

Ασκήσεις (4)

Άσκηση: Έστω κύκλος (O, ρ) και σημείο Σ εξωτερικό του κύκλου. Αν A το κοινό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΣO με τον κύκλο, και B το αντιδιαμετρικό σημείο του A , τότε για κάθε σημείο M του κύκλου, να αποδειχθεί ότι $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$. (Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΣA λέγεται απόσταση του σημείου Σ από τον κύκλο).

Απόδειξη: (i) Έστω σημείο M του κύκλου, διαφορετικό από τα σημεία A, B .

Επειδή το σημείο M που επιλέξαμε δεν ανήκει στην ευθεία ΣO , υπάρχει

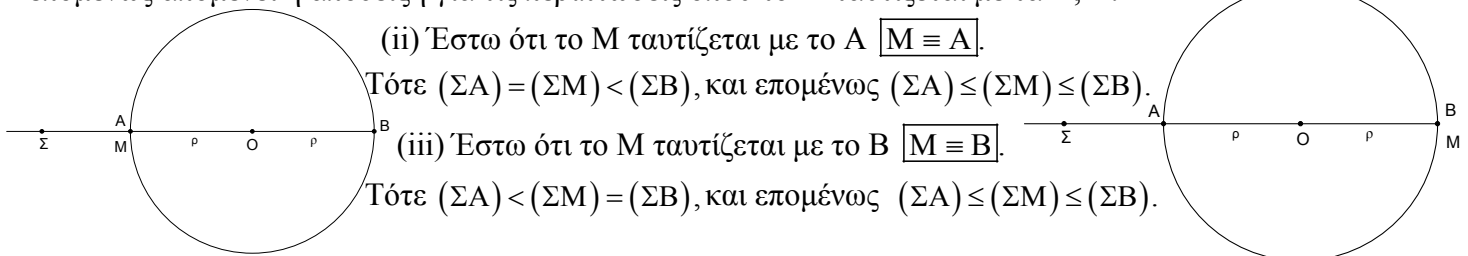
το τρίγωνο ΣOM , στο οποίο από την «**τριγωνική ανισότητα**»

έχουμε τη σχέση: $(\Sigma O) - (OM) < (\Sigma M) < (\Sigma O) + (OM)$,

η οποία αφού $OM = OA = OB = \rho$, γίνεται: $(\Sigma O) - (OA) < (\Sigma M) < (\Sigma O) + (OB)$,

συνεπώς $(\Sigma A) < (\Sigma M) < (\Sigma B)$, και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

Η απόδειξη μας, ισχύει ομοίως για όλα τα σημεία M του κύκλου, που είναι διαφορετικά από τα A, B , και επομένως απομένει η απόδειξη για τις περιπτώσεις όπου το M ταυτίζεται με τα A, B .



(ii) Έστω ότι το M ταυτίζεται με το A $[M \equiv A]$.

Τότε $(\Sigma A) = (\Sigma M) < (\Sigma B)$, και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

(iii) Έστω ότι το M ταυτίζεται με το B $[M \equiv B]$.

Τότε $(\Sigma A) < (\Sigma M) = (\Sigma B)$, και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

Σχόλια: (1) Η σχέση που έπρεπε να αποδείξουμε ήταν **διπλή** ανισότητα, και έτσι εντελώς φυσιολογικά, συνειρμικά οδηγηθήκαμε στην ιδέα της τριγωνικής ανισότητας, που απαιτεί την ύπαρξη τριγώνου. Οι ισότητες, προέκυψαν για τις «ακραίες» ή αλλιώς «οριακές» θέσεις του M , όπου το τρίγωνο «εξαφανίζεται». Για να αντιληφθεί κάποιος τις λέξεις «**ακραίες**», «**οριακές**» και «**εξαφανίζεται**», θα πρέπει να φανταστεί ότι σχεδιάζονται διαδοχικά σχήματα, με το M κάθε φορά να πλησιάζει όλο και πιο πολύ το A ή το B .

(2) Όταν «διαβάζουμε» το σύμβολο $\leq$, λέμε «μικρότερο ή ίσο», και αυτό ακριβώς δηλώνεται με την ισοδυναμία: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \{\alpha < \beta \text{ ή } \alpha = \beta\}$, που με απλά λόγια λέει, ότι το σύμβολο χρησιμοποιείται σωστά αν

μία από τις δύο σχέσεις $(<, =)$ ισχύει. Έτσι, αν προκύψει σαν αποτέλεσμα το $3 \leq 3$, θα πρέπει να το θεωρήσουμε **σωστό**, αφού ισχύει το «**ίσον**», και ομοίως **σωστό** θα πρέπει να πούμε για το αποτέλεσμα $3 \leq 4$, αφού ισχύει το «**μικρότερο**».

Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, **λέμε:** αν $\alpha \leq \beta$, τότε $\alpha < \beta$ ή $\alpha = \beta$, και **συμβολικά γράφουμε:** $\alpha \leq \beta \Rightarrow \{\alpha < \beta \text{ ή } \alpha = \beta\}$.

Λέμε: αν $\alpha < \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε $\alpha \leq \beta$, **συμβολικά γράφουμε:** $\{\alpha < \beta \text{ ή } \alpha = \beta\} \Rightarrow \alpha \leq \beta$,

και **προφανώς** ισχύουν: $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$, και επίσης $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$.

Τώρα δικαιολογείται το « $(\Sigma A) < (\Sigma M) < (\Sigma B)$, και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$ », που γράψαμε στην απόδειξη.

(3) Από τη σχέση που αποδείξαμε, θα πρέπει «να κρατήσουμε» τη σχέση: $(\Sigma A) \leq (\Sigma M)$ που ισχύει **για κάθε** σημείο M του κύκλου. Η σχέση αυτή «μας λέει», ότι **από όλα** τα ευθύγραμμα τμήματα που μπορούμε να κατασκευάσουμε με ένα άκρο το σημείο Σ και με δεύτερο άκρο οποιοδήποτε σημείο M του κύκλου, το **μικρότερο μήκος** το έχει το ΣA . Το **μήκος του ΣA** ονομάζεται **απόσταση** του σημείου Σ από τον κύκλο. Αυτός ο ορισμός, δεν διαφέρει από τον ορισμό της **απόστασης σημείου Σ από μια ευθεία ϵ** , όπου από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα με ένα άκρο το Σ και δεύτερο άκρο ένα σημείο της ϵ , το **μικρότερο μήκος** το έχει το κάθετο, και γι αυτό το μήκος αυτό ορίζεται σαν η απόσταση του Σ από την ϵ .

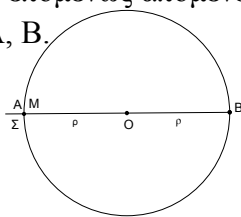
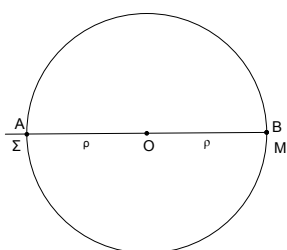
Αποδεικτική άσκηση 4(σελίδα 64): Έστω κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και σημείο Σ της ημιευθείας OA .

Για κάθε σημείο M του κύκλου, να αποδειχθεί ότι $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$. (Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΣA λέγεται απόσταση του σημείου Σ από τον κύκλο).

Απόδειξη: Αποδείξαμε παραπάνω, ότι η σχέση ισχύει για Σ εξωτερικό σημείο του κύκλου. Με την διατύπωση της άσκησης 4, θα πρέπει να αποδείξουμε τη σχέση για σημείο Σ του κύκλου και για σημείο Σ εσωτερικό του κύκλου (για κάθε σημείο M του κύκλου).

(a) Αν Σ σημείο του κύκλου ($\Sigma \equiv A$), και M σημείο του κύκλου διαφορετικό από τα A, B . Τότε από την «**τριγωνική ανισότητα**» στο τρίγωνο ΣOM , θα έχουμε:
 $(\Sigma A) = 0 < (\Sigma M) < (\Sigma O) + (OM)$, δηλαδή $(\Sigma A) = 0 < (\Sigma M) < (\Sigma O) + (OB)$,
 επομένως $(\Sigma A) = 0 < (\Sigma M) < (\Sigma B)$, και συνεπώς $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

Η απόδειξη μας, ισχύει ομοίως για όλα τα σημεία M του κύκλου, που είναι διαφορετικά από τα A, B , και επομένως απομένει η απόδειξη για τις περιπτώσεις όπου το M ταυτίζεται με τα A, B .



- Έστω ότι το M ταυτίζεται με το A $\boxed{M \equiv A \equiv \Sigma}$.
 Τότε $(\Sigma A) = (\Sigma M) = 0 < (\Sigma B)$,
 και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

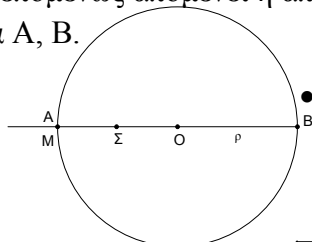
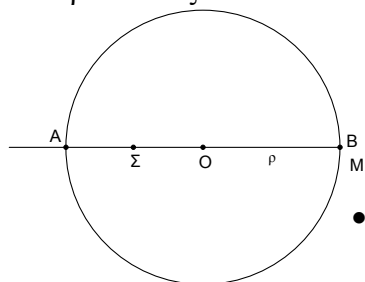
- Έστω ότι το M ταυτίζεται με το B $\boxed{M \equiv B}$. Τότε $(\Sigma A) = 0 < (\Sigma M) = (\Sigma B)$,
 και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

Σχόλιο: Όπως θα έπρεπε να είναι αναμενόμενο, η απόσταση του Σ από τον κύκλο είναι $(\Sigma A) = 0$

(b) Αν Σ εσωτερικό σημείο του κύκλου (διαφορετικό του O), και M σημείο του κύκλου διαφορετικό από τα A, B .

Τότε, από την τριγωνική ανισότητα στο $\triangle \Sigma OM$: $(OM) - (\Sigma O) < (\Sigma M) < (OM) + (\Sigma O)$,
 η οποία επειδή $OM = OA = OB = r$, γίνεται: $(OA) - (\Sigma O) < (\Sigma M) < (OB) + (\Sigma O)$,
 συνεπώς $(\Sigma A) < (\Sigma M) < (\Sigma B)$, και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

Η απόδειξη μας, ισχύει ομοίως για όλα τα σημεία M του κύκλου, που είναι διαφορετικά από τα A, B , και επομένως απομένει η απόδειξη για τις περιπτώσεις όπου το M ταυτίζεται με τα A, B .



- Έστω ότι το M ταυτίζεται με το A $\boxed{M \equiv A}$.
 Τότε $(\Sigma A) = (\Sigma M) < (\Sigma B)$,
 και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

- Έστω ότι το M ταυτίζεται με το B $\boxed{M \equiv B}$.
 Τότε $(\Sigma A) < (\Sigma M) = (\Sigma B)$, και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

(c) Αν το Σ ταυτίζεται με το O , τότε $(\Sigma A) = (\Sigma M) = (\Sigma B) = r$, και επομένως $(\Sigma A) \leq (\Sigma M) \leq (\Sigma B)$.

Σχόλιο: Η απόσταση του Σ από τον κύκλο, είναι η απόσταση από την καμπύλη γραμμή. Έτσι, δε θα πρέπει να παρασυρθούμε από τον προσδιορισμό «εσωτερικό σημείο του κύκλου», θεωρώντας ότι τα σημεία αυτά ανήκουν στον κύκλο, και επομένως έχουν μηδενική απόσταση από αυτόν. Για «εσωτερικά» σημεία του κύκλου, τη μεγαλύτερη απόσταση από τον κύκλο την έχει το κέντρο του κύκλου που απέχει από τον κύκλο όσο το μήκος της ακτίνας $(\Sigma A) = r$.