

Ασκήσεις (2)

Άσκηση 1^η: Να αποδειχθεί, ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$, ισχύει $\delta_\gamma = \delta_\beta$.

Απόδειξη: Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και $BL = \delta_\beta$, $GE = \delta_\gamma$ οι διχοτόμοι του τριγώνου ABΓ, στις γωνίες του $\hat{B}$, $\hat{G}$ αντίστοιχα.

Συγκρίνω τα τρίγωνα EAG και LAB.

$$(I) \quad \hat{A} = \hat{A} \quad (\text{κοινή γωνία, η } \hat{A} \text{ του τριγώνου ABΓ})$$

$$(II) \quad AG = AB \quad (\text{από τα δεδομένα})$$

$$(I) \quad \hat{G}_1 = \hat{B}_1 \quad (\text{σαν μισά των ίσων γωνιών } \hat{B}, \hat{G})^*$$

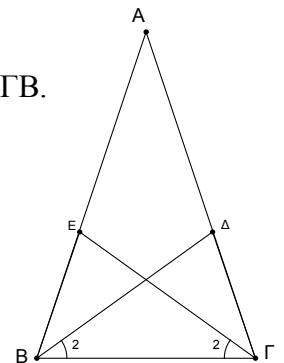
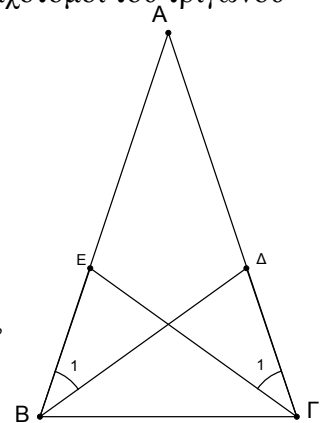
Έτσι $\triangle EAG = \triangle LAB$, **επομένως** όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα,

και **συνεπώς** $\delta_\gamma = GE = BL = \delta_\beta$, αφού βρίσκονται απέναντι από την κοινή $\hat{A}$.

$$* \hat{G} = \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{G}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{G}_1 = \hat{B}_1$$

Σχόλια: Σαν δεύτερη λύση, θα μπορούσαμε να είχαμε συγκρίνει τα τρίγωνα EBG και AΓB.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\text{του } \triangle AB\Gamma \right) \quad \hat{B} = \hat{G} \\ \text{BG κοινή} \\ \left(\text{μισά των } \hat{G} = \hat{B} \right) \quad \hat{G}_2 = \hat{B}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EBG = \triangle A\Gamma B \Rightarrow GE = BL \Rightarrow \delta_\gamma = \delta_\beta$$



Άσκηση 2^η: Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων, αντιστοιχούν ίσες διχοτόμοι.

Απόδειξη: Έστω δυο ίσα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ, με $AB = DE$ και $GA = ZA$.

Αν AK διχοτόμος του τριγώνου ABΓ και AL η αντίστοιχη διχοτόμος του τριγώνου ΔEZ, αρκεί να αποδείξουμε ότι $AK = AL$.

Στα τρίγωνα ABK και DEL.

$$(I) \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_1 \quad \left(\hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_1 \right)$$

$$(II) \quad AB = DE \quad (\text{από την υπόθεση } \triangle AB\Gamma = \triangle EZ)$$

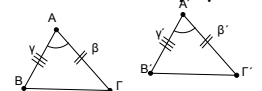
$$(I) \quad \hat{B} = \hat{E} \quad (\text{από την υπόθεση } \triangle AB\Gamma = \triangle EZ)$$

Έτσι $\triangle ABK = \triangle ELA$, **επομένως** όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, και **συνεπώς** $AK = AL$.

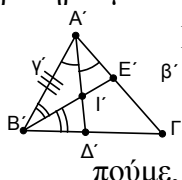
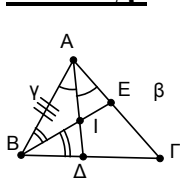
Ομοίως αποδεικνύεται η ισότητα των άλλων αντίστοιχων διχοτόμων, και επομένως η απόδειξή μας μπορεί να θεωρηθεί πλήρης.

Άσκηση 3^η: Δύο τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν I είναι το σημείο τομής των διχοτόμων AL και BE του τριγώνου ABΓ και I' το σημείο τομής των διχοτόμων A'L' και B'E' του τριγώνου A'B'Γ' να αποδείξετε ότι: (i) $AL = A'L'$ και $BE = B'E'$, (ii) $AI = A'I'$ και $BI = B'I'$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' είναι ίσα με (II-Γ-II)



Για το (i) $[AL = A'L']$ θα εργαστούμε στα τρίγωνα LAB και A'L'B', που «χρησιμοποιούν» τις πλευρές AB, A'B', τα μισά των γωνιών A, A' και ολόκληρες τις γωνίες B, B' των τριγώνων ABΓ και A'B'Γ'. Στη συνέχεια, θα πούμε, «ομοίως εργαζόμενοι στα τρίγωνα BAE και B'A'E'» θα έχουμε ότι $BE = B'E'$.

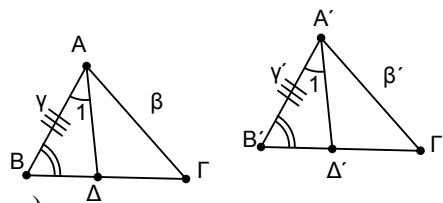


(i) Στα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$.

$$(I) \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \quad \left(\hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}'}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \right)$$

$$(II) AB = A'B' \quad (\text{από τα δεδομένα})$$

$$(I) \hat{B} = \hat{B}' \quad (\text{τα τρίγωνα } AB\Gamma \text{ και } A'B'\Gamma' \text{ είναι ίσα})$$



Έτσι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}'\hat{B}'\hat{\Delta}'$, επομένως όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, και συνεπώς $A\Delta = A'\Delta'$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις $\hat{B} = \hat{B}'$.

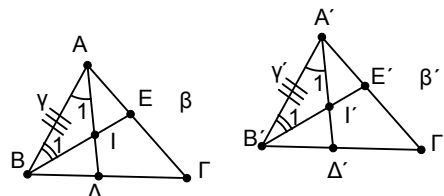
Ομοίως αποδεικνύεται η ισότητα των άλλων αντίστοιχων διχοτόμων, και επομένως η απόδειξή μας μπορεί να θεωρηθεί πλήρης.

(ii) Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$.

$$(I) \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \quad \left(\hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}'}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \right)$$

$$(II) AB = A'B' \quad (\text{από τα δεδομένα})$$

$$(I) \hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \quad \left(\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{B}'}{2} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \right)$$



Έτσι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}'\hat{B}'\hat{\Gamma}'$, επομένως όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, και συνεπώς $A\Gamma = A'\Gamma'$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$ και $B\Gamma = B'\Gamma'$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1$.

Άσκηση 4^η: Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

Απόδειξη: Στα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$

$$(I) MA = M\Delta \quad (\text{από τα δεδομένα})$$

$$(I) \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad (\text{κατακορυφήν γωνίες})$$

$$(II) MB = M\Gamma \quad (\text{από τα δεδομένα})$$

Έτσι $\hat{M}\hat{A}\hat{B} = \hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, επομένως όλα τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, και συνεπώς $AB = \Delta\Gamma$, σαν τρίτες πλευρές, και $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις $MA = M\Delta$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$

$$(I) AB = \Delta\Gamma \quad (\text{από την ισότητα των τριγώνων } MAB \text{ και } M\Delta\Gamma)$$

$$(I) \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2 \quad (\text{από την ισότητα των τριγώνων } MAB \text{ και } M\Delta\Gamma)$$

$$(II) B\Gamma = \Gamma B \quad (B\Gamma \text{ κοινή πλευρά})$$

Έτσι, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B}$.

Σχόλια: (1) Είχαμε δει ότι για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ διαθέταμε μόνο την κοινή πλευρά $B\Gamma$, είδαμε και τα δυο ζευγάρια των ίσων τριγώνων που δημιουργήθηκαν, και όταν αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα, από τις ισότητες των ίσων αντίστοιχων στοιχείων που προέκυψαν, **καταγράψαμε με «οικονομία»** μόνο τα απαραίτητα για να ολοκληρωθεί ο «κατάλογος» Π-Γ-Π για τα μεγάλα τρίγωνα. Είχαμε δει ότι οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ είναι ίσες, όμως δεν το καταγράψαμε, αφού **δεν ήταν ζητούμενο** και **δεν υπηρετούσε άμεσα το στόχο μας**, που ήταν να αποδειχθεί η ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$.

(2) Προφανώς θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξή μας **ομοίως**, αποδεικνύοντας πρώτα την ισότητα των τριγώνων $MB\Delta$ και $M\Gamma A$.

(3) Μια άλλη απόδειξη, που έχει «μεθοδολογική αξία», πραγματοποιεί την απόδειξη της ισότητας των τριγώνων MAB και $M\Delta\Gamma$, από αυτήν «κρατάει» την ισότητα $AB = \Delta\Gamma$, στη συνέχεια δηλώνει: **«ομοίως από την ισότητα των τριγώνων $MB\Delta$ και $M\Gamma A$, προκύπτει η ισότητα $A\Gamma = \Delta B$ »** και ολοκληρώνει την απόδειξη της ισότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$, με το κριτήριο Π-Π-Π.

