XXVI

Νέες γεωμετρίες, νέοι κόσμοι

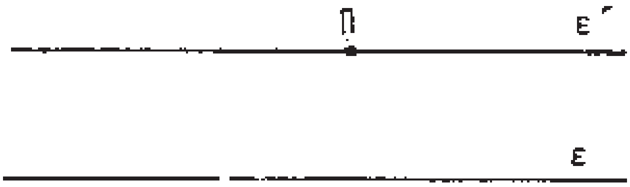
'Εκανα τόσο θαυμαστές ανακαλύψεις που ακόμα κι εγώ ο ίδιος έμεινα αποσβολωμένος : από το τίποτα δημιούργησα έναν νέο και διαφορετικό κόσμο.

John Bolyai

Ο πρώτος άνθρωπος που αμφισβήτησε τον Ευκλείδη ήταν ο ίδιος ο Ευκλείδης. Ο δημιουργός του πιο πλατιά κι απόλυτα αποδεκτού συστήματος σκέψης – του άβατου της αλήθειας, της φάτνης τόσων φιλοσοφιών και επιστημών – αμφέβαλε για τα αποτελέσματά του προτού καν τα παρουσιάσει στον κόσμο. Από την αυτοαμφισβήτηση του Ευκλείδη άρχισε η "παρασκηνιακή" επίθεση ενάντια στο προφανές που διάρκεσε δυο χιλιάδες χρόνια.

Γνωρίζουμε πως η ευκλείδεια γεωμετρία βασιζόταν σε δέκα αξιώματα που η αλήθειά τους φαινόταν να είναι τόσο αυταπόδεικτη ώστε κανείς "έχων σώας τας φρένας" άνθρωπος δεν τολμούσε να την αμφισβητήσει. Από αυτή τη στέρεη βάση, με μια άψογη λογική συνάχθηκαν περισσότερες "αλήθειες" εξίσου άμεσα αποδεκτές κι εξίσου ελκυστικές, θα έλεγε κανείς, με το αξιώματα. Οι δυο χιλιετηρίδες εφαρμογής που ακολούθησαν με αποκορύφωμα τις επιτυχίες της νευτώνειας εποχής, πρόσθεσαν την πρακτικά ακαταμάχητη μαρτυρία τους υπέρ της ορθότητας και της βασιμότητας αυτών των αληθειών. Αιώνα με τον αιώνα η λογική στερεωνόταν με την εμπειρία κι ο κοινός νους με την παράδοση, ώσπου το σύστημα του Ευκλείδη επενδύθηκε με απαραβίαστη ιερότητα. Το 1800 οι μορφωμένοι άνθρωποι μπορούσαν πολύ ευκολότερα να ορκιστούν στο όνομα των θεωρημάτων του παρά στη Βίβλο.

Είτε ανάτρεχε κανείς στην εμπειρία είτε δεχόταν την καντιανή φιλοσοφία είτε προτιμούσε να μένει στα επιφαινόμενα, το αναπόφευκτο συμπέρασμα φαινόταν να είναι πως ο Ευκλείδης ήταν η αλήθεια κι η αλήθεια ο Ευκλείδης. 'Ομως παρόλη την αξιοζήλευτη θέση που κατείχε από την αρχή η ευκλείδεια γεωμετρία, και η οποία με τον καιρό γινόταν ακόμα πιο περίοπτη, υπήρχαν μερικοί στοχαστές, συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου του δημιουργού της, που δεν ένιωθαν άνετα. Εκείνο που τους ενοχλούσε ήταν δυο φαινομενικά απόλυτα αθώα αξιώματα.



Σχ. 77 Το αξίωμα των παραλλήλων του Ευκλείδη

Το πρώτο απ' αυτά έλεγε πως ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορούσε να επεκταθεί όσο ήθελε κανείς προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Το δεύτερο ήταν το αξίωμα των παραλλήλων που έλεγε πως από ένα σημείο Π που βρίσκεται έξω από μια ευθεία γραμμή ε περνά μια και μόνο μια ευθεία ε΄(στο ίδιο επίπεδο που ορίζεται από την Π και την ε), η οποία δεν συναντά ποτέ την ε, όσο κι αν προεκταθούν η ε και η ε΄ (σχ. 77). Εφόσον αποδεχόμαστε τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, επειδή μας τα εγγυάται η εμπειρία του φυσικού χώρου που έχουμε, τότε αυτά τα αξιώματα παραμένουν ανοιχτά σε κάποιες αμφιβολίες. Κανείς άνθρωπος δεν είχε ποτέ άμεση εμπειρία των όσων συμβαίνουν στο διάστημα σε απόσταση μερικών χιλιομέτρων από τη γη. 'Ολο κι όλο που μπορούμε να πούμε για τα παραπάνω αξιώματα είναι πως φαίνεται να ισχύουν στον περιορισμένο χώρο στον οποίο αναγκαστικά κινούμαστε στην πραγματικότητα. Κι ούτε και γι αυτό δε μπορούμε να είμαστε ήσυχοι γιατί, όπως είχαμε επισημάνει στο κεφάλαιο για την προβολική γεωμετρία, ποτέ δε βλέπουμε παράλληλες γραμμές – ούτε καν στο τμήμα του χώρου που μας περιτριγυρίζει. 'Οταν κοιτάζουμε από μεγάλη απόσταση τις γραμμές που στην ευκλείδεια γεωμετρία αναφέρονται σαν παράλληλες, βρίσκουμε πως μας δίνουν την εντύπωση ότι στο βάθος συναντιούνται.

Ο Ευκλείδης αποκαλύπτει τις υποψίες του σχετικά με αυτά τα αξιώματα από τον τρόπο με τον οποίο τα χειρίζεται. Το αξίωμα των παράλληλων ευθειών, που είναι το πιο αμφισβητήσιμο από τα δυο, δεν το χρησιμοποιεί προτού αποδείξει όσο περισσότερα θεωρήματα μπορεί χωρίς αυτό. Είναι εξίσου προσεκτικός σχετικά με την απεριόριστη επεκτασιμότητα της ευθείας γραμμής. Αν εξετάσουμε τα θεωρήματα της γεωμετρίας του, θα δούμε πως συχνά χρησιμοποιεί ευθύγραμμα τμήματα (δηλαδή τμήματα ευθειών που βρίσκονται ανάμεσα σε δυο σημεία), αλλά ποτέ δε βασίζει τις υποθέσεις του σε κάποια άπειρου μήκους ευθεία γραμμή. 'Οποτε δε μπορεί να αποδείξει αλλιώς ένα θεώρημα, προεκτείνει τα ευθύγραμμα τμήματα προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση, αλλά και πάλι μόνον όσο είναι αναγκαίο. Πάντως δεν πρέπει να νομίσουμε από τα παραπάνω ότι ο Ευκλείδης αμφέβαλλε για την αλήθεια των δύο αξιωμάτων. Μάλλον εξαιτίας των σημαντικών συνεπειών τους θα προτιμούσε να συναγάγει το περιεχόμενό τους από κάποια άλλα απλούστερα αξιώματα.

Σε όλες τις εποχές μετά τον Ευκλείδη βρέθηκαν ορισμένοι υπερ-κριτικοί στοχαστές που δίσταζαν να θεωρήσουν σαν αξιώματα αυτές τις προτάσεις στις οποίες θα στοιχημάτιζε και το τελευταίο του δολλάριο ακόμα κι ο πιο χοντροκέφαλος μπίζνεσμαν. Για να απομακρύνουν κάθε επιφύλαξη, προσπάθησαν όλοι τους να κάνουν το ίδιο πράγμα. Συγκέντρωσαν την προσοχή τους στο αξίωμα των παραλλήλων κι έβαλαν τα δυνατά τους είτε να το συναγάγουν από κάποιο άλλο αξίωμα είτε να βρουν ένα περισσότερο αποδεκτό υποκατάστατό του. Εκατοντάδες τέτοιες θαρραλέες απόπειρες των καλύτερων μαθηματικών κατέληξαν όλες σε αποτυχία. Κατά το 1800 το αξίωμα των παραλλήλων είχε καταλήξει να θεωρείται το σκάνδαλο της γεωμετρίας.

Δεν θα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον ούτε και θα είχε πολλά να μας προσφέρει εδώ το να κοιτάξουμε τις περισσότερες απ' αυτές τις προσπάθειες. Παρόλα αυτά το έργο ενός ανθρώπου, του ιησουίτη μοναχού Τζιρόλαμο Σακκέρι, καθηγητή των μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Παβίας και διορατικότατου μελετητή της λογικής, αξίζει την προσοχή μας. Η καινοτόμα επίθεσή του στο πρόβλημα του αξιώματος των παραλλήλων συνοψίζεται ουσιαστικά στην παρακάτω επιχειρηματολογία: 'Εστω ότι έχουμε μια ευθεία ε κι ένα σημείο Π. Τότε, είτε (α) υπάρχει ακριβώς μια παράλληλος της ε που να περνά από το Π, είτε (β) δεν υπάρχει καμιά παράλληλος από το Π στην ε, είτε (γ) υπάρχουν τουλάχιστον δυο παράλληλοι από το Π στην ε. Η περίπτωση (α) είναι το αξίωμα των παραλλήλων που μας άφησε ο Ευκλείδης. Ας υποθέσουμε πως την αντικαθιστούμε με την περίπτωση (β) και πως αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η τελευταία, αν συνδυαστεί με τα υπόλοιπα εννέα αξιώματα του Ευκλείδη, οδηγεί σε αντιφατικά θεωρήματα. Τότε οπωσδήποτε η περίπτωση (β) δε μπορεί να είναι σωστή. Παρόμοια, αν η χρήση της περίπτωσης (γ) μαζί με τα υπόλοιπα εννέα αξιώματα οδηγεί σε αντιφατικά θεωρήματα, τότε ούτε και η (γ) δε μπορεί να είναι σωστή. Από εδώ μπορούμε να συμπεράνουμε πως το αξίωμα του Ευκλείδη είναι το μόνο ορθό.

Χρησιμοποιώντας την περίπτωση (β) μαζί με τα άλλα εννιά αξιώματα ο Σακκέρι πραγματικά κατάφερε να φτάσει σε θεωρήματα αντιφατικά μεταξύ τους. Απέτυχε όμως να βρει κάποια αντίφαση ανάμεσα στα εννιά αξιώματα του Ευκλείδη και το εναλλακτικό αξίωμα που υπέθετε την ύπαρξη δυο τουλάχιστον παραλλήλων. Παρά τις εκτεταμένες και αποφασιστικές προσπάθειές του και παρόλο που μερικά από τα αποτελέσματα όπου οδηγήθηκε ήταν στ'αλήθεια παράξενα σε σύγκριση με τα αντίστοιχα της ευκλείδειας γεωμετρίας, αντίφαση δε βρισκόταν.

Ο Σακκέρι βρέθηκε στο κατώφλι μιας ανακάλυψης που θα άφηνε εποχή, αλλά αρνήθηκε να το περάσει. Ας αφήσουμε προς το παρόν τον αναγνώστη ελεύθερο να βρει μόνος του το συμπέρασμα που θα έπρεπε να βγάλει ο Σακκέρι από την αδυναμία του να επισημάνει οποιαδήποτε αντίφαση. 'Ομως ο ίδιος ο Σακκέρι ήταν τόσο απροετοίμαστος για τα περίεργα θεωρήματα στα οποία οδηγούσε το πρωτότυπο σύνολο των αξιωμάτων του, που έκρινε πως το αξίωμα του Ευκλείδη θα έπρεπε να είναι σωστό. 'Ετσι το 1733 δημοσίευσε τα αποτελέσματά του σε ένα βιβλίο με τον τίτλο *Η δικαίωση του Ευκλείδη πέρα από όλες τις ατέλειες*. Από ό,τι φαίνεται, όταν κανείς αποφασίσει να δικαιώσει κάποιον άλλο, συνήθως το κάνει αυτό οπωσδήποτε, όποια και να είναι τα γεγονότα.

Η δική μας εξήγηση για την αποτυχία του Σακκέρι και όλων των άλλων μαθηματικών που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα του αξιώματος των παραλλήλων είναι πως, όσο μεγάλοι κι αν ήταν, κανείς τους δεν είχε αρκετή διορατικότητα ώστε να αναγνωρίσει και να απορρίψει μια συνήθεια της σκέψης που διαιωνιζόταν επί δυο χιλιάδες χρόνια. Όμως στο μαθηματικό κόσμο των αρχών του δέκατου ένατου αιώνα σημειώθηκε μια αλλαγή της πνευματικής ατμόσφαιρας που έφερε μαζί της μια σαρωτική κριτική επανεξέταση όλων των θεμελιακών πεποιθήσεων. Αναμφίβολα αυτή η αλλαγή εξηγεί το γεγονός ότι τρεις άνδρες, ο Γκάουςς, ο Λομπατσέφσκι κι ο Μπόλαϊ, χωρίς να γνωρίζουν ο ένας τις σκέψεις του άλλου, ανακάλυψαν τη σωστή ερμηνεία του έργου του Σακκέρι περίπου την ίδια εποχή. Ο Λομπατσέφσκι κι ο Μπόλαϊ μάλιστα δημοσίευσαν τα αποτελέσματά τους με διαφορά μόνο μερικών χρόνων.

Από αυτούς τους τρεις ο μεγαλύτερος, που δεν υστερούσε σε μαθηματικό ανάστημα από τον Νεύτωνα ή τον Αρχιμήδη, ήταν ο Καρλ Φρήντριχ Γκάουςς. Ο Καρλ από νωρίς έδειξε μια απίστευτα πρώιμη ανάπτυξη σε πολλά πεδία και μια ιδιαίτερη κλίση για τα μαθηματικά. Όταν νεαρός ακόμη απέδειξε πως το κανονικό δεκαεφτάγωνο μπορούσε να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη, ενθουσιάστηκε τόσο πολύ που εγκατέλειψε τη φιλοδοξία του να σπουδάσει φιλολογία, για να μελετήσει τα μαθηματικά. Σύντομα πρόσφερε μεγάλα έργα σε πολλούς κλάδους τους, κι εκτός απ' αυτό δε δυσκολεύθηκε να διακριθεί σαν εφευρέτης και πειραματιστής. Μολονότι οι συνεισφορές του δεν ήταν λιγότερο πολυάριθμες ή μικρότερου βάθους απ' ό,τι οποιουδήποτε άλλου μαθηματικού, ο Γκάουςς ήταν εξαιρετικά μετριόφρονας: "Απλά, αν καθόταν και οι άλλοι να σκεφτούν τόσο βαθιά και τόσο αδιάκοπα τις μαθηματικές αλήθειες όσο εγώ", έλεγε, "θα έκαναν τις ανακαλύψεις μου". Εκείνοι λοιπόν που πιστεύουν πως η μεγαλοφυΐα είναι κατά 99% ιδρώτας ή εκείνοι που απελπίζονται, επειδή τους λείπει η μαθηματική ικανότητα, μπορούν να μείνουν ήσυχοι μετά απ' αυτή τη δήλωση του Γκάουςς.

Ο Γκάουςς ήταν ακόμη πολύ νέος, όταν πρόσεξε για πρώτη φορά το αξίωμα των παραλλήλων. Αρχικά προσπάθησε να το αντικαταστήσει με κάποιο απλούστερο, και απέτυχε. Τότε υιοθέτησε τη συλλογιστική του Σακκέρι παίρνοντας ένα αξίωμα των παραλλήλων αντίθετο με εκείνο του Ευκλείδη - ουσιαστικά την τρίτη περίπτωση του Σακκέρι - και ερευνώντας τι συνεπάγονταν αυτό το υποθετικό αξίωμα σε συνδυασμό με τα άλλα εννιά του Ευκλείδη. Σαν τον Σακκέρι, έφτασε κι αυτός σε περίεργα θεωρήματα. 'Ομως αντί να αφήσει το παράδοξο να τον τρομάξει, ο Γκάους απάντησε με φωτιά στη φωτιά. Διακήρυξε το παράδοξο και πρωτοφανές συμπέρασμα που οι μεγάλοι και οι σχεδόν μεγάλοι δεν είχαν μπορέσει να σκεφτούν. Δέχτηκε πως μπορούν να υπάρξουν και άλλες γεωμετρίες εξίσου έγκυρες με του Ευκλείδη.

Ο Γκάους είχε το πνευματικό θάρρος για να δημιουργήσει την μη-ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά όχι και το ηθικό θάρρος για να αντιμετωπίσει τους όχλους που ήταν έτοιμοι να αποκαλέσουν τρελλό το δημιουργό της, γιατί οι επιστήμονες των αρχών του δέκατου ένατου αιώνα ζούσαν στη σκιά του Καντ, του οποίου η άποψη πως δεν ήταν δυνατό να υπάρξει άλλη γεωμετρία από την ευκλείδεια κυριαρχούσε στον πνευματικό κόσμο. Το έργο του Γκάους για τη μη-ευκλείδεια γεωμετρία βρέθηκε ανάμεσα στα χαρτιά του μετά το θάνατό του.

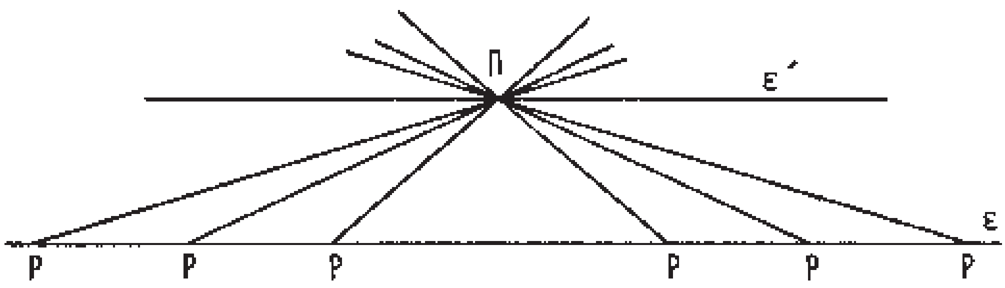
Από τους δυο άλλους ανθρώπους στους οποίους ανήκει η τιμή για τη δημιουργία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας, ο πρώτος ήταν ο προικισμένος Νικόλας Λομπατσέφσκι. Γεννημένος σε μια φτωχή ρωσσική οικογένεια το 1793, σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Καζάν και έγινε κανονικός καθηγητής εκεί σε ηλικία μόλις είκοσι τριών χρόνων. Και αυτός ελκύστηκε από το πρόβλημα του αξιώματος των παραλλήλων. 'Οπως είπε, του έκανε εντύπωση το γεγονός πως δυο χιλιάδες χρόνια προσπαθειών των μεγαλύτερων μαθηματικών δεν είχαν καταφέρει να δώσουν ένα καλύτερο αξίωμα. Κι έτσι, όπως και ο Σακκέρι κι ο Γκάους, οικοδόμησε μια νέα γεωμετρία πάνω στη βάση ενός αξιώματος των παραλλήλων που αντέφασκε με εκείνο του Ευκλείδη. Τα σχεδόν απίστευτα θεωρήματα στα οποία οδηγήθηκε, δεν τον αποθάρρυναν περισσότερο από τον Γκάους. Η σωστή λογική τον καθοδηγούσε, και άλλον οδηγό από τη σωστή λογική δε δεχόταν. 'Ετσι ο Λομπατσέφσκι συνυπέγραψε το ριζοσπαστικό, αλλά αναπόφευκτο συμπέρασμα: Υπάρχουν γεωμετρίες διαφορετικές από του Ευκλείδη, κι εξίσου έγκυρες.

Ο άνθρωπος που μοιράστηκε την ίδια τιμή μαζί με τον Λομπατσέφσκι, για την ίδια ανακάλυψη, αλλά και για το κουράγιο του να δημοσιεύσει το έργο του πάνω στη μη-ευκλείδεια γεωμετρία, ήταν ο Ούγγρος Τζων Μπόλαϊ. Όπως και οι άλλοι δύο προηγούμενοι, είχε δεχτεί κι αυτός την ευλογία των θεών, κι επί πλέον είχε την τύχη να τον ενθαρρύνει και να τον βοηθήσει στην ανάπτυξή του ο πατέρας του Βόλφγκανγκ. Ο Βόλφγκανγκ ήταν άλλος ένας μαθηματικός από εκείνους που είχαν υποκύψει στη γοητεία του προβλήματος των παραλλήλων, κι είχε ξοδέψει μάταια πολλά χρόνια μελετώντας το. Το κληροδότησε στο γιό του, ο οποίος στα 1825, σε ηλικία είκοσι τριών χρόνων, ξαφνικά είδε το φως: Υπάρχουν αξιώματα που βρίσκονται σε αντίφαση με τον Ευκλείδη, είπε, και παρόλα αυτά μπορούν να χρησιμεύσουν σαν βάση για καινούριες γεωμετρίες. Ο Τζων βάλθηκε λοιπόν να φτιάξει μια από αυτές. Με την παρότρυνση του πατέρα του δημοσίευσε το έργο του το 1833 σαν παράρτημα σε ένα κείμενο του Μπόλαϊ του πρεσβύτερου.

Όμως τι υποδοχή συνάντησαν τα έργα του Λομπατσέφσκι και του Μπόλαϊ που άνοιγαν μια νέα εποχή; Πώς αντέδρασαν οι επιστήμονες στο ξαφνικό νέο πως η γεωμετρία του Ευκλείδη είχε αποκτήσει ανταγωνιστές; Πώς χαιρέτησαν οι τόσο λογικοί φιλόσοφοι τη ριζική αναίρεση της κυρίαρχης φιλοσοφίας της εποχής; Τα έργα του Λομπατσέφσκι και του Μπόλαϊ παραμελήθηκαν ολότελα. Επί πλέον, το 1847 ο Λομπατσέφσκι απολύθηκε από το Πανεπιστήμιο παρά τις λαμπρές συνεισφορές του και την ανιδιοτελή αφοσίωσή του στο έργο του. Κι αν ο Μπόλαϊ ήταν κι αυτός καθηγητής αντί για αξιωματικός του αυστριακού στρατού, κατά πάσα πιθανότητα θα είχε την ίδια τύχη.

Περίπου τριάντα χρόνια από τότε που είχαν εκδώσει τα μνημειώδη έργα τους ο Λομπατσέφσκι κι ο Μπόλαϊ, δημοσιεύτηκε μεταθανάτια η αλληλογραφία του Γκάους για την μη-ευκλείδεια γεωμετρία, μαζί με κάποια άλλα γραπτά του. Το όνομά του έστρεψε την προσοχή του κοινού στο θέμα και προτού περάσει πολύς καιρός ο μαθηματικός κόσμος άρχισε να διαβάζει τους δυο ξεχασμένους προδρόμους του.

Για να εκτιμήσουμε το έργο αυτών των πρωτοπόρων στο πρόβλημα που μας απασχολεί, πρέπει να πάμε πίσω για λίγο. Φανταστείτε μια ευθεία γραμμή ε (σχ. 78) κι ένα σημείο έξω απ' αυτήν, το Π. Το ευκλείδειο αξίωμα των παραλλήλων ορίζει πως υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία ε΄ που περνά από το Π και δε συναντά ποτέ την ε. Τώρα ας πάρουμε το τυχαίο σημείο Ρ, πάνω στην ε. Καθώς το Ρ μετακινείται προς τα δεξιά, η ευθεία ΠΡ κινείται αντίστροφα προς τη φορά του ρολογιού και φαί-

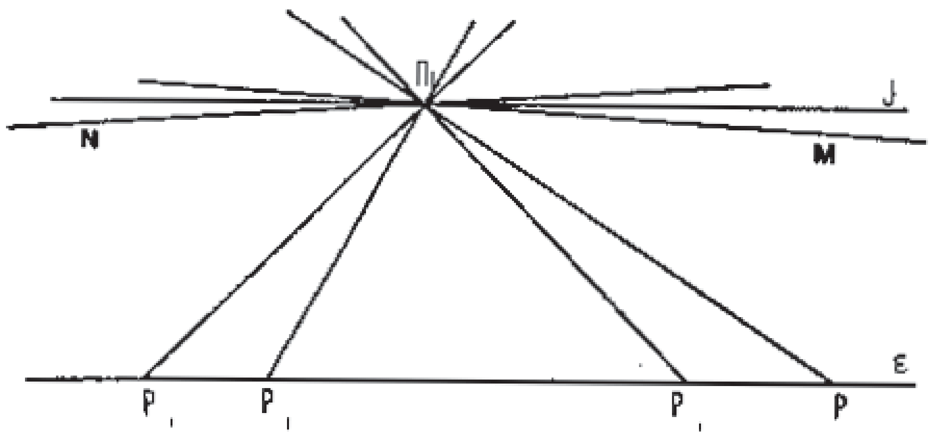


Σχ. 78 Η παράλληλος του Ευκλείδη σαν μια μοναδική οριακή γραμμή

νεται να πλησιάζει τη γραμμή ε΄. Παρόμοια, καθώς το Ρ μετακινείται προς τα αριστερά κατά μήκος της ε, η ευθεία ΠΡ περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά του ρολογιού γύρω από το Π και φαίνεται και πάλι σα να πλησιάζει την ε΄. Και στις δυο περιπτώσεις λοιπόν η ΠΡ προσεγγίζει την ίδια οριακή γραμμή ε΄.

'Ομως ο Μπόλαϊ κι ο Λομπατσέφσκι υπέθεσαν πως οι δυο οριακές θέσεις της ΠΡ δεν αποτελούν μια και την αυτή ευθεία ε΄, αλλά δυο διαφορετικές ευθείες που περνούν από το Π και πως αυτές οι οριακές ευθείες μ και ν (σχ. 79) δεν συναντούν την ε. Επί πλέον δέχτηκαν πως κάθε ευθεία που περνά από το Π και βρίσκεται ανάμεσα στη μ και στη ν δεν συναντά την ε. 'Ετσι το αξίωμα των παραλλήλων του Μπόλάϊ και του Λομπατσέφσκι δέχεται την ύπαρξη ενός άπειρου συνόλου ευθειών που περνούν από το Π και είναι παράλληλες στην ε. (Σύμφωνα με την ορολογία τους παράλληλες αποκαλούσαν μόνο τις δυο οριακές γραμμές μ και ν, αλλά εμείς θα χρησιμοποιούμε αυτή τη λέξη για όλες τις γραμμές που περνούν από το Π και δε συναντούν την ε.)

Ο αναγνώστης μας αισθάνεται ίσως, μαζί με τους μαθηματικούς της εποχής του Μπόλαϊ και του Λομπατσέφσκι, πως αυτή είναι μια παράλογη υπόθεση. Το σχήμα μας δείχνει πως οι μ και ν θα συναντήσουν την ε, αν οι τρεις γραμμές προεκταθούν αρκετά. 'Ομως ας θυμηθούμε πως οι δυο μαθηματικοί μας ενδιαφερόταν να βρουν ένα αξίωμα το οποίο, άσχετα από το αν θα μπορούσε να περιγράφει το χώρο μέσα στον οποίο πιστεύουμε ότι ζούμε ή όχι, θα αποτελούσε μια λογική εναλλακτική λύση στο αξίωμα του Ευκλείδη. Και καθώς τα θεωρήματα που θα συνάγονταν από αυτό το αξίωμα σε συνδυασμό με τα εννιά υπόλοιπα αξιώματα του Ευκλείδη θα εξαρτιόνταν αποκλειστικά από τη λογική και διόλου από τη συμφωνία ή τη διαφωνία τους με τα σχήματα, δεν είχε καμιά σημασία η αντιστοιχία του αξιώματος με τις οπτικές εντυπώσεις των ανθρώπων.



Σχ. 79 Το αξίωμα των παραλλήλων κατά τους Λομπατσέφσκι - Μπόλαΐ

Τι θεωρήματα μπόρεσαν να αποδείξουν ο Λομπατσέφσκι κι ο Μπόλαϊ με το αξίωμά τους; Φυσικά όλα τα θεωρήματα του Ευκλείδη που αποδεικνύονταν χωρίς το αξίωμα των παραλλήλων ήταν, αυτόματα, και θεωρήματα της δικής τους γεωμετρίας που δεν έθιξε τα υπόλοιπα αξιώματα. Μπορούμε να αναφέρουμε για παράδειγμα μερικά τέτοια θεωρήματα: 'Ολες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους. Από ένα σημείο δε μπορούμε να φέρουμε παραπάνω από μια κάθετο σε μια ευθεία. Σε ένα τρίγωνο με ίσες πλευρές οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από αυτές τις πλευρές είναι ίσες.

Εκπληκτικά είναι η μοναδική λέξη που μπορεί να περιγράφει τα θεωρήματα της νέας γεωμετρίας που εξαρτιούνται από το αξίωμα των παραλλήλων και συνεπώς δε βρίσκονται στην ευκλείδεια γεωμετρία. Αυτά τα θεωρήματα, όπως όλα τα θεωρήματα των μαθηματικών, αποδεικνύονται επίσης με τις μεθόδους του παραγωγικού συλλογισμού που είναι γνωστές στον αναγνώστη. 'Ομως αντίθετα με ό,τι συμβαίνει στην περίπτωση της ευκλείδειας γεωμετρίας, στη δική τους περίπτωση τα σχήματα δεν είναι τόσο χρήσιμα για να υποδείξουν τα βήματα των αποδείξεων ή να αποσαφηνίσουν την έννοια των θεωρημάτων.

Το πιο απρόσμενο απ'όλα είναι το θεώρημα πως το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι πάντοτε μικρότερο από 180°. Επί πλέον ανάμεσα σε δυο τρίγωνα εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το μικρότερο άθροισμα γωνιών. Ακόμη πιο εκπληκτικό είναι το ότι η νέα γεωμετρία εξαφανίζει μια ζωτική έννοια της ευκλείδειας, δηλαδή ότι δυο σχήματα μπορεί να έχουν το ίδιο σχήμα, αλλά διαφορετικό μέγεθος – οπότε λέμε ότι τα σχήματα είναι όμοια, αλλά όχι ίσα. Στη νέα γεωμετρία δύο όμοια σχήματα είναι αναγκαστικά και ίσα. Σαν τελευταίο παράδειγμα των νέων θεωρημάτων αναφέρουμε αυτό: Η απόσταση μεταξύ δυο παράλληλων γραμμών τείνει προς το μηδέν στη μια κατεύθυνση κατά μήκος των γραμμών, και γίνεται άπειρη στην άλλη.

Ο Μπόλαϊ κι ο Λομπατσέφσκι κατόρθωσαν πραγματικά να οικοδομήσουν μια νέα γεωμετρία με πολλά αξιοθαύμαστα θεωρήματα. 'Ομως ήταν το έργο τους τίποτα περισσότερο από μια απλή άσκηση λογικής; Ας σημειώσουμε πρώτα πρώτα πως εκατοντάδες λογικές συνεπαγωγές της νέας γεωμετρίας δεν παράγουν αντιφατικά μεταξύ τους θεωρήματα. Αυτό σήμαινε πως το παλιό αξίωμα των παραλλήλων δεν ήταν δυνατό να συναχθεί από τα άλλα αξιώματα. Ειδάλλως ξεκινώντας κανείς από το νέο αξίωμα θα οδηγούνταν οπωσδήποτε σε αντιφάσεις. Βέβαια το ότι το παράλληλο αξίωμα του Ευκλείδη δε μπορούσε να συναχθεί από τα υπόλοιπα δεν ήταν κάτι το καινούριο. Πολλοί το είχαν υποπτευθεί από παλιά.

Απρόβλεπτη ήταν η δεύτερη συνέπεια του έργου του Μπόλαϊ και του Λομπατσέφσκι πως δε μπορούμε να θεμελιώσουμε την αναντίρρητη αλήθεια του ευκλείδειου αξιώματος των παραλλήλων δείχνοντας ότι οποιοδήποτε εναλλακτικό αξίωμα οδηγεί σε αντιφάσεις. 'Εγινε προφανές λοιπόν πως και οι δυο τακτικές που είχαν χρησιμοποιήσει οι παλιότεροι μαθηματικοί για να διασώσουν το αξίωμα των παραλλήλων, ποτέ δε θα μπορούσαν να έχουν επιτυχία.

'Ομως αυτό που δεν είχε φαντασθεί κανείς προηγουμένως ήταν το πιο σημαντικό στοιχείο της νέας γεωμετρίας. Αν η λογική άσκηση είχε πάρει τέλος, το αποτέλεσμά της δεν έφευγε από τα μυαλά των ανθρώπων: Υπάρχουν γεωμετρίες που είναι διαφορετικές από του Ευκλείδη. Ο μαθηματικός που είχε στα χέρια του αυτή τη γνώση, ήταν σαν το μικρό παιδί που έχει στα χέρια του ένα αεροβόλο° ο πειρασμός να τη χρησιμοποιήσει ήταν πολύ μεγάλος για να του αντισταθεί. Πως η ευκλείδεια γεωμετρία αποτελούσε μια ακριβή περιγραφή του φυσικού χώρου, αυτό ήταν γνωστό. Η μη-ευκλείδεια γεωμετρία των Μπόλαϊ-Λομπατσέφσκι από την άλλη μεριά δεν είχε δημιουργηθεί με καμιά τέτοια πρόθεση κι ούτε φαινόταν να εφαρμόζεται στο φυσικό κόσμο - όμως μήπως δεν ήταν έτσι;

Οι πρώτες αντιδράσεις σ'αυτό το ερώτημα είναι γενικά αρνητικές. Αν είναι σωστή η ευκλείδεια γεωμετρία, πώς μπορεί να είναι εξίσου σωστή και αυτή η νέα, αντίθετη γεωμετρία; Επί πλέον τι εφαρμογή μπορούν να έχουν στο γνώριμο κόσμο μας αυτά τα παράλογα θεωρήματα; 'Ομως με λίγη σκέψη φαίνεται πως αυτές οι πρώτες αντιδράσεις είναι κάπως βιαστικές. Τι εγγυήσεις έχουμε για την ορθότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας; Βέβαια τη χρησιμοποιούμε χωρίς προβλήματα εδώ και χιλιάδες χρόνια. Επί πλέον αυτήν ευνοούν οι μακραίωνες και καθιερωμένες συνήθειες της ανθρώπινης σκέψης. Αλλά ας θυμηθούμε το λόγο που είχε ο ίδιος ο Ευκλείδης για να είναι δύσπιστος απέναντι στο αξίωμα των παραλλήλων. Δεν ήταν ότι το τελευταίο αναφέρεται σε περιοχές του χώρου που είναι πολύ απομακρυσμένες από τον εμπειρικό κόσμο του ανθρώπου, σε ένα διάστημα τόσο τεράστιο που σε σύγκριση μαζί του ο κόσμος μας δεν είναι παρά μια κουκίδα στην επιφάνεια της γης; Ποιος από μας γνωρίζει τη γεωμετρία του χώρου στην περιοχή του 'Αρη, ή έστω και δέκα μίλια μακριά από την επιφάνεια της γης; Με ποιο δικαίωμα υποθέτουμε λοιπόν πως θα πρέπει να είναι η ίδια με αυτή που φαίνεται να ισχύει πάνω στη γη; Η ευκλείδεια γεωμετρία ίσως να μη είναι καλύτερη από τις εκατοντάδες των επιστημονικών νόμων που εξυπηρέτησαν αρκετά τον άνθρωπο στην εποχή τους, αλλά ήρθε κάποτε η στιγμή που χρειάστηκε να εγκαταλειφθούν.

Αφού εξέτασε προσεκτικά αυτό ακριβώς το πρόβλημα ο Γκάουςς, πρότεινε ένα κριτήριο, για να βρεθεί αν είναι αληθινή η ευκλείδεια γεωμετρία ή όχι. Το σύνολο των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180^0 σ' αυτή τη γεωμετρία, αλλά πάντοτε λιγότερο στη νέα γεωμετρία. 'Αρα μετρώντας τις γωνίες ενός τριγώνου θα μπορούσε να καταλάβει κανείς ποια γεωμετρία ταιριάζει στο φυσικό κόσμο. Για δυο λόγους έπρεπε να επιλεγεί ένα πολύ μεγάλο τρίγωνο. Κατ' αρχήν τα οπτικά σφάλματα είναι μεγαλύτερα σε ένα μικρό τρίγωνο. Κατά δεύτερο λόγο σύμφωνα με ένα θεώρημα της γεωμετρίας των Λομπατσέφσκι - Μπόλαϊ, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου πλησιάζει τις 180^0 όσο ελαττώνεται το μέγεθος του τριγώνου. Σε ένα μικρό τρίγωνο θα μπορούσε να βρίσκεται τόσο κοντά στις 180^0 ώστε να είναι αδύνατο να μετρηθεί ακόμα και με τα πιο ευαίσθητα όργανα.

Ο Γκάουςς έκανε μόνος του το πείραμα. Εγκατέστησε από ένα παρατηρητή σε τρεις βουνοκορφές. Ο κάθε παρατηρητής έπρεπε να μετρήσει τη γωνία που σχημάτιζαν στο οπτικό του πεδίο οι άλλοι δύο παρατηρητές. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου βρέθηκε πως απέκλινε κατά λιγότερο από 2'' από τις 180^0 - δηλαδή βρισκόταν τόσο κοντά που η διαφορά θα μπορούσε να αποδοθεί σε σφάλμα της μέτρησης. 'Αρα το πείραμα δεν ήταν αποφασιστικής σημασίας.

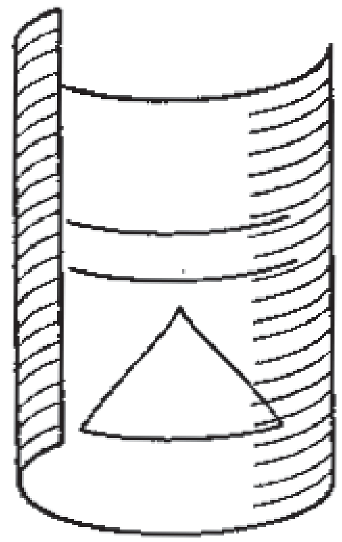
Το ζήτημα με το πείραμα του τριγώνου του Γκάουςς ήταν πως ακόμη και κάτω από τις καλύτερες πειραματικές συνθήκες δε θα μπορούσε να αποδείξει πως ο χώρος είναι ευκλείδειος, γιατί ακόμα κι αν το άθροισμα των γωνιών βρισκόταν να είναι ακριβώς 180^0, θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη τα ενδεχόμενα σφάλματα των μετρήσεων και άρα πάντοτε θα υπήρχε η πιθανότητα το πραγματικό άθροισμα να είναι μικρότερο από τις 180^0. Στην πραγματικότητα το πείραμα περιλάμβανε δυο ανεπιβεβαίωτες υποθέσεις, που η κάθε μια τους θα αρκούσε από μόνη της για να στερήσει από κάθε κύρος οποιοδήποτε συμπέρασμα. Η πρώτη απ' αυτές ήταν πως το τρίγωνο που σχημάτιζαν οι κορυφές των τριών βουνών ήταν αρκετά μεγάλο για να είναι αποφασιστικό. Η δεύτερη πως οι φωτεινές ακτίνες που αποτελούσαν τις πλευρές του τριγώνου ακολουθούσαν ευθείες γραμμές. 'Ομως οι ακτίνες αυτές μπορούσαν να καμπυλώνονται ελαφρά κι ανεπαίσθητα.

Ενώ η δοκιμή του Γκάουςς μπορεί να απορριφθεί σαν ένα ενδιαφέρον, αλλά μη οριστικό πείραμα, το ευρύτερο ζήτημα της εφαρμογής ή όχι της ευκλείδειας γεωμετρίας παραμένει. Το εκπληκτικό γεγονός που αναφαίνεται από όλες τις προσπάθειες που έγιναν για να διαπιστωθεί ποια από τις δυο γεωμετρίες ταιριάζει καλύτερα στο φυσικό χώρο, είναι πως και οι δυο ταιριάζουν εξίσου καλά. 'Ηδη αναφέραμε πως για τα μικρά τρίγωνα η νέα γεωμετρία δέχεται πως το άθροισμα των γωνιών τους πλησιάζει τις 180^0 και πως όσο μικρότερο είναι ένα τρίγωνο, τόσο περισσότερο θα πλησιάζει αυτό το άθροισμα τις 180^0. Αν λοιπόν εφαρμόζουμε τη μη-ευκλείδεια γεωμετρία χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα αθροίσματα γωνιών ελάχιστα μικρότερα από 180^0, δε θα υπάρχει διαφορά από πρακτική άποψη. Παρόμοια, δε θα συνέβαινε τίποτα, αν υποθέταμε πως από ένα σημείο Π που βρίσκεται έξω από μια ευθεία ε περνούν άπειρες παράλληλες προς την ε στο επίπεδο του Π και της ε.

Θα σκεφτούμε ίσως ότι η νέα γεωμετρία δε μπορεί να εφαρμοστεί στο φυσικό κόσμο, επειδή υποθέτει πως τα όμοια τρίγωνα είναι αναγκαστικά και ίσα. Οπωσδήποτε φαίνεται πως είναι δυνατό να κατασκευάσουμε δυο τρίγωνα που να είναι όμοια, αλλά όχι ίσα. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να κάνουμε το ένα τρίγωνο πολύ μεγάλο και το άλλο πολύ μικρό. 'Ομως όσο προσεκτικά κι αν τα κατασκευάσουμε, ποτέ δε μπορούμε να είμαστε βέβαιοι πως πρόκειται για ολότελα όμοια τρίγωνα – δηλαδή πως οι αντίστοιχες γωνίες τους συμπίπτουν απόλυτα. Το μικρότερο τρίγωνο θα μπορούσε να έχει μεγαλύτερο άθροισμα γωνιών σύμφωνα με τη μη-ευκλείδεια γεωμετρία, αλλά η διαφορά να μη είναι μετρήσιμη. 'Αρα, από κάθε άποψη δεν υπάρχει καμιά διαφορά στην πράξη, αν αποδεχόμαστε ή όχι τη νέα γεωμετρία. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει τρόπος για να κρίνουμε ποια από τις δυο γεωμετρίες βρίσκει εφαρμογή στο φυσικό χώρο: και οι δυο μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξίσου καλά. Οι προκαταλήψεις και οι συνήθειές μας ευνοούν ίσως την ευκλείδεια γεωμετρία, η οποία επίσης είναι και κάπως απλούστερη από την άλλη. Αλλά αυτοί δεν είναι λόγοι για να την προτιμήσουμε ούτε αναιρούν την εφαρμοσιμότητα της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας.

Αναμφίβολα ο αναγνώστης δε μένει ικανοποιημένος μ'αυτά. Ίσως είναι ώρα να τον διασκεδάσουμε κάπως με μερικά άλλα, πιο ευχάριστα επιχειρήματα που δείχνουν πώς μπορεί να εφαρμοστεί στο φυσικό κόσμο η μη-ευκλείδεια γεωμετρία.

Ας επιστρέψουμε για μια στιγμή στον Ευκλείδη. Φανταστείτε ένα τεράστιο φύλλο χαρτιού που εκτείνεται επ'άπειρον προς όλες τις κατευθύνσεις. Αυτό αποτελεί



Σχ. 80 Μια νέα απεικόνιση της ευκλείδειας γεωμετρίας

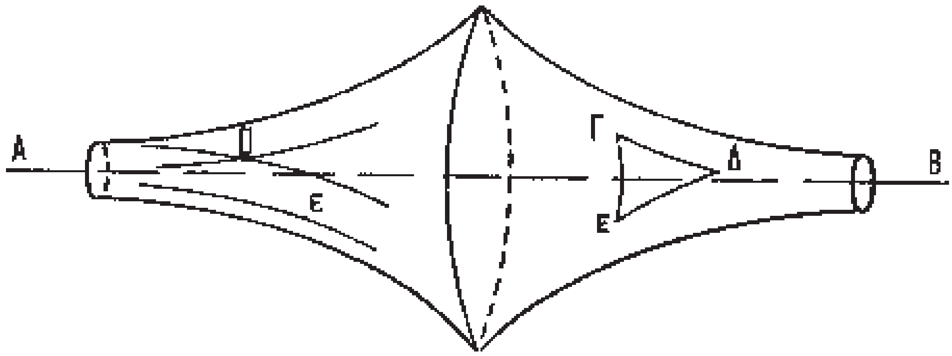
ένα φυσικό παράδειγμα του μαθηματικού επιπέδου, της επιφάνειας στην οποία ισχύουν τα θεωρήματα του αρχαίου Έλληνα. Τώρα υποθέστε πως αλλάζουμε το σχήμα αυτού του φανταστικού φύλλου χαρτιού υψώνοντας λίγο προς τα πάνω την αριστερή και τη δεξιά πλευρά του (σχ. 80) έτσι ώστε να σχηματιστεί μια καμπύλη επιφάνεια, η οποία συνεχίζει να επεκτείνεται επ'άπειρον προς όλες τις κατευθύνσεις, όπως συνέβαινε και με το επίπεδο. Στα μαθηματικά αυτή η επιφάνεια είναι γνωστή σαν *κυλινδρική επιφάνεια*. Σαν αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής σχήματος οι περισσότερες ευθείες γραμμές του πρώην επιπέδου θα μεταβληθούν σε καμπύλες, οι οποίες, όπως συνέβαινε προηγουμένως με τις ευθείες του επιπέδου, θα αποτελούν τις συντομότερες διαδρομές ανάμεσα στα διάφορα σημεία της επιφάνειας τα οποία θα ενώνουν. Αυτές τις καμπύλες θα τις αποκαλούμε στο εξής γεωδαισικές γραμμές. Δυο ευθείες γραμμές που ήταν παράλληλες στο επίπεδο, γίνονται παράλληλες γεωδαισικές, δηλαδή γεωδαισικές που δε συναντιούνται στην επιφάνεια. Τα τρίγωνα του αρχικού επιπέδου γίνονται στην κυλινδρική επιφάνεια σχήματα που αποτελούνται από τόξα γεωδαισικών. Τα νέα σχήματα θα τα λέμε τρίγωνα. Από τους κύκλους του επιπέδου εξάλλου θα δημιουργούνται σχήματα που θα τα ονομάζουμε κύκλους.

Ερχόμαστε τώρα σε ένα πολύ εκπληκτικό γεγονός. 'Ολα τα αξιώματα του Ευκλείδη ισχύουν και για τα σχήματα της κυλινδρικής επιφάνειας, με την προϋπόθεση πως θα ερμηνεύουμε τις λέξεις γραμμή, τρίγωνο και κύκλος, όπως περιγράψαμε παραπάνω. 'Αρα τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας που συνάγονται από τα αξιώματα με παραγωγικούς συλλογισμούς - μια διαδικασία απόλυτα ανεξάρτητη από τα οποιαδήποτε σχήματα που μπορεί να κάνουμε - ισχύουν επίσης και για τα σχήματα της κυλινδρικής επιφάνειας. Για να πάρουμε ένα παράδειγμα του τι εννοούμε, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου αυτής της επιφάνειας είναι 180°.

Ο αναγνώστης μπορεί να αντιτάξει σ' αυτό το επιχείρημά μας ότι οι ευθείες γραμμές και τα σχήματα που ορίζονται από ευθείες γραμμές δεν έχουν πια το κανονικό τους νόημα. 'Εχουν χάσει την ευθύτητά τους. 'Ομως εδώ μπορούμε να επωφεληθούμε από ένα γεγονός που αναφέραμε για πρώτη φορά στο Κεφάλαιο IV, δηλαδή ότι οι βασικές έννοιες της γεωμετρίας, όπως η γραμμή ή το σημείο, παραμένουν αδιευκρίνιστες. Χρησιμοποιούμε μόνο τις ιδιότητες αυτών των εννοιών που δηλώνονται ρητά στα αξιώματά μας. Αν μια νέα φυσική εικόνα της ευθείας γραμμής, ας πούμε, έχει όλες τις ιδιότητες που απαιτούνται σύμφωνα με τα αξιώματα, τότε έχουμε κάθε δυνατότητα να υιοθετήσουμε αυτή τη νέα εικόνα. 'Αρα είμαστε απόλυτα δικαιολογημένοι από λογική άποψη, αν συνδέσουμε την ευκλείδεια γεωμετρία στο σύνολό της με μια νέα φυσική απεικόνιση.

Αυτό το επιχείρημα υπέρ της νέας φυσικής ερμηνείας που μπορεί να δοθεί στην ευκλείδεια γεωμετρία, ισχύει εξίσου καλά και για τη μη-ευκλείδεια. Κι αν επωφεληθούμε από την ελευθερία που έχουμε να διαλέξουμε όποια φυσική ερμηνεία της γραμμής και των άλλων σχημάτων θέλουμε, μπορούμε να βρούμε μια ερμηνεία της νέας γεωμετρίας που να είναι απόλυτα αποδεκτή από τη διαίσθησή μας.

Το σχήμα 81 δείχνει ένα σχήμα που είναι γνωστό σαν ψευδόσφαιρα. Οι καμπύλες της ψευδόσφαιρας που αποτελούν τις συντομότερες γραμμές μεταξύ των σημείων αυτής της επιφάνειας - και αυτές οι ειδικές καμπύ-



Σχ. 81 Απεικόνιση της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας των Λομπατσέφσκι - Μπόλαϊ

λες ονομάζονται επίσης γεωδαισικές - έχουν τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις ευθείες γραμμές στις γεωμετρίες του Λομπατσέφσκι και του Μπόλαϊ. Για παράδειγμα το αξίωμα πως δυο οποιαδήποτε σημεία ορίζουν μια και μόνο μια ευθεία γραμμή, εφαρμόζεται σ' αυτές τις γεωδαισικές. Δυο τυχαία σημεία της ψευδόσφαιρας (το Γ και το Δ στο σχήμα 81) προσδιορίζουν μία και μόνο μία γεωδαισική ή συντομότερη διαδρομή. Με παρόμοιο τρόπο το αξίωμα των Λομπατσέφσκι - Μπόλαϊ σύμφωνα με το οποίο από ένα σημείο Π που δεν ανήκει σε μια γραμμή ε περνούν άπειρες γραμμές που δε συναντούν την ε, ισχύει όσον αφορά τις γεωδαισικές της ψευδόσφαιρας.

Επειδή τα αξιώματα των Λομπατσέφσκι - Μπόλαϊ εφαρμόζονται στις γεωδαισικές της ψευδόσφαιρας, και τα θεωρήματά τους, σαν λογικές συνέπειες των αξιωμάτων, εφαρμόζονται επίσης. Έτσι το θεώρημα πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από 180^0 ισχύει για το τρίγωνο ΓΔΕ που σχηματίζεται από τόξα γεωδαισικών. Καταφέραμε λοιπόν να φτάσουμε στην οπτική αναπαράσταση μιας μη-ευκλείδειας γεωμετρίας με το μηδαμινό κόστος μιας ελαφρής και απόλυτα αιτιολογημένης αλλαγής της εικόνας της ευθείας γραμμής.

'Εχοντας δει το "νόημα" της νέας γεωμετρίας ας επιστρέψουμε στο αρχικό μας ερώτημα. Είναι δυνατό η νέα γεωμετρία να περιγράφει το φυσικό κόσμο στον οποίο ζούμε; Η απάντηση, όπως θα περίμενε ίσως ο αναγνώστης, είναι πως η γεωμετρία του φυσικού χώρου εξαρτάται από το φυσικό νόημα που δίνουμε στην έννοια της ευθείας γραμμής. Η εμπειρία μας λέει πως αν σαν ευθεία γραμμή θεωρήσουμε μια τεντωμένη κλωστή, τότε η ευκλείδεια γεωμετρία εφαρμόζεται πολύ καλά. 'Ομως ούτε αναγκαίο ούτε επιθυμητό θα ήταν να περιορίσουμε στην τεντωμένη κλωστή όλες τις φυσικές εφαρμογές της ευθείας γραμμής. Ας φανταστούμε για μια στιγμή ένα λαό που ζει σε μια ορεινή χώρα και ενδιαφέρεται να βρει τη γεωμετρία της χώρας του. Η πιο χρήσιμη φυσική ερμηνεία της ευθείας γραμμής γι αυτόν το λαό θα ήταν η γεωδαισική καμπύλη, δηλαδή αυτή που θα έδινε τη συντομότερη επιφάνεια ανάμεσα σε δυο σημεία. Το πρώτο εκπληκτικό πράγμα που θα παρατηρήσαμε σχετικά μ' αυτές τις "ευθείες" γραμμές θα ήταν η αλλαγή του σχήματός τους από τη μια περιοχή της χώρας στην άλλη, ανάλογα με το σχήμα των λόφων ή των κοιλάδων. Σε ποια αξιώματα θα υπάκουαν αυτές οι "ευθείες"; Οπωσδήποτε όχι σε εκείνα του Ευκλείδη. Για παράδειγμα η τοπογραφία μιας περιοχής θα μπορούσε να είναι τέτοια ώστε να υπάρχουν αρκετές συντομότερες διαδρομές ανάμεσα σε κάποια ζευγάρια σημείων. 'Η να υπάρχουν πολλές γεωδαισικές που περνούν από ένα ορισμένο σημείο και δε συναντιούνται με κάποια άλλη γεωδαισική, και πάει λέγοντας.

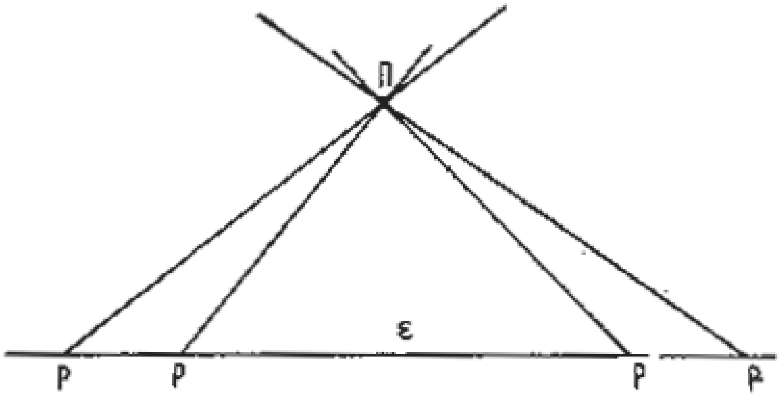
Ούτε και στις αστρονομικές μετρήσεις συμπίπτει η τεντωμένη κλωστή με την πρακτική ερμηνεία της ευθείας γραμμής. Εδώ αυτή που μας εξυπηρετεί καλύτερα είναι η ακτίνα του φωτός. Και ποια γεωμετρία μας ταιριάζει περισσότερο άραγε, όταν παίρνουμε σαν ευθείες γραμμές τις φωτεινές ακτίνες; Αυτό το ερώτημα θα το αφήσουμε ως το επόμενο κεφάλαιο. Στο μεταξύ το καλότερο που έχουμε να κάνουμε είναι να επιστρέψουμε στη μαθηματική εξήγηση της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας. Υπάρχουν κι άλλοι μαθηματικοί κόσμοι για να εξετάσουμε.

Ο Λομπατσέφσκι κι ο Μπόλαϊ συγκέντρωσαν την προσοχή τους στο αξίωμα των παραλλήλων του Ευκλείδη, όμως από την άλλη μεριά υπήρχε κι ένα άλλο ευκλείδειο αξίωμα που ήταν σχεδόν εξίσου αμφισβητήσιμο, δηλαδή το αξίωμα που έλεγε πως ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προεκταθεί επ' άπειρον και προς τις δυο κατευθύνσεις. Αυτό ήταν επίσης ένα αξίωμα που υποτίθεται πως περιέγραφε τι συμβαίνει στο διάστημα, τρισεκατομμύρια μίλια από τη γη μας. Πώς θα μπορούσαμε να είμαστε βέβαιοι για την αλήθεια του, δηλαδή για την εφαρμοσιμότητά του στο φυσικό κόσμο;

'Οχι πολύν καιρό μετά τον Λομπατσέφσκι και τον Μπόλαϊ και το έργο τους πάνω στην έννοια των παραλλήλων τα βλέμματα των μαθηματικών στράφηκαν προς το αξίωμα της άπειρης προεκτασιμότητας της ευθείας γραμμής, και θέλησαν να ερευνήσουν περισσότερο τη σοφία του. Ο φιλάσθενος και πρόωρα αναπτυγμένος Μπέρναρντ Ρήμανν (1826-66) που μόνο με χίλια παρακάλια κατάφερε να πάρει την άδεια από τον πατέρα του, ένα λουθηρανό πάστορα, για να εγκαταλείψει την εκκλησιαστική παιδεία και να σπουδάσει μαθηματικά, ανέλαβε να αναζητήσει τα πιθανά εναλλακτικά αξιώματα.

Μια από τις καινοτομίες του ήταν να κάνει τη διάκριση ανάμεσα στην απειροσύνη και την έλλειψη τέλους. Ο ισημερινός της γης για παράδειγμα δεν έχει τέλος, αλλά από την άλλη μεριά είναι πεπερασμένος. Ξεκινώντας από αυτή τη διευκρίνιση ο Ρήμανν πρότεινε στη θέση του ευκλείδειου αξιώματος για την άπειρη επεκτασιμότητα της ευθείας γραμμής ένα άλλο αξίωμα, δηλαδή ότι όλες οι γραμμές, ενώ δεν έχουν τέλος, έχουν πεπερασμένο μήκος.

Από αυτή τη σκέψη ακολούθησαν συλλογισμοί πάνω στο αξίωμα των παραλλήλων παρόμοιοι με εκείνους των Λομπατσέφσκι-Μπόλαϊ, που οδηγούσαν όμως σε διαφορετικά συμπεράσματα. Καθώς το F κινείται προς τα αριστερά κατά μήκος της ε (σχ. 82), και καθώς το Σ κινείται προς τα δεξιά, και τα δυο σημεία τελικά συναντιούνται, γιατί σύμφωνα με την υπόθεση του Ρήμανν η γραμμή ε είναι πεπερασμένη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η γραμμή ΠΡ να περιστρέφεται γύρω από το Π μέχρι να συμπέσει με την ΠΣ χωρίς ποτέ να πάψει να τέμνει την ε. Δηλαδή σ'αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει καμιά γραμμή που να περνά από το Π και να είναι παράλληλη στην ε. Φυσικά το σχήμα 82 δε μας λέει πώς είναι δυνατή αυτή η πλήρης περιστροφή της ΠΡ γύρω από το Π, όσο διατηρούμε τη συνηθισμένη ιδέα της ευθείας, όμως βέβαια αυτή η ζωγραφιά δεν έχει μεγαλύτερες φιλοδοξίες από το να μας βοηθήσει κάπως να συλλάβουμε τη σκέψη του Ρήμανν. Συλλογισμοί όπως ο παραπάνω οδήγησαν το



Σχ. 82 Η γεωμετρική βάση του αξιώματος των παραλλήλων του Ρήμανν

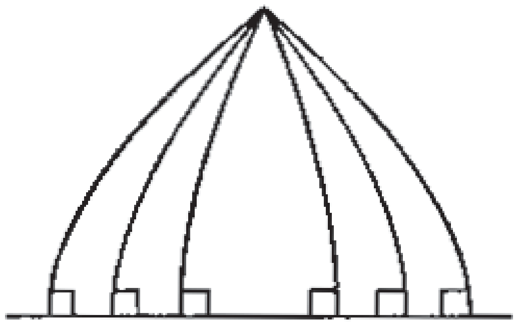
Ρήμανν στο να υιοθετήσει ταυτόχρονα με την ιδέα της πεπερασμένης ευθείας γραμμής κι ένα αξίωμα σύμφωνα με το οποίο δεν υπάρχουν καθόλου παράλληλες γραμμές.

Και σα να μη του ήταν αρκετές αυτές οι δυο ριζικές απομακρύνσεις του από τον Ευκλείδη, ο Ρήμανν προχώρησε και σε μια τρίτη. Αντί να θεωρεί σαν δεδομένο πως δυο σημεία ορίζουν μια και μόνο μια γραμμή, υιοθέτησε το αξίωμα πως δυο σημεία μπορεί να ορίζουν περισσότερες από μια ευθείες.

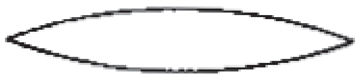
Προτού πάμε παραπέρα όμως, ας υπενθυμίσουμε στον αναγνώστη ότι τα παραπάνω αξιώματα τα αποδεχόμαστε προς το παρόν απλά στο μέτρο που αποτελούν τις βάσεις για τη λογική ανάπτυξη μιας νέας γεωμετρίας. Τις σχέσεις ανάμεσα σ'αυτό το μάλλον αυθαίρετο σύστημα και τον πραγματικό κόσμο θα τις δούμε αργότερα.

Η γεωμετρία του Ρήμανν, όπως κι εκείνες του Λομπατσέφσκι και του Μπόλαϊ, είχε ορισμένα θεωρήματα κοινά με τη γεωμετρία του Ευκλείδη. Το θεώρημα πως όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες, ή το θεώρημα πως απέναντι στις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου βρίσκονται ίσες γωνίες, υπήρχαν και στις τρεις γεωμετρίες, επειδή εξαρτιόταν μόνο από αξιώματα κοινά σε όλες τους.

Αλλά ορισμένα από τα θεωρήματα του Ρήμανν που δε βρίσκονται στον Ευκλείδη, είναι απίστευτα. Για παράδειγμα: 'Ολες οι κάθετες που φέρουμε σε μια ευθεία γραμμή, συναντιούνται σε ένα σημείο (σχ. 83). 'Ε-



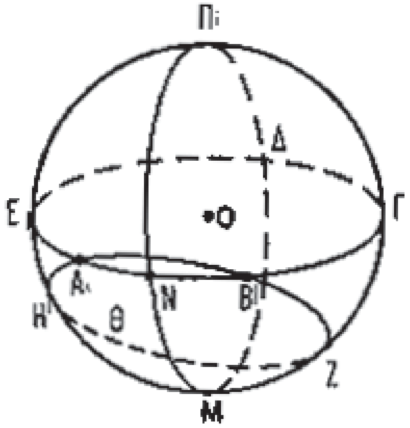
Σχ. 83 'Ολες οι κάθετες σε μια ευθεία συναντιούνται στο ίδιο σημείο



Σχ. 84 Δυο ευθείες που περικλείουν ένα εμβαδόν

να άλλο στοιχείο αυτού του περίεργου νέου κόσμου είναι πως δυο ευθείες γραμμές μπορεί να περικλείουν ένα εμβαδόν (σχ. 84). 'Οπως και στη γεωμετρία των Λομπατσέφσκι - Μπόλαϊ, βρίσκουμε κι εδώ πως τρίγωνα που είναι όμοια, είναι ίσα. Δυο άλλα θεωρήματα θα έπρεπε σχεδόν να τα περιμένουμε: Το πρώτο μας λέει πως το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντοτε μεγαλύτερο από 180° . Το δεύτερο πως ανάμεσα σε δυο τρίγωνα εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν, έχει και το μεγαλύτερο άθροισμα γωνιών.

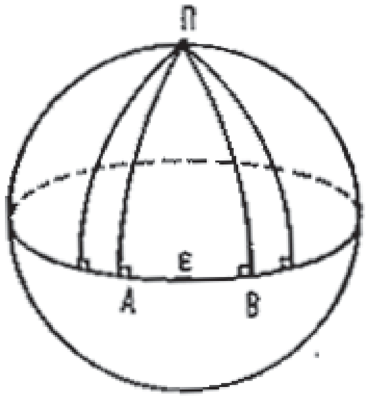
Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στο ίδιο ερώτημα που μας είχε απασχολήσει σχετικά και με τις δυο άλλες μη-ευκλείδειες γεωμετρίες. Έχει η γεωμετρία του Ρήμανν κάποια άλλη σημασία πέρα από το να προσφέρει πνευματική άσκηση στους μαθηματικούς; Και πάλι η απάντηση είναι πως ναι. Είναι δυνατό να εφαρμόσουμε τη γεωμετρία του Ρήμανν στο φυσικό μας κόσμο - βέβαια παίρνοντας υπόψη τη νέα έννοια που δώσαμε στην ευθεία γραμμή - και να μη ανακαλύψουμε την παραμικρή διαφορά ανάμεσα στα πορίσματα αυτής της νέας γεωμετρίας και τα όσα συμβαίνουν στη φύση. Κι εδώ ισχύουν απόλυτα όσα είπαμε σε σχέση με τις γεωμετρίες του Μπόλαϊ και του Λομπατσέφσκι.



Σχ. 85 Μια απεικόνιση της γεωμετρίας του Ρήμανν

Επί πλέον, αν αλλάξουμε την εικόνα της ευθείας γραμμής, μπορούμε να βρούμε κάποιες άλλες, και μάλιστα διαισθητικά ικανοποιητικές, ερμηνείες της γεωμετρίας του Ρήμανν. Όπως μπορέσαμε να απεικονίσουμε την ευκλείδεια γεωμετρία σε μια κυλινδρική επιφάνεια, και τη γεωμετρία του Λομπατσέφσκι και του Μπόλαϊ σε μια ψευδοσφαίρα, έτσι μπορούμε να αποδώσουμε και τη γεωμετρία του Ρήμανν πάνω στην τόσο γνωστή μας σφαίρα. Η καμπύλη που συνδέει δυο σημεία μιας σφαίρας με τη συντομότερη δυνατή διαδρομή - δηλαδή η καμπύλη που θα βάλουμε στη θέση της ευθείας γραμμής - είναι το τόξο του μέγιστου κύκλου που ενώνει τα δυο σημεία. Και σαν μέγιστο κύκλο εννοούμε εκείνον που το κέντρο του είναι επίσης και κέντρο της σφαίρας. Έτσι από τους δυο κύκλους που περνούν από τα Α και Β (σχ. 85) ο ΑΒΓΔΕ είναι μέγιστος κύκλος, ενώ ο ΑΒΖΘΗ δεν είναι.

Ας δούμε λοιπόν κατά πόσο εφαρμόζονται στη σφαίρα τα αξιώματα της γεωμετρίας του Ρήμανν - θεωρώντας, εννοείται, τους μέγιστους κύκλους της σφαίρας σαν τις ευθείες των αξιωμάτων. Πρώτα πρώτα οι μέγιστοι κύκλοι είναι πραγματικά χωρίς τέλος και πεπερασμένου μήκους. Δεύτερο δεν υπάρχουν παράλληλες γραμμές στη σφαιρική επιφάνεια, γιατί όλοι οι μέγιστοι κύκλοι συναντιούνται μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα δε συναντιούνται μια φορά, αλλά δυο. Για παράδειγμα οι μέγιστοι κύκλοι ΑΒΓΔΕ και ΜΝΠΔ συναντιούνται στο Ν και στο Δ. Το αξίωμα πως δυο σημεία μπορούν να ορίζουν περισσότερες από μια ευθείες, επίσης ισχύει. Δυο σημεί-



Σχ. 86 'Ολες οι κάθετες σ'ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας συναντιούνται στο ίδιο σημείο

α, όπως το Ν και το Δ του σχήματος 85 βρίσκονται σε περισσότερους από ένα μέγιστους κύκλους, ενώ από δυο άλλα σημεία, όπως το Α και το Β, μόνο ένας τέτοιος κύκλος περνά.

Εφόσον τα αξιώματα της γεωμετρίας του Ρήμανν περιγράφουν σωστά τα όσα ισχύουν στη σφαίρα, και τα θεωρήματα που συνάγονται απ'αυτά τα αξιώματα με έγκυρους παραγωγικούς συλλογισμούς θα πρέπει να ισχύουν επίσης. Ας εξετάσουμε ορισμένα από αυτά. 'Ενα θεώρημα λέει πως όλες οι κάθετες σε μια ευθεία γραμμή συναντιούνται στο ίδιο σημείο. Αν βάλουμε στη θέση της ευθείας μας τον μέγιστο κύκλο ε του σχήματος 86, θα βρούμε πως όλες οι κάθετες στον ε συναντιούνται στο Π. Αν ε ήταν ο ισημερινός της γης, Π θα ήταν ο βόρειος ή ο νότιος πόλος.

Σύμφωνα με ένα άλλο θεώρημα, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από 180° . Εφόσον οι ευθείες των αξιωμάτων μας δεν είναι παρά μέγιστοι κύκλοι, εδώ το τρίγωνο θα είναι ένα σχήμα που δημιουργείται από τόξα μέγιστων κύκλων. 'Ενα τέτοιο τρίγωνο είναι το ΑΒΠ του σχήματος 86. Εφόσον οι δυο γωνίες του είναι ορθές γωνίες, το άθροισμα των τριών γωνιών του θα είναι αναγκαστικά μεγαλύτερο από 180°. Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο τρίγωνο της σφαίρας.

Δεν είναι αναγκαίο να επιμείνουμε περισσότερο. 'Ολα τα θεωρήματα της γεωμετρίας του Ρήμανν εφαρμόζονται στη σφαιρική επιφάνεια, αν θεωρήσουμε απλά τους μέγιστους κύκλους της σφαίρας σαν τις ευθείες γραμμές των θεωρημάτων. 'Αρα μπορεί να δοθεί ένα διαισθητικά ικανοποιητικό γεωμετρικό νόημα στη γεωμετρία του Ρήμανν. Και κάτι ακόμη περισσότερο· αυτή η γεωμετρία προσφέρει ακριβέστατες απαντήσεις στα πρακτικά ή επιστημονικά προβλήματα που αφορούν γεωμετρικές σχέσεις στην επιφάνεια μιας σφαίρας. 'Αρα αποτελεί οπωσδήποτε μέχρις αυτό το σημείο μια έγκυρη γεωμετρία του φυσικού κόσμου. Κι ακόμη περισσότερο, κάθε επιχείρημα υπερ της θεωρίας πως ο φυσικός κόσμος μας θα μπορούσε να είναι μη-ευκλείδειος και να υπακούει στις γεωμετρίες του Μπόλαϊ και του Λομπατσέφσκι, ισχύει εξίσου καλά και όσον αφορά τη γεωμετρία του Ρήμανν. 'Ομως την εφαρμογή των μη-ευκλείδειων γεωμετριών στον κόσμο που ζούμε θα τη συζητήσουμε παραπέρα, στο κεφάλαιο για τη σχετικότητα.

Καθώς κοιτάζουμε εκ των υστέρων, βλέπουμε ότι η ιστορία της δημιουργίας των μη-ευκλείδειων γεωμετριών είναι η ιστορία της τυφλότητας των ανθρώπινων όντων, μεγάλων και μικρών στο πνεύμα. Ο άνθρωπος ζει στην επιφάνεια της γης. Υποθέστε πως επιχειρούμε να φτιάξουμε μια γεωμετρία που να ταιριάζει άμεσα σ'αυτόν τον κόσμο, αντί να τον θεωρεί σαν κάποια ειδική επιφάνεια ενός τριδιάστατου ευκλείδειου σύμπαντος. Τι είδους γεωμετρία θα αναπτύσσαμε; Η "ευθεία γραμμή" μιας γεωμετρίας φτιαγμένης για την επιφάνεια μιας σφαίρας θα ήταν προφανώς η καμπύλη που ενώνει δυο σημεία με τη συντομότερη διαδρομή - δηλαδή η πιο χρήσιμη καμπύλη. Αυτή, όπως είδαμε, ισοδυναμεί με το μέγιστο κύκλο που περνά από δυο σημεία. Από την άλλη μεριά, την ευθεία γραμμή με τη γνωστή μας έννοια της ευκλείδειας γεωμετρίας σίγουρα δε θα την διαλέγαμε σαν βασική καμπύλη, αφού αυτή η γραμμή δεν υπάρχει καν πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

Τι αξιώματα θα διάλεγε ένας γεωμέτρης για τους μέγιστους κύκλους; Μα φυσικά αυτά που διάλεξε ο Ρήμανν - ένα σύστημα αξιωμάτων χωρίς καθόλου παράλληλες ευθείες και γραμμές πεπερασμένου μήκους. Με άλλα λόγια, η φυσική γεωμετρία, η πρακτική γεωμετρία του κοινού νου για μας τους γήινους θνητούς είναι η γεωμετρία του Ρήμανν.

Επί χιλιάδες χρόνια ο άνθρωπος είχε αυτή τη γεωμετρία στα πόδια του. Κι όμως όλον αυτό τον καιρό οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί δε σκέφτηκαν ούτε μια φορά να επιτεθούν στο αξίωμα των παραλλήλων προσφεύγοντας στη γεωμετρία της σφαίρας. Επιστέφοντας αυτές τις χιλιάδες χρόνια ο μεγάλος Καντ έχτισε τη βαθυστόχαστη φιλοσοφία του πάνω στην αναμφισβήτητη αλήθεια της ευκλείδειας γεωμετρίας - κι ακόμη χειρότερα, πάνω στην αδυναμία του ανθρώπου να συλλάβει οποιαδήποτε άλλη γεωμετρία. Κι όμως, όλον αυτό τον καιρό ζούσε|πάνω, αν όχι μέσα σε έναν μη-ευκλείδειο κόσμο.

Πώς έγινε λοιπόν, ενώ η γεωμετρία ξεπήδησε από μετρήσεις της γης, να αναπτυχθεί πρώτη η ευκλείδεια γεωμετρία; Η απάντηση είναι φυσικά πως στα ανθρώπινα όντα που κατοικούν σε μια πολύ περιορισμένη περιοχή της γης, η τελευταία φαίνεται πραγματικά να είναι επίπεδη, και η συντομότερη απόσταση σε μια επίπεδη επιφάνεια είναι όντως η ευθεία γραμμή με την κοινά αποδεκτή έννοια του όρου. Απ'αυτή την εικόνα της ευθείας σαν τεντωμένης κλωστής τα υπόλοιπα αξιώματα επακολούθησαν φυσικά. Και από τη στιγμή που αναπτύχθηκε η γεωμετρία των επίπεδων επιφανειών, η σφαίρα έπρεπε να εισαχθεί εκ των υστέρων στην ευκλείδεια γεωμετρία. Κανείς, ούτε ακόμα και οι 'Ελληνες που έδειχναν τόση συμπάθεια στη σφαίρα, δε σκέφτηκαν να προσεγγίσουν τη γεωμετρία της μέσα από ένα σύνολο αξιωμάτων σχεδιασμένο για να ταιριάζει άμεσα σ'αυτή την επιφάνεια. Η παραπάνω ιστορία δείχνει πως οι άνθρωποι κυβερνιούνται εξίσου από τις συνήθειες της σκέψης όσο κι από τις φυσικές συνήθειες ή τα κοινωνικά έθιμα και τις συμβάσεις. Οπωσδήποτε εκείνο που έλειπε από τους προδρόμους του Λομπατσέφσκι και του Μπόλαϊ που δεν έφτασαν στην επιτυχία, δεν ήταν η τεχνική επιδεξιότητα ή η ικανότητα να χειρίζονται τις πιο προχωρημένες μαθηματικές ιδέες. Απέτυχαν να λύσουν το πρόβλημα του αξιώματος των παραλλήλων μόνο επειδή δεν κατόρθωσαν να εγκαταλείψουν μια συνήθεια της σκέψης - την ευκλείδεια γεωμετρία. Η ιστορία αυτής της πνευματικής αδράνειας είναι ένα εξαίρετο παράδειγμα εκείνου που ο Λέκυ, στην *Ιστορία του ρασιοναλισμού στην Ευρώπη*, χαρακτήρισε σαν το πνεύμα, το *Zeitgeist* μιας εποχής, το οποίο προδιαθέτει τους ανθρώπους υπέρ ή κατά ορισμένων αντιλήψεων ή απόψεων, άσχετα από οποιαδήποτε επιχειρήματα. 'Ετσι έγινε και με τον Καντ και όλους τους μαθηματικούς πριν το 1800. Η πίστη στην αλήθεια, την απόλυτη εγκυρότητα και τη μοναδικότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας δεν άφησε ακόμη και να σκεφτεί κανείς την πιθανότητα μιας άλλης γεωμετρίας - έστω κι αν μια μη-ευκλείδεια γεωμετρία βρισκόταν μπροστά στα πόδια των ανθρώπων.

Η σημασία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας στη γενικότερη ιστορία της σκέψης είναι ανυπολόγιστη. Σαν την ηλιοκεντρική θεωρία του Κοπέρνικου, τους νευτώνειους νόμους της βαρύτητας ή τη θεωρία της εξέλιξης του Δαρβίνου, η μή-ευκλείδεια γεωμετρία επηρέασε ριζικά την επιστήμη, τη φιλοσοφία και τη θρησκεία. Δε θα ήταν άδικο, αν λέγαμε πως δεν υπήρξε πιο κατακλυσμικό γεγονός σε ολόκληρη την ιστορία της σκέψης.

Πρώτα πρώτα η δημιουργία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας έφερε καθαρά στο φως μια διάκριση που από πάντοτε την εξυπονοούσαμε, αλλά ποτέ δεν την αναγνωρίσαμε καθαρά - τη διάκριση ανάμεσα στο μαθηματικό και τον φυσικό χώρο. Η αρχική ταύτιση αυτών των δύο οφειλόταν σε μια παρανόηση. Αυτοί οι φευγαλέοι επισκέπτες του νου μας, οι εντυπώσεις της όρασης και της αφής, μας έκαναν να πιστέψουμε πως τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας ισχύουν για το φυσικό χώρο. Εξ άλλου τα θεωρήματα που συνάγονταν απ'αυτά τα αξιώματα μπορούσαν και να ελεγχθούν με τις αισθήσεις της όρασης και της αφής, και φυσικά φαινόταν να είναι τέλεια - τουλάχιστον στο βαθμό που μπορούσε να κρίνει κανείς από αυτές τις αισθήσεις. Η ευκλείδεια γεωμετρία λοιπόν θεωρήθηκε σαν μια ακριβής περιγραφή του φυσικού χώρου. Αυτή η συνήθεια της σκέψης εδραιώθηκε τόσο απόλυτα μέσα από τους αιώνες, που ακόμη και η ίδια η ιδέα μιας άλλης γεωμετρίας έγινε απόλυτα ακατανοητή. Γεωμετρία σήμαινε γεωμετρία του φυσικού χώρου, κι αυτή η γεωμετρία ήταν του Ευκλείδη. 'Ομως με τη δημιουργία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας οι μαθηματικοί, οι επιστήμονες και το ευρύτερο κοινό υποχρεώθηκαν να αναγνωρίσουν τελικά το γεγονός πως τα συστήματα της σκέψης, όσο κι αν βασίζονται σε προτάσεις σχετικά με κάποιον φυσικό χώρο, είναι διαφορετικά πράγματα από αυτό το φυσικό χώρο.

Η παραπάνω διάκριση είναι ζωτική για την κατανόηση της εξέλιξης των μαθηματικών και της επιστήμης μετά το 1880. Πρέπει να πούμε τώρα πως απ' αυτό το σημείο και μετά ο μαθηματικός χώρος αποκτά τη φύση μιας επιστημονικής θεωρίας. Εφαρμόζεται στη μελέτη του φυσικού χώρου για όσο καιρό ταιριάζει στα δεδομένα της εμπειρίας κι εξυπηρετεί τις ανάγκες της επιστήμης. Αν όμως είναι δυνατό ένας μαθηματικός χώρος να αντικατασταθεί από έναν άλλο που βρίσκεται σε μεγαλύτερη συμφωνία με τα νεότερα πορίσματα του επιστημονικού έργου, τότε θα παραχωρήσει στον τελευταίο νόμο τη θέση του ακριβώς όπως η πτολεμαϊκή θεωρία της κίνησης των ουράνιων σωμάτων παραχώρησε τη δική της θέση στη θεωρία του Κοπέρνικου. Και δε θα πρέπει να εκπλαγεί ο αναγνώστης, αν διαπιστώσει προτού καν περάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο πως η δυνατότητα αυτή έχει ήδη πραγματοποιηθεί.

Θα πρέπει λοιπόν να θεωρούμε όλες τις θεωρίες σχετικά με το φυσικό χώρο σαν καθαρά υποκειμενικές κατασκευές, και να μη τους αποδίδουμε καμιά αντικειμενική πραγματικότητα. Ο άνθρωπος κατασκευάζει μια γεωμετρία, ευκλείδεια ή μη-ευκλείδεια, και αποφασίζει να βλέπει στο εξής τον κόσμο από τη δική της οπτική γωνία. Τα πλεονεκτήματα που προσφέρει κάτι τέτοιο, όσο κι αν είναι αδύνατο να βεβαιωθούμε ποτέ για το κατά πόσο κατέχει πράγματι ο χώρος τα χαρακτηριστικά της δομής που φτιάξαμε με το μυαλό μας, είναι πως μπορούμε χάρη σ' αυτή τη γεωμετρία να σκεφτούμε το χώρο και να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία στο επιστημονικό μας έργο. Μια τέτοια θεώρηση του χώρου και της φύσης γενικά δεν αρνείται ότι υπάρχει πραγματικά αυτό που αποκαλούμε αντικειμενικό φυσικό κόσμο. Απλά αναγνωρίζει το γεγονός πως οι κρίσεις και τα συμπεράσματα του ανθρώπου σχετικά με το χώρο είναι δικά του δημιουργήματα και κανενός άλλου.

Η δημιουργία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας κατέστρεψε οριστικά το αρχαίο βασίλειο της αλήθειας. Όπως παλιότερα συνέβαινε με τη θρησκεία στις αρχαίες κοινωνίες, τα μαθηματικά κατείχαν μια αξιοσέβαστη, ακλόνητη θέση στη δυτική σκέψη. Στο ναό των μαθηματικών κατοικούσε το πάνθεο των αληθειών κι ο Ευκλείδης ήταν ο αρχιερέας του. Όμως η λατρεία, ο αρχιερέας και οι άμοιροι πιστοί έχασαν τη θεία ευλογία μέσα από το έργο της ανόσιας τριάδας των Μπόλαϊ, Λομπατσέφσκι και Ρήμανν. Είναι αλήθεια πως αυτά τα αυθάδικα πνεύματα ενδιαφερόταν αρχικά μόνο για ένα λογικό πρόβλημα - να διερευνήσουν τις συνέπειες ενός νέου αξιώματος των παραλλήλων. Οπωσδήποτε δεν πέρασε από την πρώτη στιγμή απ' το μυαλό τους πως αμφισβητούσαν την ίδια την Αλήθεια. Και για όσον καιρό το έργο τους θεωρούνταν απλά σαν μια έξυπνη μαθηματική ταχυδακτυλουργία, δεν υπήρξαν σοβαρά ερωτηματικά. Όμως τη στιγμή που συνειδητοποίησαν οι άνθρωποι πως οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες θα μπορούσαν να αποτελούν έγκυρες περιγραφές του φυσικού κόσμου, ένα αναπόφευκτο δίλημμα παρουσιάστηκε: Πώς ήταν δυνατό τα μαθηματικά που από πάντοτε θεωρούνταν πως κατείχαν τις αλήθειες της ποσότητας και του χώρου, να προσφέρουν τώρα διάφορες γεωμετρίες και μάλιστα αντιφατικές μεταξύ τους; Μόνο μία απ' όλες μπορούσε να είναι αληθινή. Μάλιστα στην πραγματικότητα, κι αυτό ήταν ακόμη πιο ενοχλητικό, ίσως η αλήθεια να μη βρισκόταν σε καμιά απ' αυτές. Έτσι η δημιουργία των νέων γεωμετριών έκανε αναγκαία την αναγνώριση του γεγονότος ότι μπορεί να υπάρξει ένα "εάν" σχετικά με όλα τα μαθηματικά αξιώματα. Εάν τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι αληθινά όσον αφορά το φυσικό κόσμο, τότε είναι αληθινά και τα θεωρήματά της. Δυστυχώς όμως είναι αδύνατο να κρίνουμε a priori κατά πόσο είναι αληθινά τα αξιώματα του Ευκλείδη ή οποιαδήποτε άλλα.

Στερώντας τα μαθηματικά από την υπόσταση που τους απέδιδαν προηγουμένως, δηλαδή την υπόσταση ενός συνόλου αληθειών, η μη-ευκλείδεια γεωμετρία έκλεψε από τον άνθρωπο τις πιο πολύτιμες αλήθειες του, και ίσως και την ίδια την ελπίδα να γνωρίσει ποτέ την αλήθεια σχετικά με ο,τιδήποτε. Πριν από το 1800 όλες οι εποχές πίστευαν στην ύπαρξη κάποιας απόλυτης αλήθειας. Οι άνθρωποι διέφεραν μόνο στις προτιμήσεις τους. Ο Αριστοτέλης, οι Άγιοι Πατέρες, η Βίβλος, η φιλοσοφία, ή η επιστήμη, όλοι θεωρήθηκαν τη μια εποχή ή την άλλη σαν κριτήρια των αντικειμενικών, απόλυτων αληθειών. Στο δέκατο ένατο αιώνα είχε επιβιώσει μόνο η ανθρώπινη λογική, και αυτή μόνο χάρη στα επιτεύγματά της στα μαθηματικά και στους μαθηματικούς τομείς της επιστήμης. Και μάλιστα η κατοχή των μαθηματικών αληθειών χάριζε ιδιαίτερη ικανοποίηση, γιατί υποσχόταν ακόμη περισσότερες αλήθειες στο μέλλον. Δυστυχώς η ελπίδα συντρίφτηκε. Το τέλος της κυριαρχίας της ευκλείδειας γεωμετρίας σήμαινε και το τέλος της κυριαρχίας οποιουδήποτε απόλυτου κριτηρίου. Ο φιλόσοφος μπορεί να διακηρύσσει ακόμη τη βεβαιότητα της βαθιάς σκέψης. Ο καλλιτέχνης μπορεί να επιμένει με πάθος για την εγκυρότητα της διαίσθησης που αποκαλύπτει μέσα από την τεχνική του επιδεξιότητα. Ο πιστός μπορεί να γεμίζει τους μεγαλύτερους καθεδρικούς ναούς με αμυδρούς απόηχους της θείας επιφώτισης και ο ρομαντικός ποιητής να νανουρίζει το πνεύμα μας με γοητευτικές συνθέσεις και να το οδηγεί στη νοσταλγία ακινησία. Ίσως όλοι αυτοί να είναι πηγές της αλήθειας. Ίσως να υπάρχουν και άλλες πηγές. Όμως το λογικό άτομο που έχει κατανοήσει το δίδαγμα της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας, τουλάχιστον προσέχει τις παγίδες, και αν δέχεται κάποιες αλήθειες, τις δέχεται δοκιμαστικά περιμένοντας κάθε στιγμή να απογοητευτεί. Και το παράδοξο είναι πως μολονότι οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες αμφισβήτησαν την ικανότητα του ανθρώπου να βρει αλήθειες, ταυτόχρονα έδωσαν την καλύτερη απόδειξη της δύναμης του ανθρώπινου νου που κατόρθωσε να νικήσει τη συνήθεια, τη διαίσθηση και τις εντυπώσεις των αισθήσεων, για να δημιουργήσει αυτές τις νέες γεωμετρίες.

Μαζί με την ιερότητα της αλήθειας φαίνεται να εξαφανίστηκε κι ένα πανάρχαιο ερώτημα σχετικά με τη φύση των ίδιων των μαθηματικών. Υπάρχουν τα μαθηματικά ανεξάρτητα από τον άνθρωπο, όπως τα βουνά κι η θάλασσα, ή αποτελούν ένα καθαρά ανθρώπινο δημιούργημα; Με άλλα λόγια ξοδεύει ο μαθηματικός τον ιδρώτα του για να ξεθάψει διαμάντια από αιώνες κρυμμένα στο σκοτάδι, ή μήπως κατασκευάζει μια συνθετική πέτρα; Μέχρι και τα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα, και με ολόκληρη την ιστορία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας πίσω του, ο περίφημος φυσικός Χάϊνριχ Χερτζ μπορούσε να λέει: "Δε μπορεί να απαλλαγεί κανείς από το αίσθημα πως αυτοί οι μαθηματικοί τύποι έχουν μια ανεξάρτητη ύπαρξη και μια ευφυΐα ολόδικιά τους, πως είναι σοφότεροι από εμάς, σοφότεροι ακόμα κι από τους ανθρώπους που τους ανακαλύπτουν, πως βγάζουμε τελικά περισσότερα από αυτούς από όσα συμπυκνώνουν αρχικά μέσα τους." 'Ομως αντίθετα με αυτή τη γνώμη, τα μαθηματικά φαίνεται να είναι προϊόν της ανθρώπινης σφαλερής διάνοιας μάλλον παρά της αιώνιας ουσίας κάποιου κόσμου ανεξάρτητου από τον άνθρωπο. Δεν είναι ατσάλινος πύργος θεμελιωμένος στο βράχο της αντικειμενικής πραγματικότητας, αλλά ιστός αράχνης που κουνιέται πέρα δώθε απ' τον άνεμο μαζί με άλλες υποθέσεις που φωλιάζουν στις μισοανεξερεύνητες περιοχές του ανθρώπινου νου.

Αν η δημιουργία της μη-ευκλείδειας γεωμετρίας εξόρισε τα μαθηματικά μακριά από το βάθρο της αλήθειας, από την άλλη μεριά τα άφησε ελεύθερα να αρμενίσουν. Στην πραγματικότητα, το έργο του Λομπατσέφσκι, του Μπόλαϊ και του Ρήμανν έδωσε στα μαθηματικά την άδεια χωρίς δεσμεύσεις για να περιπλανηθούν οπουδήποτε. Καθώς οι μη-ευκλείδειες γεωμετρίες, που αρχικά εξερευνήθηκαν για χάρη αυτού που φαινόταν να μη είναι τίποτε παραπάνω από μια ενδιαφέρουσα λογική λεπτολογία, αποδείχτηκε τελικά πως είχαν ασύγκριτη σπουδαιότητα, έγινε φανερό σε μας σήμερα πως οι μαθηματικοί πρέπει να εξερευνούν τις δυνατότητες οποιουδήποτε ερωτήματος και οποιουδήποτε συνόλου αξιωμάτων που παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον. Η εφαρμογή στο φυσικό κόσμο - ένα πρωταρχικό κίνητρο της μαθηματικής έρευνας - ίσως ακολουθήσει αργότερα. Σ' αυτό το στάδιο της ιστορίας τα μαθηματικά καθάρισαν τη λάσπη από τα πόδια τους και απομακρύνθηκαν από τη φυσική επιστήμη, ακριβώς όπως η επιστήμη είχε αποχωριστεί κάποτε από τη φιλοσοφία, η φιλοσοφία από τη θρησκεία και η θρησκεία από τον ανιμισμό και τη μαγεία. Μπορούμε σήμερα να πούμε μαζί με τον Γκέοργκ Κάντορ πως "η ουσία των μαθηματικών βρίσκεται στην ελευθερία τους".

Η θέση των μαθηματικών πριν από το 1830 μπορεί να συγκριθεί με εκείνη του καλλιτέχνη που κινητήρια δύναμή του είναι η ανόθευτη αγάπη της τέχνης, αλλά οι επιταγές της αναγκαιότητας τον αναγκάζουν να περιορίζεται στο να ζωγραφίζει εξώφυλλα περιοδικών. Απελευθερωμένος από τα δεσμά τους ο καλλιτέχνης μπορεί να αφεθεί στη φαντασία και να παραδοθεί στο έργο του, για να φτιάξει αιώνια έργα. Η μη-ευκλείδεια γεωμετρία είχε ακριβώς αυτό το απελευθερωτικό αποτέλεσμα. Η τρομακτική εξάπλωση των μαθηματικών δραστηριοτήτων καθώς και η όλο και μεγαλύτερη έμφαση στην αισθητική ποιότητα του μαθηματικού έργου από τα μέσα του περασμένου αιώνα και μετά, μαρτυρούν την επίδραση της νέας γεωμετρίας.

Η μη-ευκλείδεια γεωμετρία με την ασύγκριτη σημασία της στην ιστορία της σκέψης αποτελεί το αποκορύφωμα δυο χιλιάδων χρόνων ενασχόλησης με τα "άχρηστα" λογικά ερωτήματα. Μ' αυτήν τα μαθηματικά έδωσαν ένα ακόμη παράδειγμα της σοφίας της αφηρημένης λογικής σκέψης, ανόθευτης από τα κίνητρα της πρακτικής χρησιμότητας. Κι έδειξαν ακόμη τη σοφία που συνεπάγεται μερικές φορές η απόρριψη της μαρτυρίας των αισθήσεων (το ίδιο πράγμα δηλαδή που μας ζήτησε να κάνουμε κι ο Κοπέρνικος με την ηλιοκεντρική θεωρία του) για χάρη των όσων μπορεί να δημιουργήσει ο ανθρώπινος νους.