

Ασκήσεις (1)

Άσκηση 1^η: Να αποδειχθεί, ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, ισχύει $\mu_\gamma = \mu_\beta$.

Απόδειξη: Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E μέσα των $A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Συγκρίνω τα τρίγωνα $EA\Gamma$ και ΔAB .

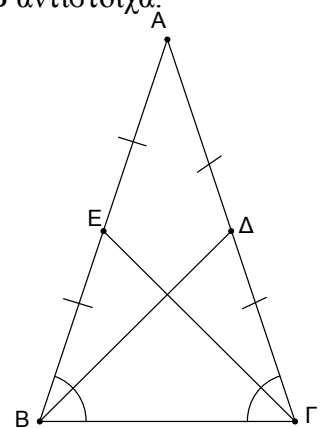
(Π) $AE = A\Delta$ (σαν μισά των ίσων πλευρών με $AB = A\Gamma$)^{*}

(Γ) $\hat{E}A\Gamma = \hat{\Delta}AB$ (κοινή γωνία, η $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$)

(Π) $A\Gamma = AB$ (από τα δεδομένα)

Έτσι $\hat{E}A\Gamma = \hat{\Delta}AB$, επομένως όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, και συνεπώς $\mu_\gamma = \Gamma E = B\Delta = \mu_\beta$, αφού βρίσκονται απέναντι από την κοινή $\hat{A}$.

$$* AB = A\Gamma \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Rightarrow AE = A\Delta$$



Σχόλια: (α) Σε πιο συμβολική γλώσσα, λέξεις όπως «επομένως», «συνεπώς», «άρα», «τότε» κ.λπ., αντικαθίστανται με το σύμβολο ($\Rightarrow$) της συνεπαγωγής.

(β) Σαν δεύτερη λύση, θα μπορούσαμε να είχαμε συγκρίνει τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$.

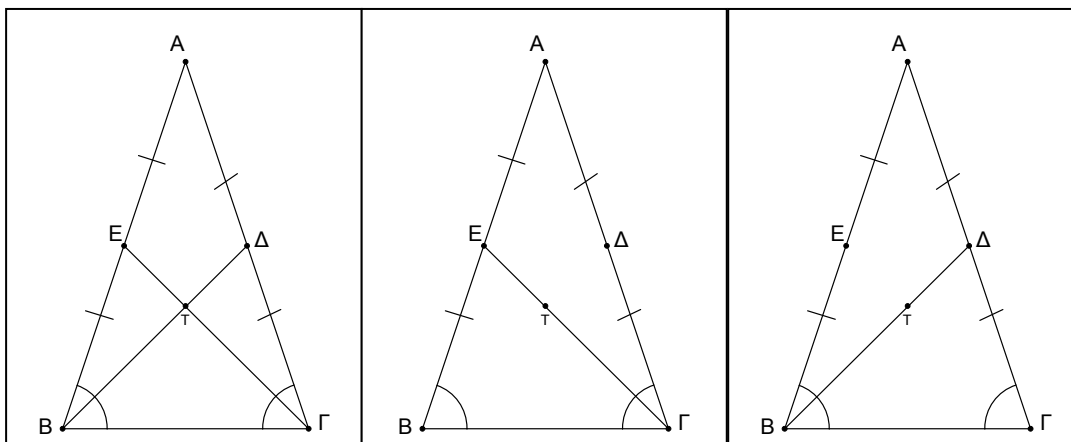
$$\left\{ \begin{array}{l} BE = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = \Gamma\Delta \\ \left(\begin{array}{l} \text{του } \hat{AB\Gamma} \\ B\Gamma \text{ κοινή} \end{array} \right) \hat{B} = \hat{\Gamma} \end{array} \right\} \xRightarrow{\Pi-\Gamma-\Pi} \hat{EB\Gamma} = \hat{\Delta\Gamma B} \xRightarrow{\hat{B}=\hat{\Gamma}} \Gamma E = B\Delta \Rightarrow \mu_\gamma = \mu_\beta$$

Στη «συμβολική» γλώσσα, πάνω από το σύμβολο της σχέσης, μπαίνει η επεξήγηση. Έτσι μετά την ισότητα των τριγώνων, πάνω από το ($\Rightarrow$), μπήκε η ισότητα των γωνιών που οδηγεί στην ισότητα των αντιστοίχων απέναντι πλευρών.

Η δεύτερη αυτή λύση, είναι εξίσου «οικονομική» με την πρώτη, όμως αντί να αξιοποιήσει μόνο το βασικό δεδομένο $AB = A\Gamma$, αξιοποιεί και το συμπέρασμα που προκύπτει από το δεδομένο αυτό. $A\Gamma = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$

Έτσι, η πρώτη λύση πραγματοποιείται μόλις αποκτηθεί η «θεωρητική κατάκτηση» του ΠΓΠ, ενώ για τη δεύτερη θα πρέπει να περιμένουμε τη «θεωρητική κατάκτηση» του Πορίσματος Ι (σελ.42).

(γ) Στην πρώτη λύση, τα τρίγωνα που συγκρίνουμε έχουν κοινό μέρος το τετράπλευρο $A\Delta TE$ και στη δεύτερη έχουν κοινό μέρος το τρίγωνο $TB\Gamma$. Για να αποφύγουμε τη σύγχυση, θα πρέπει να εκπαιδευτούμε να βλέπουμε το σχήμα «αφαιρετικά». Έτσι, όταν για παράδειγμα σκεπτόμαστε το τρίγωνο $A\Delta E$, στην 1^η λύση, το μυαλό μας θα πρέπει να «αφαιρεί το τμήμα $B\Delta$ », και αντίστοιχα να «αφαιρεί το τμήμα ΓE », όταν σκεπτόμαστε το τρίγωνο $A\Delta B$. Μέχρι να αποκτήσουμε αυτή την ικανότητα, μπορούμε δίπλα στο σχήμα, να σχεδιάζουμε βοηθητικά τα «αφαιρετικά σχήματα».



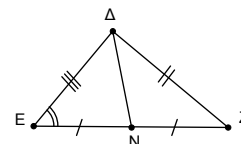
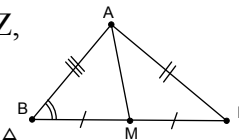
Άσκηση 2^η: Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων, αντιστοιχούν ίσες διάμεσος.

Απόδειξη: Έστω δυο ίσα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle EZ$, με $AB = \Delta E$ και $\Gamma A = \Delta Z$.

Αν AM διάμεσος του $\triangle AB\Gamma$ και ΔN η αντίστοιχη διάμεσος του $\triangle EZ$,

αρκεί να αποδείξουμε ότι $AM = \Delta N$.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle EN$.



$$(II) BA = \Delta E \quad (\text{από την υπόθεση } \triangle AB\Gamma = \triangle EZ)$$

$$(Γ) \hat{A}BM = \hat{E}N \quad (\text{από την υπόθεση } \triangle AB\Gamma = \triangle EZ)$$

$$(II) BM = EN \quad (\text{σαν μισά των ίσων πλευρών } BG = EZ, \text{ με } \triangle AB\Gamma = \triangle EZ)$$

Έτσι $\triangle ABM = \triangle EN$, επομένως όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, και συνεπώς $AM = \Delta N$.

Ομοίως αποδεικνύεται η ισότητα των άλλων αντίστοιχων διαμέσων, και επομένως η απόδειξή μας μπορεί να θεωρηθεί πλήρης.

Σχόλια: (α) Ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων, είναι οι αντίστοιχες, δηλαδή οι ίσες πλευρές, που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.

(β) Όταν δηλώνουμε τα ίσα τρίγωνα στα οποία θα εργαστούμε, θα πρέπει να φροντίσουμε να μην υπάρχει αμφιβολία για τις αντιστοιχίες των ίσων κύριων στοιχείων. Εμείς το κάναμε με οικονομία, δίνοντας μόνο δύο ισότητες αντίστοιχων κύριων στοιχείων, από τις έξι που προκύπτουν από την ισότητα των δηλωθέντων τριγώνων. Λέμε ότι το κάναμε με οικονομία, αφού αυτό δε γίνεται με λιγότερες από δύο ισότητες.

Όποιος γνωρίζει δύο ζευγάρια ίσων αντίστοιχων πλευρών σε ίσα τρίγωνα, δεν έχει αμφιβολία ότι και οι «τρίτες» πλευρές «που περισσεύουν» είναι μεταξύ τους ίσες, όπως επίσης γνωρίζει τα ζευγάρια των ίσων αντίστοιχων γωνιών, τις οποίες «μαρτυρούν δείχνοντας» απέναντί τους, οι ίσες πλευρές. Προφανώς, το ίδιο επιτυγχάνεται με τη δήλωση δύο ζευγαριών ίσων αντίστοιχων γωνιών ή με ένα ζευγάρι ίσων αντίστοιχων πλευρών και ένα ζευγάρι (όχι αυτές που βρίσκονται απέναντι στις πλευρές που προαναφέραμε) ίσων αντίστοιχων γωνιών.

Άσκηση 3^η: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του, BA , ΓA θεωρούμε ίσα τμήματα $\Delta\Delta$, ΔE αντίστοιχα. Αν M το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Απόδειξη: Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle MBD$ και $\triangle M\Gamma E$.

$$\begin{array}{l} * \\ \hline (+) \quad BA = \Gamma A \\ \hline BA + \Delta\Delta = \Gamma A + \Delta E \Rightarrow \\ \Rightarrow BD = \Gamma E \end{array}$$

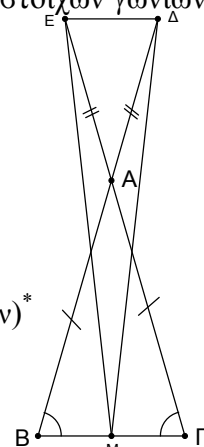
$$(II) BM = \Gamma M \quad (\text{αφού } M \text{ μέσο της } B\Gamma)$$

$$(Γ) \hat{B} = \hat{\Gamma} \quad (\text{από την υπόθεση})$$

$$(II) BD = \Gamma E \quad (\text{σαν αθροίσματα ίσων ευθυγράμμων τμημάτων})^*$$

Έτσι $\triangle MBD = \triangle M\Gamma E$, επομένως όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα

στοιχεία τους είναι ίσα, άρα $MD = ME$, και συνεπώς το τρίγωνο $\triangle M\Delta E$ είναι ισοσκελές.



Σχόλιο: Όταν ξεκινάμε να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο όπως το $\triangle M\Delta E$ είναι ισοσκελές, γνωρίζουμε πως αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο πλευρές του είναι ίσες. Έτσι, γνωρίζουμε πως η απόδειξη θα ολοκληρωθεί, αν αποδειχθεί ότι $MD = ME$ είτε $MD = \Delta E$ είτε $ME = \Delta E$. Εμείς αποφύγαμε τον κίνδυνο να ασχοληθούμε με ισότητες που δεν αποδεικνύεται ότι είναι αληθείς, όπως είναι οι $MD = \Delta E$ και $ME = \Delta E$, αφού το πολύ καλό σχήμα μας βοήθησε να ασχοληθούμε και να αποδείξουμε την αληθή ισότητα $MD = ME$. Τώρα μπορούμε να

πούμε, ότι όσο λιγότερες γνώσεις και εμπειρία διαθέτουμε, τόσο πιο σημαντικό είναι για μας ένα πολύ καλό σχήμα, αφού είναι πιθανό να μας βοηθήσει να επιλέξουμε τον ενδιάμεσο στόχο, που μπορεί να μας οδηγήσει στη λύση. Στη συνέχεια, η εμπειρία και η καλή γνώση της θεωρίας θα μας βοηθήσουν να «δούμε» λύσεις όπως: «Η διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, που διχοτομεί την γωνία A , είναι διάμεσος, και επομένως είναι η AM , αφού το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι μοναδικό. Η ευθεία MA , αφού διχοτομεί την γωνία A , διχοτομεί και την κατακορυφήν της στο ισοσκελές $\triangle A\Delta E$, και έτσι είναι μεσοκάθετος του ΔE . (η διχοτόμος στην γωνία A , είναι διάμεσος και ύψος)

Έτσι, το M σαν σημείο της μεσοκαθέτου του ΔE , ισαπέχει από τα Δ , E , και συνεπώς $MD = ME$ »