

Μαθήματα Γεωμετρίας (1)

Τα μαθήματα Γεωμετρίας θα γίνονται συμπληρωματικά με το σχολικό βιβλίο, και επομένως η αξιοποίησή τους απαιτεί την χρήση του σχολικού βιβλίου.

Μάθημα 1^ο (§3.2 – σελίδες 41 έως και 43)

Η απόδειξη του Θεωρήματος I(1^ο Κριτήριο – ΠΓΠ) δεν θα διδαχθεί, όμως το θεώρημα σαν «βασική αλήθεια» θα χρησιμοποιηθεί.

«Βασικές αλήθειες»:

I. **1^η**: «Όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα»

ή «Όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες, (και αντίστροφα) και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές».

Έτσι, αφού μας πουν ή εμείς «ανακαλύψουμε» ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, γνωρίζοντας ποια πλευρά του ενός είναι ίση με κάποια πλευρά του άλλου, λέμε ότι είναι ίσες οι απέναντι γωνίες στις πλευρές αυτές και ομοίως αν ξέρουμε ποια γωνία του ενός είναι ίση με κάποια γωνία του άλλου, θα λέμε ότι είναι ίσες οι απέναντι πλευρές στις γωνίες αυτές.

Θα χρησιμοποιήσουμε την «1^η αλήθεια» σε ένα παράδειγμα.

Ας πούμε ότι μας έχουν δώσει κάποιες πληροφορίες, που στη συνέχεια, θα τις λέμε δεδομένα.

Δεδομένα: Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, $\boxed{\triangle AB\Gamma = \triangle \Delta EZ}$ με ίσες πλευρές $AB = \Delta E$ και $B\Gamma = EZ$.

Εμείς μπορούμε να πούμε «αλήθειες», τις οποίες θα λέμε συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας τις «αλήθειες» που θα έχουμε συμφωνήσει στο μάθημα.

Συμπεράσματα: (1) Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, κάθε πλευρά του ενός έχει μια ίση της στο άλλο, και έτσι αναγκαστικά θα έχουμε $\Gamma A = Z\Delta$.

Επειδή παρατηρήσαμε ότι τις ίσες πλευρές τις είχαν σημαδέψει στο σχήμα με το ίδιο σημάδι, συμπληρώσαμε και εμείς το σχήμα βάζοντας το ίδιο (διπλό) σημάδι στις ίσες πλευρές που ανακαλύψαμε.

(2) Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, κάθε γωνία του ενός έχει μια ίση της στο άλλο, και μάλιστα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Έτσι οι γωνίες στις κορυφές Α και Δ είναι ίσες, $\boxed{\hat{A} = \hat{\Delta}}$

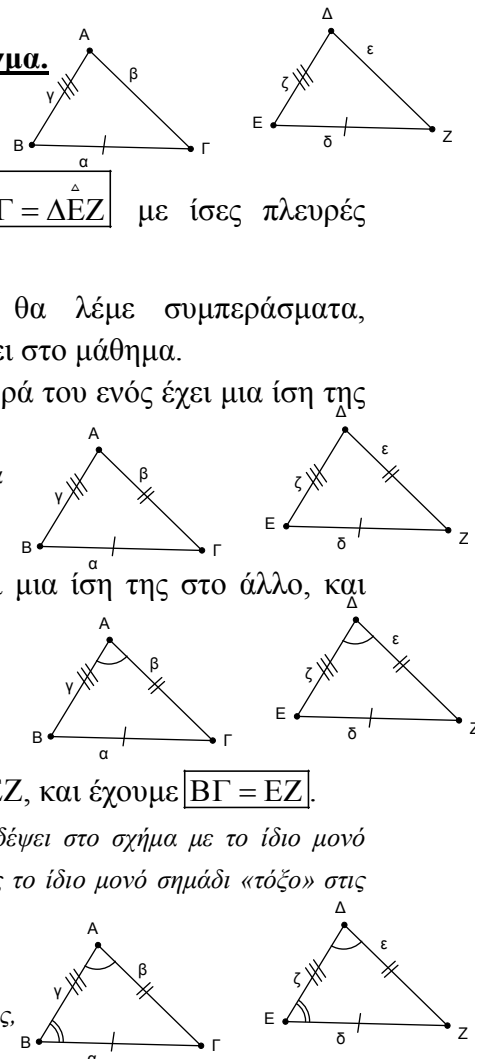
αφού η $\hat{A}$ είναι απέναντι στην πλευρά ΒΓ, στο τρίγωνο

ABΓ, η $\hat{\Delta}$ είναι απέναντι στην πλευρά ΕΖ, στο τρίγωνο ΔΕΖ, και έχουμε $\boxed{B\Gamma = EZ}$.

Επειδή παρατηρήσαμε ότι τις ίσες πλευρές $\boxed{B\Gamma = EZ}$ τις είχαν σημαδέψει στο σχήμα με το ίδιο μονό σημάδι, συμπληρώσαμε και εμείς το σχήμα, για ομοιομορφία, βάζοντας το ίδιο μονό σημάδι «τόξο» στις ίσες γωνίες που ανακαλύψαμε.

Επίσης ομοίως έχουμε $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Δεν σημαδέψαμε τις ίσες γωνίες $\boxed{\hat{\Gamma} = \hat{Z}}$ στο σχήμα, για λόγους οικονομίας, θεωρώντας αυτονόητο ότι η έλλειψη σημαδιού είναι σημάδι.

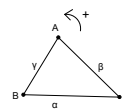


Έτσι, αφού έχουμε δηλώσει ότι κάθε γωνία του ενός τριγώνου έχει μια ίση της στο άλλο, προφανώς η μοναδική γωνία που μένει ασημάδευτη στο ένα τρίγωνο αναγκαστικά θα είναι ίση με την μοναδική γωνία που έμεινε ασημάδευτη στο άλλο τρίγωνο.

Παρατήρηση: Η πλευρά ΓΑ που είναι απέναντι από την κορυφή Β, και γι αυτό ονομάστηκε β, προφανώς μπορεί να ονομαστεί και ΑΓ.

Εμείς, πήραμε τα γράμματα στο $\triangle AB\Gamma$, διαδοχικά ανά δύο με αλφαβητική σειρά.

Στο σχήμα «κινήθηκαν κυκλικά με τη θετική φορά»: ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ.



II. **2^η:** «Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα». (1^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων – ΠΓΠ)

Τώρα πρέπει να διαβάσουμε την απόδειξη του Πορίσματος Ι, στη σελίδα 42, για να μπορέσουμε να καταλάβουμε πόσο εύστοχο είναι το σχόλιο στη σελίδα 43.

Η «**2^η αλήθεια**» μας βοηθά να ανακαλύπτουμε ίσα τρίγωνα με οικονομία, αφού για να μας δώσει τη σιγουριά ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα, απαιτεί μόνο τρεις πληροφορίες, δύο για ίσες πλευρές και μία για ίσες γωνίες.

Ας δούμε τώρα το Πόρισμα Ι, μόνο με το πρώτο του ζητούμενο.

«Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο: οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες»

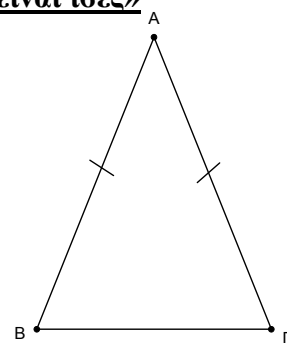
Δεδομένο: Έχουμε ισοσκελές τρίγωνο.

Ζητούμενο: Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

Εργασία: Λέμε: έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$, όπως

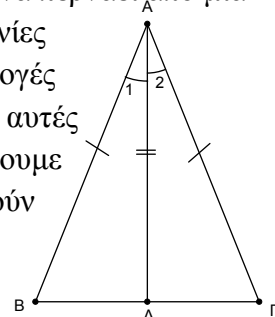
στο σχήμα. Θέλουμε να βγει σαν συμπέρασμα ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Σκεφτόμαστε: Αν βρούμε δύο τρίγωνα που να είναι ίσα και να έχει το ένα δική του γωνία την $\hat{B}$ και το άλλο δική του σαν αντίστοιχη την $\hat{\Gamma}$, τότε προφανώς το ζητούμενο συμπέρασμα θα βγει εύκολα.

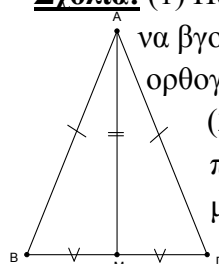


Στην προσπάθειά μας να χωρίσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο τρίγωνα, με δοκιμές, γρήγορα καταλαβαίνουμε, ότι η γραμμή που θα σχεδιάσουμε πρέπει να περνάει από μια κορυφή, και αυτή πρέπει να είναι η κορυφή Α, αφού μόνο τότε οι γωνίες που μας ενδιαφέρουν μοιράζονται στα δύο τρίγωνα. Σαν πρώτες επιλογές για δοκιμή, σκεφτόμαστε το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο, αφού αυτές δεν είναι τυχαίες και δίνουν τρίγωνα με ίσα κύρια στοιχεία. Καταλήγουμε στην διχοτόμο, αφού μόνο αυτή μας δίνει δύο τρίγωνα που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του 1^{ου} Κριτηρίου ισότητας τριγώνων – ΠΓΠ.

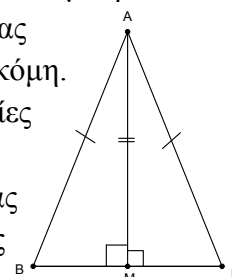
Η συνέχεια είναι έτοιμη στο σχολικό βιβλίο.



Σχόλια: (1) Παρατηρούμε ότι η διάμεσος δίνει τρίγωνα, που μόνο με το ΠΠΠ μπορούν να βγουν ίσα, ενώ το ύψος απαιτεί προχωρημένο κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. Αυτά όμως δεν τα έχουμε συμφωνήσει ακόμη.



(2) Εκπαιδευόμαστε να χρησιμοποιούμε μόνο τις πληροφορίες που δίνονται, και από τη θεωρία, όσα έχουμε συμφωνήσει μέχρι τη δεδομένη στιγμή, και όχι τις «εγκυκλοπαιδικές» μας γνώσεις. Στη συνέχεια, που τα συμφωνημένα της θεωρίας θα πολλαπλασιαστούν, η δουλειά μας θα γίνει πιο εύκολη.

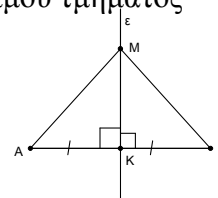


(3) Το ζητούμενο στο Πόρισμα Ι, αφορά κάθε ισοσκελές τρίγωνο, που προφανώς μπορεί να είναι, οξυγώνιο, ή ορθογώνιο, ή αμβλυγώνιο.

Εμείς για να σκεφτούμε, εργαστήκαμε σε σχήμα που «φαίνεται» οξυγώνιο ισοσκελές, χωρίς όμως να επικαλεστούμε στην απόδειξη το ιδιαίτερο αυτό χαρακτηριστικό. Έτσι η απόδειξή μας καλύπτει όλες τις περιπτώσεις, αφού στηρίχθηκε στα δεδομένα και δεν παρασύρθηκε από το «φαίνεται».

Πόρισμα ΙΙΙ(σελίδα 42): Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ϵ ενός ευθυγράμμου τμήματος AB , ισαπέχει από τα άκρα του.

Δεδομένα: Η ευθεία ϵ είναι κάθετη στο AB [$\epsilon \perp AB$] και διέρχεται από το μέσο K του AB [$KA = KB$].



Ζητούμενο: Κάθε σημείο της ϵ , ισαπέχει από τα A, B .

Απόδειξη: Έστω ένα σημείο M της ϵ , διαφορετικό από το K .

Τα τρίγωνα KAM και KBM είναι ίσα από το 1^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων – ΠΓΠ, αφού η KA του τριγώνου KAM είναι ίση με την KB του τριγώνου KBM , [$KA = KB$] από τα δεδομένα, η KM είναι κοινή πλευρά των δύο τριγώνων, και οι περιεχόμενες γωνίες στις ίσες πλευρές είναι ίσες σαν ορθές. Επομένως όλα τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο ίσων τριγώνων είναι ίσα, και συνεπώς $MA = MB$. Επειδή $MA = MB \Rightarrow (MA) = (MB)$, άρα το M ισαπέχει από τα άκρα του AB .

Προφανώς, για κάθε σημείο της ϵ , διαφορετικό του K , δημιουργούνται ίσα τρίγωνα όπως στην παραπάνω απόδειξη, και συνεπώς ομοίως όλα αυτά τα σημεία ισαπέχουν από τα άκρα του AB .

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $KA = KB$, και $KA = KB \Rightarrow (KA) = (KB)$, επομένως και το σημείο K ισαπέχει από τα άκρα του AB .

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ϵ ενός ευθυγράμμου τμήματος AB , ισαπέχει από τα άκρα του.

Σχόλια: (1) Όταν μία απόδειξη αφορά άπειρα διαφορετικά σημεία, προφανώς δεν μπορούμε να πούμε ότι θα κάνουμε άπειρες αποδείξεις. Επιλέγουμε ένα σημείο από αυτά, προσέχοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που του προσδίδουμε. Η απόδειξη που θα κάνουμε, κάνει και για όλα τα υπόλοιπα σημεία που έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά. Στην περίπτωσή μας το σημείο M «μπορούσε» να «δώσει» τρίγωνα με δεύτερο σημείο το K και τρίτο σημείο ένα από τα σημεία A, B , και επομένως μπορούσε να λειτουργήσει αντιπροσωπευτικά για όλα τα σημεία της ϵ εκτός από το σημείο K .

Έτσι, κάναμε ξεχωριστή απόδειξη για το σημείο K .

(2) Απόσταση του σημείου M από τα σημεία A, B , δεν είναι τα ευθύγραμμα τμήματα MA και MB , αλλά τα μέτρα τους, δηλαδή τα μήκη τους (MA) και (MB) .