυσκολία στην άσκηση αυτή, είναι η **κατασκευή** του σχήματος. Ένα «καλό» σχήμα, πρέπει τουλάχιστον να μας επιτρέπει να **διακρίνουμε** τα αντικείμενα που θα χρησιμοποιήσουμε στους συλλογισμούς μας και που στην περίπτωσή μας είναι τα τρίγωνα. Για να ονομαστεί μια κατασκευή «γεωμετρική κατασκευή» (σελίδα 18), τα όργανα που επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε είναι ο κανόνας και ο διαβήτης. Κανόνας (χάρακας χωρίς υποδιαίρέσεις) είναι το γεωμετρικό όργανο που μας βοηθά να χαράξουμε κομμάτια ευθειών. Για να κάνουμε μια «γεωμετρική κατασκευή», πρέπει να γνωρίζουμε πολύ καλά τη θεωρία. Εμείς, στις ασκήσεις, κάνουμε απλές κατασκευές, όχι κατ' ανάγκη «γεωμετρικές», που όμως αν θέλουμε να είναι «καλές», με το νόημα που δώσαμε παραπάνω, θα πρέπει να στηρίζονται στη γνώση της θεωρίας.

Στην παραπάνω άσκηση, αν στο σχήμα, το τρίγωνό μας θα «φαίνεται» ισοσκελές ($AB \cong A\Gamma$), τότε δύσκολα θα ξεχωρίζουμε τα Ε και Ζ. Ίσως το καλύτερο σχήμα, είναι αυτό που θα έχει αμβλεία τη γωνία Β, γιατί τότε τα Ε και Ζ θα έχουν ανάμεσά τους το Δ. Για να επιλέξουμε μια τέτοια κατασκευή, θα πρέπει να θυμηθούμε ότι: «σε ένα τρίγωνο, απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά». Έτσι, στο τρίγωνο ΑΒΔ (με γωνία Β αμβλεία), θα έχουμε $AD > AB = AE$ και στο τρίγωνο ΑΔΓ (όπου τότε και η γωνία Δ_1 θα είναι αμβλεία), θα έχουμε $AD < A\Gamma = AZ$. Έτσι, $AE < AD < AZ$. [Η γωνία Δ_1 θα είναι αμβλεία, αφού είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ και συνεπώς είναι μεγαλύτερη από την αμβλεία γωνία Β.]