

Μαθήματα Γεωμετρίας (2)

Μάθημα 2^ο (§3.3 – §3.4, σελίδες 44 έως και 47)

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων (2^ο Κριτήριο – ΓΠΓ και 3^ο Κριτήριο – ΠΠΠ) δεν θα διδαχθούν, όμως τα θεωρήματα σαν «βασικές αλήθειες» θα χρησιμοποιηθούν.

«Βασικές αλήθειες»:

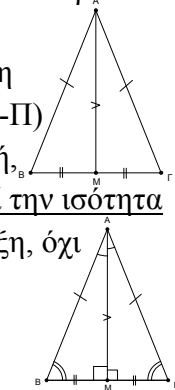
- III. **3^η:** «Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα». (2^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων – ΓΠΓ)
- IV. **4^η:** «Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα». (3^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων – ΠΠΠ)

Προσοχή: Όλα τα κριτήρια ισότητας τριγώνων, απαιτούν ισότητα πλευρών.

Έτσι, δεν υπάρχει κριτήριο ισότητας τριγώνων, που να μην απαιτεί ισότητα πλευρών.

Πόρισμα I (σελ. 45): Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος. (Η απόδειξη έγινε με το κριτήριο Π-Π-Π)

Ακούστηκε και η απόδειξη με το κριτήριο Π-Γ-Π. Η απόδειξη αυτή, παραβλέπει το προφανές της κοινής πλευράς AM, και χρησιμοποιεί την ισότητα των γωνιών στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, ενώ η πρώτη απόδειξη, όχι μόνο δεν έχει ανάγκη την «ισότητα των γωνιών στη βάση ισοσκελούς τριγώνου», αλλά μας την προσφέρει σα συμπέρασμα.



Γεωμετρικός τόπος: Το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου, που έχουν μια(κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα, λέγεται γεωμετρικός τόπος.

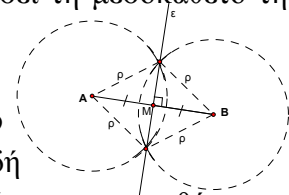
«Μεσοκάθετος»: Από τα πορίσματα III(σελ. 42) και I(σελ. 45):

«Τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος, **και μόνο αυτά**, ισαπέχουν από τα άκρα του.»

Έτσι, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος.

Σχόλια: (1) Η κορυφή ενός ισοσκελούς τριγώνου, βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο της βάσης του, και επειδή η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος του τριγώνου, όποιος κατασκευάσει τη μεσοκάθετο της βάσης, διχοτομεί τη γωνία της κορυφής.

(2) Για να κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος AB, αρκεί με κέντρα τα άκρα του, να σχεδιάσουμε δύο ίσους τεμνόμενους κύκλους. Τα σημεία τομής των κύκλων, επειδή ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος, είναι σημεία της μεσοκαθέτου και επομένως την ορίζουν, αφού δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μία και μόνο μία ευθεία.

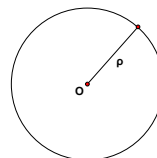


Προσοχή: Για να τέμνονται* οι κύκλοι σε δύο διαφορετικά σημεία, αρκεί η ακτίνα να είναι μεγαλύτερη από το μισό του AB. Όσοι έχουν ανασφάλεια για το πώς θα πετύχουν, ας πάρουν την ακτίνα όσο το AB, που σίγουρα είναι μεγαλύτερο από το μισό του AB.

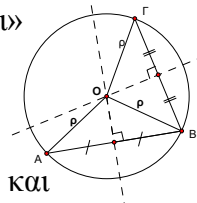
Για λόγους «οικονομίας» μπορούμε να μη σχεδιάζουμε τις διακεκομμένες γραμμές.

* Όταν $r > AM = BM$, τότε το M είναι εσωτερικό σημείο των κύκλων (A, r) και (B, r), αφού απέχει από τα κέντρα τους A, B, λιγότερο από την ακτίνα r των κύκλων, συνεπώς οι κύκλοι έχουν κοινό εσωτερικό σημείο M, και επομένως τέμνονται.

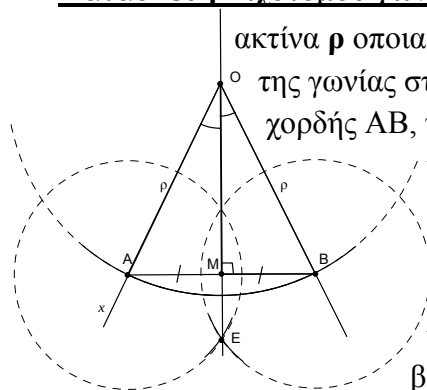
Κύκλος: Κύκλος (O, ρ) , δηλαδή κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ , είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που αυτά και μόνο αυτά, απέχουν από το κέντρο O όσο το μήκος της ακτίνας ρ .



Σχόλιο: Το κέντρο ενός κύκλου, ισαπέχει από τα άκρα κάθε χορδής του, και επομένως είναι σημείο της μεσοκάθετου κάθε χορδής του. Έτσι, όποιος «έχει χάσει» το κέντρο ενός κύκλου, για να το «βρει», αρκεί να κατασκευάσει τις μεσοκάθετες δύο (διαφορετικών) χορδών με κοινό άκρο.



Κατασκευή Διχοτόμου γωνίας: (1) Έστω μια γωνία $\angle XOY$. Με κέντρο O και



ακτίνα ρ οποιαδήποτε, σχεδιάζουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία A, B . Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο OE της χορδής AB , η οποία προφανώς διχοτομεί τη γωνία κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου OAB . Επιγραμματικά, μετατρέπουμε τη γωνία σε επίκεντρη, και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο της χορδής. Με άλλα λόγια, μετατρέπουμε τη γωνία μας σε γωνία κορυφής ισοσκελούς τριγώνου, και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου.

Σχόλιο: Κατασκευάσαμε τη μεσοκάθετο της χορδής, αξιοποιώντας το ένα από τα δύο σημεία τομής των κύκλων με κέντρα τα A, B και ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό του AB , αφού για δεύτερο σημείο είχαμε το O , που επειδή $OA = OB = \rho$, ισαπέχει από τα άκρα του AB και επομένως είναι σημείο της μεσοκάθετου του.

(2) Η κατασκευή διχοτόμου στην 1^η εφαρμογή της σελίδας 47, είναι πιο «γρήγορη», αλλά απαιτεί «μεγαλύτερη» αιτιολόγηση.

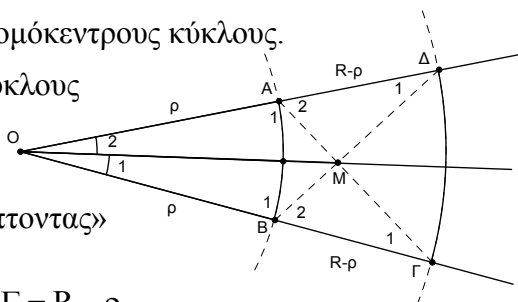
Μετατρέπουμε τη γωνία μας σε επίκεντρη, με δύο ομόκεντρους κύκλους.

Αν $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$, τα τόξα που «κόβει» από τους κύκλους

η γωνία μας, και M το σημείο τομής των $A\Gamma, B\Delta$, τότε η OM είναι διχοτόμος της γωνίας μας.

Σχόλιο: Αξίζει να δούμε την απόδειξη, «ανακαλύπτοντας» τα «βήματα» που οδηγούν στη λύση.

Έχουμε: $OA = OB = \rho, OG = OD = R$ και $AD = BG = R - \rho$.



Ανάλυση: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Για να τα καταφέρουμε, αρκεί να βρούμε δύο τρίγωνα που να είναι ίσα, και να έχουν αντίστοιχες γωνίες τις $\hat{O}_1, \hat{O}_2$.

Προφανώς τέτοια τρίγωνα είναι τα OAM, OBM και τα OGM, ODM . Παρατηρούμε ότι και στα δύο ζευγάρια τριγώνων διαθέτουμε ίσες πλευρές που περιέχουν τις γωνίες $\hat{O}_2, \hat{O}_1$, και μας λείπουν οι τρίτες πλευρές, για να αξιοποιήσουμε το «Π-Π-Π», αφού για το «Γ-Π-Γ» μόνο οι τρίτες πλευρές μπορούν να «ελπίζουν». Οι τρίτες πλευρές που μας λείπουν, είναι πλευρές των τριγώνων $MA\Delta$ και $MB\Gamma$, και προφανώς μας αρκεί η ισότητά τους. Όμως, στα τρίγωνα $MA\Delta$ και $MB\Gamma$ έχουμε μόνο ένα ζευγάρι ίσων πλευρών $AD = R - \rho = BG$, και οι κατακορυφήν γωνίες στην κορυφή M δε μπορούν να αξιοποιηθούν, αφού δεν είναι προσκείμενες στις ίσες πλευρές. Έτσι, «στο δρόμο που χαράξαμε», αναγκαστικά πλέον θα πρέπει να προκύψουν οι ισότητες $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. Αυτή την ανάγκη, την ικανοποιεί η ισότητα των τριγώνων OAG και OBD .