

Μαθήματα Γεωμετρίας (4)

Μάθημα 4^ο (§3.10 – §3.13, σελίδες 59 έως και 66)

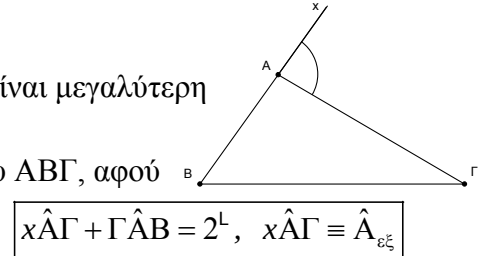
Ανισοτικές σχέσεις – Κάθετες και πλάγιες

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων στις σελίδες 59 και 60, καθώς και του Θεωρήματος II στη σελίδα 65 δε θα διδαχθούν, όμως τα θεωρήματα σαν «βασικές αλήθειες» θα χρησιμοποιηθούν.

«Βασικές αλήθειες»:

VIII. (Θεώρημα της §3.10): Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου, είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Σχόλιο: Στο σχήμα, η γωνία $\chi \hat{A} \Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$, αφού είναι εφεξής και παραπληρωματική της γωνίας A του τριγώνου.



Από το Θεώρημα έχουμε $\hat{A}_{εξ} > \hat{B}$ και $\hat{A}_{εξ} > \hat{\Gamma}$.

Πόρισμα (i): Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

Απόδειξη: Έστω τρίγωνο, του οποίου μία γωνία είναι ορθή ή αμβλεία, και έστω ότι ονομάζουμε την κορυφή της γωνίας αυτής με το γράμμα A , ονομάζοντας τις δύο άλλες κορυφές του τριγώνου με τα γράμματα B και Γ .

Αφού η γωνία A είναι ορθή ή αμβλεία, άρα $\hat{A} \geq 1^L$, και με δεδομένο ότι $\hat{A} + \hat{A}_{εξ} = 2^L$, επομένως $\hat{A}_{εξ} \leq 1^L$.

Όμως επειδή $\hat{B} < \hat{A}_{εξ} \leq 1^L$ και $\hat{\Gamma} < \hat{A}_{εξ} \leq 1^L$, θα έχουμε ότι $\hat{B} < 1^L$ και $\hat{\Gamma} < 1^L$, δηλαδή θα έχουμε ότι οι γωνίες B, Γ είναι οξείες.

Άρα, σε όποιο τρίγωνο υπάρχει γωνία ορθή ή αμβλεία, οι άλλες δύο γωνίες του είναι υπογρεωτικά οξείες, και συνεπώς «κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία».

$$* \hat{A} \geq 1^L \Rightarrow 2^L - \hat{A}_{εξ} \geq 1^L \Rightarrow 2^L - 1^L \geq \hat{A}_{εξ} \Rightarrow \hat{A}_{εξ} \leq 1^L$$

Πόρισμα (ii): Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

Απόδειξη: Έστω τρίγωνο, και δύο οποιεσδήποτε γωνίες του, τις οποίες μπορούμε να ονομάσουμε $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

Όπως είναι γνωστό $\hat{B} < \hat{A}_{εξ}$, και έτσι έχουμε: $\hat{B} < \hat{A}_{εξ} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} < \hat{A} + \hat{A}_{εξ} = 2^L \Rightarrow \boxed{\hat{A} + \hat{B} < 2^L = 180^\circ}$

IX. (Θεώρημα της §3.11): Σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Πόρισμα (i): Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντί της πλευρά, είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

Απόδειξη: Αποδείξαμε ότι κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία. Επομένως αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε οι άλλες δύο είναι οξείες, και επομένως μικρότερές της. Σύμφωνα με το θεώρημα της §3.11, απέναντι στην ορθή ή την αμβλεία, που είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

Πόρισμα (ii): Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

Απόδειξη: Αν δεν είναι ισοσκελές, τότε είναι σκαληνό, με τρεις άνισες πλευρές, που προφανώς απέναντί τους έχουν τρεις ομοίως άνισες γωνίες. Όμως εμείς έχουμε υπόθεση, με τρίγωνο που έχει δύο γωνίες ίσες. Άρα, όποιος ισχυρίζεται ότι «ένα τρίγωνο με δύο γωνίες ίσες» δεν είναι ισοσκελές, οδηγείται στην αντίφαση, το τρίγωνο να έχει τρεις άνισες γωνίες και δύο γωνίες ίσες. Επομένως θα πρέπει να δεχθεί ότι το μόνο που «στέκει λογικά» είναι: «Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές».

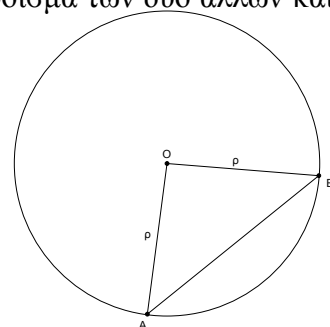
Πόρισμα (iii): Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη: Ανά δύο οι ίσες γωνίες, εξασφαλίζουν την ισότητα των απέναντί τους πλευρών. Έτσι, διαδοχικά με την μεταβατική ιδιότητα, προκύπτει ότι τρίγωνο με τρεις γωνίες ίσες, είναι ισόπλευρο.

- X. **(Θεώρημα της §3.12):** Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους. **(τριγωνική ανισότητα)**

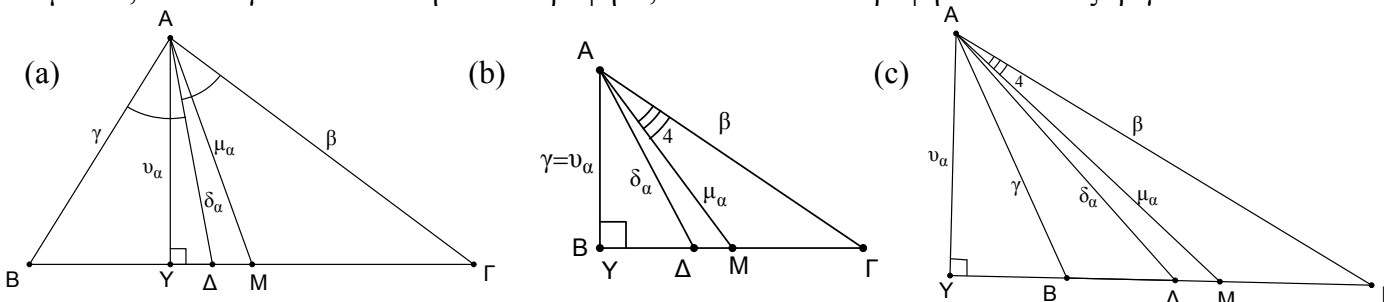
Πόρισμα: Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

Απόδειξη: Εάν μια χορδή κύκλου (O, ρ) και διαμέτρου δ, έστω AB, δεν είναι διάμετρος, τότε στο τρίγωνο OAB, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:
 $AB < OA + OB = \rho + \rho = \delta$ (Προφανώς αν η AB είναι διάμετρος, τότε $AB = \delta$)



- XI. **(Θεώρημα I της §3.13):** Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.
- XII. **(Θεώρημα II της §3.13):** Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δυο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:
- (i) Το κάθετο είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
 - (ii) Αν δυο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

Σχόλιο: Μπορούμε να δούμε σαν εφαρμογή σε τρίγωνο ABΓ, τη «διάταξη» ύψους, διχοτόμου και διαμέσου, όταν «άγονται» από την ίδια κορυφή A, που δεν είναι κορυφή ισοσκελούς τριγώνου.



Στο σχήμα (a) οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση BΓ, είναι οξείες, με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Στο σχήμα (b) η γωνία B είναι ορθή και έτσι το ύψος AY ταυτίζεται με την πλευρά AB.

Στο σχήμα (c) η γωνία B είναι αμβλεία και έτσι το ύψος AY «βρίσκεται έξω» από το τρίγωνο ABΓ.

Εφαρμογή: Έστω τρίγωνο ABΓ, όπου οι γωνίες που πρόσκεινται στη βάση BΓ, είναι οξείες, με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Θα αποδείξουμε ότι το Ύψος, η Διχοτόμος και η Διάμεσος από την κορυφή A, «διατάσσονται» όπως στο σχήμα (a), με τη διχοτόμο ανάμεσα σε ύψος και διάμεσο.

Επειδή σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά,

ισχύει η σχέση $\beta > \gamma$, αφού $\hat{B} > \hat{\Gamma} \Rightarrow \beta > \gamma$.

(1) Από το σημείο Α, που βρίσκεται έξω από την ευθεία ΒΓ, έχουμε το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΑΥ και τα δύο άνισα πλάγια ΑΒ και ΑΓ.

Από το **Θεώρημα II(ii)** της §3.13: $\gamma < \beta \Rightarrow AB < AG \Rightarrow YB < YG$

και επομένως το Υ είναι ανάμεσα στο Β και στο μέσο Μ της ΒΓ.

$$YB < YG \Rightarrow YB + YB < YB + YG \Rightarrow 2 \cdot YB < BG \Rightarrow YB < \frac{BG}{2} \Rightarrow BY < BM$$

Έτσι το ύψος $v_\alpha \equiv AY$, που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκεται «ανάμεσα» στη μικρότερη από τις άλλες δύο πλευρές, δηλαδή την γ , και τη διάμεσο $AM \equiv \mu_\alpha$.

(2) Επειδή $2 \cdot YB < BG$, υπάρχει σημείο Β' εσωτερικό του τμήματος ΥΓ, έτσι ώστε $BY = YB'$, και συνεπώς από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΒ' θα έχουμε

$B\hat{A}B' = 2\hat{A}_1$. Όμως $B\hat{A}B' < \hat{A}$, συνεπώς $2\hat{A}_1 < \hat{A}$ και επομένως $\hat{A}_1 < \frac{\hat{A}}{2}$.

$$B\hat{A}Y = \hat{A}_1 < \frac{\hat{A}}{2}, \text{ και } 2\hat{A}_1 < \hat{A} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_1 < \hat{A} \Rightarrow \hat{A}_1 < \hat{A} - \hat{A}_1 \Rightarrow B\hat{A}Y < Y\hat{A}G.$$

Έτσι το ύψος $v_\alpha \equiv AY$, που βρίσκεται «ανάμεσα» στις πλευρές γ, β του $\triangle AB\Gamma$, σχηματίζει με τη μικρότερη από αυτές, δηλαδή την γ , μικρότερη γωνία, από αυτήν που σχηματίζει με τη μεγαλύτερη από αυτές, δηλαδή την β .

Επίσης, επειδή $B\hat{A}Y < \frac{\hat{A}}{2}$, το ύψος $v_\alpha \equiv AY$, που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκεται «ανάμεσα» στη μικρότερη από τις άλλες δύο πλευρές, δηλαδή την γ , και τη διχοτόμο $AD \equiv \delta_\alpha$.

(3) Προεκτείνοντας τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΚ, σχηματίζεται το τρίγωνο ΚΓΜ που είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΒΜ (Π-Γ-Π), αφού $KM = AM$ από κατασκευής, $GM = BM$, αφού Μ μέσο της ΒΓ, και $\hat{M}_2 = \hat{M}_1$ «ως κατακορυφήν». Έτσι $\hat{A}_3 = \hat{K}$, αφού βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές των ίσων τριγώνων και $\Gamma K = AB = \gamma$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις «κατακορυφήν».

Στο $\triangle AK\Gamma$, έχουμε $\gamma < \beta \Rightarrow \hat{A}_4 < \hat{K}$, και επειδή $\hat{K} = \hat{A}_3$, επομένως θα έχουμε ότι

$\hat{A}_4 < \hat{A}_3$. Έτσι η διάμεσος $\mu_\alpha \equiv AM$, που βρίσκεται «ανάμεσα» στις πλευρές

γ, β του $\triangle AB\Gamma$, σχηματίζει με τη μεγαλύτερη από αυτές, δηλαδή την β , μικρότερη γωνία, από αυτήν που σχηματίζει με τη μικρότερη από αυτές, δηλαδή την γ .

Όμως, $\hat{A}_4 < \hat{A}_3 \Rightarrow \hat{A}_4 + \hat{A}_4 < \hat{A}_3 + \hat{A}_4 \Rightarrow 2\hat{A}_4 < \hat{A} \Rightarrow \hat{A}_4 < \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow M\hat{A}G < \frac{\hat{A}}{2}$, και έτσι γίνεται φανερό, ότι η διάμεσος $AM = \mu_\alpha$, που αντιστοιχεί στην πλευρά α, βρίσκεται ανάμεσα στη διχοτόμο $AD = \delta_\alpha$, και τη μεγαλύτερη από τις άλλες δύο πλευρές, δηλαδή την πλευρά $AG = \beta$.

Σχόλιο: Όπως είναι γνωστό, όταν $\beta = \gamma$, τότε $v_\alpha \equiv \delta_\alpha \equiv \mu_\alpha$, και προφανώς έχουμε την περίπτωση όπου η διχοτόμος είναι ύψος και διάμεσος.

