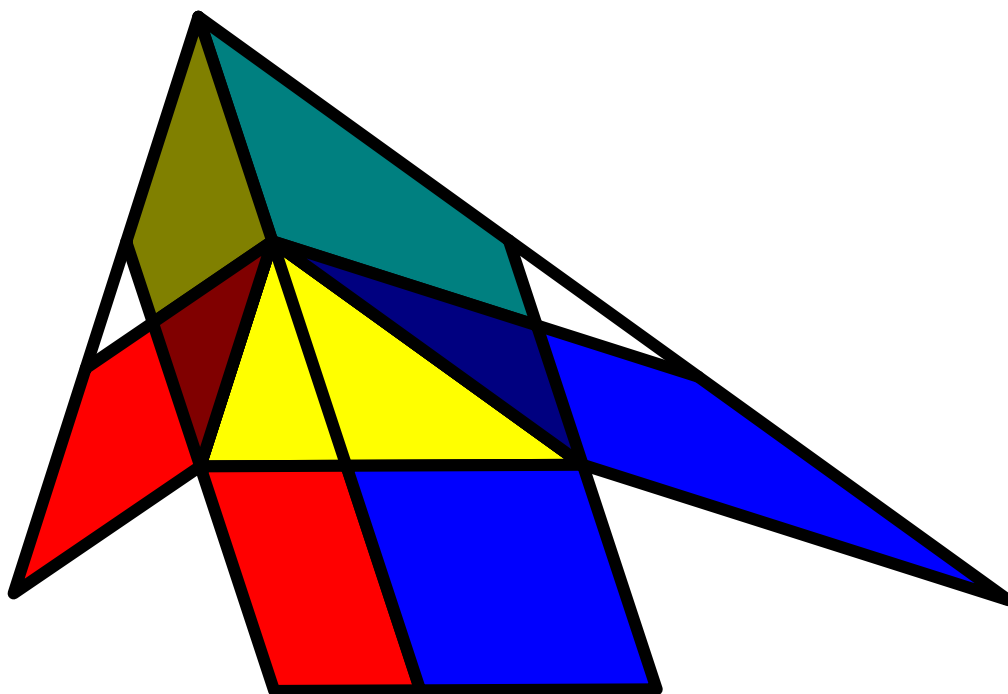


Παμφίλου



Ἐλασσον Γεωμετρικόν

19 Ιουλίου 2011

Πρόλογος

Το ανά χείρας βιβλίο προέκυψε από επεξεργασία σημειώσεων παραδόσεων των μαθημάτων *Γεωμετρία*, *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, *Η Γεωμετρία στο Σχολείο* και *Γεωμετρία και Υπολογιστές* που, κατ' επανάληψη, έκανα κατά την διάρκεια της τελευταίας εικοσαετίας στο πανεπιστήμιο Κρήτης. Το βιβλίο αποσκοπεί στην επαναφορά της Γεωμετρίας στο σχολείο σε ένα πολύ στοιχειώδες επίπεδο, χωρίς όμως να θεωρεί τον μαθητή περίπου ανίκανο να κάνει μιά απόδειξη. Η Γεωμετρία είναι το κατ' εξοχήν μάθημα για την ανάπτυξη της κουλτούρας της σκέψης. Υπάρχει και η κουλτούρα της μη-σκέψης, μάλιστα εξαιρετικά διαδεδομένη. Η σκέψη σε κάθε ζήτημα είναι παρόμοια με αυτήν που μαθαίνουμε στην Γεωμετρία: Συστηματική και, κυρίως, συστημική. Συστηματική διότι οργανώνεται η γνώση από απλές αρχές (αξιώματα, παραδοχές) και προχωρά στην μελέτη και ανάλυση των συνεπειών τους. Συστημική, διότι αυτοπεριοριζόμεθα σε ένα σύστημα, μιά δομή, ένα συγκρότημα εννοιών με κοινά χαρακτηριστικά, το οποίο μελετάμε και αναλύουμε. Η διαδικασία αυτή είναι αντίθετη στην κουλτούρα της μη-σκέψης, που χαρακτηρίζεται από την συλλεκτική δραστηριότητα, την κατασκευή βάσης δεδομένων, πληροφοριών ανεπεξέργαστων και, εν πολλοίς, άσχετων μεταξύ τους. Κατά την γνώμη μου ο άνθρωπος έχει ανάγκη να συγκεντρωθεί και να σκεφθεί πάνω σε αξιόλογα θέματα, ένα την φορά, και η Γεωμετρία είναι μοντέλο εξάσκησης αυτής της ικανότητας. Δοκιμασμένη για αιώνες, πυρήνας γνώσης αστείρευτης και παραγωγικής, τόσο σε θεωρητικό επίπεδο όσο και σε πρακτικές εφαρμογές. Πρέπει λοιπόν να επιστρέψει στην θέση που της αξίζει στα σχολεία, χωρίς να αποδυναμώνεται από το κύριο στοιχείο της που είναι η απόδειξη.

Από αυτές λοιπόν τις ιδέες εμφορούμενος, προχωρώ στην πρότασή μου προσφέροντας την υποδομή για ένα μάθημα, απλό, όσο γίνεται πιο πολύ και όσο επιτρέπει το αντικείμενο. Το βιβλίο συγκεντρώνει το υλικό και το οργανώνει σε μιά λογική σειρά, ώστε να είναι διαθέσιμο στον καθηγητή που θα θελήσει να διαμορφώσει τα σχολικά μαθήματα, αλλά και στον μαθητή που θα θελήσει να εμβαθύνει. Πολλά είναι αυτά που θα ήθελα να συμπεριλάβω και θα διόγκωναν το βιβλίο σε ένα πολλαπλάσιων σελίδων. Περιορίστικα όμως σε αυτά που μου φαίνονται θεμελιώδη. Τις βασικές έννοιες και σχήματα, λίγα από τα κλασικά θεωρήματα, μιά γεύση στερεομετρίας και ελάχιστα περί κωνικών τομών. Αυτά όλα κι' όλα. Δίχως καν την χρήση αρνητικών αριθμών, τουλάχιστον στα πρώτα στάδια, ή της πανταχού ενεργής στην Γεωμετρία έννοιας του μετασχηματισμού. Ελαχιστοποιούνται έτσι τα προαπαιτούμενα του μαθήματος και αναδεικνύεται, ελπίζω, η ειδοποιός διαφορά της απλής γνώσης από την δομημένη γνώση. Η πρωτεύουσα και κυρίαρχη συμβολή της Γεωμετρίας στην παιδεία είναι ένα στοιχείο ποιότητας και όχι ποσότητας. Η συμβολή της είναι, κυρίως, στην ανάπτυξη της σκέψης, της ικανότητας διάκρισης των αιτίων και των αποτελεσμάτων τους. Ωστόσο, το υλικό που παραθέτω στο βιβλίο είναι πολύ πιο ευρύ από αυτό που συνήθως καλύπτεται στα σχολεία. Η πρόταση είναι να γίνεται επιλογή από τον καθηγητή και να χρησιμοποιείται το βιβλίο ως αναφορά και χάρτης της ύλης της Γεωμετρίας για όλες τις τάξεις που διδάσκεται το μάθημα. Το επί μέρους μάθημα για κάθε τάξη, ως διαδρομή σχεδιασμένη και οργανωμένη λεπτομερώς

στον χάρτη, μπορεί και πρέπει να υποστηρίζεται και με συνοδά βοηθήματα παιδαγωγικού χαρακτήρα (πρακτικές ασκήσεις, πρόσθετες ασκήσεις, ασκήσεις σχεδιασμού και εμπέδωσης των εννοιών, φύλλα εργασίας, λογισμικά, κτλ.). Η φιλοσοφία μου είναι να εφαρμόζουμε ότι καινούργιο μαθαίνουμε και έτσι η θεωρία, σε κάθε βήμα της, παρακολουθείται από ασκήσεις που την συμπληρώνουν και δίνουν την αφορμή για στοχασμό πάνω στις νέες έννοιες που εισάγονται.

Θεωρώ αναγκαίο να υπάρχει ένα βιβλίο για κάθε σχολικό μάθημα. Το βιβλίο της Γεωμετρίας, το βιβλίο της Φυσικής, το βιβλίο της Χημείας κτλ., το οποίο να καλύπτει την ύλη των αντιστοιχών μαθημάτων σε όλες τις τάξεις. Έτσι ο μαθητής θα έχει μιά στέρεα και πλήρη υποδομή στην οποία θα ανατρέχει σε όλη την διάρκεια της μαθητείας του. Το βιβλίο αυτό θα μοιάζει με τον κορμό και τα παιδαγωγικά και διδακτικά βοηθήματα, που ανέφερα παραπάνω, θα συμπληρώνουν με κλαδιά την μορφή ενός δένδρου. Ακόμη και αν ο μαθητής δεν ασχοληθεί ποτέ με τον κορμό, αλλά αρκείται μόνο στα κλαδιά του δένδρου, αυτός δεν είναι λόγος να του προσφέρουμε αποκλειστικά κομμένα κλαδιά και να θεωρούμε τον κορμό άχρηστο για την ανάπτυξή του.

Στα μαθήματα που προτείνω δεν προχωρώ σε δομική ανάπτυξη, αλλά σε μιά λίγο-πολύ παραδοσιακή, συνθετική μέθοδο, που αποσκοπεί στην εξοικείωση με τις βασικές έννοιες και μιά πρώτη επαφή με τα σχήματα και τα προβλήματα που σχετίζονται με αυτά. Μιά δομική ανάπτυξη θα τόνιζε ιδιαίτερα τα αξιώματα και τις δομές, αλγεβρικές και αναλυτικές, που υπόκεινται σε όλο αυτό το υλικό. Τα Μαθηματικά έχουν πλέον οριστικά περάσει από την τέχνη των υπολογισμών στην ανακάλυψη και διερεύνηση δομών. Ο δρόμος όμως αυτός, που αποτελεί εξέλιξη μακροχρόνια, δεν μου φαίνεται καλός για το ξεκίνημα και την εισαγωγή στην Γεωμετρία, τις έννοιες που την απασχολούν, τα σχήματα και τα προβλήματα στα οποία αυτά οδηγούν. Θεωρώ ότι ο μαθητής πρέπει πρώτα να έχει εμπειρίες, προσλαμβάνουσες παραστάσεις, με τον απλούστερο δυνατό τρόπο, χωρίς την παρεμβολή των αφηρημένων δομών, που, κατά την γνώμη μου, στο αρχικό στάδιο θα δυσκόλευαν την προσέγγισή του στο υλικό. Έτσι, απλά για να έχει ο μαθητής ένα σημείο αναφοράς, βάζω ορισμένες αρχές στα αξιώματα και προχωρώ γρήγορα στις λογικές συνέπειές τους, ώστε να γίνει η συνάντησή με τα κάπως πιο σύνθετα και ενδιαφέροντα σχήματα, όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Μέσα στα αξιώματα φιλοξενούνται πολύ βασικές ιδιότητες, μερικές από τις οποίες θα μπορούσαν κιόλας να αποδειχθούν και να μην τεθούν ως αξιώματα. Αυτό όμως θα είχε ως συνέπεια μιά κάπως πιο εκτεταμένη συζήτηση τετριμμένων συνεπειών και συμπερασμάτων, που κρίνω ότι γίνεται ανιαρή για τον μαθητή και μπορεί να τον απωθήσει από το μάθημα. Η συζήτηση των αρχών και η λεπτομερής καταγραφή των απλούστερων από αυτές, από τις οποίες συνάγονται όλες οι υπόλοιπες είναι έργο ύστερης σοφίας και πρέπει να γίνεται μετά, αφού κανείς αγαπήσει το υλικό. Πρώτα όμως πρέπει να δει πιο είναι αυτό το υλικό, να ξεκινήσει από την πράξη και σιγά-σιγά, ανάλογα με το ενδιαφέρον του και τις δυνατότητές του, να προχωρήσει στην θεωρία. Έχει λοιπόν αυτό το μάθημα τον χαρακτήρα της εισαγωγής, της πρώτης επαφής, με μιά περιοχή γνώσης που έχει πολλά επίπεδα.

Εύχομαι ο καθηγητής, αλλά και ο φιλόπονος μαθητής, να διαβάσει το βιβλίο με την ίδια ευχαρίστηση και ακόμη περισσότερη από όση προσωπικά είχα την τύχη να απολαύσω επεξεργαζόμενος επί μακρόν χρόνο το εξαίρετο υλικό (το υλικό άριστο, οι ατέλειες και τα λάθη δικά μου). Θα μου έδινε επίσης ιδιαίτερη ικανοποίηση να δω τον μαθητή να φυλάει το βιβλίο στην βιβλιοθήκη του και να το ξεφυλίζει ενίοτε και μετά την αποφοίτησή από το σχολείο του. Σε καμία περίοδο της ζωής του δεν πρόκειται να τον βιάσει η Γεωμετρία. Το αντίθετο μάλιστα, ως πηγή διαρκούς ωφέλους, σε όσους την αποδέχονται, είναι πηγή αγαθού και στέρεο θεμέλιο προόδου. Για όσους θέλουν να εμβαθύνουν περισσότερο ή να κάνουν συγκρίσεις με

άλλες πηγές, δεν παραλείπω να κάνω βιβλιογραφικές παραπομπές. Εκτός των άλλων και διότι θεωρώ ότι ο άνθρωπος πρέπει να μάθει να αναζητά και να συνομιλεί με πνεύματα εκλεκτά που προηγήθηκαν και ενδιαφέρθηκαν και δημιούργησαν πάνω στο υλικό της μελέτης του. Επίσης θεωρώ αναγκαίο το σχήμα, γι' αυτό, τον μισό και περισσότερο χώρο του βιβλίου, καταλαμβάνουν τα σχήματα. Ένα μεγάλο μέρος της γοητείας της Γεωμετρίας, τουλάχιστον πάνω μου, ασκούσαν τα σχήματα. Ένα σχήμα αποτυπώνει έναν αιώνιο νόμο. Κάτι σταθερό και αμετάβλητο στο χρόνο και αντίθετο στο φευγαλέο και ευμετάβλητο της ύπαρξής μας. Ο άνθρωπος που τείνει στην οργάνωση και την συγκρότηση τείνει προς ένα σχήμα με μιά ευρύτερη έννοια. Μεγάλο όφελος, νομίζω, θα έχει ο μαθητής, αν μάθει να σχεδιάζει, όσο πιο καλά μπορεί, όλα τα σχήματα που συναντά στην μελέτη του, είτε με τα κλασικά όργανα του κανόνα και του διαβήτη είτε με λογισμικά της αρεσκείας του. Εκτός της εμπέδωσης της ύλης θα έχει και το όφελος της αισθητικής καλλιέργειας, καθώς το γεωμετρικό σχήμα είναι και φορέας υψηλού αισθητικού περιεχομένου. Όπως σοφά αποκρυσταλλώνει η γλώσσα μας, το ά-σχημο είναι αυτό που δεν έχει σχήμα και αυτό είναι αντίθετο στην ουσία της Γεωμετρίας.

Περιεχόμενα

1	Οι βασικές έννοιες	11
1.1	Αόριστες έννοιες, αξιώματα	12
1.2	Ευθεία και Ευθύγραμμο τμήμα	15
1.3	Μήκος, Απόσταση	18
1.4	Γωνίες	20
1.5	Γωνιών είδη	24
1.6	Τρίγωνα	26
1.7	Η ισότητα σχημάτων	30
1.8	Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο	32
1.9	Κριτήρια ισότητας τριγώνων	34
1.10	Σχετικά μεγέθη γωνιών τριγώνου	39
1.11	Η τριγωνική ανισότητα	46
1.12	Η Κάθετος από σημείο	48
1.13	Η Παράλληλος από σημείο	51
1.14	Το άθροισμα γωνιών τριγώνου	53
1.15	Το αξίωμα των παραλλήλων	55
1.16	Συμμετρίες	63
1.17	Λόγοι, Αρμονικές τετράδες	69
2	Κύκλος και πολύγωνα	73
2.1	Ο κύκλος, η διάμετρος, η χορδή	74
2.2	Κύκλος και ευθεία	78
2.3	Δύο κύκλοι	82
2.4	Κατασκευές	86
2.5	Παραλληλόγραμμο	94
2.6	Τετράπλευρα	97
2.7	Τα μέσα των πλευρών	101
2.8	Οι διάμεσοι τριγώνου	105
2.9	Το ορθογώνιο και το τετράγωνο	109
2.10	Άλλα είδη τετραπλεύρων	111
2.11	Πολύγωνα, κανονικά πολύγωνα	115
2.12	Τόξα, επίκεντρες γωνίες	120
2.13	Εγγεγραμμένες γωνίες	124
2.14	Εγγεγραμμένα τετράπλευρα	134
2.15	Γεωμετρικοί τόποι	140

3	Εμβαδά, Θαλής, Πάππος, Πυθαγόρας	143
3.1	Εμβαδόν πολυγώνων	144
3.2	Το εμβαδόν του ορθογωνίου	146
3.3	Εμβαδόν παραλληλογράμμου, τριγώνου	149
3.4	Πυθαγόρας και Πάππος	155
3.5	Όμοια ορθογώνια τρίγωνα	162
3.6	Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις	167
3.7	Το θεώρημα του Θαλή	173
3.8	Δέσμες ευθειών	179
3.9	Όμοια τρίγωνα	187
3.10	Όμοια πολύγωνα	196
3.11	Θεωρήματα ημιτόνου και συνημιτόνου	203
3.12	<i>Stewart</i> , διάμεσοι, διχοτόμοι, ύψη	209
4	Η δύναμη του κύκλου	217
4.1	Δύναμη ως προς κύκλο	218
4.2	Χρυσή τομή, κανονικό πεντάγωνο	222
4.3	Ριζικός άξονας, Ριζικό κέντρο	225
4.4	Οι κύκλοι του Απολλώνιου	230
4.5	Δέσμες κύκλων	234
4.6	Ορθογώνιοι κύκλοι και δέσμες	243
4.7	Κέντρα ομοιότητας δύο κύκλων	248
4.8	Αντιστροφή	255
4.9	Πολική και Πόλος	264
5	Από τα κλασικά θεωρήματα	269
5.1	Παρεγγεγραμμένοι και έκκεντρα	270
5.2	Κύκλος του <i>Euler</i>	276
5.3	Θεώρημα του <i>Feuerbach</i>	278
5.4	Θεώρημα του <i>Euler</i>	280
5.5	Εφαπτόμενοι κύκλοι του Απολλώνιου	282
5.6	Ο Τύπος του Έρωνα	289
5.7	Θεωρήματα Πτολεμαίου και <i>Brahmagupta</i>	292
5.8	Η ευθεία του <i>Simson</i>	300
5.9	Σημεία του <i>Miquel</i>	302
5.10	Θεωρήματα των <i>Fermat</i> και <i>Fagnano</i>	304
5.11	Θεώρημα του <i>Morley</i>	308
5.12	Προσημασμένος λόγος και απόσταση	310
5.13	Διπλός λόγος, Αρμονικές δέσμες	314
5.14	Θεωρήματα του Μενελάου και του <i>Ceva</i>	318
5.15	Το πλήρες τετράπλευρο	324
5.16	Θεώρημα του <i>Desargues</i>	328
5.17	Θεώρημα του Πάππου	331
5.18	Θεωρήματα του <i>Pascal</i> και του <i>Brianchon</i>	335

6	Κύκλου μέτρηση	343
6.1	Οι δυσκολίες, το όριο	344
6.2	Ορισμός της περιμέτρου του κύκλου	348
6.3	Ο αριθμός π	352
6.4	Το μήκος τόξου του κύκλου, ακτίνα	354
6.5	Ορισμός του εμβαδού του κύκλου	357
6.6	Το εμβαδόν κυκλικού τομέα	361
7	Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	365
7.1	Αξιώματα για τον χώρο	366
7.2	Παράλληλα επίπεδα	371
7.3	Γωνίες στον χώρο	374
7.4	Ασύμβατες ευθείες	376
7.5	Ευθεία κάθετη σε επίπεδο	378
7.6	Γωνία ευθείας και επιπέδου	385
7.7	Θεώρημα του Θαλή στο χώρο	387
8	Στερεά	391
8.1	Διέδρες γωνίες	392
8.2	Τριέδρες γωνίες	397
8.3	Πυραμίδες, πολυεδρικές γωνίες	403
8.4	Τετράεδρα	405
8.5	Κανονικές πυραμίδες	407
8.6	Πολύεδρα, Πλατωνικά σώματα	410
8.7	Πρίσματα	414
8.8	Κύλινδρος	417
8.9	Κώνος, Κωνική επιφάνεια	419
8.10	Κόλουρος Κώνος, Ανάπτυγμα κώνου	424
8.11	Σφαίρα	426
8.12	Σφαιρικά πολύεδρα	434
8.13	Άτρακτος, γωνία μεγίστων κύκλων	436
8.14	Σφαιρικά τρίγωνα	437
8.15	Η παραπληρωματική τριέδρος	441
9	Εμβαδά στο χώρο, όγκοι	445
9.1	Εμβαδά στο χώρο	446
9.2	Εμβαδόν της σφαίρας	453
9.3	Εμβαδόν σφαιρικών πολυγώνων	456
9.4	Χαρακτηριστική του Euler	460
9.5	Όγκοι	462
9.6	Όγκοι πρισμάτων	465
9.7	Όγκοι πυραμίδων	468
9.8	Όγκοι κυλίνδρων	474
9.9	Όγκοι κώνων	476
9.10	Όγκος της σφαίρας	478

10 Κωνικές Τομές	485
10.1 Κωνικές τομές	486
10.2 Οι σφαίρες του <i>Dandelin</i>	489
10.3 Διευθετούσες	493
10.4 Γενικά χαρακτηριστικά κωνικών	500
10.5 Η Παραβολή	508
10.6 Η έλλειψη	513
10.7 Η υπερβολή	519
Βιβλιογραφία	527
Ευρετήριο	531

Κεφάλαιο 1

Οι βασικές έννοιες

1.1 Αόριστες έννοιες, αξιώματα

Η αρχή είναι λίγο δύσκολη για τον συγγραφέα και τον μαθητή. Τούτο διότι υπεισέρχονται οι λεγόμενες **Αόριστες έννοιες**. Έννοιες που είναι τόσο απλές και οικείες από την εμπειρία μας, ώστε δεν μπορούμε να βρούμε πιο απλές με την βοήθεια των οποίων να τις περιγράψουμε. Τέτοιες έννοιες στην Γεωμετρία είναι το **Σημείο**, ο **Χώρος**, το **Επίπεδο**, η **Ευθεία**, η έννοια του σημείου **Μεταξύ** δύο άλλων σημείων και η έννοια της **Ισότητας** δύο *σχημάτων*. Μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αυτές τις έννοιες βάσει των **Ιδιοτήτων** τους ή **Αξιωμάτων** που περιγράφουν κάποια χαρακτηριστικά τους και τα οποία *αποδεχόμεθα* χωρίς απόδειξη. Ξεκινάμε λοιπόν με τις αόριστες έννοιες. Περιγράφουμε τις βασικές ιδιότητες τους με αξιώματα και από 'κει και πέρα, συνδυάζοντας τις βασικές ιδιότητες με την λογική συμπεραίνουμε άλλες ιδιότητες, τα θεωρήματα ή προτάσεις και τα πορίσματα (άμεσες λογικές συνέπειες των θεωρημάτων). Τα μέχρις ενός σημείου αποδειχθέντα θεωρήματα, μαζί με τα αξιώματα, χρησιμοποιούνται για να συμπεράνουμε νέες ιδιότητες, δηλαδή νέα θεωρήματα. Με τον τρόπο αυτό χτίζουμε σιγά-σιγά ένα καλά οργανωμένο και δομημένο πνευματικό οικοδόμημα που συγκροτεί την γνώση μας στην Γεωμετρία. Εάν σε κάποιο σημείο κάνουμε μία παραδοχή λ.χ. $A=B$ και, στηριζόμενοι στη λογική, καταλήξουμε ότι αυτό οδηγεί σε αντίφαση προς κάποιο αξίωμα ή εν τω μεταξύ αποδειχθέν θεώρημα, τότε λέμε ότι η υπόθεσή μας οδηγεί σε άτοπο και είμαστε υποχρεωμένοι να δεχθούμε ότι ισχύει η λογική άρνηση της ιδιότητας (στο παράδειγμα $A \neq B$). Η μέθοδος αυτή του συλλογισμού λέγεται **Εις άτοπον απαγωγή** και χρησιμοποιείται κατά κόρον στην γεωμετρία.

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία εξετάζει τις ιδιότητες σχημάτων στο χώρο και το επίπεδο και κυρίως αυτές που σχετίζονται με μετρήσεις. Ως **Σχήμα** θεωρούμε οποιαδήποτε συλλογή σημείων του επιπέδου (επίπεδο σχήμα) ή του χώρου (σχήμα στον χώρο). Μετράμε μήκη, γωνίες και εμβαδά. Στον χώρο μετράμε και όγκους. Συνήθως το μάθημα χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, που ονομάζεται **Επιπεδομετρία** εξετάζονται ιδιότητες σχημάτων του επιπέδου, όπως το τρίγωνο, το τετράγωνο, ο κύκλος κτλ. Στο δεύτερο μέρος, που ονομάζεται **Στερεομετρία** εξετάζονται ιδιότητες των σχημάτων του χώρου, όπως ο κύβος, η σφαίρα κτλ.

Σχόλιο-1 Τα αξιώματα που θα επιλέξουμε ως βασικές ιδιότητες και σημείο εκκίνησης της μελέτης μας δεν είναι πραγματικά ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ορισμένα από αυτά είναι συνέπειες των άλλων. Επομένως θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με λιγότερα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, αλλά επαρκή για να αποδείξουμε όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες ως θεωρήματα. Αυτό, ωστόσο, θα είχε την συνέπεια να χρονοτριβήσουμε σε πολύ απλές ιδιότητες, αποδεικνύοντάς τις και αυτές ως συνέπειες των λίγων αξιωμάτων μας. Προτίμησα να ενσωματώσω λοιπόν, κάποιες από αυτές τις ιδιότητες στα αξιώματα, με την φιλοσοφία ότι η αποκάλυψη πιο κρυφών ιδιοτήτων δημιουργεί περισσότερο ενδιαφέρον από την επιβεβαίωση των προφανών. Για μία διαφορετική πορεία, όπου εξετάζεται λεπτομερώς το θέμα των αξιωμάτων μπορεί κανείς να δει το πολύ γνωστό βιβλίο [Hil03] του Hilbert 1862-1943, που είναι αφιερωμένο εξ' ολοκλήρου στη συζήτηση των αξιωμάτων, την ανεξαρτησία τους και την μεταξύ τους μη-αντιφατικότητα. Από αυτό το βιβλίο προέρχονται και τα περισσότερα των αξιωμάτων της ευθείας που διατυπώνω παρακάτω. Αντικαθιστώ ωστόσο μερικά από αυτά με αξιώματα από το σύστημα του Birkhoff 1884-1944 ([Bir32]), που εξασφαλίζουν το ότι οι ευθείες είναι στην ουσία αντίγραφα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ας σημειωθεί πάντως ότι η θεμελίωση της Ευκλείδειας γεωμετρίας μπορεί να γίνει και με πολύ λίγα αξιώματα. Ο Hilbert

στο προαναφερθέν βιβλίο του, καθώς και ο Cairns 1904-1982 ([Cai33]), δίδουν συστήματα με τέσσερα μόνον αξιώματα. Ο Bachmann 1909-1982 ([Bac73]) δίδει ένα σύστημα πέντε αξιωμάτων. Σε όλα αυτά τα συστήματα όμως υπεισέρχονται πιά σύνθετες μαθηματικές δομές (τοπολογικοί χώροι, μετασχηματισμοί, ομάδες κ.α.).

Σχόλιο-2 Τα στοιχεία του Ευκλείδη (περίπου 325-265 π.Χ.) ([Hei85], [Hea08]) αρχίζουν με την παράθεση 23 ορισμών οι 4 πρώτοι εκ των οποίων και ο τελευταίος είναι οι εξής:

(1) Σημείον ἐστίν, ου μέρος ουθέν.

(2) Γραμμή δε μήκος απλατές.

(3) Γραμμής δε πέρατα σημεία.

(4) Ευθεία γραμμή ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἐαυτῆς σημείοις κείται.

... ..

(23) Παράλληλοι εἰσὶν ευθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αμέσως μετά τους 23 ορισμούς ακολουθούν τα 5 **Αιτήματα** που εμείς ονομάζουμε αξιώματα:

1. Ηιτήσθω ἀπὸ παντός σημείου ἐπὶ παν σημείον ευθείαν γραμμήν ἀγαγεῖν.

2. Καὶ πεπερασμένην ευθείαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' ευθείας ἐκβαλεῖν.

3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψεσθαι.

4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἰσας ἀλλήλας εἶναι.

5. Καὶ εἴαν εἰς δύο ευθείας ευθεία ἐμπίπτουσα τὰς ἐνός καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο ευθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Στους ορισμούς αυτούς περιέχονται τόσο έννοιες που εμείς περιγράψαμε ως *αόριστες* (1,2,4), όσο και κανονικοί ορισμοί, όπως τους δίνουμε και σήμερα (3,23). Τα πέντε αξιώματα του Ευκλείδη, δυστυχώς, δεν φθάνουν γιὰ τὴν ἀπόδειξη ὅλων τῶν προτάσεων που ακολουθοῦν στο βιβλίο του. Συχνά χρησιμοποιεῖ κάποιες ιδιότητες που δεν προκύπτουν ἀπὸ τὰ πέντε αὐτὰ αξιώματα, που εἶναι ὅμως σωστές. Απλὰ χρειάζεται ἡ προσθήκη καὶ ἄλλων αξιωμάτων ὥστε νὰ προκύψει αὐτό που σήμερα λέμε *πλήρες σύστημα αξιωμάτων*, τὸ ὁποῖο εἶναι ικανό νὰ στηρίξει τὶς ἀποδείξεις ὅλων τῶν ιδιοτήτων τῶν σχημάτων που ἀνακαλύπτουμε καὶ νὰ τὶς βάλει σὲ μιά λογικὴ σειρά.

Σχετικὰ με τὸν λίγο χρόνο που ἀναλίσκει ὁ Ευκλείδης σὺς ορισμούς καὶ τὰ αξιώματα συνηγορῶ, γιατί κατ' ἐπανάληψιν ἐχῶ παρατηρήσει ὅτι ὅταν ὁ μαθητὴς πολιορκεῖται με διασαφήσεις καὶ ἀνάλυση λεπτομερειῶν γιὰ έννοιες τῶν ὁποῖων ἔχει μιά φυσικὴ διαίσθηση, τότε ἀρχίζει νὰ ἀμφιβάλλει καὶ γιὰ αὐτὰ που ἤξερε καὶ νὰ μπερδεύεται περισσότερο ἀντὶ νὰ φωτίζεται. Χρειάζεται λοιπὸν προσοχή ὥστε περισσότερο νὰ ἐνισχυθεῖ ἡ φυσικὴ του διαίσθηση γιὰ αὐτὰ που καταλλαβαίνει με κάποιο τρόπο, παρά νὰ ἀμφισβητηθεῖ ἡ διαίσθησή του καὶ οἱ προηγούμενες ἐμπειρικὲς γνώσεις του. Ακολουθώντας λοιπὸν τὸν Ευκλείδη δεν θὰ σταθῶ ιδιαίτερα σὺς ἀόριστες έννοιες καὶ τὰ αξιώματα. Θα δώσω ἓνα σύστημα πλήρες, ικανό

να στηρίζει όλες τις μετέπειτα προτάσεις μας και θεωρήματα. Εμπιστευόμενος ωστόσο την διαίσθηση του αναγνώστη δεν θα συζητήσω ιδιαίτερα τις αλληλεξαρτήσεις των αξιωμάτων αυτών και τις αόριστες έννοιες στις οποίες αυτά αναφέρονται.

1.2 Ευθεία και Ευθύγραμμο τμήμα

Το επίπεδο αποτελείται από **Σημεία** που συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα $A, B, \Gamma, \dots$ ή κεφαλαία με τόνους $A', B', \Gamma', \dots$ ή κεφαλαία με δείκτες $A_1, A_2, \dots$ κτλ. Το πιο απλό σχήμα του επιπέδου είναι η **Ευθεία** που συμβολίζουμε με μικρά γράμματα $\epsilon, \zeta, \eta, \dots$ ή γράμματα



Σχήμα 1: Ευθεία ϵ

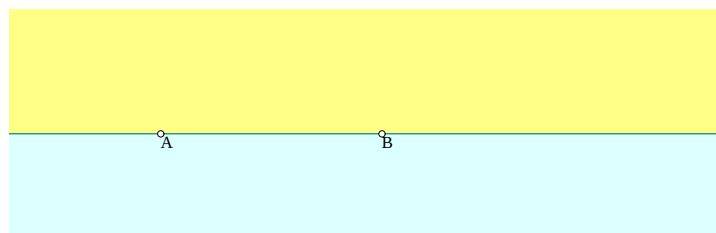
με τόνους $\epsilon', \zeta', \dots$ ή γράμματα με δείκτες $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ κτλ. Για τις ευθείες δεχόμαστε τις εξής αρχικές ιδιότητες (αξιώματα).



Σχήμα 2: Ευθεία AB

Αξίωμα 1.2.1 Δύο διαφορετικά σημεία A, B ορίζουν μία ακριβώς ευθεία που συμβολίζουμε με AB .

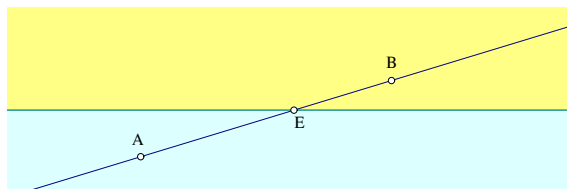
Αξίωμα 1.2.2 Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία. Για κάθε ευθεία υπάρχουν άπειρα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε αυτήν. Για κάθε σημείο υπάρχουν άπειρες ευθείες που δεν διέρχονται από αυτό.



Σχήμα 3: Ημιεπίπεδα

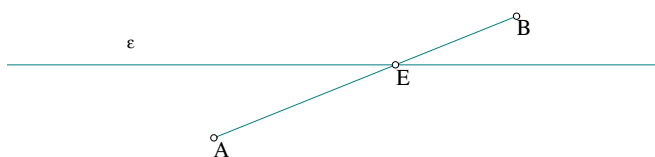
Αξίωμα 1.2.3 Κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη που λέγονται **Ημιεπίπεδα**, που δεν έχουν κοινά σημεία με την ευθεία. Μία ευθεία που έχει δύο σημεία A και B σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας ϵ τέμνει την ευθεία ϵ (το πρώτο θεώρημα παρακάτω λέει ότι υπάρχει τότε ένα ακριβώς σημείο τομής της ϵ με την ευθεία AB). Συχνά χρησιμοποιούμε την λέξη **Μεριά** της ευθείας, εννοώντας ένα από τα δύο ημιεπίπεδα αυτής.

Αξίωμα 1.2.4 Δύο σημεία A, B μιάς ευθείας ϵ ορίζουν ένα **ευθύγραμμο τμήμα** που συμβολίζουμε επίσης με AB . Το AB αποτελείται από τα A, B καθώς και όλα τα σημεία που εφίσκονται **Μεταξύ** του A και του B . Τα A και B λέγονται **Άκρα** του ευθυγράμμου τμήματος. Τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος, εκτός των άκρων, λέμε ότι αποτελούν το **Εσωτερικό** του ευθυγράμμου τμήματος.



Σχήμα 4: A και B σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ϵ

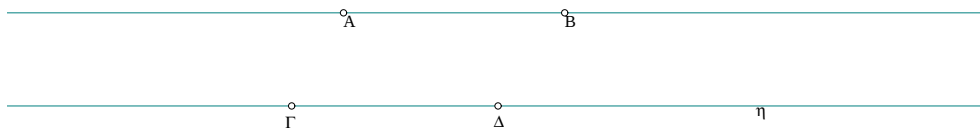
Αξίωμα 1.2.5 Αν τα σημεία A και B ευρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας ϵ , τότε και όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος AB περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. Αν τα σημεία A και B ευρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ευθείας ϵ , τότε το σημείο τομής E της ευθείας ϵ και της ευθείας AB ευρίσκεται μεταξύ των A και B.



Σχήμα 5: Τομή ευθείας και ευθυγράμμου τμήματος

Σχόλιο-1 Στο Αξίωμα 1.2.4 η λέξη **Μεταξύ** είναι αόριστη. Θα γίνει σαφής όμως στην επόμενη παράγραφο με την βοήθεια της έννοιας του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος.

Σχόλιο-2 Η χρήση του ιδίου συμβόλου AB για το ευθύγραμμο τμήμα καθώς και την ευθεία που ορίζεται από τα A και B δεν πρέπει να μας παραπλανά. Κάθε φορά η σημασία του συμβόλου θα προκύπτει από τα συμφραζόμενα. Συχνά θα γράφουμε για την ευθεία $\epsilon = AB$, θεωρώντας ότι αυτό το σύμβολο αντιπροσωπεύει την φράση **η ευθεία ϵ που ορίζεται από τα σημεία A και B**.

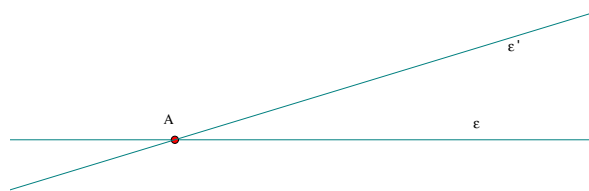


Σχήμα 6: Παράλληλες AB και ΓΔ

Παράλληλες ονομάζουμε δύο ευθείες που δεν τέμνονται. **Παράλληλα** λέμε δύο ευθύγραμμο τμήματα των οποίων οι ευθείες, στις οποίες περιέχονται, είναι παράλληλες. Συχνά την ευθεία, στην οποία περιέχεται ένα ευθύγραμμο τμήμα, ονομάζουμε **Φορέα** του ευθυγράμμου τμήματος.

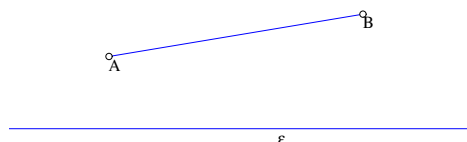
Πρόταση 1.2.1 Δύο διαφορετικές ευθείες ή είναι παράλληλες ή τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

Απόδειξη: Στην Πρόταση 1.13.1 θα δούμε ότι υπάρχουν όντως παράλληλες ευθείες. Αν οι δύο ευθείες ϵ και ϵ' δεν τέμνονται, τότε είναι εξ ορισμού παράλληλες. Αν τέμνονται

Σχήμα 7: Τεμνόμενες ευθείες ϵ και ϵ'

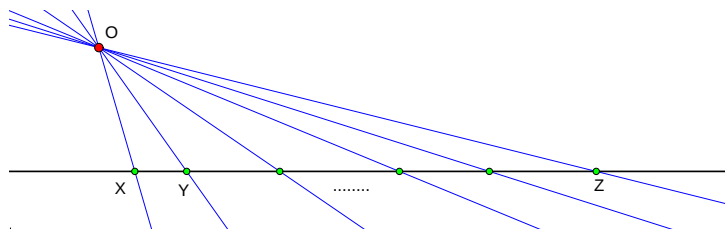
τότε θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο A . Τούτο διότι αν είχαν και δεύτερο σημείο τομής B , διαφορετικό του A , θα είχαμε δύο διαφορετικές ευθείες ϵ και ϵ' διερχόμενες από τα δύο σημεία A και B , που είναι αδύνατον διότι αντιφάσκει στο Αξίωμα 1.2.1, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.2.1 Δίδεται ευθεία ϵ . Δείξε ότι αν το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν τέμνει την ευθεία ϵ τότε τα σημεία A και B περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Σχήμα 8: A, B από την ίδια μεριά της ϵ

Υπόδειξη: Χρήση εις άτοπον απαγωγής. Υπόθεσε ότι το AB δεν τέμνει την ϵ και τα A, B περιέχονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ϵ . Τότε κατά το Αξίωμα 1.2.5 το AB θα τέμνει την ϵ σε ένα σημείο E , αντιφάσκοντας στην υποθεση.

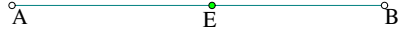
Άσκηση 1.2.2 Δείξε ότι για κάθε σημείο O του επιπέδου υπάρχουν άπειρες ευθείες διερχόμενες από αυτό.

Σχήμα 9: Απειρία ευθειών διά του O

Υπόδειξη: Θεώρησε μία ευθεία ϵ που δεν διέρχεται από το O . Κατά το Αξίωμα 1.2.2 υπάρχει μία τέτοια ευθεία. Όρισε κατόπιν τις ευθείες $OX, OY, \dots$ κτλ. που διέρχονται από το O και ένα σημείο $X, Y, \dots$ της ϵ . Και πάλι κατά το Αξίωμα 1.2.2 υπάρχουν άπειρα σημεία $X, Y, \dots$ επί της ϵ και κάθε ένα από αυτά ορίζει μία διαφορετική ευθεία που διέρχεται από το O .

1.3 Μήκος, Απόσταση

Αξίωμα 1.3.1 Για κάθε ζεύγος σημείων A και B ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός $|AB| \geq 0$ που ονομάζουμε **Απόσταση** των σημείων και ικανοποιεί τις ιδιότητες $|AB| = |BA|$ και $|AB| = 0$ τότε και μόνον, όταν τα σημεία αυτά ταυτίζονται.



Σχήμα 10: Άθροισμα μηκών

Αξίωμα 1.3.2 Για κάθε τριάδα διαφορετικών σημείων A , B και E της ίδιας ευθείας, ένα εκ των τριών είναι ανάμεσα στα άλλα δύο. Αν το E είναι μεταξύ των A και B τότε $|AB| = |AE| + |EB|$. Και αντίστροφα, αν ισχύει αυτή η σχέση τότε το E είναι μεταξύ των A και B .



Σχήμα 11: Σημεία σε απόσταση δ από το άκρο αντικειμένων ημιευθειών

Αξίωμα 1.3.3 Ένα σημείο A ευθείας ϵ χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη ϵ_1 και ϵ_2 , που έχουν μοναδικό κοινό σημείο το A και λέγονται **Ημιευθείες** με **Άκρο** ή **Αρχή** το A . Για κάθε θετικό αριθμό δ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο B_1 στην ϵ_1 με $|B_1A| = \delta$ και ένα ακριβώς σημείο B_2 στην ϵ_2 με $|B_2A| = \delta$. Το A είναι το **Μέσον** του ευθυγράμμου τμήματος B_1B_2 .

Μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζουμε την απόσταση $|AB|$ των άκρων του. Λέμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ της ίδιας ευθείας ή διαφορετικών ευθειών είναι **Ίσα**, όταν έχουν το ίδιο μήκος. Οι δύο ημιευθείες που ορίζονται από το σημείο A επί της ευθείας ϵ λέγονται **Αντικείμενες**. **Παράλληλες** ονομάζουμε δύο ημιευθείες που περιέχονται σε παράλληλες ευθείες.

Σχόλιο Το Αξίωμα 1.3.3 των ευθειών σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα οποιουδήποτε μήκους θέλουμε. Η πρακτική κατασκευή λ.χ. περιοριζόμενοι μόνο στα δύο όργανα σχεδίασης του κανόνα (χάρακα) και του διαβήτη, όπως συνηθίζεται, είναι ένα άλλο θέμα που θα μας απασχολήσει κατά καιρούς. Π.χ. η κατασκευή του μέσου M ενός δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος AB με την βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη απαιτεί γνώση των ιδιοτήτων του κύκλου που δεν έχουμε μάθει ακόμη. Ωστόσο η απόδειξη της ύπαρξης του M , βάσει των παραπάνω ιδιοτήτων, είναι απλή.



Σχήμα 12: Το B ανάμεσα στο A και το E

Άσκηση 1.3.1 Έστω ότι B και E είναι δύο σημεία στην ίδια ημιευθεία AX με άκρο το A . Δείξε ότι η $|AE| > |AB|$ συνεπάγεται ότι το B είναι μεταξύ των A και E . Και αντίστροφα, αν το B είναι ανάμεσα στο A και το E τότε ισχύει η προηγούμενη σχέση.

Υπόδειξη: Έστω ότι το B δεν είναι μεταξύ των A και E . Τότε ή το B θα ταυτίζεται με το E και συνεπώς $|AB| = |AE|$ που είναι άτοπο, ή το E θα είναι μεταξύ των A και B , οπότε κατά το Αξίωμα 1.3.2 θα ισχύει $|AE| + |EB| = |AB|$. Αυτή όμως συνεπάγεται ότι $|AB| > |AE|$, αντίθετα με την υπόθεση.



Σχήμα 13: Διπλασιασμός του AB

Άσκηση 1.3.2 (Διπλασιασμός ευθυγράμμου τμήματος) Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα AB . Δείξε ότι στην ευθεία AB υπάρχουν δύο σημεία E και Z έτσι ώστε το B να είναι το μέσον του AE και το A να είναι το μέσον του ZB .

Υπόδειξη: Πάρε το E επί της ημιευθείας με άκρο το B που δεν περιέχει το A και σε απόσταση $|AB|$ από το B . Ανάλογα πράξε για το Z .

Άσκηση 1.3.3 Δείξε ότι για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB υπάρχει ένα ακριβώς σημείο M (το μέσον του AB) έτσι ώστε $|AM| = |MB|$.

Υπόδειξη: Αν $|AB| = \lambda$ τότε το σημείο M σε απόσταση $\lambda/2$ από το A προς την μεριά του B που εξασφαλίζεται από το Αξίωμα 1.3.3 είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 1.3.4 Δείξε ότι, αν δύο σημεία A και B είναι από την ίδια μεριά ευθείας ϵ , τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν τέμνει την ϵ .

Υπόδειξη: Αν το AB έτεμνε την ϵ , τότε το σημείο τομής Γ θα ήταν διαφορετικό των A και B , άρα θα ήταν μεταξύ αυτών και θα είχαμε αντίφαση στο Αξίωμα 1.2.5.

Άσκηση 1.3.5 Δείξε ότι μία ευθεία ϵ' είναι παράλληλος της ϵ τότε και μόνον, όταν ένα εκ των δύο ημιεπιπέδων της ϵ , περιέχει κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων της ϵ' .

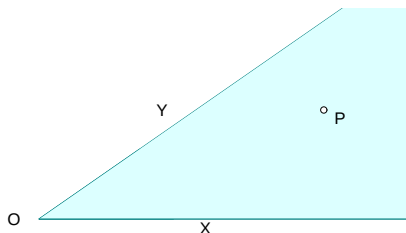
Υπόδειξη: Αν υπάρχουν δύο σημεία A και B της ϵ' περιεχόμενα σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ϵ , τότε κατά το Αξίωμα 1.2.5 η ϵ' θα τέμνει την ϵ . Αντίστροφα, αν ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της ϵ περιέχει όλα τα δυνατά ζεύγη σημείων της ϵ' , τότε αυτή δεν μπορεί να τέμνει την ϵ . Αν την έτεμνε στο σημείο A , τότε το A θα όριζε δύο αντικείμενες ημιευθείες επί της ϵ' και επιλέγοντας από ένα σημείο σε κάθε ημιευθεία θα βρίσκαμε δύο σημεία της ϵ' σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ϵ .

Άσκηση 1.3.6 Δείξε ότι τα σημεία B και Γ της ευθείας ϵ είναι από την ίδια μεριά του σημείου A της ϵ , τότε και μόνον, όταν $|B\Gamma| = ||AB| - |A\Gamma||$.

Υπόδειξη: Αν τα B, Γ είναι από στην ίδια ημιευθεία του A , τότε ή το B θα είναι μεταξύ του A και Γ , οπότε $|A\Gamma| = |AB| + |B\Gamma|$, ή το Γ θα είναι μεταξύ του A και B , οπότε $|AB| = |A\Gamma| + |\Gamma B|$. Συνεπώς, και στις δύο περιπτώσεις $|B\Gamma| = ||AB| - |A\Gamma||$, δηλαδή το ζητούμενο. Παρόμοιος συλλογισμός αποδεικνύει και το αντίστροφο.

1.4 Γωνίες

Δύο ημιευθείες OX, OY με κοινό άκρο O , χωρίζουν το επίπεδο σε δύο μέρη και ορίζουν μία **Κυρτή Γωνία** ή απλά **Γωνία** και μία **Μη κυρτή Γωνία**. **Κυρτή Γωνία** ή απλά **Γωνία** λέγεται το σχήμα που συμβολίζουμε με XOY και αποτελείται από τις δύο ημιευθείες OX και OY μαζί με το ένα από τα δύο μέρη του επιπέδου που λέγεται εσωτερικό της γωνίας. Το **Εσωτερικό** της γωνίας είναι το μέρος του επιπέδου που αποτελείται από τα σημεία P



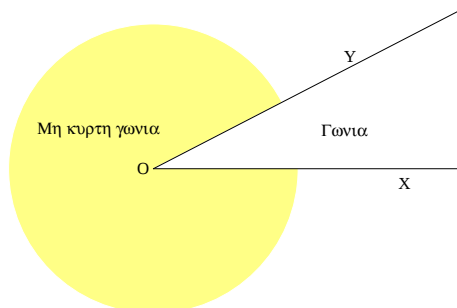
Σχήμα 14: Γωνία XOY

που ικανοποιούν τις δύο ιδιότητες:

α) το P και η ημιευθεία OY είναι από την ίδια μεριά της ευθείας OX ,

β) το P και η ημιευθεία OX είναι από την ίδια μεριά της ευθείας OY .

Το σημείο O λέγεται **Κορυφή** της γωνίας. Οι ημιευθείες OX, OY λέγονται **Πλευρές της γωνίας**.

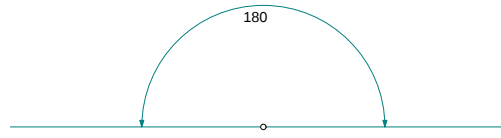


Σχήμα 15: Μη κυρτή γωνία XOY

Μη-κυρτή γωνία λέγεται το σχήμα που ορίζεται πάλι από τις ημιευθείες OX και OY και συνίσταται από το υπόλοιπο μέρος του επιπέδου εκτός του εσωτερικού της γωνίας XOY και των ημιευθειών που την ορίζουν. Το υπόλοιπο αυτό μέρος του επιπέδου ονομάζουμε **εσωτερικό** της μη-κυρτής γωνίας XOY , ή **Εξωτερικό** της κυρτής XOY . Συχνά θα μιλάμε για γωνίες χωρίς να κάνουμε διάκριση για το αν είναι κυρτή ή μη-κυρτή. Το ακριβές νόημα, δηλαδή αν πρόκειται για κυρτή ή μη-κυρτή, θα προκύπτει τότε από τα συμφραζόμενα. Στην περίπτωση που οι δύο ημιευθείες περιέχονται στην ίδια ευθεία ορίζουμε τις επόμενες ειδικές γωνίες.

Πεπλατυσμένη γωνία ή **Ευθεία γωνία** ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο αντικείμενες ημιευθείες. Οποιοδήποτε από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία OX μπορεί να θεωρηθεί εσωτερικό ή εξωτερικό της πεπλατυσμένης γωνίας.

Μηδενική γωνία ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο ταυτιζόμενες ημιευθείες



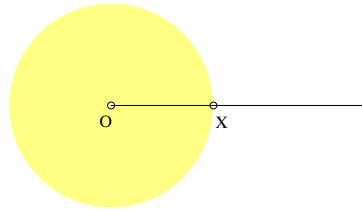
Σχήμα 16: Πεπλατυσμένη γωνία

OX και OY . Θεωρούμε ότι η γωνία αυτή δεν έχει εσωτερικό, ενώ ολόκληρο το επίπεδο πλην της OX θεωρείται το εξωτερικό αυτής της γωνίας.

Πλήρη στροφή ή Πλήρη γωνία ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από δύο ταυτιζόμενες ημιευθείες OX και OY . Εδώ ως εσωτερικό της γωνίας θεωρούμε ολόκληρο το επίπεδο πλην της OX , ενώ δεν υπάρχει εξωτερικό.



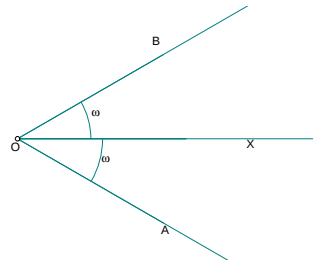
Σχήμα 17: Μηδενική γωνία



Σχήμα 18: Πλήρης στροφή

Οι βασικές ιδιότητες (αξιώματα) των γωνιών είναι οι εξής:

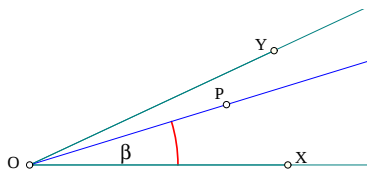
Αξίωμα 1.4.1 Για κάθε γωνία (κυρτή ή μη) XOY ορίζεται ένας αριθμός $|XOY| = |YOX| \geq 0$ που λέγεται **Μέτρο της γωνίας σε μοίρες**. Ισχύει $|XOY| = 0$ τότε και μόνον όταν η γωνία είναι η μηδενική.

Σχήμα 19: Ίσες γωνίες εκατέρωθεν της OX

Αξίωμα 1.4.2 Για κάθε αριθμό ω με $0 < \omega < 180$ υπάρχουν δύο ακριβώς ημιευθείες OA , OB στις δύο πλευρές της ευθείας OX έτσι ώστε οι γωνίες XOA και XOB να ικανοποιούν $|XOA| = |XOB| = \omega$. Η πεπλατυσμένη γωνία έχει μέτρο 180 μοίρες.

Εκ παραδόσεως το μέτρο ω σε μοίρες συμβολίζεται με ω° . Έτσι γωνία 30° σημαίνει γωνία 30 μοιρών. Το $1/60$ -οστό της μοίρας λέγεται **Πρώτο** της μοίρας ή **Λεπτό** και συμβολίζεται με ένα τόνο. Το $1/60$ -οστό του λεπτού λέγεται **Δεύτερο** της μοίρας και συμβολίζεται με δύο τόνους. Έτσι, $30^\circ 23' 11''$ συμβολίζει το μέτρο που ισούται με $30 + \frac{23}{60} + \frac{11}{3600}$ μοίρες. Δεν θα επιμείνω σε αυτόν τον συμβολισμό. Ακόμη και για γωνίες όπως η 30° θα γράφω απλά 30. Δύο γωνίες λέγονται **Ίσες** τότε και μόνον όταν τα μέτρα τους είναι ίσα.

Αξίωμα 1.4.3 Για κάθε σημείο P στο εσωτερικό της γωνίας XOY (κυρτής ή μη-κυρτής) τα μέτρα των γωνιών XOY , XOP και POY ικανοποιούν την $|XOY| = |XOP| + |POY|$. Σε κάθε τέτοια περίπτωση λέμε ότι η γωνία XOY είναι το **Αθροισμα** των γωνιών XOP και POY .



Σχήμα 20: Μέτρο αθροίσματος

Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και μία πλευρά επίσης κοινή και μή τεμνόμενα αντίστοιχα εσωτερικά (όπως οι XOP και POY του σχήματος -20) λέγονται **Εφεξής**.

Άσκηση 1.4.1 Βρες την διχοτόμο μιάς πεπλατυσμένης γωνίας XOY . Δείξε ότι το μέτρο μιάς πεπλατυσμένης γωνίας είναι 360 μοίρες.

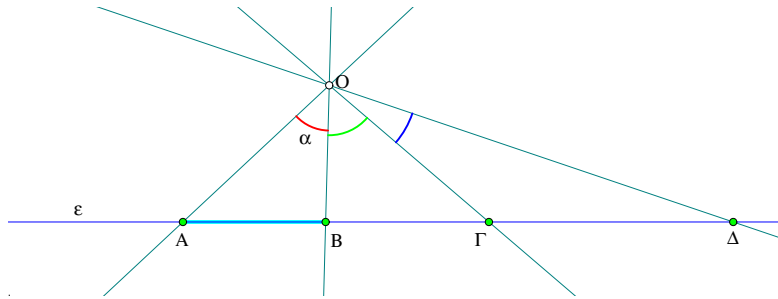
Άσκηση 1.4.2 Έστω γωνία XOY με μέτρο $|XOY| = \alpha$ και P σημείο στο εσωτερικό της γωνίας. Δείξε ότι $|XOP| < \alpha$. Αντίστροφα δείξε ότι για κάθε θετικό $\beta < \alpha$ υπάρχει σημείο P έσωτερικό της γωνίας έτσι ώστε $|XOP| = \beta$. Δείξε ακόμη ότι όλα αυτά τα σημεία P περιέχονται σε ημιευθεία μέ άκρο το O .

Άσκηση 1.4.3 Έστω ότι τα σημεία A και B περιέχονται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας XOY . Δείξε ότι και κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος AB περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας XOY . Δείξε ότι η ανάλογη ιδιότητα δεν ισχύει για μη-κυρτές γωνίες.

Άσκηση 1.4.4 (Υπαρξη Διχοτόμου) Δείξε ότι για κάθε γωνία XOY υπάρχει μία ακριβώς ημιευθεία OZ στο εσωτερικό της που την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες XOZ, ZOY με $|XOZ| = |ZOY| = |XOY|/2$.

Σχόλιο-1 Το Αξίωμα 1.4.2 των γωνιών σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιαδήποτε γωνία θέλουμε και από τις δύο μεριές μιάς ημιευθείας. Όπως όμως και για ευθύγραμμα τμήματα έτσι και για γωνίες, η πρακτική κατασκευή συγκεκριμένης γωνίας με την βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη, όταν αυτό είναι εφικτό, όπως λ.χ. η γωνία 60 μοιρών, είναι ένα διαφορετικό ζήτημα και θα χρειαστούν και πάλι ιδιότητες του κύκλου για να μπορέσουμε να δικαιολογήσουμε την κατασκευή.

Σχόλιο-2 Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσει κανείς ορισμένες κοινές ιδιότητες μεταξύ γωνιών και ευθυγράμμων τμημάτων, ιδιαίτερα όσον αφορά τις έννοιες μεταξύ, διαδοχικές και μέτρο.



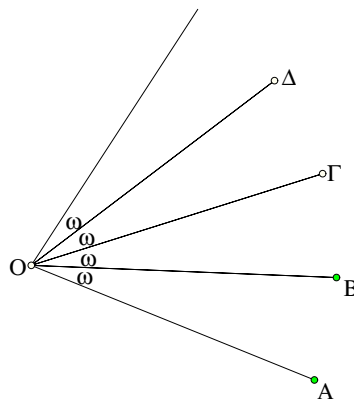
Σχήμα 21: Αντιστοίχιση ευθυγράμμων τμημάτων - γωνιών

Η εικόνα 21 δείχνει πόσο φυσιολογική είναι αυτή η συσχέτιση. Από ένα σημείο O εκτός της ευθείας ϵ και για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB αυτής κατασκευάζεται η γωνία AOB . Μέσω αυτής της αντιστοίχισης ευθυγράμμων τμημάτων - γωνιών οι έννοιες που ανέφερα μεταφέρονται από την ευθεία στις γωνίες με κορυφή το O (δες επόμενο σχήμα). Έτσι το $A\Gamma$ είναι το άθροισμα των AB και $B\Gamma$ και η αντίστοιχη γωνία $AO\Gamma$ είναι το άθροισμα των AOB και $BO\Gamma$. Το B είναι μεταξύ των A και Γ και ανάλογα η OB είναι μεταξύ των OA και $O\Gamma$, σε δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα αντιστοιχούν εφεξής γωνίες κ.ο.κ.

Με την ευκαιρία του τελευταίου σχήματος μπορούμε να θέσουμε αμέσως δύο προβλήματα, τα οποία, όμως, για να λύσουμε θα πρέπει πρώτα να μάθουμε να χειριζόμαστε κάποια εργαλεία (δες για την λύση τους Άσκηση 3.9.4 και 3.8.8).

Πρόβλημα 1.4.1 Υπόθεσε ότι στο τελευταίο σχήμα η γωνία AOB έχει σταθερό μέτρο $|AOB| = \alpha$ και περιστρέφεται περί το O . Για ποιά θέση της γίνεται το μήκος του αντιστοίχου ευθυγράμμου τμήματος AB ελάχιστο;

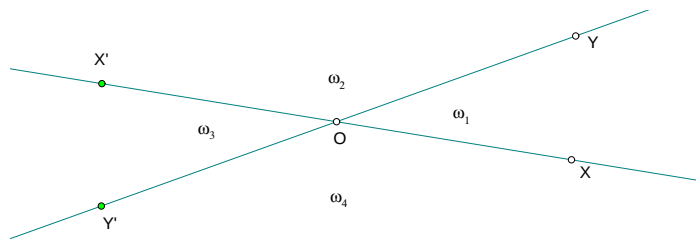
Πρόβλημα 1.4.2 Υπόθεσε ότι στο τελευταίο σχήμα το τμήμα AB γλιστρά πάνω στην ευθεία ϵ χωρίς να αλλάζει το μήκος του. Για ποιά θέση του AB γίνεται η αντίστοιχη γωνία AOB μέγιστη;



Σχήμα 22: Άθροισμα ίσων γωνιών

Άσκηση 1.4.5 Ξεκινώντας από γωνία AOB μέτρου ω , κατασκευάζουμε ίσες με αυτήν εφεξής προς το ίδιο μέρος $BO\Gamma$, $\Gamma O\Delta$, κτλ. Για ποιές γωνίες ω η διαδικασία αυτή μετά από n βήματα ορίζει γωνία $\Psi O\Omega$ της οποίας η πλευρά $O\Omega$ συμπίπτει με την αρχική OA ;

1.5 Γωνιών είδη

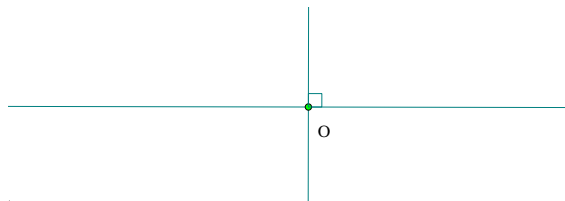


Σχήμα 23: Γωνίες δύο ευθειών

Δύο τεμνόμενες στο σημείο O ευθείες OX και OY ορίζουν τέσσερις γωνίες. Οι γωνίες αυτές ανά δύο σχηματίζουν ζεύγη **Κατά κορυφήν** γωνιών, δηλαδή γωνιών εκ των οποίων έκαστη έχει ως πλευρές τις προεκτάσεις της άλλης. Για τις δύο πεπλατισμένες XOX' και YOY' έχουμε $180 = |XOX'| = |XOY| + |YOX'|$. Επίσης $180 = |YOY'| = |YOX| + |XOY'|$. Επειδή $|XOY| = |YOX|$ συμπεραίνουμε ότι οι κατά κορυφήν γωνίες YOX' και XOY' είναι ίσες. Ανάλογα δείχνουμε και ότι οι XOY και $X'OY'$ είναι ίσες. Αποδείξαμε συνεπώς την:

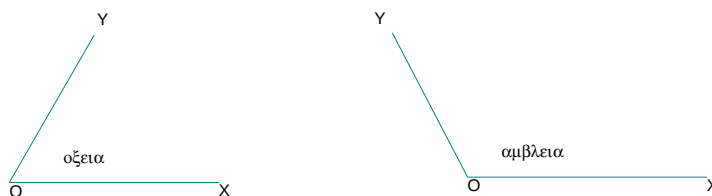
Πρόταση 1.5.1 *Κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.*

Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα μέτρων 180 λέγονται **Παραπληρωματικές**. Στο προηγούμενο σχήμα κάθε ζεύγος διαδοχικών γωνιών αποτελείται από παραπληρωματικές γωνίες. **Ορθή** λέγεται μία γωνία που έχει μέτρο 90 . Προφανώς μία ορθή είναι ίση με την παραπληρωματική της. Προεκτείνοντας τις πλευρές μίας ορθής γωνίας στο σημείο O , δηλαδή θεωρώντας και τις αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών, ορίζουμε τέσσερις ορθές γωνίες γύρω από το σημείο αυτό, που ανά δύο είναι ή κατά κορυφήν ή παραπληρωματικές. Έτσι δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο O και σχηματίζουν μία (από τις τέσσερις) γωνίες ορθή θα σχηματίζουν και τις υπόλοιπες ορθές. Δύο τέτοιες ευθείες λέγονται **Κάθετες**.

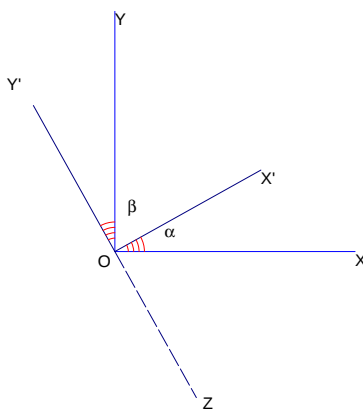


Σχήμα 24: Κάθετες ευθείες

Οξεία λέγεται μία γωνία XOY της οποίας το μέτρο $|XOY| < 90$. **Αμβλεία** λέγεται μία γωνία της οποίας το μέτρο $|XOY| > 90$. Προφανώς αν μία γωνία είναι οξεία τότε η παραπληρωματική της θα είναι αμβλεία και τούμπαλιν. Λέμε ότι η γωνία α είναι μεγαλύτερη/μικρότερη της γωνίας β αν ισχύει κάτι ανάλογο για τα μέτρα τους: $|\alpha| < |\beta|$ (αντίστοιχα $|\alpha| > |\beta|$). Προφανώς κάθε αμβλεία είναι μεγαλύτερη της ορθής που με την σειρά της είναι μεγαλύτερη κάθε οξείας. **Συμπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες των οποίων τα μέτρα α, β έχουν άθροισμα $\alpha + \beta = 90$. Προφανώς συμπληρωματικές γωνίες είναι οξείες και οι δύο. Ένα σημείο X' στο εσωτερικό μίας ορθής γωνίας XOY ορίζει δύο συμπληρωματικές γωνίες $\alpha = XOX'$, $\beta = X'OY$.



Σχήμα 25: Οξεία και αμβλεία γωνία



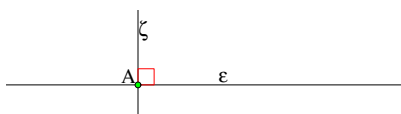
Σχήμα 26: Γωνίες με κάθετες πλευρές

Πρόταση 1.5.2 Δύο γωνίες XOX' και YOY' που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα κάθετες είναι ή ίσες ή παραπληρωματικές.

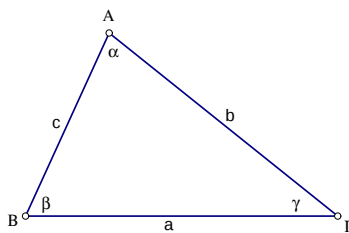
Απόδειξη: Εάν οι OY και OY' είναι προς το ίδιο μέρος της OX' τότε οι $\alpha = XOX'$ και $\alpha' = YOY'$ είναι ίσες ως έχουσες κοινή συμπληρωματική β . Εάν οι OY και OY' είναι σε διαφορετικά μέρη της OX' τότε η αντικείμενη ημιευθεία OY'' της OY' σχηματίζει παραπληρωματική $180 - \alpha'$ της $\alpha' = YOY'$ και είναι από το ίδιο μέρος της OX' με την OY , άρα κατά το προηγηθέν $180 - \alpha' = \alpha$, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.5.1 Δείξε ότι από σημείο A ευθείας ϵ διέρχεται μία ακριβώς ευθεία ζ κάθετος σε αυτήν.

Υπόδειξη: Άμεση συνέπεια του Αξιώματος 1.4.2, κατά το οποίο υπάρχει μία ακριβώς γωνία 90 μοιρών με κορυφή στο A , μία πλευρά ταυτιζόμενη με την ϵ και περιεχόμενη σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της ϵ .

Σχήμα 27: Κάθετος ζ της ϵ

1.6 Τρίγωνα



Σχήμα 28: Τρίγωνο

Τρίγωνο είναι το σχήμα που ορίζεται από τρία σημεία A, B και Γ, μη περιεχόμενα σε μία και μόνον ευθεία, καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ενώνουν. Τα τρία σημεία αυτά λέγονται **Κορυφές του τριγώνου**. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από δύο κορυφές του τριγώνου λέγονται **Πλευρές του τριγώνου**. **Γωνίες του τριγώνου** ονομάζουμε τις (κυρτές) γωνίες που σχηματίζονται σε κάθε κορυφή του από τις πλευρές του τριγώνου με αρχή αυτήν την κορυφή. Συνηθίζεται να παριστάνονται τα μήκη των πλευρών με τα λατινικά γράμματα

$$a = |B\Gamma|, \quad b = |\Gamma A|, \quad c = |AB|$$

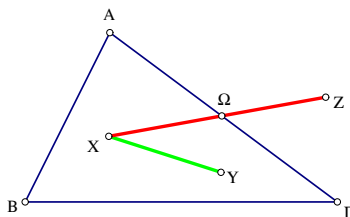
και τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου με τα μικρά ελληνικά

$$\alpha = |\angle B\Gamma A|, \quad \beta = |\angle \Gamma B A|, \quad \gamma = |\angle A\Gamma B|.$$

Τους συμβολισμούς αυτούς θα χρησιμοποιώ συχνά και στα επόμενα κεφάλαια. Οι γωνίες $\angle AB\Gamma$, $\angle B\Gamma A$, $\angle \Gamma A B$ θεωρούμε ότι είναι αντίστοιχα **Απέναντι** των πλευρών AB , BA , ΓB . Το άθροισμα των μηκών των πλευρών

$$p = a + b + c,$$

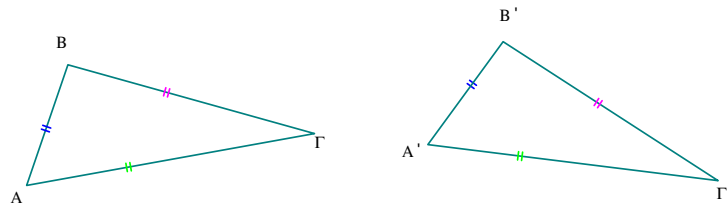
λέγεται **Περίμετρος** του τριγώνου. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ λέμε ότι είναι **Ίσα** όταν έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές ($a = a', b = b', c = c'$) και αντίστοιχα ίσες γωνίες ($\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$). Οι βασικές ιδιότητες (αξιώματα) του τριγώνου είναι οι εξής:



Σχήμα 29: Εσωτερικό και εξωτερικό τριγώνου

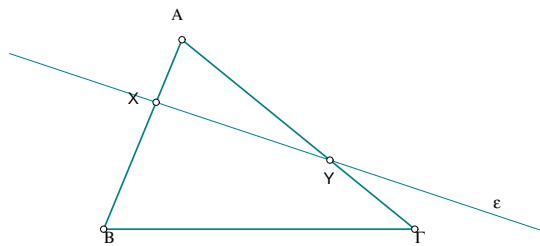
Αξίωμα 1.6.1 Κάθε τμήμα χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη το **Εσωτερικό** και **Εξωτερικό**. Δύο σημεία X και Y, περιεχόμενα στο εσωτερικό του τριγώνου, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα XY που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό του τριγώνου. Δύο σημεία X και Z,

περιεχόμενα το ένα στο εσωτερικό και το άλλο στο εξωτερικό του, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα XZ το οποίο ή περιέχει κορυφή του τριγώνου ή τέμνει μία ακριβώς πλευρά του τριγώνου σε εσωτερικό της πλευράς σημείο Ω .



Σχήμα 30: Τρίγωνα με αντίστοιχες πλευρές ίσες

Αξίωμα 1.6.2 (Ισότητας δύο τριγώνων) Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες ($|AB| = |A'B'|$, $|BG| = |B'\Gamma'|$, $|GA| = |G'A'|$) είναι ίσα. Δηλαδή έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες. Μάλιστα απέναντι από αντίστοιχα ίσες πλευρές θα ευρίσκονται ίσες γωνίες.



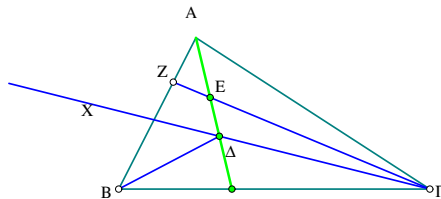
Σχήμα 31: Αξίωμα του Pasch

Αξίωμα 1.6.3 (Του Pasch 1843-1940) Αν μία ευθεία ε τέμνει μία πλευρά AB του τριγώνου και δεν διέρχεται από μία κορυφή του, τότε θα τέμνει και μία από τις άλλες πλευρές.

Σχόλιο-1 Το αξίωμα για το εσωτερικό και εξωτερικό του τριγώνου είναι μία από τις περιπτώσεις που ανέφερα στην αρχή του κεφαλαίου. Συνάγεται από τα υπόλοιπα αξιώματα, συνεπώς θα μπορούσε να αποδειχθεί ως θεώρημα. Η απόδειξη ωστόσο περιέχει λεπτομέρειες στις οποίες δεν κρίνω σκόπιμο να εμπλακεί ο μαθητής. Έτσι το βάζω εδώ ως αξίωμα.

Το τελευταίο Αξίωμα 1.6.3 φαίνεται αυτονόητο, ωστόσο η ιδιότητα που εκφράζει δεν συνάγεται από τα προηγούμενα αξιώματα. Η χρησιμότητά του φαίνεται και από την επόμενη πρόταση καθώς και την άσκηση που ακολουθεί. Οι δύο αυτές προτάσεις δίνουν μία γεύση των λεπτομερειών που πρέπει να προσέξει κανείς, αν θέλει να αποδείξει όλους τους ισχυρισμούς του βάσει των αξιωμάτων. Ένα πλήθος παρόμοιων προτάσεων μπορεί να δεί κανείς στο [Bel07].

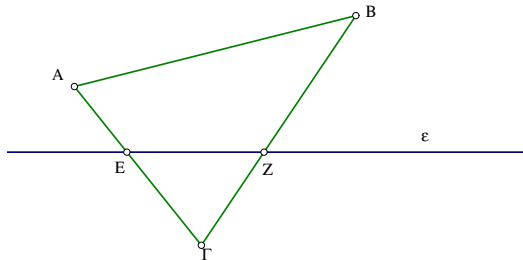
Πρόταση 1.6.1 Εάν το Δ είναι ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τότε η $A\Delta$ τέμνει την απέναντι πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου.



Σχήμα 32: Τομή απέναντι πλευράς

Απόδειξη: Πάρε σημείο E στο ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$. Θεώρησε κατόπιν το τρίγωνο $AB\Delta$ και την τέμνουσα GE . Κατά το Αξίωμα 1.6.3 η GE θα συναντά και μία δεύτερη πλευρά του τριγώνου $AB\Delta$. Επειδή η πλευρά $B\Delta$ αυτού του τριγώνου είναι εκτός της γωνίας XGA η GE θα συναντά την AB σε ένα σημείο Z . Θεώρησε τότε το τρίγωνο $B\Gamma Z$ και την ευθεία AE που συναντά την πλευρά του ΓZ . Κατά το 1.6.3 η AE θα συναντά και μία άλλη πλευρά του τριγώνου που δεν μπορεί να είναι η BZ , διότι τότε η AE θα συνέπιπτε με την BZ . Άρα η AE , που είναι η ίδια με την ευθεία $A\Delta$ θα συναντά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $B\Gamma Z$, που είναι και πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$, ο.ε.δ.

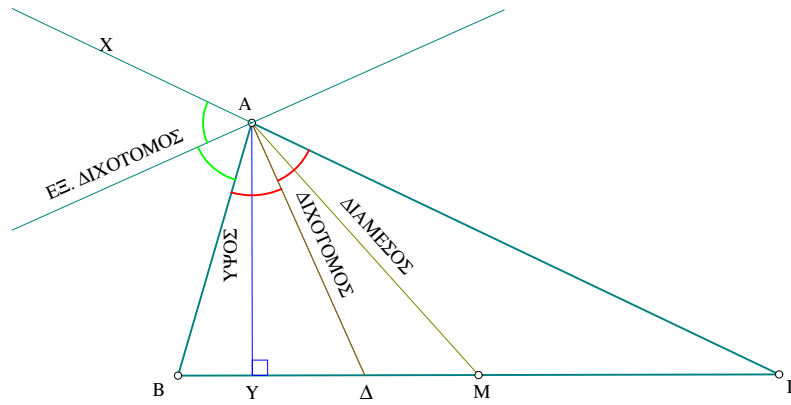
Άσκηση 1.6.1 Δίδεται ευθεία ε . Δείξε ότι η σχέση μεταξύ δύο σημείων A και B : (τα A και B περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε) είναι μεταβατική. Δηλαδή αν τα A και B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο και τα B και Γ είναι επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο τότε και τα A και Γ είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο.



Σχήμα 33: Το νόημα του αξιώματος -1.6.3

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο και ότι τα B, Γ επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο όμως ότι τα A, Γ δεν είναι. Τότε (Αξίωμα 1.2.5) υπάρχει σημείο E της ευθείας ε επί του $A\Gamma$ και μεταξύ των A και Γ . Με άλλα λόγια η ε τέμνει την $A\Gamma$. Επειδή η ε δεν περιέχει τα A, B, Γ και τέμνει την μία πλευρά του τριγώνου ($A\Gamma$) θα τέμνει κατά το Αξίωμα 1.6.3 και μία από τις άλλες δύο. Αν τέμνει την $B\Gamma$ σε σημείο Z , έχουμε άτοπο, διότι τότε τα B, Γ θα είναι σε διαφορετικές πλευρές της ε . Αν τέμνει την AB θα έχουμε ανάλογο άτοπο. Άρα η $A\Gamma$ δεν μπορεί να τέμνει την ε .

Διάμεσος του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του με τό μέσον της απέναντι πλευράς. **Διχοτόμος** του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά του και χωρίζει την γωνία της κορυφής σε δύο ίσες γωνίες. Συχνά ονομάζουμε διχοτόμο και ολόκληρη την ευθεία ή ημιευθεία που



Σχήμα 34: Διάμεσος, Διχοτόμος, Ύψος

διχοτομεί την γωνία του τριγώνου. **Εξωτερική γωνία** του τριγώνου λέγεται μία παραπληρωματική γωνία τριγώνου λ.χ. της A , που προκύπτει προεκτείνοντας μία από τις πλευρές του τριγώνου, λ.χ. την $ΑΓ$ (δηλαδή θεωρώντας την ευθεία $ΑΓ$), οπότε προκύπτει η $ΒΑΧ$ (σχήμα-34). **Εξωτερική διχοτόμος** τριγώνου λέγεται η διχοτόμος μιάς εξωτερικής γωνίας του. **Ύψος** του τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή του τριγώνου με ένα σημείο της απέναντι πλευράς της και είναι κάθετο στην πλευρά αυτή (την ύπαρξη του ύψους θα εξασφαλίσουμε λίγο αργότερα στην Παράγραφο 1.12). Όπως θα δούμε αργότερα, οι τρεις διαμέσοι του τριγώνου διέρχονται από κοινό σημείο (Πρόταση 2.8.1), οι τρεις διχοτόμοι διέρχονται από άλλο κοινό σημείο (Πρόταση 2.2.3) και τέλος τα τρία ύψη διέρχονται και αυτά από τρίτο κοινό σημείο (Πρόταση 2.8.3).

Οι διαμέσοι, τα ύψη και οι διχοτόμοι (εσωτερικές και εξωτερικές) τριγώνου αναφέρονται συχνά ως **Δευτερεύοντα στοιχεία** του τριγώνου.

Σχόλιο-2 Συχνά η γνώση των μηκών τριών από αυτά τα στοιχεία αρκεί για την ακριβή κατασκευή του τριγώνου. Για παράδειγμα, στην Άσκηση 2.13.9, θα δούμε ότι το τρίγωνο κατασκευάζεται εύκολα, όταν γνωρίζουμε τα τρία μήκη $|AY|$, $|AD|$ και $|AM|$, ύψους, διχοτόμου και διαμέσου από την ίδια κορυφή. Συνήθως, στις κατασκευές τριγώνων απαιτούμε την χρήση αποκλειστικά και μόνον του κανόνα και του διαβήτη. Ένα, σχετικά σύνθετο, πρόβλημα είναι να αποδείξουμε ότι μιά ορισμένη κατασκευή είναι αδύνατη (με κανόνα και διαβήτη). Για παράδειγμα, η κατασκευή του τριγώνου από το ύψος $|AY|$ και διάμεσο $|AM|$ από την ίδια κορυφή, αλλά διχοτόμο από μιά άλλη κορυφή και όχι την A , αποδεικνύεται αδύνατη ([Fur37, σ. 38]). Φυσικά, το να μην κατασκευάζεται το τρίγωνο με τα συγκεκριμένα δεδομένα μέσω κανόνα και διαβήτη, δεν σημαίνει ότι το τρίγωνο δεν κατασκευάζεται με άλλα μέσα. Έτσι, για παράδειγμα, δοθέντων τριών θετικών αριθμών υπάρχει ακριβώς ένα τρίγωνο που έχει αυτούς τους αριθμούς ως μήκη των διχοτόμων του. Ωστόσο το τρίγωνο αυτό δεν μπορεί να κατασκευασθεί με τον κανόνα και τον διαβήτη ([MP94], [Oxm08]).

Άσκηση 1.6.2 Δείξε ότι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιάς κορυφής τριγώνου είναι κάθετες ευθείες.

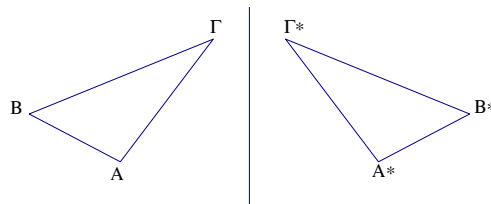
1.7 Η ισότητα σχημάτων

Κάθε σχήμα έχει έναν κανόνα που καθορίζει πότε είναι ίσο με ένα άλλο. Τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν το μήκος τους. Είναι ίσα τότε ακριβώς όταν έχουν το ίδιο μήκος. Οι γωνίες το ίδιο. Έχουν και αυτές το μέτρο τους. Είναι ίσες όταν έχουν ίσα μέτρα. Στα τρίγωνα η ισότητα περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία. Ο ορισμός της ισότητας απαιτεί από δύο τρίγωνα να έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές και ίσες αντίστοιχες γωνίες. Το Αξίωμα 1.6.2 δίνει το βασικό κριτήριο ισότητας τριγώνων. Λέει ότι όταν δύο τρίγωνα έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες, τότε είναι ίσα. Δηλαδή και οι αντίστοιχες γωνίες τους (οι απέναντι από τις ίσες πλευρές) θα είναι και αυτές ίσες. Παρακάτω (Παράγραφος 1.9) θα δούμε και άλλα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Όσο πιο πολύπλοκο είναι το σχήμα, τόσο περισσότερα στοιχεία του πρέπει να συγκρίνουμε για να καταλήξουμε ότι είναι ίσο με ένα άλλο.

Ο Ευκλείδης στα στοιχεία του δεν χρονοτριβεί στην ανάλυση της έννοιας της ισότητας. Υιοθετεί μία απλοϊκή έννοια ισότητας, κατά την οποία δύο σχήματα είναι ίσα, τότε και μόνον όταν μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα και να το τοποθετήσουμε πάνω στο άλλο, έτσι ώστε τα δύο σχήματα να συμπίσουν ακριβώς. Τι θα πεί όμως μετατοπίσουμε; Η έννοια της μετατόπισης είναι σύνθετη. Θεμελιώνεται με την έννοια του *Μετασχηματισμού*, για την οποία, παρόλη την σημασία της, δεν θα μιλήσουμε σε αυτό το μάθημα.

Εμείς θεμελιώνουμε την ισότητα δίνοντας για κάθε σχήμα τον κανόνα του, πότε είναι ίσο με ένα άλλο. Ωστόσο δεν βλάπτει να σκεφτόμαστε και με τον τρόπο του Ευκλείδη. Στο επίπεδο, δύο σχήματα που είναι ίσα με τον κανόνα ισότητάς τους, είναι ίσα και κατά την έννοια του Ευκλείδη, μέσω μετατόπισης και σύμπτωσης. Και αντίστροφα αν μπορούν να τοποθετηθούν ώστε να συμπίσουν, τότε είναι ίσα και με τον κανόνα που δίνουμε σε κάθε περίπτωση. Το πρόβλημα είναι ότι για να αποδείξουμε αυτήν την ισοδυναμία, πρέπει να μελετήσουμε διάφορα ζητήματα που η καταγραφή τους θα διόγκωνε ακόμη περισσότερο την ύλη του μαθήματος. Περιοριζόμαστε λοιπόν στην παραδοχή αυτής της αρχής του Ευκλείδη. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το επίπεδο είναι σαν μία πλαστική διαφάνεια και τα σχήματα μπορούν να κοπούν από το μέρος που έχουν αρχικά σχεδιασθεί και να μετατεθούν στο μέρος που είναι το άλλο σχήμα, να τοποθετηθούν πάνω σε αυτό και να συμπίσουν.

Σημειώνω μία ιδιαιτερότητα της έννοιας της ισότητας που φανερώνεται στο επόμενο σχήμα και έχει να κάνει με τον λεγόμενο *Προσανατολισμό* των σχημάτων. Τα δύο τρίγωνα είναι



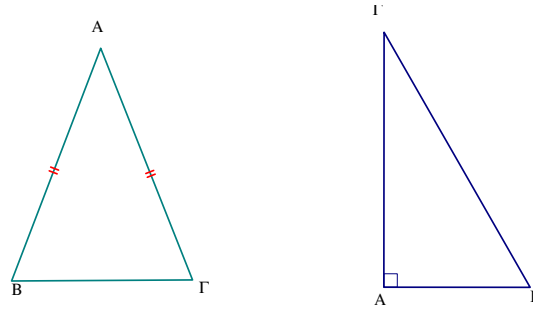
Σχήμα 35: Ίσα αλλά διαφορετικά προσανατολισμένα

ίσα με την δική μας έννοια. Έχουν όμως την ιδιαιτερότητα ότι η διαδοχή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma$ είναι κατά την φορά του ρολογιού, ενώ η διαδοχή $A^* \rightarrow B^* \rightarrow \Gamma^*$ είναι αντίθετη της φοράς του ρολογιού. Για να κάνουμε το $AB\Gamma$ να συμπίσει με το $A^*B^*\Gamma^*$ με την έννοια της μετατόπισης πρέπει να το κόψουμε και να το γυρίσουμε από την πίσω μεριά, με τον τρόπο που γυρίζουμε μία σελίδα και πάμε στην από πίσω της. Τα πράγματα γίνονται λίγο πιο σύνθετα στο χώρο, όπου παρουσιάζεται το ανάλογο φαινόμενο και εκεί δεν υπάρχει κάτι έξω από το χώρο για να κάνουμε αυτό το αναποδογύρισμα του προσανατολισμού. Εκεί η έννοια της ισότητας με

τον τρόπο που την ορίζουμε, για κάθε σχήμα ξεχωριστά, δεν είναι ισοδύναμη με την έννοια της σύμπτωσης (δες λ.χ. το σχόλιο στην Παράγραφο 8.2). Ο τρόπος, λοιπόν, που χειριζόμαστε την ισότητα είναι πιο ασφαλής από αυτόν της μετατόπισης, όσο δεν μπαίνουμε στις λεπτομέρειες του ακριβούς ορισμού αυτής της έννοιας.

Σχόλιο Και ένα σχόλιο για την ορολογία. Συχνά για την ισότητα δύο σχημάτων κάνουμε αντιστοιχίσεις μεταξύ των κορυφών τους, βάζοντας σε αντίστοιχες κορυφές το ίδιο γράμμα με κάποιο δείκτη ή τόνο ή άστρο ή άλλο σημάδι. Έτσι όταν λέμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ είναι ίσα διότι έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες, εννοούμε ότι η πλευρά AB είναι αντίστοιχη της A^*B^* , η $B\Gamma$ της $B^*\Gamma^*$ κτλ. Τον κανόνα αυτό ακολουθούμε και στα σχήματα του χώρου. Το να μπορούμε να βάλουμε τα ίδια γράμματα στα υποψήφια για ισότητα σχήματα είναι το πρώτο βήμα για να αποδείξουμε την ισότητά τους, που συνήθως, ανάγεται στην ισότητα αντίστοιχων και απλούστερων στοιχείων τους.

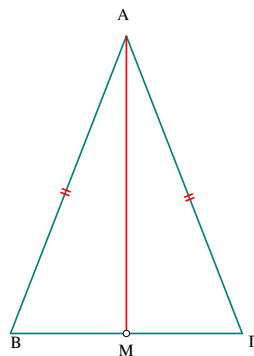
1.8 Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο



Σχήμα 36: Το ισοσκελές και το ορθογώνιο τρίγωνο

Ισοσκελές λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες. Οι δύο ίσες πλευρές λέγονται **Σκέλη** και η τρίτη πλευρά **Βάση** του ισοσκελούς. Η κορυφή στην οποία συντρέχουν τα σκέλη λέγεται **Κορυφή του ισοσκελούς**. **Ορθογώνιο τρίγωνο** λέγεται το τρίγωνο που έχει μία γωνία του ορθή. Οι πλευρές που ορίζουν αυτήν την γωνία λέγονται **Κάθετες πλευρές** του ορθογωνίου. Η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **Υποτείνουσα** του ορθογωνίου τριγώνου.

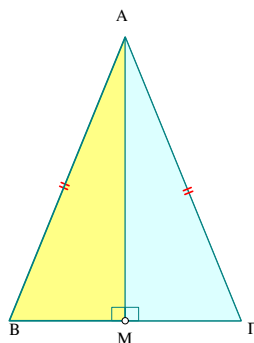
Πρόταση 1.8.1 Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ($|AB| = |A\Gamma|$) οι παρά την βάση γωνίες (στα B και Γ) είναι ίσες.



Σχήμα 37: Το θεώρημα του ισοσκελούς

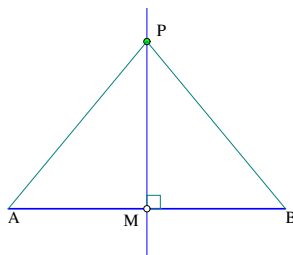
Απόδειξη: Θεώρησε τα δύο τρίγωνα ABM και AMΓ που σχηματίζονται φέρνοντας την AM, όπου M το μέσον της βάσης BΓ. Τα δύο τρίγωνα αυτά έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες: $|AB| = |A\Gamma|$ εξ υποθέσεως, $|BM| = |M\Gamma|$ διότι το M είναι μέσον της BΓ και τέλος την AM κοινή. Κατά το Αξίωμα 1.6.2 των τριγώνων τα δύο αυτά τρίγωνα θα είναι ίσα, άρα και οι γωνίες τους στα B και Γ θα είναι αντίστοιχα ίσες ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.8.1 Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ($|AB| = |A\Gamma|$) η ευθεία που ενώνει την κορυφή του με το μέσον M της απέναντι πλευράς διχοτομεί την γωνία της κορυφής.



Σχήμα 38: Ισοσκελούς διαίρεση σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα

Πόρισμα 1.8.2 Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ($|AB| = |AG|$) η ευθεία που ενώνει την κορυφή του με το μέσον M της απέναντι πλευράς είναι κάθετος στην βάση και χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα (AMB και $AMΓ$).



Σχήμα 39: Η μεσοκάθετος του AB

Μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB ονομάζουμε την ευθεία που είναι κάθετος στο μέσον του ευθυγράμμου τμήματος. Το προηγούμενο πόρισμα μπορεί επίσης να διατυπωθεί στην επόμενη μορφή.

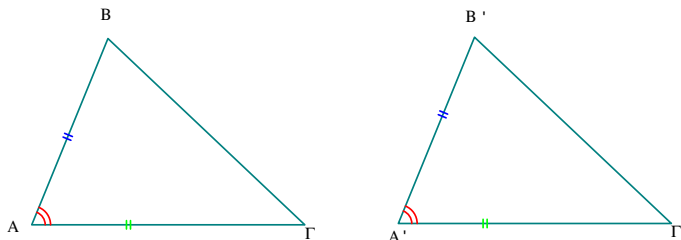
Πόρισμα 1.8.3 Για κάθε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με βάση AB , η κορυφή του $Γ$ ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Ισοδύναμη επίσης είναι και η διατύπωση:

Πόρισμα 1.8.4 Κάθε σημείο $Γ$ που ισαπέχει από τα σημεία A και B ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB .

1.9 Κριτήρια ισότητας τριγώνων

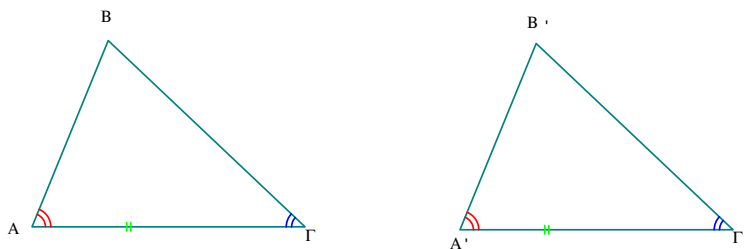
Εκτός από το βασικό Αξίωμα 1.6.2 ισότητας τριγώνων που αναφέρεται και ως **ΠΠΠ-κριτήριο** (πλευρά-πλευρά-πλευρά κριτήριο) ισότητας, ισχύουν και άλλα δύο κριτήρια ισότητας που προκύπτουν ως θεωρήματα βάσει του ΠΠΠ-κριτηρίου. Αυτά αναφέρονται ως **ΠΓΠ-κριτήριο ισότητας** (πλευρά-γωνία-πλευρά κριτήριο) και **ΓΠΓ-κριτήριο** ισότητας (γωνία-πλευρά-γωνία κριτήριο).



Σχήμα 40: ΠΓΠ κριτήριο

Πρόταση 1.9.1 (ΠΓΠ-κριτήριο) Δύο τμήματα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ που έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες ($|AB| = |A'B'|$, $|AG| = |A'\Gamma'|$) και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες επίσης ίσες ($\angle BAG = \angle B'A'\Gamma'$) είναι ίσα.

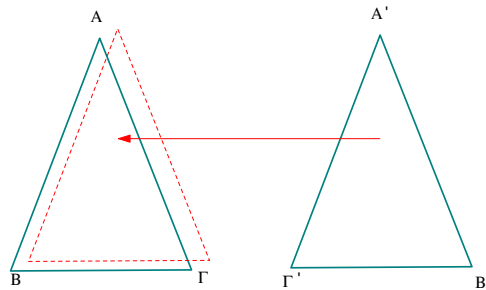
Απόδειξη: Τοποθέτησε την γωνία A' πάνω στην A έτσι ώστε να συμπίσουν οι ημιευθείες AB και $A'B'$ καθώς και οι AG και $A'\Gamma'$. Αυτό είναι δυνατόν λόγω της υποτιθέμενης ισότητας των γωνιών στα A και A' αντιστοίχως. Λόγω της επίσης υποτιθέμενης ισότητας των μηκών $|AB| = |A'B'|$ θα συμπίσουν και τα B και B' (σύμφωνα με το Αξίωμα 1.3.3) και για τον ίδιο λόγο θα συμπίσουν και τα Γ και Γ' . Συνεπώς θα συμπίσουν και οι πλευρές $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ και επομένως τα μήκη τους θα είναι ίσα $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$. Η αλήθεια της πρότασης προκύπτει εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο ο.ε.δ.



Σχήμα 41: ΓΠΓ κριτήριο

Πρόταση 1.9.2 (ΓΠΓ-κριτήριο) Δύο τμήματα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ που έχουν δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες ($\angle AB\Gamma = \angle A'B'\Gamma'$ και $\angle B\Gamma A = \angle B'\Gamma' A'$) και τις περιεχόμενες σε αυτές πλευρές επίσης ίσες ($|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$) είναι ίσα.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Τοποθέτησε τα τρίγωνα έτσι ώστε να συμπίσουν οι $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$, καθώς και οι γωνίες στα (B, B') και (Γ, Γ') . Αυτό είναι δυνατόν λόγω του αξιώματος 1.4.2. Τότε θα συμπίσουν οι ευθείες $(BA, B'A')$ καθώς και οι $(\Gamma A, \Gamma'A')$, άρα θα συμπίσουν και οι τομές τους που ορίζουν αντίστοιχα τα A και A' . Από αυτή την σύμπτωση έπεται ότι $|BA| = |B'A'|$ και $|\Gamma A| = |\Gamma'A'|$. Η αλήθεια της πρότασης προκύπτει εφαρμόζοντας πάλι το ΠΠΠ-κριτήριο ο.ε.δ.

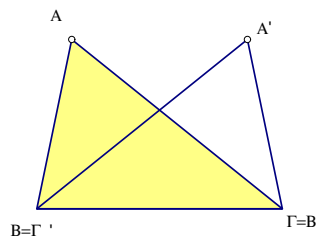


Σχήμα 42: Ισες γωνίες παράγουν ισοσκελές

Πρόταση 1.9.3 Αν το τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές.

Απόδειξη: Θεώρησε ένα τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ ίσο προς το $AB\Gamma$ και εφάρμοσε το ΓΠΓ-κριτήριο. Τα δύο τρίγωνα έχουν ίσες τις πλευρές $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ αντίστοιχα και τις γωνίες $AB\Gamma$ και $A'\Gamma'B'$ ίσες καθώς και τις $ΑΓΒ$ και $A'\Gamma'B'$ ίσες, άρα είναι ίσα. Η πλευρά $A\Gamma$ που είναι απέναντι στην γωνία $AB\Gamma$ θα είναι ίση με την πλευρά $A'B'$ που είναι απέναντι στην ίση προς την προηγούμενη γωνία $A'\Gamma'B'$. Όμως εκ κατασκευής η $A'B'$ είναι ίση προς την AB , άρα συνολικά οι AB και $A\Gamma$ θα είναι ίσες ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η απόδειξη αυτή (οφείλεται στον Πάππο) έχει ένα λεπτό και παράδοξο σημείο όπου δύο ίσα τρίγωνα ξανα-αποδεικνύονται ίσα. Γίνεται εδώ ένα παιχνίδι με τον **προσανατολισμό** του τριγώνου. Το $A'B'\Gamma'$ είναι μεν ίσο με το $AB\Gamma$, αλλά έχει τοποθετηθεί με αντίστροφο προσανατολισμό πάνω στο $AB\Gamma$. Το επόμενο σχήμα δείχνει την διαφορά με ένα μη-ισοσκελές $AB\Gamma$. Τα δύο τρίγωνα ενώ είναι ίσα, τοποθετούμενα με αυτόν τον τρόπο δεν



Σχήμα 43: Επανατοποθέτηση ίσου τριγώνου με αντίθετο προσανατολισμό

συμπίπτουν εν γένει. Το νόημα της πρότασης είναι ότι τα δύο τρίγωνα τοποθετούμενα κατ' αυτόν τον τρόπο συμπίπτουν τότε και μόνον, όταν είναι ισοσκελή.

Πόρισμα 1.9.1 Σημείο Γ ανήκει στην μεσοκάθετο ε του ευθυγράμμου τμήματος AB τότε και μόνον όταν ισαπέχει από τα σημεία A και B .

Απόδειξη: Στο Πρόγραμμα 1.8.4 είδαμε ότι κάθε σημείο Γ που ισαπέχει από τα A και B είναι επί της μεσοκαθέτου. Για το αντίστροφο, παίρνουμε το Γ επί της μεσοκαθέτου και δείχνουμε ότι τα τρίγωνα ΓMA και ΓMB είναι ίσα (M το μέσον του AB) εφαρμόζοντας το ΠΓΠ-κριτήριο, ο.ε.δ.

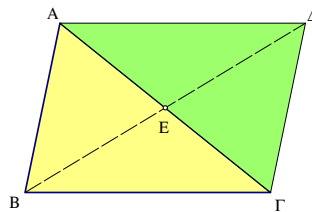
Σχόλιο-2 Το τελευταίο πόρισμα χαρακτηρίζει την μεσοκάθετο ως **Γεωμετρικό τόπο** σημείων που έχουν μία ορισμένη ιδιότητα. Λέμε συχνά: ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την τάδε ιδιότητα είναι το δείνα σύνολο. Έτσι λοιπόν θα λέμε στο εξής: ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο σημεία A και B είναι η μεσοκάθετος του AB . Όπως στην περίπτωση της μεσοκαθέτου έτσι και στην γενική περίπτωση ενός γεωμετρικού τόπου πρέπει να δείξουμε δύο πράγματα: α) ότι κάθε σημείο του γεωμετρικού τόπου έχει την τάδε ιδιότητα, β) ότι αν ένα σημείο έχει την τάδε ιδιότητα τότε ανήκει αναγκαστικά στον γεωμετρικό τόπο.

Άσκηση 1.9.1 Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν αντίστοιχες κάθετες πλευρές ίσου μήκους είναι ίσα.

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το ΠΓΠ κριτήριο με αντίστοιχες γωνίες τις ορθές των δύο τριγώνων.

Άσκηση 1.9.2 Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία κάθετη και την προσκείμενη οξεία αντίστοιχα ίση είναι ίσα.

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το ΓΠΓ κριτήριο.



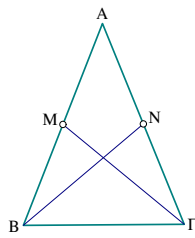
Σχήμα 44: Προέκταση της διαμέσου

Άσκηση 1.9.3 Έστω E το μέσον της πλευράς AG του τριγώνου ABG . Προέκτεινε την BE (διάμεσο) κατά το διπλάσιο μέχρι το Δ . Δείξε ότι το τρίγωνο $AG\Delta$ είναι ίσο με το AGB .

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα με το ΠΓΠ-κριτήριο ότι τα τρίγωνα AEB και GED είναι ίσα. Δείξε ανάλογα ότι και τα BEG και AED είναι ίσα. Συμπέρανε κατόπιν με το ΠΠΠ-κριτήριο ότι τα ABG και $AG\Delta$ είναι ίσα.

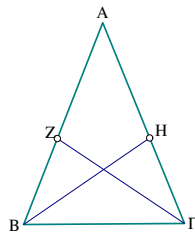
Άσκηση 1.9.4 Έστω ABG ισοσκελές τρίγωνο με ίσες γωνίες στις κορυφές B και Γ . Δείξε ότι οι διάμεσοι από τις κορυφές αυτές είναι ίσες. Δείξε επίσης ότι και οι διχοτόμοι από τις κορυφές αυτές είναι ίσες.

Υπόδειξη: Έστω ότι M και N είναι τα μέσα των BA και GA αντιστοίχως. Τα τρίγωνα BMG και BNG είναι ίσα ως έχοντα α) την BG κοινή, β) τις BM και GN ίσες ως μισές ίσων πλευρών, γ) τις γωνίες στα B και Γ ίσες. Εφαρμόζεται λοιπόν το ΠΓΠ-κριτήριο ισότητας τριγώνων. Ανάλογη είναι και η απόδειξη για τις διχοτόμους, μόνο που αυτή την φορά εφαρμόζεται το ΓΠΓ-κριτήριο. Πράγματι, έστω ότι BH και ΓZ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών στα B και Γ



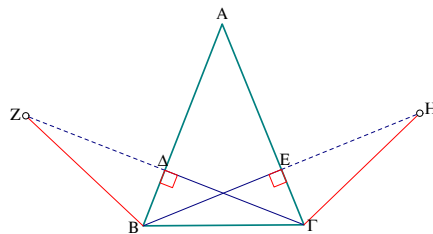
Σχήμα 45: Ίσες διάμεσοι

αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα $B\Gamma H$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα ως έχοντα α) την $B\Gamma$ κοινή, β) τις γωνίες στα B και Γ ίσες, γ) τις γωνίες $|HB\Gamma| = |Z\Gamma B|$ ως μισές ίσων γωνιών.



Σχήμα 46: Ίσες διχοτόμοι

Σχόλιο-3 Ισχύει και η αντίστροφη της προηγούμενης πρότασης, αλλά, στην μεν περίπτωση των διαμέσων χρειαζόμαστε μία ιδιότητά τους που θα μάθουμε αργότερα (δες Άσκηση 2.8.1), στις δε διχοτόμους η απόδειξη του αντιστρόφου αναφέρεται ως θεώρημα των Steiner-Lehmus και είναι απροσδόκητα δύσκολη ([Ste71, σ. II, 321], [CG67, σ. 14]). Για μία υπολογιστική απόδειξη δες Άσκηση 3.12.4.



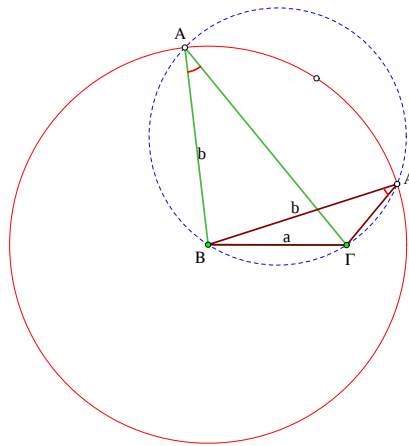
Σχήμα 47: Ίσα ύψη

Άσκηση 1.9.5 Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο με ίσες γωνίες στις κορυφές B και Γ . Δείξε ότι τα ύψη από τις κορυφές αυτές είναι ίσα.

Υπόδειξη: Έστω ότι BE και $\Gamma\Delta$ είναι τα ύψη αντίστοιχα από τις γωνίες B και Γ . Προέκτεινε την BE κατά το διπλάσιο έως το σημείο H και την $\Gamma\Delta$ κατά το διπλάσιο έως το Z . Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $HE\Gamma$ είναι ίσα ως έχοντα α) την $E\Gamma$ κοινή, β) τις γωνίες στο E ορθές και γ) τις πλευρές BE και EH ίσες εκ κατασκευής (ΠΓΠ-κριτήριο). Συνεπώς το τρίγωνο $B\Gamma H$ είναι ισοσκελές. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι και το $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές. Τα δύο αυτά ισοσκελή είναι και ίσα ως έχοντα α) την $B\Gamma$ κοινή, β) την BZ ίση της ΓH και γ) τις γωνίες τους στα

B και Γ ίσες ως διπλάσιες των B και Γ αντίστοιχα. Άρα οι ΓZ και BH , που είναι διπλάσιες των υψών θα είναι ίσες. Για την αντίστροφη αυτής της ιδιότητας δες την Άσκηση 1.10.2.

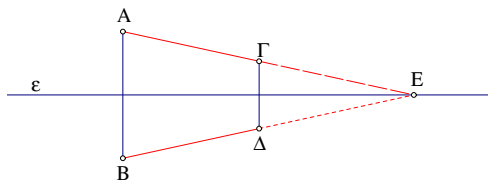
Σχόλιο-4 Αργότερα θα δούμε ότι υπάρχει και ένα ακόμη κριτήριο ισότητας τριγώνων που θα μπορούσε να ονομασθεί ΓΠΠ-κριτήριο. Κατ' αυτό αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν τις γωνίες τους $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ και τις πλευρές $a = |B\Gamma| = |B'\Gamma'| = a'$, τότε είναι ίσα. Σε αυτήν την περίπτωση τα τρίγωνα υποτίθεται ότι έχουν δύο γωνίες ίσες και μία πλευρά αντίστοιχα ίση της άλλης, αλλά η πλευρά αυτή είναι η *απέναντι* της α και όχι η προσκείμενη της α (όπως στο ΓΠΓ-κριτήριο). Αυτό ωστόσο ανάγεται στο ΓΠΓ-κριτήριο, διότι από την ισότητα των δύο γωνιών και την σχέση $\alpha + \beta + \gamma = 180$, που θα δείξουμε αργότερα, προκύπτει η ισότητα όλων των γωνιών των δύο τριγώνων. Το τελευταίο σχήμα δείχνει ότι δεν ισχύει



Σχήμα 48: Αμφίβολη περίπτωση

αυτό που θα μπορούσε να ονομασθεί ΠΠΓ-κριτήριο. Εν γένει (όταν το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο) υπάρχουν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $a = a', b = b'$ και $\alpha = \alpha'$. Και αυτό το σχήμα θα το αναλύσουμε παρακάτω, όταν θα έχουμε επαρκείς γνώσεις για τον κύκλο και τις ιδιότητές του.

Άσκηση 1.9.6 Δείξε ότι αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$ είναι ίσα τότε είναι ίσες και οι διαμέσοι/διχοτόμοι του $AB\Gamma$ με τις αντίστοιχες διαμέσους/διχοτόμους του $AB\Gamma'$.

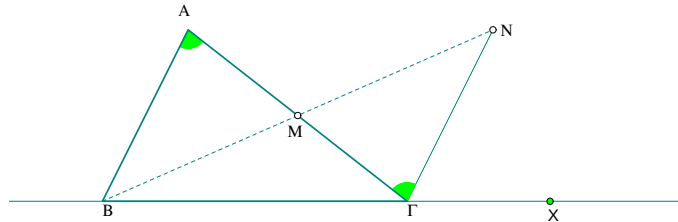


Σχήμα 49: Κοινή μεσοκάθετος

Άσκηση 1.9.7 Έστω ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ έχουν κοινή μεσοκάθετο ε και η AG συναντά την ε στο E . Δείξε ότι και η $B\Delta$ συναντά την ε στο E .

1.10 Σχετικά μεγέθη γωνιών τριγώνου

Πρόταση 1.10.1 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ η παραπληρωματική κάθε γωνίας είναι μεγαλύτερη εκάστης των δύο άλλων γωνιών.

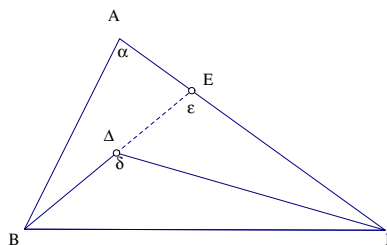


Σχήμα 50: Σύγκριση γωνιών τριγώνου

Απόδειξη: Ας δείξουμε ότι η $X\Gamma A$ (σχήμα 50), που είναι παραπληρωματική της Γ είναι μεγαλύτερη της γωνίας A . Έστω M το μέσον της $A\Gamma$ και N επί της ημιευθείας BM , έτσι ώστε $|BM| = |MN|$. Τα τρίγωνα ABM και ΓNM έχουν: α) τις γωνίες AMB και ΓMN ίσες ως κατά κορυφήν, β) τις πλευρές AM και MG ίσες διότι το M είναι το μέσον της $A\Gamma$, γ) τις πλευρές MB και MN ίσες εκ κατασκευής. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το ΠΓΠ-κριτήριο ισότητας (Πρόταση 1.9.1), τα τρίγωνα είναι ίσα. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι η γωνία BAG είναι ίση με την AGN . Η τελευταία όμως είναι μικρότερη της AGX διότι το N είναι στο εσωτερικό της AGX . Ανάλογα δείχνουμε και ότι η γωνία $AB\Gamma$ είναι μικρότερη της AGX ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Συχνά η γωνία AGX αναφέρεται ως **Εξωτερική του τριγώνου** (δες Παράγραφο 1.6) και το θεώρημα παίρνει την μορφή: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη εκάστης των εντός και απέναντι.

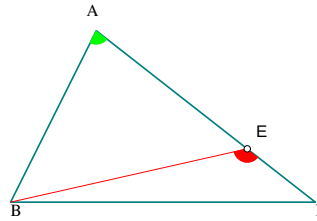
Πρόταση 1.10.2 Έστω ότι το σημείο Δ είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε η γωνία $B\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερη της BAG .



Σχήμα 51: $\alpha < \varepsilon < \delta$

Απόδειξη: Προέκτεινε μία από τις πλευρές της εσωτερικής γωνίας λ.χ. την $B\Delta$ και όρισε το σημείο τομής της E με την AG . Η γωνία $\varepsilon = |\angle BE\Gamma| > \alpha = |\angle BAG|$ ως εξωτερική και απέναντι της α στο τρίγωνο ABE . Παρόμοια και $\delta = |\angle B\Delta\Gamma| > \varepsilon$. Συνολικά λοιπόν $\delta > \alpha$, ο.ε.δ.

Πρόταση 1.10.3 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά ευρίσκεται μεγαλύτερη γωνία.



Σχήμα 52: Μεγαλύτερη γωνία απέναντι μεγαλύτερης πλευράς

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η πλευρά AG είναι μεγαλύτερη της AB . Τότε υπάρχει σημείο E μεταξύ του A και του Γ έτσι ώστε $|AE| = |AB|$ (Αξίωμα 1.3.3, Άσκηση 1.3.1). Το τρίγωνο BAE που σχηματίζεται είναι ισοσκελές και κατά το προηγούμενο θεώρημα η γωνία $|ABE| = |AEB| > |AGB|$. Επίσης $|AB\Gamma| > |ABE|$ διότι το E είναι στο εσωτερικό της γωνίας $AB\Gamma$. Συνολικά λοιπόν $|AB\Gamma| > |AGB|$, ο.ε.δ.

Πρόταση 1.10.4 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ απέναντι από την μεγαλύτερη γωνία ευρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά.

Απόδειξη: Διά της εις άτοπον απαγωγής. Υπόθεσε λοιπόν ότι στο $AB\Gamma$ η γωνία $\alpha > \beta$ και όμως $a \leq b$. Αποκλείεται $a = b$ διότι τότε θα είχαμε και $\alpha = \beta$ (Πρόταση 1.8.1), αντίθετα με την υπόθεσή μας. Αποκλείεται όμως και $a < b$ διότι τότε, κατά την προηγούμενη πρόταση, θα έπρεπε να ισχύει και $\alpha < \beta$, που είναι πάλι αντίθετο με την υπόθεσή μας. Πρέπει λοιπόν να ισχύει $a > b$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.1 Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο γωνιών του είναι μικρότερο του 180.

Απόδειξη: Έστω α, β, γ οι γωνίες του τριγώνου. Κατά την Πρόταση 1.10.1 κάθε μία από τις α, β είναι μικρότερη της $180 - \gamma$: άρα $\alpha + \gamma < 180, \beta + \gamma < 180$. Ανάλογα αποδεικνύεται και η $\alpha + \beta < 180$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.2 Ένα τρίγωνο έχει το πολύ μία αμβλεία γωνία.

Απόδειξη: Αν είχε δύο αμβλείες λ.χ. την α και β τότε θα ήταν $\alpha + \beta > 180$, άτοπο, ο.ε.δ.

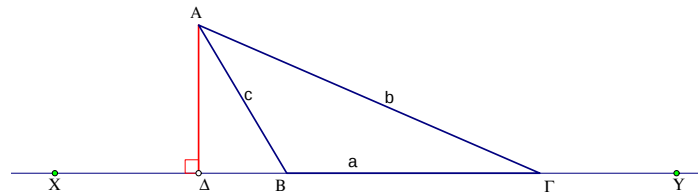
Πόρισμα 1.10.3 Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι δύο ίσες γωνίες του είναι οξείες.

Απόδειξη: Αν οι α και β ήταν ίσες και αμβλείες ή ορθές τότε $\alpha + \beta \geq 180$, άτοπο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.4 Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει τις άλλες δύο γωνίες του οξείες.

Απόδειξη: Αν η $\alpha = 90$ και β και γ είναι οι άλλες γωνίες του ορθογωνίου, τότε η εξωτερική της α είναι πάλι 90 και είναι μεγαλύτερη και από την α και από την β , ο.ε.δ.

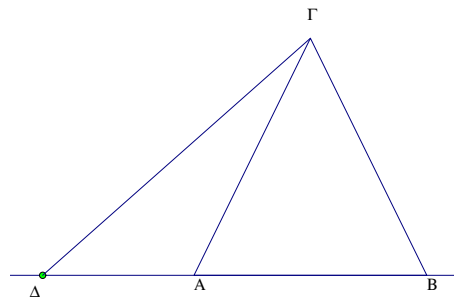
Πόρισμα 1.10.5 Έστω ότι η $A\Delta$ είναι κάθετη στην ευθεία XY , όπου Δ σημείο της XY . Τότε τα σημεία B, Γ της ευθείας ικανοποιούν $|B\Delta| < |\Gamma\Delta|$ τότε και μόνον, όταν $|BA| < |\Gamma A|$.



Σχήμα 53: Απόσταση από ίχνος καθέτου

Απόδειξη: Η γωνία ΔBA είναι οξεία διότι είναι γωνία διαφορετική της ορθής του τριγώνου $AB\Delta$ (Πόρισμα 1.10.4). Ανάλογα και η γωνία ΔGA είναι οξεία. Υπόθεσε τώρα ότι $|B\Delta| < |\Gamma\Delta|$. Τότε στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το Γ βρίσκεται στην προέκταση της ΔB προς το B και η γωνία στο B είναι αμβλεία και στο Γ οξεία. Άρα η απέναντι της αμβλείας πλευρά $A\Gamma$ θα είναι μεγαλύτερη της απέναντι της οξείας AB . Για το αντίστροφο υπόθεσε ότι $|BA| < |\Gamma A|$ όμως $|B\Delta| > |\Gamma\Delta|$. Προκύπτει άτοπο, διότι κατά το προηγηθέν μέρος της απόδειξης η $|\Gamma\Delta| < |B\Delta|$ συνεπάγεται την $|\Gamma A| < |BA|$, αντίθετα με την υπόθεση. Παρόμοια σε άτοπο καταλήγει και η υπόθεση ότι $|BA| < |\Gamma A|$ όμως $|B\Delta| = |\Gamma\Delta|$, διότι η τελευταία συνεπάγεται ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ θα είναι ίσα. Άρα όταν ισχύει η $|BA| < |\Gamma A|$ θα πρέπει να ισχύει και η $|B\Delta| < |\Gamma\Delta|$, ο.ε.δ.

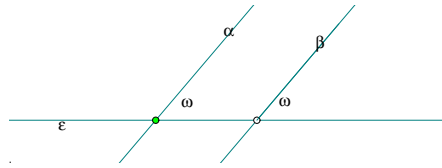
Σχόλιο-2 Το τελευταίο πόρισμα είναι ισοδύναμο με το ότι το μήκος $|AB|$ της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta B$ είναι αύξουσα συνάρτηση του μήκους της καθέτου $|\Delta B|$, όταν η άλλη κάθετος $A\Delta$ μένει σταθερά.

Σχήμα 54: $|\Gamma A| < |\Gamma\Delta|$

Πόρισμα 1.10.6 Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με ίσες γωνίες στα A και B . Θεώρησε σημείο Δ επί της προεκτάσεως του ευθυγράμμου τμήματος AB . Η $\Gamma\Delta$ είναι μεγαλύτερη του ΓA .

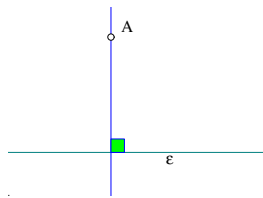
Πόρισμα 1.10.7 Αν οι ευθείες α, β προσπίπτουσες επί της ε σχηματίζουν τις ίδιες γωνίες από την ίδια μεριά της ευθείας τότε είναι παράλληλες. Ειδικά δύο κάθετες επί της αυτής ευθείας είναι παράλληλες.

Απόδειξη: Αν δεν ήταν παράλληλες και τεμνότουσαν σε σημείο Γ , τότε θα σχημάτιζαν τρίγωνο με άθροισμα γωνιών στις κορυφές τις διαφορετικές από το Γ : $\omega + (180 - \omega) = 180$, άτοπο (Πόρισμα 1.10.1), ο.ε.δ.

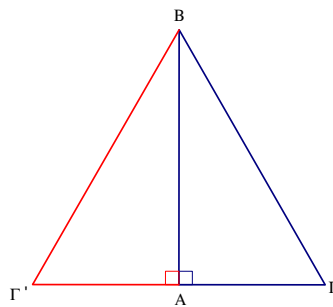
Σχήμα 55: Ευθείες προσπίπτουσες υπό γωνίαν ω

Πόρισμα 1.10.8 Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται το πολύ μία κάθετος επί την ε .

Απόδειξη: Αν υπήρχαν δύο διαφορετικές κάθετες από το A , τότε θα σχημάτιζαν τρίγωνο και οι δύο γωνίες του στις κορυφές τις διαφορετικές από το A θα είχαν άθροισμα $90+90=180$, άτοπο (Πόρισμα 1.10.1), ο.ε.δ.

Σχήμα 56: Μία μόνο κάθετος από το A

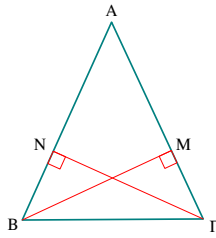
Άσκηση 1.10.1 Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.



Σχήμα 57: Ίσα ορθογώνια τρίγωνα

Υπόδειξη: Τοποθέτησε τα δύο τρίγωνα έτσι ώστε να συμπίσουν οι δύο ίσες κάθετες πλευρές με το ευθύγραμμο τμήμα AB , τα δε τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$ να είναι από τις δύο μεριές της AB με την ορθή στο A . Τα Γ , Γ' και A είναι τότε σε μία ευθεία και το B εξ υποθέσεως ισαπέχει από τα Γ και Γ' , άρα είναι στην μεσοκάθετο του $\Gamma\Gamma'$. Επειδή υπάρχει μία το πολύ κάθετος από το B προς την $\Gamma\Gamma'$ η AB θα συμπίπτει με αυτήν άρα και η τρίτη πλευρά $A\Gamma$ θα είναι ίση με την $A\Gamma'$.

Άσκηση 1.10.2 Αν δύο ύψη τριγώνου είναι ίσα τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



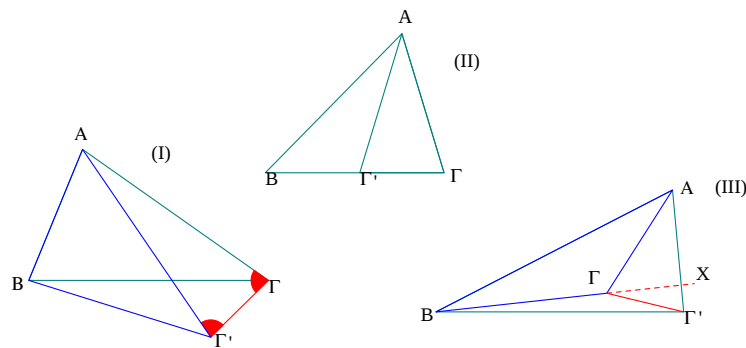
Σχήμα 58: Ίσα ύψη χαρακτηρίζουν τα ισοσκελή

Υπόδειξη: Έστω ότι τα δύο ύψη είναι τα BM και GN. Τότε τα τρίγωνα BMΓ και BNG είναι ορθογώνια έχουν κοινή υποτείνουσα την BΓ και τις κάθετες πλευρές BM και GN εξ υποθέσεως ίσες. Κατά την προηγούμενη άσκηση τα ορθογώνια είναι ίσα και επομένως οι γωνίες τους στα B και Γ θα είναι ίσες, άρα το τρίγωνο ABΓ θα είναι ισοσκελές (Πρόταση 1.9.3). Σημείωσε ότι η ιδιότητα αυτής της άσκησης είναι η αντίστροφη της περιεχομένης στην Άσκηση 1.9.5.

Πόρισμα 1.10.9 Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο κάθε μία από τις κάθετες πλευρές του είναι μικρότερη της υποτείνουσας.

Απόδειξη: Η υποτείνουσα είναι απέναντι από την ορθή γωνία που είναι μεγαλύτερη από τις δύο άλλες που είναι οξείες (Πόρισμα 1.10.4), άρα οι δύο κάθετες πλευρές που είναι απέναντι από τις οξείες γωνίες θα είναι μικρότερες της υποτείνουσας (Πρόταση 1.10.4), ο.ε.δ.

Πρόταση 1.10.5 Αν δύο τρίγωνα ABΓ και A'B'T' έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές προσκείμενες στις γωνίες στα A και A' ($|AB| = |A'B'|$, $|AG| = |A'G'|$) και οι γωνίες στα A και A' είναι άνισες ($|BAG| > |B'A'G'|$) τότε αντίστοιχα άνισες είναι και οι πλευρές τους ($|BG| > |B'G'|$).



Σχήμα 59: Μεγαλύτερη πλευρά απέναντι μεγαλύτερης γωνίας

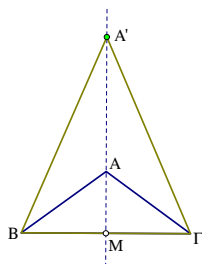
Απόδειξη: Τοποθέτησε τα τρίγωνα έτσι ώστε οι πλευρές AB και A'B' να συμπίπτουν και η A'Γ' να βρεθεί στο εσωτερικό της BAG. Τρεις είναι οι δυνατές περιπτώσεις για την θέση του Γ' ως προς την ευθεία BΓ (I-III στο προηγούμενο σχήμα). Ας δούμε την μία (την I του προηγούμενου σχήματος) και ας αφήσουμε τις άλλες δύο ως ασκήσεις. Σε αυτήν υποθέτουμε ότι το Γ' και το A είναι σε διαφορετικές μεριές (ημιεπίπεδα) της BΓ. Τότε συγκρίνοντας τις γωνίες του τριγώνου BΓΓ' έχουμε $|BΓΓ'| > |AΓΓ'| > |AΓΓ'| > |BΓΓ'|$,

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $|AG'| = |A'G'| > |AG|$. Αυτή κατά το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι $|BG| > |BG'|$ ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.10.10 Αν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές προσκείμενες στις γωνίες στα A και A' ($|AB| = |A'B'|, |AG| = |A'G'|$) και οι τρίτες πλευρές τους είναι άνισες ($|BG| > |B'G'|$) τότε αντίστοιχα άνισες είναι και οι γωνίες στα A και A' ($|BAG| > |B'A'G'|$).

Απόδειξη: Αν με τις υποθέσεις της πρότασης είχαμε $|BAG| \leq |B'A'G'|$ τότε θα προέκυπτε άτοπο. Πράγματι, αν ήταν $|BAG| = |B'A'G'|$, τότε κατά το ΠΓΠ-κριτήριο τα τρίγωνα θα ήταν ίσα και θα είχαμε $|BG| = |B'G'|$, άτοπο. Αν ήταν $|BAG| < |B'A'G'|$, τότε κατά την Πρόταση-1.10.5 θα είχαμε $|BG| < |B'G'|$, άτοπο, ο.ε.δ.

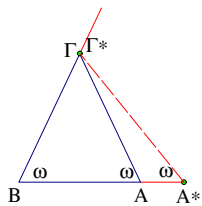
Άσκηση 1.10.3 Δείξε ότι από δύο ισοσκελή $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με την ίδια βάση, την μεγαλύτερη γωνία στην κορυφή του σχηματίζει αυτό που έχει μικρότερα σκέλη και αντίστροφα.



Σχήμα 60: Μεγαλύτερο ισοσκελές

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα ότι οι κορυφές τους που είναι στην μεσοκάθετο της βάσης $B\Gamma$ είναι πιο κοντά στο μέσον της M , όσο πιο μικρό είναι το σκέλος (Πόρισμα 1.10.5).

Άσκηση 1.10.4 Δείξε ότι δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ που έχουν ίσα σκέλη $|GA| = |GB| = |\Gamma^*A^*| = |\Gamma^*B^*|$ και ίσες γωνίες στην βάση, είναι ίσα.



Σχήμα 61: Ίσα ισοσκελή

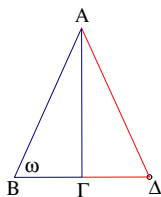
Υπόδειξη: Τοποθέτησέ τα έτσι ώστε να συμπίσουν οι γωνίες τους στα B και B^* , καθώς και οι $B\Gamma$ και $B^*\Gamma^*$, λόγω της ισότητας των μηκών τους. Αν τα A, A^* ήταν διαφορετικά και το A^* μακρύτερα του B απ' ό τι το A , θα είχαμε την εξωτερική ω του τριγώνου $AA^*\Gamma$ στο A μεγαλύτερη από την εσωτερική ω στο A^* ($\omega > \omega$), που είναι άτοπο. Άρα θα συμπίπτουν και τα A και A^* .

Άσκηση 1.10.5 Δοθέντος σημείου A εκτός ευθείας ε και γωνίας ω ($0 < \omega < 180$), δείξε ότι υπάρχει ένα το πολύ ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το A , βάση επί της ε και γωνίες στην βάση ίσες με ω .

Άσκηση 1.10.6 Δείξε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το άθροισμα των μηκών των υψών του είναι μικρότερο της περιμέτρου του.

Άσκηση 1.10.7 Δείξε ότι κάθε τρίγωνο, στο οποίο μία γωνία του ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων, χωρίζεται σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

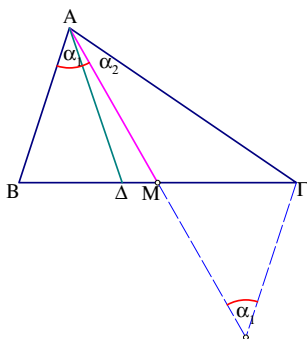
Άσκηση 1.10.8 Δείξε ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ που έχουν ίσες υποτείνουσες και μία γωνία ω , διαφορετική της ορθής, ίση είναι ίσα.



Σχήμα 62: Ίσα ορθογώνια τρίγωνα

Υπόδειξη: Προέκτεινε την κάθετο $B\Gamma$ που πρόσκειται στην ω κατά το διπλάσιο έως το Δ . Προκύπτει το ισοσκελές $AB\Delta$. Ανάλογα και το $A^*B^*\Delta^*$. Τα δύο ισοσκελή $AB\Delta$ και $A^*B^*\Delta^*$ έχουν ίσα σκέλη και ίσες γωνίες στην βάση, άρα είναι ίσα (Άσκηση 1.10.4). Τότε και τα μισά τους ορθογώνια $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ είναι ίσα.

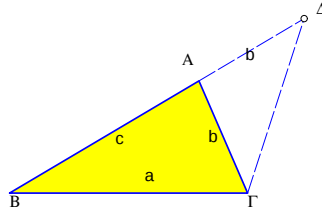
Άσκηση 1.10.9 Δείξε ότι η διάμεσος AM τριγώνου $AB\Gamma$ με άνισες πλευρές $AB, A\Gamma$, γέρνει προς την μεριά της μικρότερης. Επίσης από τις γωνίες BAM και MAG μεγαλύτερη είναι αυτή που πρόσκειται στην μικρότερη πλευρά. Συμπεράνε ότι το ίχνος της διχοτόμου $A\Delta$ είναι πιο κοντά σε εκείνη την κορυφή από τις B και Γ , που ανήκει επίσης στην μικρότερη πλευρά.



Σχήμα 63: Κλίση διαμέσου

1.11 Η τριγωνική ανισότητα

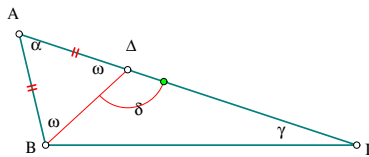
Πρόταση 1.11.1 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το άθροισμα των μηκών των δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο του μήκους της τρίτης πλευράς.



Σχήμα 64: Τριγωνική ανισότητα

Απόδειξη: Έστω ότι η $a = |B\Gamma|$ είναι η μεγαλύτερη από όλες τις πλευρές. Αρκεί να δείξουμε ότι $a < b + c$. Προς τούτο προέκτεινε την AB κατά τμήμα $A\Delta$ ίσο με AG . Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ που σχηματίζεται η γωνία $B\Gamma\Delta$ ($|B\Gamma\Delta| = |B\Gamma A| + |A\Gamma\Delta|$) είναι μεγαλύτερη της $\Gamma\Delta B$, άρα (Πρόταση 1.10.4) και η πλευρά $B\Delta$ με $|B\Delta| = b + c$ θα είναι μεγαλύτερη της $B\Gamma$ με $|B\Gamma| = a$, ο.ε.δ.

Πρόταση 1.11.2 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ η διαφορά των μηκών των δύο πλευρών του είναι μικρότερη του μήκους της τρίτης πλευράς.



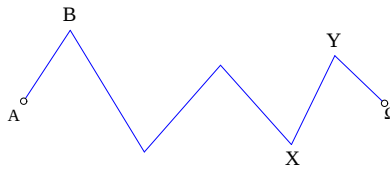
Σχήμα 65: Ανισότητα για την διαφορά

Απόδειξη: Έστω ότι η πλευρά AG είναι μεγαλύτερη της AB ($b > c$). Αρκεί να δείξουμε ότι $a > b - c$. Προς τούτο πάρε επί της AG τμήμα $A\Delta$ ίσο με το AB . Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ που σχηματίζεται η γωνία $B\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερη της $\Delta B\Gamma$. Τούτο διότι ως εξωτερική της βασικής γωνίας ω του ισοσκελούς $BA\Delta$ είναι αμβλεία (Πόρισμα 1.10.3). Και αν ένα τρίγωνο έχει μία αμβλεία αυτή είναι μεγαλύτερη από τις δύο άλλες που πρέπει να είναι οξείες (Πόρισμα 1.10.2). Έπεται ότι η πλευρά $B\Gamma$ που είναι απέναντι στην αμβλεία $\delta = B\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερη της $\Delta\Gamma$ που έχει μήκος $|\Delta\Gamma| = |AG| - |A\Gamma|$, ο.ε.δ.

Σχόλιο Τα δύο θεωρήματα συνολικά σημαίνουν ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι ανισότητες για τα μήκη των πλευρών:

$$|a - b| < c < a + b, \quad |b - c| < a < b + c, \quad |c - a| < b < c + a.$$

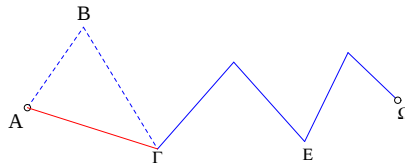
Τεθλασμένη γραμμή λέγεται μία ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων $AB, B\Gamma, \dots, XY, Y\Omega$ στην οποία κάθε ζεύγος διαδοχικών τμημάτων έχει ένα ακριβώς κοινό άκρο. **Μήκος** της



Σχήμα 66: Τεθλασμένη

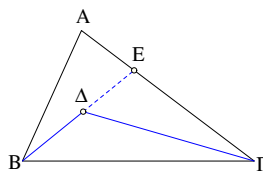
τεθλασμένης λέγεται το άθροισμα των μηκών $|AB| + |B\Gamma| + \dots + |\Upsilon\Omega|$. Την τεθλασμένη αυτή συμβολίζουμε με $AB\Gamma\dots\Upsilon\Omega$ και λέμε ότι **Ενώνει** τα σημεία A και Ω . Η τεθλασμένη λέγεται **Κλειστή**, όταν τα σημεία A και Ω συμπίπτουν.

Πόρισμα 1.11.1 Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Omega$ έχει μήκος $|A\Omega|$ μικρότερο από το μήκος κάθε τεθλασμένης που ενώνει το A με το Ω .



Σχήμα 67: Τεθλασμένης συντόμευση

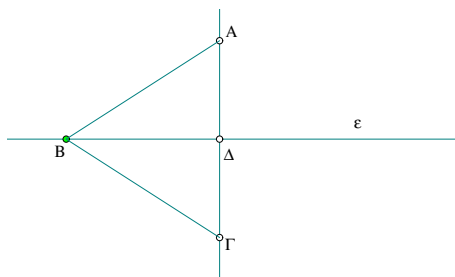
Απόδειξη: Δοθείσης της τεθλασμένης $(AB, B\Gamma, \dots, \Upsilon\Omega)$ και φέρνοντας την $A\Gamma$ σχηματίζεται το τρίγωνο $AB\Gamma$. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας η νέα τεθλασμένη που προκύπτει $(A\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta\epsilon, \dots, \Upsilon\Omega)$ έχει μικρότερο μήκος από το μήκος μ της αρχικής τεθλασμένης και μία πλευρά λιγότερη. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο μειώνουμε συνεχώς και το μήκος της τεθλασμένης και το πλήθος των πλευρών της. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στο τμήμα $A\Omega$ και η συνεχής μείωση του μήκους μέχρι το $|A\Omega|$ δίνει την ανισότητα $|A\Omega| < \mu$, ο.ε.δ.

Σχήμα 68: $|\Delta B| + |\Delta \Gamma| < |AB| + |\Delta \Gamma|$

Άσκηση 1.11.1 Έστω ότι το σημείο Δ είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι το άθροισμα $|\Delta B| + |\Delta \Gamma| < |AB| + |\Delta \Gamma|$.

Άσκηση 1.11.2 Έστω ότι το σημείο Δ είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι το άθροισμα των αποστάσεων του Δ από τις κορυφές του τριγώνου είναι μικρότερο της περιμέτρου και μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τριγώνου.

1.12 Η Κάθετος από σημείο



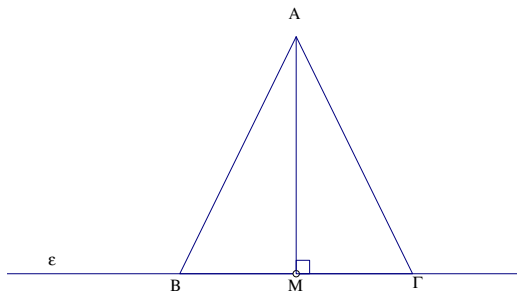
Σχήμα 69: Κάθετος από σημείο

Πρόταση 1.12.1 Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία ακριβώς κάθετος σε αυτήν.

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε την κάθετο μέσω ενός ισοσκελούς τριγώνου ως εξής. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο B στην ε και ορίζουμε την ευθεία BA . Στο ημιεπίπεδο, ως προς ε , το μη περιέχον το σημείο A ορίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ που σχηματίζει με την ε την ίδια γωνία που σχηματίζει και η BA (Αξίωμα 1.4.2). Επί της ευθείας αυτής παίρνουμε σημείο Γ έτσι ώστε $|B\Gamma| = |BA|$. Η ευθεία $A\Gamma$ είναι η ζητούμενη. Πράγματι, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$ εκ κατασκευής και η ευθεία ε συμπίπτει με την διχοτόμο της κορυφής του. Συνεπώς η ε θα είναι κάθετη στην βάση του $A\Gamma$ (Πόρισμα 1.8.2), ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Από το Πόρισμα 1.10.8 γνωρίζουμε ότι αν υπάρχει μία κάθετος από το A επί της ε , τότε αυτή θα είναι μοναδική. Το θεώρημα εδώ δείχνει την ύπαρξη μιάς τέτοιας καθέτου. Για την κατασκευή χρησιμοποιούμε την θεμελιώδη δυνατότητα κατασκευής μιάς ορισμένης γωνίας (Αξίωμα 1.4.2) με πλευρά μιά δοθείσα ευθεία και κορυφή ένα δοθέν σημείο της ευθείας. Από την ίδια θεμελιώδη δυνατότητα απορρέει και η ύπαρξη της καθέτου ε' επί ευθείας ε από σημείο A **επί** της ευθείας ε . Η πρακτική κατασκευή της καθέτου με τον κανόνα και τον διαβήτη θεμελιώνεται σε ιδιότητες του κύκλου και θα γίνει στα επόμενα.

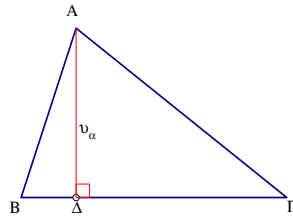
Πόρισμα 1.12.1 (Απόσταση σημείου από ευθεία) Έστω A σημείο εκτός ευθείας ε και AM η κάθετος επ' αυτήν. Για κάθε άλλο σημείο B της ευθείας η AB είναι μεγαλύτερη της AM .



Σχήμα 70: Απόσταση $|AM|$ του A από την ευθεία ε

Απόδειξη: Για κάθε άλλο σημείο B σχηματίζεται ορθογώνιο στο M τρίγωνο AMB με υποτείνουσα AB που είναι μεγαλύτερη της κάθετου AM (Πόρισμα 1.10.9), ο.ε.δ.

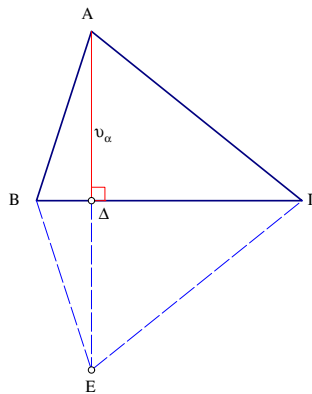
Το σημείο M ονομάζεται (κάθετος ή ορθογώνια) **Προβολή** του A επί της ευθείας. Το μήκος $|AM|$ της AM ονομάζουμε **απόσταση** του σημείου από την ευθεία. Η προβολή Δ



Σχήμα 71: Ύψος v_α από το A

της κορυφής A επί της απέναντι πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ ορίζει το λεγόμενο **Ύψος** $v_\alpha = |AD|$ του τριγώνου από το A . Ανάλογα ορίζονται και τα ύψη του τριγώνου από το B και το Γ .

Άσκηση 1.12.1 Προέκτεινε το ύψος v_α του τριγώνου $AB\Gamma$ από το A , προς την $B\Gamma$, κατά το διπλάσιο έως το σημείο E . Το τρίγωνο BEG που σχηματίζεται είναι ίσο με το $AB\Gamma$.

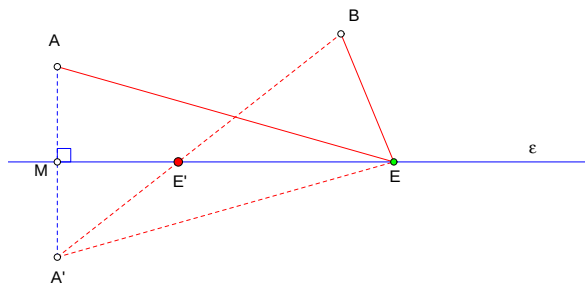


Σχήμα 72: Προεκτείνοντας το ύψος κατά το διπλάσιο

Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας το ΠΓΠ κριτήριο δείξε πρώτα ότι τα τρίγωνα $B\Delta A$ και $B\Delta E$ είναι ίσα και τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι επίσης ίσα. Κατόπιν εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο δείξε ότι και τα $AB\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα.

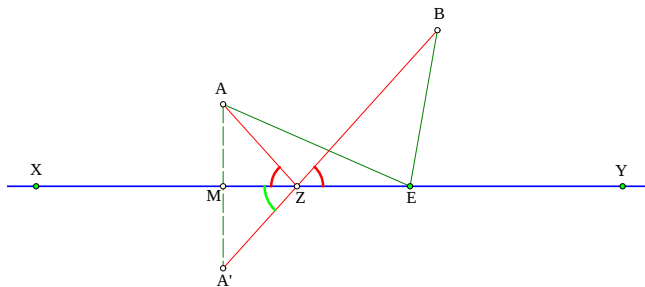
Άσκηση 1.12.2 Δίδονται δύο διαφορετικά σημεία A και B από την ίδια μεριά της ευθείας ε και σημείο E κινούμενο επ' αυτής. Να βρεθεί η θέση E' του E για την οποία το άθροισμα των αποστάσεων $|EA| + |EB|$ καθίσταται ελάχιστο.

Υπόδειξη: Πρόβαλε το A στην ευθεία ε στο M και προέκτεινε την AM προς το M κατά το διπλάσιο έως το σημείο A' . Εκ κατασκευής η ε είναι τότε η μεσοκάθετος του AA' και για κάθε σημείο E της ε οι EA και EA' είναι ίσες. Συνεπώς το άθροισμα $|EA| + |EB| = |EA'| + |EB|$.

Σχήμα 73: Ελαχιστοποίηση του $|EA| + |EB|$

Έστω E' το σημείο τομής της $A'B$ και της ε . Για τα σημεία E της ε τα διαφορετικά του E' , το τρίγωνο EBA' πάντοτε $|EA'| + |EB| \geq |A'B|$. Η ισότητα συμβαίνει μόνο στο σημείο E' . Αυτό είναι το σημείο στο οποίο ελαχιστοποιείται η $|EA| + |EB|$.

Άσκηση 1.12.3 Δίδονται δύο διαφορετικά σημεία A και B από την ίδια μεριά της ευθείας XY και σημείο E κινούμενο επ' αυτής. Να βρεθεί η θέση Z του E για την οποία οι γωνίες AZX και BZY είναι ίσες.

Σχήμα 74: Σημείο ανάκλασης Z από το A στο B

Υπόδειξη: Έστω ότι λύθηκε το πρόβλημα και βρέθηκε η θέση του Z . Προέκτεινε την ZB και πάρε επ' αυτής ZA' ίσο με το ZA . Το τρίγωνο ZAA' είναι ισοσκελές και η XY εκ κατασκευής είναι διχοτόμος της κορυφής του Z . Συνεπώς η AA' είναι κάθετος στην XY και την τέμνει στο μέσον M της AA' (Πόρισμα 1.8.2). Συνεπώς το A' προσδιορίζεται από τα δεδομένα φέρνοντας κάθετο AM από το A στην XY και προεκτείνοντας αυτήν προς το M κατά το διπλάσιο. Η τομή της $A'B$ με την XY προσδιορίζει το ζητούμενο σημείο.

Σχόλιο-2 Είναι αξιοσημείωτο ότι η λύση των δύο τελευταίων ασκήσεων ορίζεται από το ίδιο σημείο. Στην φυσική αυτό αντιστοιχεί στον νόμο της ανάκλασης, κατά τον οποίον μία ακτίνα που εκπέμπεται από το A , ανακλάται στην XY (κάτοπτρο) και η εξ ανακλάσεως ακτίνα που περνά από το B , έχει δύο ιδιότητες ταυτόχρονα: α) το μήκος $|AZ| + |ZB|$ είναι το ελάχιστο δυνατόν, β) η γωνία AZX (λέγεται γωνία πρόσπτωσης) (σχήμα 74) είναι ίση με την γωνία YZB (λέγεται γωνία ανάκλασης).

Άσκηση 1.12.4 Δείξε ότι, αν $|AB| < |AG|$, τότε η προβολή Δ της κορυφής A στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι πιο κοντά στο B από ότι στο Γ ($|B\Delta| < |\Delta\Gamma|$).

1.13 Η Παράλληλος από σημείο

Πρόταση 1.13.1 Από σημείο A εκτός ευθείας ϵ άγεται μία παράλληλος προς αυτήν.

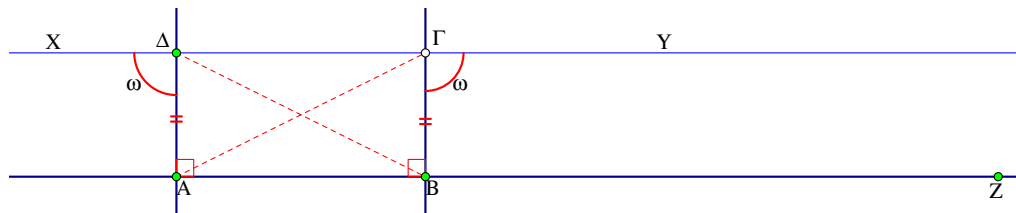


Σχήμα 75: Παράλληλος από σημείο

Απόδειξη: Κατά τα προηγούμενα υπάρχει η κάθετος AB επί την ϵ . Επίσης κατασκευάζεται η κάθετος δ της AB στο σημείο της B (δες το σχόλιο στην προηγούμενη παράγραφο). Οι ευθείες ϵ και δ , κατά το Πόρισμα 1.10.7, είναι παράλληλες, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η πρόταση αποφαίνεται για την ύπαρξη μίας παραλλήλου. Δεν λέει όμως τίποτε για την μοναδικότητα αυτής της παραλλήλου. Θα δούμε παρακάτω ότι εδώ απαιτείται μία βασική υπόθεση (αξίωμα) κατά την οποία δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει άλλη παράλληλος από την κατασκευασθείσα. Οι προτάσεις που αποδείξαμε μέχρι τούδε δεν χρειάστηκαν πουθενά την υπόθεση της μοναδικότητας της παραλλήλου. Στηρίζονται αποκλειστικά στις ιδιότητες (αξιώματα) για ευθείες, γωνίες και τρίγωνα που δεχθήκαμε ότι ισχύουν (στις παραγράφους 1.2-1.6). Τέτοιες προτάσεις αποτελούν το αντικείμενο της λεγόμενης **Απόλυτης Γεωμετρίας**. Οι προτάσεις της Απόλυτης Γεωμετρίας έχουν ισχύ τόσο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία όπου δεχόμαστε την μοναδικότητα της παραλλήλου όσο και στην λεγόμενη **Υπερβολική Γεωμετρία** στην οποία δεχόμαστε ότι υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες από σημείο A προς ευθεία ϵ . Μία τελευταία πρόταση της Απόλυτης Γεωμετρίας αποδεικνύουμε και στην επόμενη παράγραφο, για να περάσουμε κατόπιν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεχόμενοι την μοναδικότητα της παραλλήλου.

Άσκηση 1.13.1 Στα σημεία A και B μίας ευθείας ύψωσε δύο ίσες κάθετες AD και BG . Δείξε ότι η GD είναι παράλληλος της ευθείας AB .



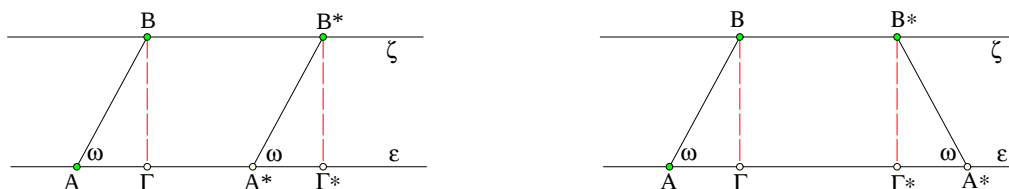
Σχήμα 76: Τραπεζίο Saccheri

Υπόδειξη: Τα τρίγωνα ABD και ABG είναι ίσα, ως έχοντα την AB κοινή, τις AD και BG ίσες εκ κατασκευής και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες ως ορθές (ΠΓΠ-κριτήριο). Συνάγεται ότι οι AG και BD είναι ίσες και απ' αυτό ότι και τα τρίγωνα ADG και BGD είναι ίσα (ΠΠΠ-κριτήριο). Από την ισότητα των τελευταίων τριγώνων συνάγεται και η ισότητα των γωνιών XDA και YGB . Τώρα στην απόδειξη ότι οι AB και GD δεν τέμνονται διά της εις άτοπον απαγωγής. Υπόθεσε ότι τέμνονται σε σημείο Z και σχηματίζουν σε αυτό γωνία

ζ. Τότε στο τρίγωνο ΔAZ η εξωτερική στο Δ θα είναι $\omega = 90 + \zeta$, στο δε $B\Gamma Z$ η εξωτερική στο B θα είναι $90 = \omega + \zeta$. Από τις δύο αυτές συνάγεται ότι $2\zeta = 0$, που είναι άτοπο. Άρα οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες.

Σχόλιο-2 Το σχήμα $AB\Gamma\Delta$ της προηγούμενης άσκησης ονομάζεται *Τραπεζίο του Saccheri (1667-1733)* και παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην θεμελίωση της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Μετά την παραδοχή του αξιώματος των παραλλήλων θα δούμε ότι η γωνία ω είναι ορθή. Στην παρούσα φάση όμως, όπου δεν έχουμε ακόμη κάνει κάποια παραδοχή για τις παράλληλες, δεν μπορούμε να αποδείξουμε κάτι τέτοιο.

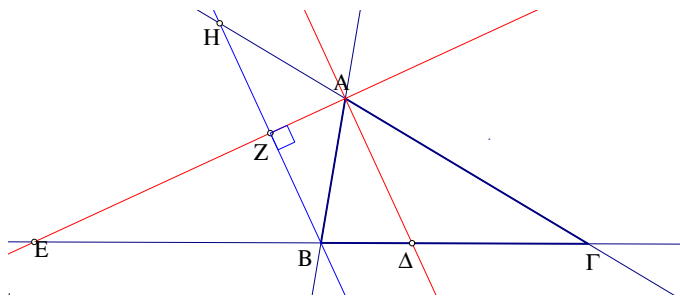
Άσκηση 1.13.2 Από τα σημεία A και A^* ευθείας ε και προς το ίδιο μέρος της φέρε δύο ίσα τμήματα AB , A^*B^* και με την ίδια κλίση ω προς την ε . Δείξε ότι η BB^* είναι παράλληλος της ε .



Σχήμα 77: Ίσα ευθύγραμμα τμήματα και παράλληλος

Υπόδειξη: Φέρε τις καθέτους $B\Gamma$ και $B^*\Gamma^*$ προς την ε . Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ έχουν ίσες υποτείνουσες και μία γωνία (ω) διαφορετική της ορθής ίση, συνεπώς είναι ίσα (Άσκηση 1.10.8). Συνεπώς οι κάθετες $B\Gamma$ και $B^*\Gamma^*$ είναι ίσες και το συμπέρασμα προκύπτει από την Άσκηση 1.13.1.

Άσκηση 1.13.3 Έστω ότι οι διχοτόμοι της γωνίας A τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουν την απέναντι πλευρά στα σημεία: Δ (εσωτερική) και E (εξωτερική). Πρόβαλε την κορυφή B στο Z επί της AE και διπλασίασε το τμήμα BZ προς το Z μέχρι το H . Δείξε ότι το H είναι επί της ευθείας $A\Gamma$. Δείξε επίσης ότι η HB είναι παράλληλος της $A\Delta$.

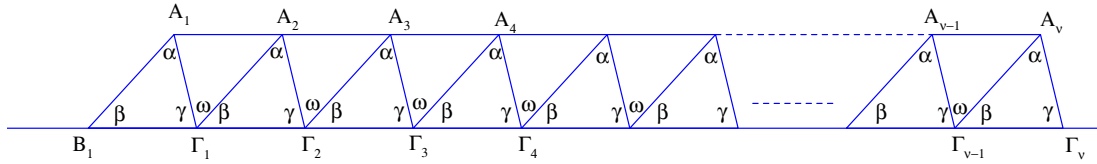


Σχήμα 78: Παράλληλη της διχοτόμου

Υπόδειξη: Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και AHZ είναι ίσα εκ κατασκευής (ΠΓΠ-κριτήριο), άρα οι γωνίες τους στο A είναι ίσες και επειδή η AZ είναι διχοτόμος της παραπληρωματικής της γωνίας στο A , η AH θα συμπίπτει με την ευθεία $A\Gamma$. Οι δύο ευθείες $A\Delta$ και ZB είναι κάθετες στην AE , άρα δεν τέμνονται (Πρόταση 1.12.1).

1.14 Το άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θεώρημα 1.14.1 (Θεώρημα των *Saccheri-Legendre*) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο ή ίσο του 180 ($\alpha + \beta + \gamma \leq 180$).



Σχήμα 79: Μιά ακολουθία ίσων τριγώνων

Απόδειξη: Με εις άτοπον απαγωγή. Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha + \beta + \gamma > 180$ και δείχνουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο. Τοποθετούμε n αντίγραφα του ίδιου τριγώνου στην σειρά έτσι ώστε οι βάσεις τους $B_1\Gamma_1, \Gamma_1\Gamma_2, \dots$ να είναι διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα της ίδιας ευθείας (Αξίωμα 1.3.3), ως εις το σχήμα. Επί πλέον υποθέτουμε ότι η πλευρά $|A\Gamma| < |B\Gamma|$. Δημιουργούνται τότε τα τρίγωνα $A_1\Gamma_1A_2, A_2\Gamma_2A_3, \dots$ τα οποία αποδεικνύεται εύκολα (ΠΓΠ-κριτήριο) ότι είναι ίσα μεταξύ τους. Αν $\omega = |A_1\Gamma_1A_2|$, τότε η $\beta + \omega + \gamma = 180$ μαζί με την υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma > 180$ συνεπάγεται ότι $\omega < \alpha$. Συνεπώς συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ και $A_1\Gamma_1A_2$ που έχουν τις πλευρές τους στις κορυφές A_1 και Γ_1 αντίστοιχα ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες ($\omega < \alpha$), κατά την Πρόταση 1.10.5, συμπεραίνουμε ότι οι τρίτες πλευρές τους θα είναι αντίστοιχα άνισες $|A_1A_2| < |B_1\Gamma_1|$. Συγκρίνουμε τώρα τα μήκη των δύο γραμμών που ενώνουν τα B_1 και Γ_n . Κατά το Πρόσχημα 1.11.1 το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $|B_1\Gamma_n| = n|B_1\Gamma_1|$ θα είναι μικρότερο του μήκους της τεθλασμένης γραμμής $B_1A_1A_2A_3\dots A_n\Gamma_n$ το οποίο είναι $|B_1A_1| + (n-1)|A_1A_2| + |A_1\Gamma_1|$. Από την ανισότητα

$$n|B_1\Gamma_1| \leq |B_1A_1| + (n-1)|A_1A_2| + |A_1\Gamma_1|$$

λόγω της $|A_1\Gamma_1| < |B_1\Gamma_1|$ που σημειώσαμε παραπάνω προκύπτει ότι

$$n|B_1\Gamma_1| < |B_1A_1| + (n-1)|A_1A_2| + |B_1\Gamma_1|.$$

Από αυτήν πάλι προκύπτει με απλές πράξεις η

$$(n-1)(|B_1\Gamma_1| - |A_1A_2|) < |B_1A_1|.$$

Η ανισότητα αυτή είναι αντιφατική, διότι, όπως σημειώσαμε παραπάνω το αριστερό μέλος της είναι θετικό και αυξάνει πέρα από κάθε όριο καθώς αυξάνει το n , ενώ το δεξί είναι σταθερό. Η αντίφαση, στην οποία οδηγήθηκαμε υποθέτοντας ότι $\alpha + \beta + \gamma > 180$ συνεπάγεται ότι πρέπει να ισχύει $\alpha + \beta + \gamma \leq 180$ ο.ε.δ.

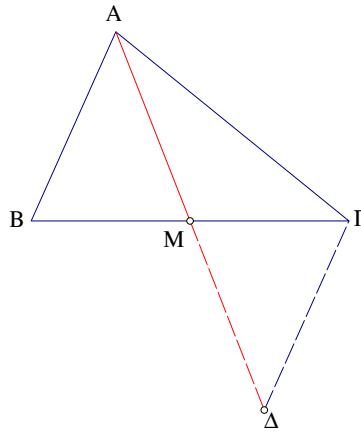
Σημείωση Στην απόδειξη αυτή (που οφείλεται στον Legendre(1752-1833) ([Bon12, σ. 55], [AP88, σ. 80])) και πάλι δεν χρησιμοποιήσαμε κάποια ιδιότητα των παραλλήλων. Τούτο το θεώρημα αποτελεί κατά κάποιο τρόπο ένα οριακό σημείο μεταξύ της Απόλυτης Γεωμετρίας και των άλλων Γεωμετριών. Αποδεικνύεται ότι αν ισχύουν τα αξιώματα για ευθείες, γωνίες και τρίγωνα που δεχθήκαμε στις παραγράφους 1.2-1.6 και στο επίπεδο βρεθεί κάποιο τρίγωνο

$AB\Gamma$ με άθροισμα γωνιών $\alpha + \beta + \gamma = 180$ τότε και κάθε άλλο τρίγωνο του επιπέδου αυτού θα έχει άθροισμα γωνιών 180 και θα ισχύει η μοναδικότητα της παραλλήλου από σημείο προς ευθείαν, δηλαδή στο επίπεδο αυτό θα ισχύει η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Παρόμοια αν στο επίπεδο βρεθεί κάποιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με άθροισμα γωνιών $\alpha + \beta + \gamma < 180$ τότε και σε κάθε άλλο τρίγωνο αυτού του επιπέδου το άθροισμα των γωνιών θα είναι μικρότερο του 180 και θα ισχύει ένα άλλο είδος γεωμετρίας, διαφορετικό από την Ευκλείδεια (η Υπερβολική Γεωμετρία ή γεωμετρία των Bolyai 1802-1860 και Lobatsevski 1792-1856 [AP88, σ. 98], που αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο).

Άσκηση 1.14.1 Δείξε ότι αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

Άσκηση 1.14.2 Δείξε ότι αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε και τα ύψη από αντίστοιχες γωνίες προς αντίστοιχες απέναντι πλευρές είναι ίσα.

Άσκηση 1.14.3 Δείξε ότι η διάμεσος AM τριγώνου $AB\Gamma$ έχει μήκος μικρότερο του ημι-αθροίσματος των δύο προσκειμένων πλευρών της ($|AM| < \frac{|AB|+|AG|}{2}$).



Σχήμα 80: Διάμεσος και προσκειμένες πλευρές

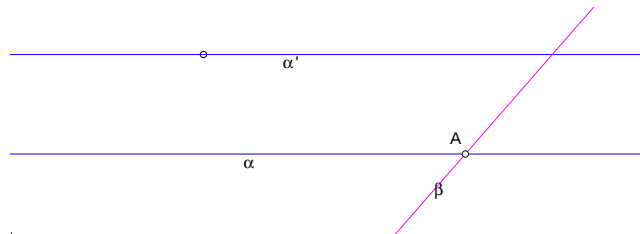
Υπόδειξη: Προέκτεινε την AM κατά το διπλάσιο έως το Δ . Τα τρίγωνα AMB και $\Delta M\Gamma$ είναι ίσα ως έχοντα $|AM| = |M\Delta|$, $|BM| = |M\Gamma|$ και τις περιεχόμενες γωνίες AMB και $\Gamma M\Delta$ ίσες. Επομένως, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $2|AM| = |A\Delta| < |A\Gamma| + |\Gamma\Delta| = |A\Gamma| + |AB|$. Σημείωσε ότι ισχύει και η $|AM| > \frac{1}{2}(|AB| + |A\Gamma| - |B\Gamma|)$ (Πόρισμα 3.12.2).

Άσκηση 1.14.4 Δείξε ότι αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\alpha = \beta + \gamma$, τότε υπάρχει σημείο Δ στην $B\Gamma$, έτσι ώστε η $A\Delta$ να χωρίζει το $AB\Gamma$ σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

1.15 Το αξίωμα των παραλλήλων

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία, εκτός των ιδιοτήτων ευθειών, γωνιών και τριγώνων που δεχθήκαμε στις Παραγράφους 1.2-1.6, αποδέχεται και την ισχύ της **μοναδικότητας** της παραλλήλου, δηλαδή ότι:

Αξίωμα 1.15.1 Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία και μόνον παράλληλος ε' προς την ε .



Σχήμα 81: Αν τέμνει η α τέμνει και η παράλληλος α'

Πόρισμα 1.15.1 Δείξε ότι αν η ευθεία a τέμνει την ευθεία β , τότε και μία παράλληλος a' της a θα τέμνει επίσης την β .

Απόδειξη: Αν η a' δεν έτεμνε την β , τότε από το σημείο τομής A των α και β θα είχαμε δύο διαφορετικές παραλλήλους προς την a' : την α και την β , που είναι άτοπο. Άρα η a' τέμνει και αυτή την β , ο.ε.δ.

Στην παράγραφο 1.13 είδαμε ένα τρόπο κατασκευής μιάς παραλλήλου. Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε από το A μία τέμνουσα AB της ε , όχι κατ' ανάγκην κάθετο στην ε (Πόρισμα 1.10.7) και να κατασκευάσουμε την παράλληλο σχηματίζοντας στο A την ίδια

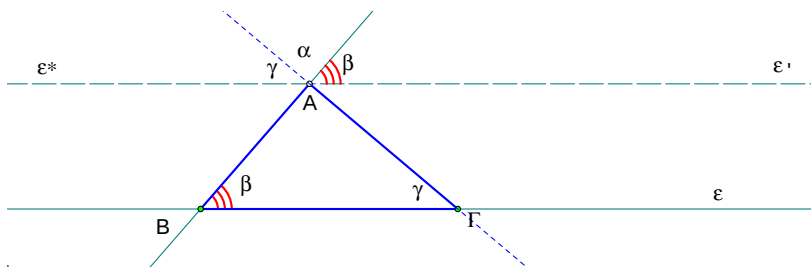


Σχήμα 82: Παράλληλος από το A

γωνία ω που σχηματίζει η AB με την ε . Λόγω της βασικής υπόθεσης της μοναδικότητας, αυτή θα είναι η μία και μοναδική παράλληλος της ε που άγεται από το A .

Πρόταση 1.15.1 Από την υπόθεση της μοναδικότητας της παραλλήλου έπεται ότι το άθροισμα των μέτρων των γωνιών ενός τριγώνου $\alpha + \beta + \gamma = 180$.

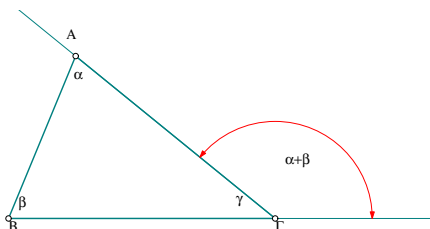
Απόδειξη: Κάνουμε δύο φορές την κατασκευή της παραλλήλου προς την βάση $B\Gamma$ του τριγώνου από την απέναντι κορυφή A . Την πρώτη φορά θεωρούμε τέμνουσα την AB και φέρνουμε



Σχήμα 83: Το άθροισμα γωνιών τριγώνου

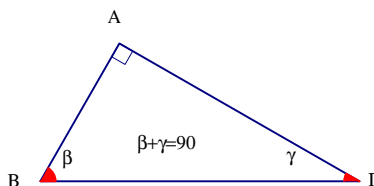
την ϵ' σχηματίζοντας στο A γωνία ίση με την β . Την δεύτερη φορά κάνουμε την ίδια εργασία χρησιμοποιώντας ως τέμνουσα την ΑΓ και φέρνουμε την ϵ^* σχηματίζοντας στο A γωνία ίση με την γ . Από την μοναδικότητα της παραλλήλου προκύπτει ότι $\epsilon' = \epsilon^*$ και στο A σχηματίζονται οι τρεις γωνίες του τριγώνου και το άθροισμά τους που είναι 180, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.2 Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου έχει μέτρο το άθροισμα των μέτρων των δύο εντός και απέναντι γωνιών.



Σχήμα 84: Εξωτερική γωνία τριγώνου

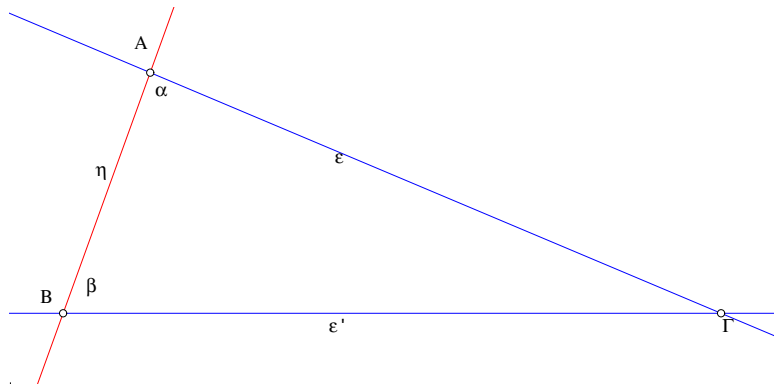
Πόρισμα 1.15.3 Σε κάθε ορθογώνιο τμήγωνο το άθροισμα των οξείων γωνιών του είναι μία ορθή γωνία.



Σχήμα 85: Οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου

Πόρισμα 1.15.4 Αν ευθεία η προσπίπτουσα σε δύο άλλες ϵ και ϵ' τις τέμνει αντίστοιχα στα A και B σχηματίζοντας σε αυτά γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη α και β με $\alpha + \beta < 180$, τότε οι ϵ και ϵ' τέμνονται προς το μέρος των γωνιών α και β .

Απόδειξη: Κατ' αρχήν δεν μπορεί να μην τέμνονται, δηλαδή να είναι παράλληλοι, διότι τότε θα είχαμε $\alpha + \beta = 180$, αντίθετα με την υπόθεση. Κατόπιν δεν μπορεί να τέμνονται από την



Σχήμα 86: Το αξίωμα παραλληλίας κατά Ευκλείδη

άλλη μεριά, διότι μαζί με το σημείο τομής Γ θα σχηματιζόταν τρίγωνο με άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο του 180 , που είναι άτοπο, ο.ε.δ.

Σχόλιο Στα στοιχεία του Ευκλείδη το αξίωμα της παραλληλίας διατυπώνεται στην μορφή του τελευταίου πορίσματος, που εδώ αποδεικνύεται ως συνέπεια του αξιώματος παραλληλίας. Το επόμενο πρόβλημα δείχνει ότι οι δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες, δηλαδή αν μία από αυτές θεωρηθεί ως αξίωμα η άλλη αποδεικνύεται ως θεώρημα.

Άσκηση 1.15.1 Δείξε ότι αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ιδιότητα του τελευταίου πορίσματος, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία και μόνον παράλληλη προς την ε .

Υπόδειξη: Βάσει του προηγούμενου σχήματος. Έστω η παράλληλος ε^* της ε' από το A που κατασκευάζεται φέροντας τέμνουσα η της ε' από το A και παίρνοντας στο A γωνία α^* έτσι ώστε $\alpha^* + \beta = 180$. Μία διαφορετική της ε^* ευθεία ε θα σχηματίζει στο A γωνία της α^* και συνεπώς από κάποια μεριά της η θα σχηματίζονται δύο γωνίες εντός και επί τα αυτά με $\alpha + \beta < 180$, άρα οι ευθείες θα τέμνονται από εκείνη την μεριά. Άρα υπάρχει μία και μόνο παράλληλος της ε' από το A .

Άσκηση 1.15.2 Δείξε την μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας, δηλαδή: αν η ευθεία β είναι παράλληλη της α και η ευθεία γ είναι παράλληλη της β , τότε η γ είναι και παράλληλη της α .

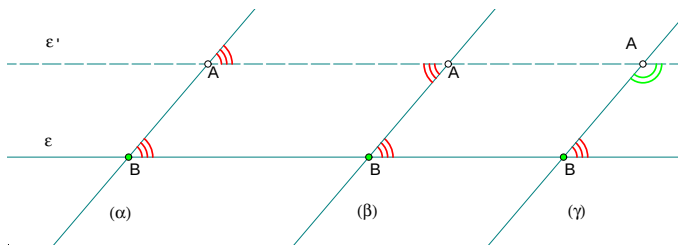
Υπόδειξη: Αναγωγή στην προηγούμενη άσκηση. Αν η γ δεν ήταν παράλληλη της α , τότε θα την έτεμνε. Τότε όμως (κατά την προηγούμενη άσκηση) και η β που είναι παράλληλη της α θα έτεμνε την γ , άτοπο.

Άσκηση 1.15.3 Δείξε ότι αν δύο διαφορετικές ευθείες α και β είναι κάθε μία παράλληλη προς μίαν ευθεία ε τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Υπόδειξη: Αν δεν ήταν παράλληλες οι α και β , τότε θα είχαν κοινό σημείο A και από αυτό θα υπήρχαν δύο παράλληλοι προς την ε , άτοπο.

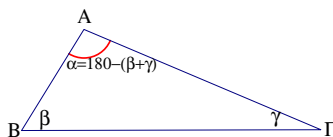
Πόρισμα 1.15.5 Ευθεία AB προσπίπτουσα σε παραλλήλους ε και ε' σχηματίζει:

- Τις εντός - εκτός (σχήμα 87 (α)) και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
- Τις εντός και εναλλάξ (σχήμα 87 (β)) γωνίες ίσες,
- Τις εντός και επί τα αυτά μέρη (σχήμα 87 (γ)) παραπληρωματικές.



Σχήμα 87: Ευθεία προσπίπτουσα σε δύο παραλλήλους

Πρόταση 1.15.2 Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και κάθε ζεύγος γωνιών (β, γ) με μέτρα $\beta + \gamma < 180$ υπάρχει τριγωνο $AB\Gamma$ και γωνίες στα B και Γ μέτρων β και γ αντίστοιχα.



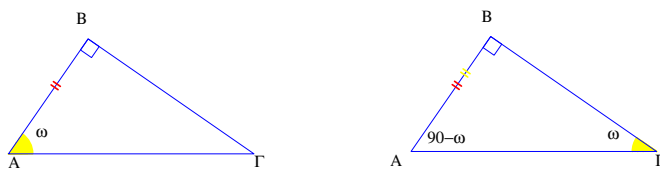
Σχήμα 88: ΓΠΓ-κατασκευή τριγώνου

Απόδειξη: Κατά το Αξίωμα 1.4.2 μπορούμε να κατασκευάσουμε τις γωνίες β και γ από την ίδια μεριά της AB , με κορυφή στα B και Γ αντίστοιχα, που έχουν μία πλευρά τους την ημιευθεία $B\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα. Αυτό που εξασφαλίζουμε, τώρα, είναι ότι οι δεύτερες πλευρές αυτών των γωνιών θα τέμνονται και θα ορίσουν την τρίτη κορυφή του τριγώνου Γ . Τούτο, διότι αν δεν ετέμνοντο, δηλαδή ήσαν παράλληλοι, τότε θα είχαμε δύο παραλλήλους, που θα σχημάτιζαν με την τέμνουσα αυτές ευθεία AB , εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο των 180 , που είναι άτοπο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.15.6 Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και γωνία μέτρου $\alpha < 180$ υπάρχει ισοσκελές τριγωνο $AB\Gamma$ με βάση την $B\Gamma$ και γωνία κορυφής α .

Απόδειξη: Οι γωνίες στην βάση του ισοσκελούς θα είναι $\omega = \frac{180-\alpha}{2}$, άρα κατασκευάζεται κατά την Πρόταση-1.15.2, ο.ε.δ.

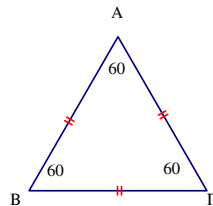
Πόρισμα 1.15.7 Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και ζεύγος γωνιών μέτρου $\alpha + \beta = 90$ υπάρχει ορθογώνιο τριγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα την $B\Gamma$ και οξείες γωνίες α και β .

Σχήμα 89: Ορθογώνιο με προσκείμενες στην AB ω και 90 ή $90-\omega$ και 90

Πόρισμα 1.15.8 Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB και οξεία γωνία μέτρου ω υπάρχει ορθογώνιο τριγωνο $AB\Gamma$ με μία κάθετο την AB και μία οξεία ίση με την ω .

Απόδειξη: Όπως διατυπώνεται το πόρισμα αφήνει το περιθώριο το AB να είναι απέναντι στην ω ή προσκείμενη σε αυτήν. Υπάρχουν λοιπόν δύο τρίγωνα με αυτά τα δεδομένα. Το ένα έχει προσκείμενες στην AB τις γωνίες ω και 90 και το άλλο έχει προσκείμενες στην AB τις γωνίες $90-\omega$ και 90 . Και των δύο η ύπαρξη ανάγεται στην Πρόταση 1.15.2, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.15.4 (Υπαρξη ισοπλεύρου τριγώνου) Για κάθε θετικό αριθμό δ υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει όλες τις πλευρές ίσες με δ και όλες τις γωνίες του ίσες με 60 . Ένα τέτοιο τρίγωνο λέγεται **Ισόπλευρο**. Αντίστροφα, κάθε ισόπλευρο έχει και ίσες γωνίες, κάθε μία από τις οποίες είναι 60 μοίρες.



Σχήμα 90: Το ισόπλευρο τρίγωνο

Υπόδειξη: Κατασκεύασε το τρίγωνο με βάση $B\Gamma$ μήκους δ και προσκείμενες 60 και 60 (Πρόταση 1.15.2). Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 180$, και η τρίτη γωνία θα είναι 60 μοιρών, συνεπώς το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με βάση οποιαδήποτε πλευρά του, άρα ισόπλευρο. Αντίστροφα, κάθε ισόπλευρο είναι ισοσκελές με βάση οποιαδήποτε πλευρά του άρα όλες οι γωνίες του είναι ίσες με α και $3\alpha = 180$ συνεπάγεται το ζητούμενο.

Άσκηση 1.15.5 Κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μία γωνία μικρότερη των 60 μοιρών, καθώς και δύο γωνίες με άθροισμα μεγαλύτερο των 90 μοιρών.

Υπόδειξη: Αν ήταν όλες γνήσια μικρότερες του 60 , τότε και το άθροισμά τους $\alpha + \beta + \gamma < 3 \cdot 60 = 180$, που είναι άτοπο. Ανάλογα αποδεικνύεται και ο δεύτερος ισχυρισμός.

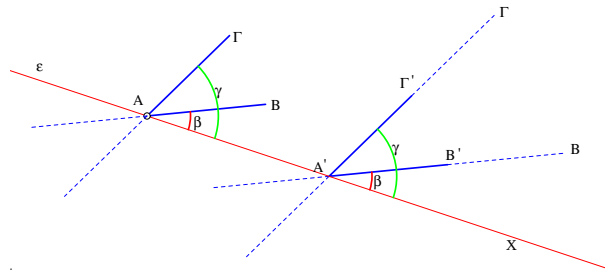
Δύο ημιευθείες AX και BY λέγονται **Ομόρροπες** όταν ή (α) ταυτίζονται ή (β) η μία από τις δύο περιέχει την άλλη ή (γ) είναι παράλληλες και η ευθεία AB που ενώνει τα άκρα τους τις αφήνει από την ίδια μεριά. Οι ημιευθείες λέγονται **Αντίρροπες** όταν ή (α) περιέχονται στην ίδια ευθεία αλλά δεν είναι ομόρροπες ή (β) είναι παράλληλες και ευρίσκονται στις δύο μεριές της AB . Δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ λέγονται Ομόρροπα/Αντίρροπα όταν οι ημιευθείες που τα περιέχουν με αρχή τα A και Γ αντίστοιχα είναι ομόρροπες/αντίρροπες αντίστοιχα. Από το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει αμέσως το επόμενο.



Σχήμα 91: Ομόρροπες και αντίρροπες ημιευθείες

Πόρισμα 1.15.9 Δύο παράλληλες ομόρροπες ημιευθείες AX και BY σχηματίζουν με την AB ίσες εντός-εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Δύο παράλληλες και αντίρροπες ημιευθείες έχουν τις εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.

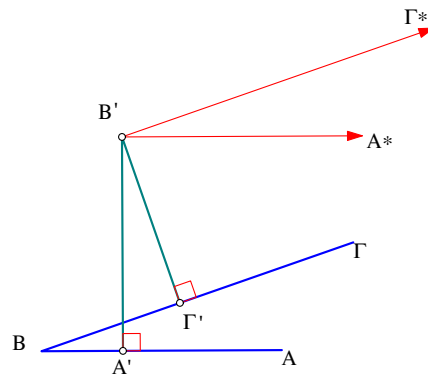
Πόρισμα 1.15.10 Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες ή παραπληρωματικές.



Σχήμα 92: Γωνίες $BΑΓ$, $B'Α'Γ'$ με παράλληλες πλευρές

Απόδειξη: Έστω ότι οι γωνίες $BΑΓ$ και $B'Α'Γ'$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Αν οι κορυφές τους A και A' ταυτίζονται τότε θα ταυτίζονται και οι ευθείες που ορίζονται από τις πλευρές τους και το συμπέρασμα είναι προφανές. Αν οι κορυφές δεν ταυτίζονται τότε φέρνουμε από το A' ημιευθείες ομόρροπες προς τις πλευρές της $BΑΓ$ που αφενός σχηματίζουν μία γωνία ίση με την $BΑΓ$ (Πόρισμα 1.15.9) και αφ' ετέρου οι πλευρές τους είναι στις ίδιες ευθείες με αυτές της γωνίας $B'Α'Γ'$, άρα θα σχηματίζουν ή ίσες με αυτήν γωνία ή παραπληρωματική αυτής, ο.ε.δ.

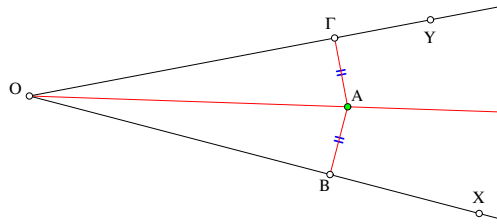
Πόρισμα 1.15.11 Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα κάθετες είναι ίσες ή παραπληρωματικές.



Σχήμα 93: Γωνίες με πλευρές αντίστοιχα κάθετες

Απόδειξη: Έστω ότι οι γωνίες $ABΓ$ και $A'Β'Γ'$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες, δηλαδή η ευθεία AB είναι κάθετη στην $A'B'$ και η $BΓ$ κάθετη στην $B'Γ'$. Από το B' φέρνουμε παράλληλες ομόρροπες ημιευθείες προς τις πλευρές της $ABΓ$. Τότε σχηματίζεται μία γωνία $A*Β'Γ*$ ίση της $ABΓ$ και με πλευρές κάθετες σε αυτές της $ABΓ$. Το συμπέρασμα συνάγεται από την Πρόταση 1.5.2, ο.ε.δ.

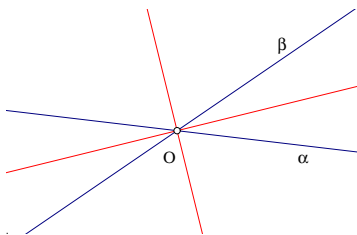
Πόρισμα 1.15.12 Έστω σημείο A της διχοτόμου γωνίας XOY . Οι αποστάσεις AB και AG του σημείου από τις πλευρές της γωνίας είναι ίσες. Αντίστροφα: αν σημείο A απέχει ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας XOY τότε είναι επί της διχοτόμου της.



Σχήμα 94: Ιδιότητα της διχοτόμου

Απόδειξη: Τα ορθογώνια τρίγωνα OAG και OAB έχουν κοινή την OA και τις προσκείμενες γωνίες ίσες, άρα (ΓΠΓ-κριτήριο) θα είναι ίσα και επομένως $|AG| = |AB|$. Αντίστροφα: αν ισχύει η προηγούμενη ισότητα, τότε τα τρίγωνα ABO και AGO είναι ίσα. Αυτό φαίνεται τοποθετώντας τα έτσι ώστε να συμπίσουν οι ορθές γωνίες τους B και G και η GA με την BA . Τότε και οι υποτείνουσες των ορθογωνίων που είναι ίσες με την OA θα πρέπει να συμπίσουν (Πόρισμα 1.10.6) και τα τρίγωνα θα έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.15.6 Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο διαφορετικές, τεμνόμενες σε σημείο O , ευθείες α και β , αποτελείται από δύο κάθετες ευθείες διερχόμενες από το σημείο τομής των α και β . Οι ευθείες αυτές συμπίπτουν με τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζονται από τις α και β στο O .



Σχήμα 95: Διχοτόμοι γωνιών δύο ευθειών

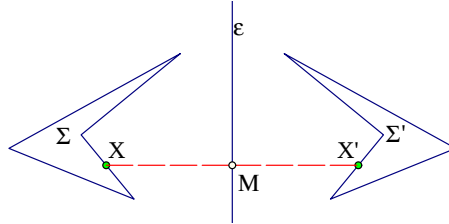
Υπόδειξη: Άμεση εφαρμογή του Πορίσματος 1.15.12.

Πόρισμα 1.15.13 Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το ήμισυ αυτής και χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

Απόδειξη: Προέκτεινε την διάμεσο AM μέχρι διπλασιασμού στο Δ ($|AM| = |M\Delta|$ στο σχήμα 96). Εφαρμόζοντας το ΠΓΠ-κριτήριο βλέπουμε εύκολα ότι τα τρίγωνα AMB και $ΓM\Delta$ είναι ίσα, αλλά και τα $AMΓ$ και $BM\Delta$ είναι επίσης ίσα. Τότε, εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο βλέπουμε ότι και τα τρίγωνα $ABΓ$ και $BΓ\Delta$ είναι ίσα και η γωνία $ΑΓ\Delta$ είναι ορθή ($|ΑΓ\Delta| = |ΑΓB| + |BΓ\Delta| = |ΑΓB| + |ΓBΑ| = 90^\circ$). Συνάγεται ότι και τα τρίγωνα $ABΓ$ και $ΑΓ\Delta$ είναι ίσα, ως ορθογώνια με ίσες αντίστοιχες κάθετες πλευρές (ΠΓΠ-κριτήριο). Έπεται ότι και οι διάμεσοί τους προς το M θα είναι ίσες ($|AM| = |ΓM|$), που είναι ακριβώς το αποδεικτέον. Τα δύο ισοσκελή που αναφέρονται στο θεώρημα είναι τα AMB και $AMΓ$, ο.ε.δ.

1.16 Συμμετρίες

Υπάρχουν πολλά είδη συμμετρίας στα οποία, για διάφορους λόγους, αρέσκονται οι Μαθηματικοί. Δύο από τα πιο απλά είναι αυτό της *αξονικής συμμετρίας* και της *σημειακής συμμετρίας*. Η πρώτη καθορίζεται πλήρως από μία ευθεία και η δεύτερη από ένα σημείο. Δοθείσης λοιπόν ευθείας ϵ , ονομάζουμε **Συμμετρία ως προς την ευθεία ϵ** την αντι-

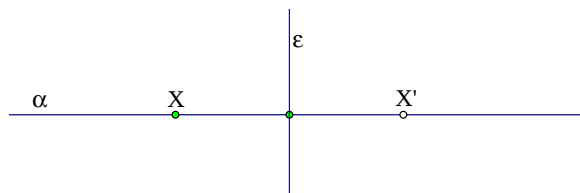


Σχήμα 98: Συμμετρία ως προς άξονα

στοίχιση σε κάθε σημείο X , εκτός της ϵ , ενός σημείου X' , έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα XX' να είναι κάθετο στην ϵ και να έχει το μέσον του M επί της ϵ . Με άλλα λόγια το XX' έχει την ϵ ως μεσοκάθετο. Το X' λέγεται **Συμμετρικό του X ως προς ϵ** . Όταν το σημείο X είναι επί της ϵ , τότε θεωρούμε ότι το X' ταυτίζεται με το X και αντίστροφα όταν τα X και X' ταυτίζονται, τότε το X είναι επί της ευθείας ϵ . Η συμμετρία ως προς ϵ είναι η μαθηματική περιγραφή του διπλώματος του επιπέδου, σαν να ήταν από χαρτί, κατά μήκος της ϵ . Τα σημεία που ταυτίζονται κατά το δίπλωμα είναι ακριβώς συμμετρικά ως προς ϵ . Τα σημεία της ϵ , κατά το δίπλωμα μένουν ως έχουν (είναι μόνα τους, δεν έχουν ταίρι). Συχνά η ευθεία ϵ λέγεται **Άξονας συμμετρίας** και η συμμετρία αυτή χαρακτηρίζεται ως **Αξονική συμμετρία**. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το συμμετρικό του συμμετρικού είναι το αρχικό σημείο. Τα σημεία του άξονα είναι τα **Σταθερά σημεία της αξονικής συμμετρίας**.

Λέμε ότι δύο σχήματα Σ και Σ' είναι **Συμμετρικά ως προς άξονα**, όταν υπάρχει αξονική συμμετρία έτσι ώστε κάθε σημείο X του Σ να έχει το συμμετρικό του στο Σ' και κάθε σημείο X' του Σ' να έχει το συμμετρικό του στο Σ (σχήμα-98). Ένα σχήμα Σ λέγεται **Συμμετρικό ως προς άξονα** όταν το Σ είναι συμμετρικό με τον εαυτό του ως προς άξονα. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε X του Σ το συμμετρικό X' του X περιέχεται πάλι στο Σ .

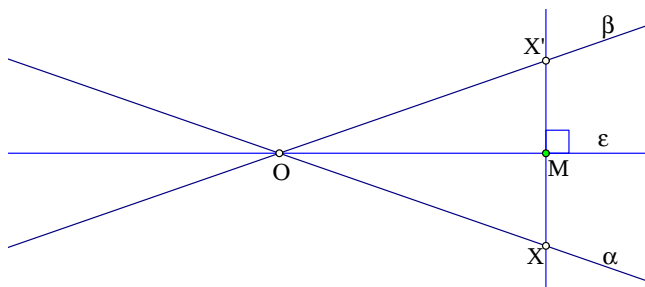
Πρόταση 1.16.1 Κάθε ευθεία a είναι συμμετρική ως προς μία ευθεία ϵ κάθετη στην a .



Σχήμα 99: Ευθεία a συμμετρική ως προς ϵ

Απόδειξη: Εξ ορισμού το XX' θα είναι κάθετο στην ϵ , άρα η ευθεία XX' θα συμπίπτει με την α , ο.ε.δ.

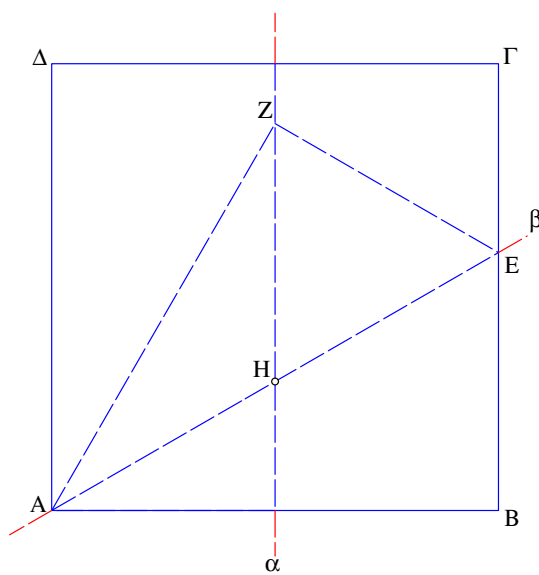
Πρόταση 1.16.2 Το σχήμα που αποτελείται από δύο τεμνόμενες ευθείες a και β είναι συμμετρικό ως προς τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν.

Σχήμα 100: Ευθείες α, β συμμετρικές ως προς ε

Απόδειξη: Αν X τυχόν σημείο της α και X' το συμμετρικό του X ως προς την διχοτόμο ε , τότε το τρίγωνο $XX'O$, όπου O το σημείο τομής των α και β , είναι ισοσκελές. Αυτό φαίνεται από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων OMX και OMX' , που έχουν την OM κοινή και την $|MX| = |MX'|$ από τον ορισμό της συμμετρίας. Συνεπώς η OM θα διχοτομεί την γωνία στην κορυφή O . Επειδή εξ υποθέσεως η ε είναι και διχοτόμος της γωνίας των α και β , η ευθεία OX' και η β θα συμπίπτουν, άρα το X' θα περιέχεται στην β , ο.ε.δ.

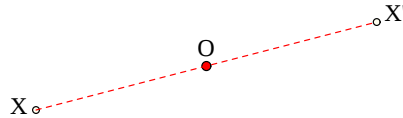
Σχόλιο Η αξονική συμμετρία βρίσκεται στην ρίζα της τέχνης του διπλώματος φύλλου χαρτιού με κατάλληλο τρόπο, ώστε, μετά από ορισμένα διπλώματα να σχηματίζονται ενδιαφέροντα σχήματα. Η τέχνη αυτή που αναπτύχθηκε ιδιαίτερα στην Ιαπωνία λέγεται Origami ([Alp00]). Η επόμενη άσκηση [Row17, σ. 11] δείχνει πώς με το κατάλληλο δίπλωμα ενός τετράγωνου φύλλου χαρτιού μπορούμε να φτιάξουμε την γωνία 30 και 60 μοιρών.

Άσκηση 1.16.1 Δίπλωσε ένα τετράγωνο φύλλο χαρτιού $AB\Gamma\Delta$ στο μέσον. Κατόπιν ξεδίπλωσέ το ώστε να φαίνεται το ίχνος της ευθείας a κατά μήκος της οποίας διπλώθηκε το χαρτί. Κατόπιν ξαναδίπλωσε από την γωνία B , έως ότου το B πέσει σε σημείο Z της a ενώ το A παραμένει στην θέση του. Κατόπιν ξεδίπλωσε ώστε να φανεί το ίχνος της β , κατά μήκος της οποίας έγινε το δεύτερο δίπλωμα. Δείξε ότι η γωνία των a και β είναι 60 μοιρών.



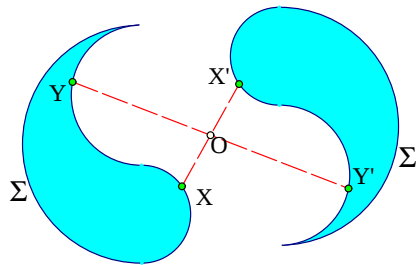
Σχήμα 101: Origami κατασκευή γωνίας 30 μοιρών

Υπόδειξη: Κατά το δεύτερο δίπλωμα η AB παίρνει την θέση της AZ , άρα $|AZ| = |AB|$. Όμως η α είναι μεσοκάθετος της AB , άρα $|ZA| = |ZB|$ (η ZB δεν σχεδιάσθηκε στο σχήμα-101). Συνεπώς το τρίγωνο ABZ είναι ισόπλευρο. Όμως η α είναι κάθετη στην AB και η β κάθετη στην πλευρά BZ του ισοπλεύρου, άρα και η γωνία των α και β είναι 60 μοιρών.



Σχήμα 102: Συμμετρία ως προς σημείο O

Δοθέντος σημείου O , ονομάζουμε **Συμμετρία ως προς το σημείο O** , την αντιστοίχιση σε κάθε σημείο X , διαφορετικού του O , ενός σημείου X' , έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα XX' να έχει μέσον το O . Το X' λέγεται **Συμμετρικό του X ως προς O** . Ως συμμετρικό του O θεωρούμε τον εαυτό του. Αντίστροφα, αν το X ταυτίζεται με το συμμετρικό του ως προς O τότε το X ταυτίζεται με το O . Το O λέγεται **Κέντρο της συμμετρίας** και η συμμετρία αυτή χαρακτηρίζεται ως **Σημειακή συμμετρία**. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το συμμετρικό του συμμετρικού είναι το αρχικό σημείο. Το O είναι το μοναδικό **Σταθερό σημείο της σημειακής συμμετρίας**. Λέμε ότι δύο σχήματα Σ και Σ' είναι **Συμμε-**



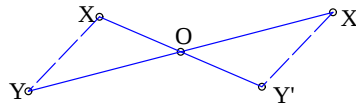
Σχήμα 103: Σχήματα συμμετρικά ως προς σημείο

τρικά ως προς σημείο, όταν υπάρχει σημειακή συμμετρία έτσι ώστε κάθε σημείο X του Σ να έχει το συμμετρικό του στο Σ' και κάθε σημείο X' του Σ' να έχει το συμμετρικό του στο Σ (σχήμα-103). Ένα σχήμα Σ λέγεται **Συμμετρικό ως προς σημείο** όταν το Σ είναι συμμετρικό με τον εαυτό του ως προς σημείο. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε X του Σ το συμμετρικό X' του X περιέχεται πάλι στο Σ .

Άσκηση 1.16.2 Δείξε ότι μία ευθεία είναι συμμετρική ως προς κάθε σημείο της O .

Η σημαντικότερη ιδιότητα αυτών των δύο συμμετριών που ορίσαμε είναι η ισότητα αντιστοίχων αποστάσεων και γωνιών.

Πρόταση 1.16.3 Εάν τα σχήματα Σ και Σ' είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς σημείο, τότε οι αποστάσεις δύο σημείων $|XY|$ και των αντιστοίχων σημείων τους $|X'Y'|$ είναι ίσες.

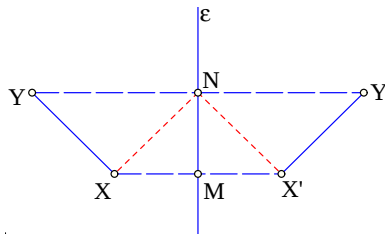


Σχήμα 104: Συμμετρία ως προς σημείο διατηρεί αποστάσεις

Απόδειξη: Η περίπτωση της συμμετρίας ως προς σημείο είναι απλή. Αν τα (X, X') και (Y, Y') είναι συμμετρικά ως προς σημείο O , τότε εξ ορισμού οι αποστάσεις

$$|XO| = |OX'|, \text{ και } |YO| = |OY'|.$$

Τότε τα τρίγωνα XOY και $X'OY'$ είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο), άρα και $|XY| = |X'Y'|$. Αν τα (X, X') και (Y, Y') είναι συμμετρικά ως προς άξονα τότε τα μέσα M και N των XX' και YY'



Σχήμα 105: Συμμετρία ως προς άξονα διατηρεί αποστάσεις

αντίστοιχα ευρίσκονται επί του άξονος ϵ και το N είναι επί της μεσοκαθέτου του XX' , άρα το τρίγωνο $XX'N$ είναι ισοσκελές. Συνεπώς $|NX| = |NX'|$ και οι γωνίες $|YNX| = |Y'NX'|$. Τότε όμως τα τρίγωνα XNY και $X'NY'$ είναι ίσα, ως έχοντα $|XN| = |NX'|$, $|YN| = |NY'|$ και περιεχόμενη γωνία $|XNY| = |X'NY'|$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.16.1 *Εάν τα σχήματα Σ και Σ' είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς σημείο, τότε τα τρίγωνα που σχηματίζουν τρία μη-συνευθειακά σημεία X, Y και Z του Σ και τα αντίστοιχά τους X', Y' και Z' του Σ' είναι ίσα.*

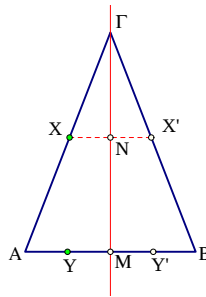
Απόδειξη: Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση, αφού τότε $|XY| = |X'Y'|$, $|YZ| = |Y'Z'|$, $|ZX| = |Z'X'|$ και το συμπέρασμα προκύπτει εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο ισότητας τριγώνων, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.16.2 *Εάν τα σχήματα Σ και Σ' είναι συμμετρικά ως προς άξονα ή ως προς σημείο, τότε οι γωνίες XYZ και $X'Y'Z'$ που σχηματίζουν τρία σημεία X, Y και Z του Σ και τα αντίστοιχά τους X', Y' και Z' του Σ' είναι ίσες.*

Απόδειξη: Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση, λόγω της ισότητας των αντιστοιχών γωνιών των ίσων τριγώνων XYZ και $X'Y'Z'$, ο.ε.δ.

Το κλασικό παράδειγμα συμμετρικού σχήματος ως προς άξονα είναι το ισοσκελές τρίγωνο. Ο άξονας συμμετρίας του είναι η διάμεσος προς την βάση του που είναι και διχοτόμος της γωνίας στην κορυφή του και ταυτόχρονα ύψος προς την βάση (Πόρισμα 1.8.2).

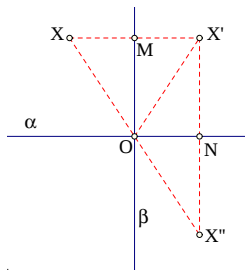
Πρόταση 1.16.4 *Η ευθεία ϵ που ενώνει την κορυφή του ισοσκελούς με το μέσον της βάσης του είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου.*



Σχήμα 106: Άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς

Απόδειξη: Η συμμετρία των σημείων Y, Y' της βάσης (σχήμα 106) είναι προφανής. Από την άλλη μεριά κάθε παράλληλος προς την βάση τέμνει τα σκέλη σε σημεία X, X' συμμετρικά ως προς την διάμεσο GM , αφού και το XGX' είναι ισοσκελές ($|GX| = |GX'|$ λόγω της παραλληλίας των πλευρών τους προς τις GAM και GBM αντίστοιχα) και η διάμεσός του συμπίπτει με την GM και είναι κάθετος στην XX' (Πόρισμα 1.8.2), ο.ε.δ.

Πρόταση 1.16.5 *Εάν ένα σχήμα είναι συμμετρικό ως προς δύο άξονες α και β που είναι κάθετοι, τότε είναι συμμετρικό ως προς κέντρο O , όπου O το σημείο τομής των δύο αξόνων.*



Σχήμα 107: Σημειακή από δύο αξονικές συμμετρίες

Απόδειξη: Πράγματι, έστω σημείο X και X' το συμμετρικό του ως προς άξονα α και X'' το συμμετρικό του X' ως προς τον άξονα β . Εξ ορισμού τα $XX'O$ και $X'OX''$ είναι ισοσκελή, άρα $|OX| = |OX''|$. Επίσης οι γωνίες XOM και MOX' είναι ίσες και οι $X'ON$ και NOX'' επίσης είναι ίσες. Συνεπώς η XOX'' θα είναι διπλάσια της MON , που είναι άθροισμα των MOX' και $X'ON$. Όμως η MON είναι εξ υποθέσεως ορθή, άρα η διπλάσιά της θα είναι πεπλατυσμένη, δηλαδή τα X, O και X'' θα είναι στην ίδια ευθεία, ο.ε.δ.

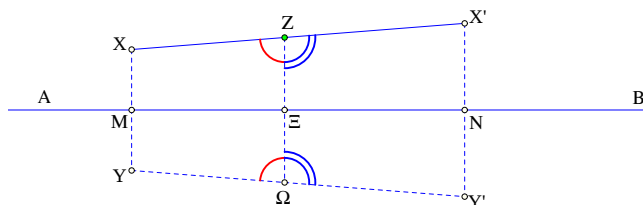
Άσκηση 1.16.3 Δείξε ότι αν τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τότε είναι ισοσκελές.

Υπόδειξη: Αν ϵ ο άξονας συμμετρίας, τότε μία τουλάχιστον κορυφή του τριγώνου, έστω η B , δεν θα περιέχεται σε αυτόν. Το συμμετρικό του B ως προς ϵ θα είναι πάλι κορυφή του τριγώνου, έστω Γ . Τότε η γωνία στο B θα αντιστοιχεί στην γωνία στο Γ και οι δύο γωνίες θα είναι ίσες, άρα το τρίγωνο ισοσκελές.

Άσκηση 1.16.4 Δείξε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε και μόνον, όταν έχει άξονα συμμετρίας.

Υπόδειξη: Συνδύασε την προηγούμενη άσκηση με την Πρόταση 1.16.4.

Άσκηση 1.16.5 Δείξε ότι αν τα σημεία Y, Y' είναι συμμετρικά των X, X' (ως προς άξονα ή σημείο), τότε το συμμετρικό κάθε σημείου Z της ευθείας XX' είναι σημείο Ω επί της ευθείας YY' .



Σχήμα 108: Συμμετρική ευθείας ως προς άξονα

Υπόδειξη: Για την αξονική συμμετρία. Έστω ότι τα Y, Y' είναι συμμετρικά των X, X' ως προς άξονα AB . Έστω και Ω το συμμετρικό τυχόντος σημείου Z της XX' ως προς την AB . Οι γωνίες $XZ\Xi$ και $Y\Omega\Xi$ είναι ίσες (Πόρισμα 1.16.2). Ομοίως οι γωνίες $\Xi ZX'$ και $\Xi\Omega Y'$ είναι ίσες. Όμως οι $XZ\Xi$ και $\Xi ZX'$ είναι παραπληρωματικές, άρα και οι $Y\Omega\Xi$ και $\Xi\Omega Y'$ θα είναι παραπληρωματικές και τα τρία σημεία, Y, Ω και Y' θα είναι επ' ευθείας. Ανάλογα αποδεικνύεται και η ιδιότητα για σημειακή συμμετρία.

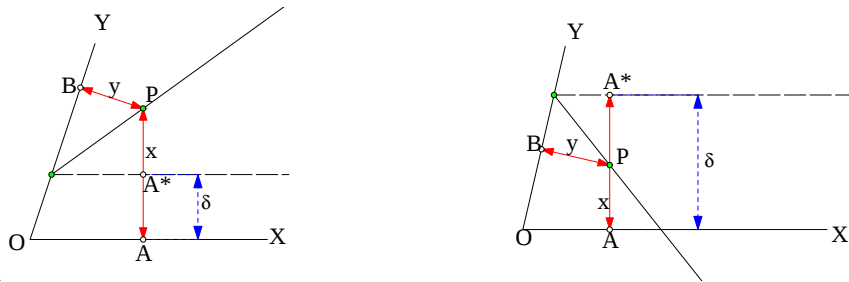
Άσκηση 1.16.6 Δοθέντων τριών μη συνευθειακών σημείων προσδιόρισε ευθεία από την οποία τα τρία σημεία να απέχουν την ίδια απόσταση (τρεις λύσεις).

Άσκηση 1.16.7 Δοθέντων δύο ίσων ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma$, να βρεθεί σημείο Δ επί δοθέντος κύκλου κ έτσι ώστε οι γωνίες $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ να είναι ίσες. Να εξετασθεί τότε υπάρχει λύση του προβλήματος.

Άσκηση 1.16.8 Δίδεται γωνία XOY και σταθερός αριθμός δ . Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P για τα οποία οι αποστάσεις $x = |PA|, y = |PB|$ από τις OX και OY αντίστοιχα, ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$x - y = \delta, \quad x + y = \delta,$$

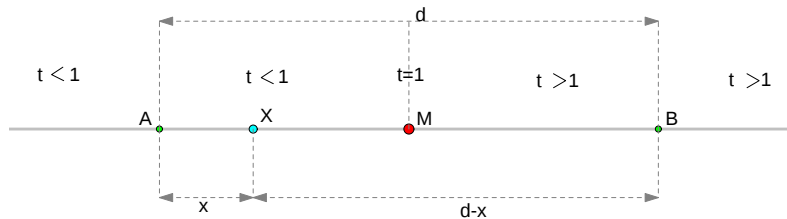
είναι αντίστοιχα δύο ευθείες. Βρες τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τις πλευρές (ή προεκτάσεις) της γωνίας XOY . Ποιές είναι οι θέσεις αυτών των ευθειών όταν το $\delta=0$;



Σχήμα 109: Ευθεία οριζόμενη από εξίσωση

1.17 Λόγοι, Αρμονικές τετράδες

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε πως ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου X ευθείας ε από δύο άλλα σταθερά σημεία A και B της ευθείας καθορίζει την θέση του X . Για δύο σταθερά σημεία A και B και προκαθορισμένο λόγο t αποδεικνύεται ότι υπάρχουν δύο ακριβώς σημεία X, X' που έχουν τον λόγο t ως προς τα A, B . Έτσι φτάνουμε στον ορισμό της *Αρμονικής τετράδας* (A, B, X, X') τεσσάρων σημείων πάνω σε μία ευθεία. Μία έννοια με πολλές χρήσεις στην Γεωμετρία. Ας συμβολίζουμε με x το μήκος $x = |AX|$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι ο



Σχήμα 110: Λόγος $t = \frac{|XA|}{|XB|}$

λόγος $t = \frac{|XA|}{|XB|}$ είναι μικρότερος του 1 όταν το X είναι επί της ημιευθείας με άκρο το μέσον M του AB που περιέχει το A και μεγαλύτερος του 1 επί της αντικειμένης της ημιευθείας, που είναι η περιέχουσα το B . Αν $d = |AB|$ το μήκος του AB τότε έχουμε για τα σημεία X εντός του AB :

$$t = \frac{x}{d-x} \Leftrightarrow x = \frac{dt}{1+t} \text{ για } t > 0. \quad (1)$$

Για τα σημεία εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB και από την μεριά του A :

$$t = \frac{x}{d+x} \Leftrightarrow x = \frac{dt}{1-t} \text{ για } t < 1. \quad (2)$$

Παρόμοια για τα σημεία εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB και από την μεριά του B :

$$t = \frac{x}{x-d} \Leftrightarrow x = \frac{dt}{t-1} \text{ για } t > 1. \quad (3)$$

Βλέπουμε ότι εκτός της τιμής του λόγου $t = 1$ που αντιστοιχεί σέ ένα ακριβώς σημείο, το μέσον M του AB , για όλες τις άλλες τιμές του $t > 0$ υπάρχουν δύο σημεία X, X' που έχουν λόγο $\frac{|XA|}{|XB|} = t$. Το ένα (X) είναι εντός και το βρίσκουμε από την εξίσωση (1) και το άλλο (X') είναι εκτός του AB και το βρίσκουμε από την εξίσωση (2) ή (3), ανάλογα με το αν το $t < 1$ ή $t > 1$.

Για παράδειγμα $t = 2$, δηλαδή $\frac{|XA|}{|XB|} = 2$, συνεπάγεται ότι το X είναι στην ημιευθεία του M από την μεριά του B . Το εντός του AB σημείο X το βρίσκουμε από την εξίσωση (1): $x = \frac{2d}{3}$ και το εκτός του AB σημείο X' το βρίσκουμε από την εξίσωση (3): $x = \frac{2d}{1} = 2d$. Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.17.1 Για κάθε θετικό αριθμό $t \neq 1$ υπάρχουν δύο ακριβώς σημεία X, X' της ευθείας AB , έτσι ώστε $\frac{|XA|}{|XB|} = t$. Τό ένα περιέχεται στο AB και το άλλο είναι εκτός αυτού. Για $t = 1$ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο, που είναι το μέσον του AB .

Αν περιοριστούμε στα σημεία εντός του AB , τότε έχουμε προφανώς το Πόρισμα:

Πόρισμα 1.17.1 *Γιά κάθε θετικό αριθμό $t > 0$ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο X επί της ευθείας AB και μεταξύ των A, B έτσι ώστε $\frac{|XA|}{|XB|} = t$.*

Αν δε περιοριστούμε στο εξωτερικό του AB , τότε έχουμε ανάλογα το Πόρισμα:

Πόρισμα 1.17.2 *Γιά κάθε θετικό αριθμό $t \neq 1$ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο X επί της ευθείας AB και εκτός του AB έτσι ώστε $\frac{|XA|}{|XB|} = t$.*

Μιά άμεση συνέπεια των δύο πορισμάτων με πολλές εφαρμογές είναι και το επόμενο πόρισμα, που δείχνει ότι ο λόγος $\frac{|XA|}{|XB|}$, μαζί με την πληροφορία του αν το X είναι εντός του AB ή εκτός, καθορίζει την θέση του X μονοσήμαντα.

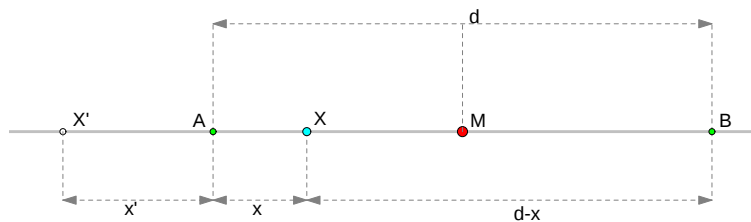
Πόρισμα 1.17.3 *Αν δύο σημεία X και Y της ευθείας AB σχηματίζουν τον ίδιο λόγο $\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|YA|}{|YB|}$ και είναι και τα δύο εντός του AB ή και τα δύο εκτός του AB , τότε συμπίπτουν.*

Δοθέντων δύο σημείων A, B , ονομάζουμε **Αρμονικά συζυγή ως προς A, B** δύο σημεία X και X' που ορίζουν τον ίδιο λόγο $t = \frac{|XA|}{|XB|} \neq 1$. Όπως είδαμε το ένα εξ αυτών περιέχεται στο ευθύγραμμο τμήμα AB και το άλλο είναι εκτός αυτού. Τέσσερα σημεία της ίδιας ευθείας: A, B, X, X' , από τα οποία, τα δύο τελευταία είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα δύο πρώτα, λέμε ότι ορίζουν μιά **Αρμονική Τετράδα** σημείων, την οποία συμβολίζουμε με (A, B, X, X') .

Πρόταση 1.17.1 *Δείξε ότι τα σημεία X, X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα A, B , που είναι σε απόσταση $|AB| = d$, τότε και μόνον, όταν οι αποστάσεις τους $x = |XA|$ και $x' = |X'A|$ από το A ικανοποιούν μία από τις σχέσεις*

$$2x \cdot x' = d \cdot (x' - x), \quad 2x \cdot x' = d \cdot (x' + x).$$

Η πρώτη αντιστοιχεί στον λόγο $t = \frac{|XA|}{|XB|} < 1$ και η άλλη στον λόγο $t > 1$.



Σχήμα 111: Τα A, B αρμονικά συζυγή των X, X'

Υπόδειξη: Στην πρώτη περίπτωση η ισότητα των λόγων $\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|X'A|}{|X'B|}$, δίνει σύμφωνα με τις εξισώσεις (1) και (2): $\frac{x}{d-x} = \frac{x'}{d+x'}$. Στην δεύτερη περίπτωση πάλι οι εξισώσεις (1) και (3) της παραγράφου δίνουν $\frac{x}{d-x} = \frac{x'}{x'-d}$. Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμες αντίστοιχα προς τις αναφερόμενες.

Πόρισμα 1.17.4 Εάν t είναι θετικός $t \neq 1$, τότε τα δύο σημεία X, X' της ευθείας AB που έχουν λόγο $\frac{|XA|}{|XB|} = t$ έχουν απόσταση μεταξύ τους

$$|XX'| = \begin{cases} \frac{2dt}{1-t^2} & \text{για } t < 1, \\ \frac{2dt}{t^2-1} & \text{για } t > 1, \end{cases}$$

όπου $d = |AB|$.

Απόδειξη: Για $t < 1$ και τα δύο σημεία είναι στην ημιευθεία του M (μέσον του AB) που περιέχει το A και έχουμε $|XX'| = x + x'$, όπου $x = |AX| = \frac{dt}{1+t}$ και $x' = |AX'| = \frac{dt}{1-t}$. Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ο πρώτος τύπος. Για $t > 1$ και τα δύο σημεία είναι στην ημιευθεία του M που περιέχει το B και έχουμε $|XX'| = x' - x$, όπου $x = |AX| = \frac{dt}{1+t}$ και $x' = |AX'| = \frac{dt}{t-1}$. Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ο δεύτερος τύπος, ο.ε.δ.

Πόρισμα 1.17.5 Τα σημεία X εσωτερικό του AB και X' εξωτερικό του AB είναι αρμονικά συζυγή των A και B τότε και μόνον, όταν

$$|X'A||X'B| - |XA||XB| = |XX'|^2.$$

Απόδειξη: Απλές πράξεις βάσει των προηγούμενων τύπων, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.17.1 Δείξε ότι τα αρμονικά συζυγή X και X' των A και B είναι πάντοτε στην ίδια ημιευθεία από τις δύο που ορίζονται από το μέσον M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Υπόδειξη: Όπως φαίνεται και από το σχήμα-111, τα αρμονικά συζυγή είναι στην μία ή την άλλη ημιευθεία του M ανάλογα με την τιμή του λόγου $t = \frac{|XA|}{|XB|}$. Αν $t < 1$, τότε είναι και τα δύο από την μεριά του A . Αν $t > 1$, τότε είναι και τα δύο από την μεριά του B .

Πρόταση 1.17.2 Τα σημεία X και X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα A και B τότε και μόνον, όταν

$$|MX||MX'| = \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2,$$

όπου M το μέσον του AB .

Απόδειξη: Έστω ότι τα X, X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς A και B . Χρησιμοποιούμε τους τύπους της Πρότασης 1.17.1, τους οποίους λύνουμε ως προς x' , υποθέτοντας το X εντός του AB :

$$x' = \begin{cases} \frac{dx}{d-2x} & \text{για } t < 1, \\ \frac{dx}{2x-d} & \text{για } t > 1. \end{cases}$$

Επίσης

$$|MX||MX'| = \begin{cases} \left(\frac{d}{2} - x\right)\left(\frac{d}{2} + x'\right) & \text{για } t < 1, \\ \left(x - \frac{d}{2}\right)\left(x' - \frac{d}{2}\right) & \text{για } t > 1. \end{cases}$$

Και στις δύο περιπτώσεις, αντικαθιστώντας το x' από τις προηγούμενες εξισώσεις και απλοποιώντας καταλήγουμε στην $|MX||MX'| = \left(\frac{d}{2}\right)^2$, που είναι η ζητούμενη. Αντίστροφα, η

υποτιθέμενη τώρα σχέση μεταφράζεται στην $(\frac{d}{2})^2 = |MX||MX'|$, όπου πάλι το $|MX||MX'|$ δίδεται από τους προηγούμενους τύπους και οδηγεί στις

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \begin{cases} (\frac{d}{2} - x)(\frac{d}{2} + x') & \text{για } t < 1, \\ (x - \frac{d}{2})(x' - \frac{d}{2}) & \text{για } t > 1. \end{cases}$$

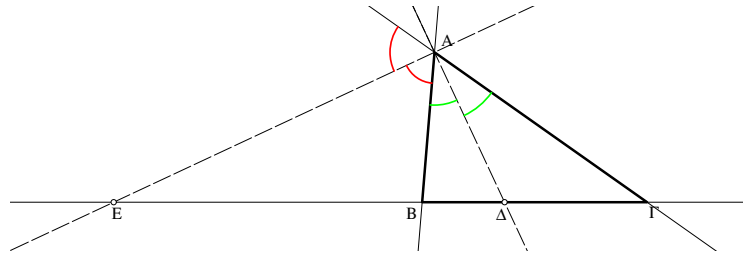
Απλοποιώντας αυτές καταλήγουμε στις εξισώσεις της Πρότασης 1.17.1, που χαρακτηρίζουν τα αρμονικά συζυγή σημεία, ο.ε.δ.

Άσκηση 1.17.2 Δείξε ότι αν τα σημεία X, X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα A, B , τότε και τα A, B είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα X και X' .

Υπόδειξη: Όταν τα X, X' είναι από την μεριά του A (ως προς το μέσον M), τότε οι λόγοι $\frac{|AX|}{|AX'|} = \frac{x}{x'}$ και $\frac{|BX|}{|BX'|} = \frac{d-x}{d+x'}$ είναι ίσοι σύμφωνα με την Πρόταση 1.17.1 (σχήμα 111). Όταν τα X, X' είναι από την μεριά του B , τότε $\frac{|AX|}{|AX'|} = \frac{x}{x'}$ και $\frac{|BX|}{|BX'|} = \frac{d-x}{x'-d}$ και η ισότητα των λόγων προκύπτει από την δεύτερη περίπτωση της Άσκησης 1.17.1.

Άσκηση 1.17.3 Με τους προηγούμενους συμβολισμούς δείξε ότι το μέσον N του διαστήματος XX' ευρίσκεται σε απόσταση $|AN| = d \frac{t^2}{1-t^2}$ για $t < 1$ και $|BN| = d \frac{t^2}{t^2-1}$ για $t > 1$.

Υπόδειξη: Δες πρώτα ότι λ.χ. για $t < 1$ ισχύει $x' > x$, αφού $\frac{x}{x'} = \frac{1-t}{1+t} < 1$. Συνεπώς αν $c = |AN|$ τότε το ότι το N είναι το μέσον του XX' σημαίνει ότι $x' - c = c + x \Rightarrow c = \frac{x'-x}{2}$. Αντικατάστησε σε αυτόν τον τύπο τα x, x' από τους τύπους (1) και (2) αντίστοιχα. Ανάλογα αντιμετωπίζεται και η άλλη περίπτωση, για $t > 1$.



Σχήμα 112: Δ και E αρμονικά συζυγή ως προς B και Γ

Σχόλιο Τα πιο διάσημα αρμονικά συζυγή σημεία είναι τα ίχνη Δ και E στην $B\Gamma$ των δύο διχοτόμων (δηλαδή οι τομές των δύο διχοτόμων με την $B\Gamma$), εσωτερικής και εξωτερικής, από την κορυφή A ενός τριγώνου $AB\Gamma$ που δεν έχει τις προσκείμενες πλευρές (AB και AG) ίσες. Γι' αυτά θα μιλήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο (Πόρισμα 3.3.7) και (Άσκηση 3.3.3).

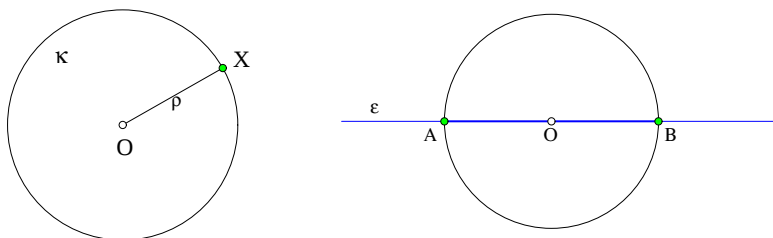
Άσκηση 1.17.4 Το σημείο Γ ευρίσκεται στην ευθεία AB από την μεριά του B και ισχύει $|\Gamma A| = \nu \cdot |AB|$. Να βρεθεί ο λόγος $t = \frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|}$. Το ίδιο ερώτημα όταν το Γ είναι από την μεριά του A .

Υπόδειξη: Στην πρώτη περίπτωση $|\Gamma B| = |\Gamma A| - |AB|$, άρα $t = \frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} = \frac{|\Gamma A|}{|\Gamma A| - |AB|} = \frac{\nu|AB|}{\nu|AB| - |AB|} = \frac{\nu}{\nu-1}$. Στην δεύτερη περίπτωση $|\Gamma B| = |\Gamma A| + |AB|$ κτλ.

Κεφάλαιο 2

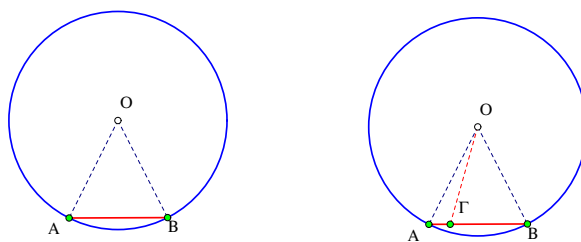
Κύκλος και πολύγωνα

2.1 Ο κύκλος, η διάμετρος, η χορδή



Σχήμα 113: Κύκλος $\kappa(O, \rho)$, Διάμετρος AB

Κύκλος ακτίνας ρ λέγεται το σχήμα του επιπέδου που αποτελείται από όλα τα σημεία X που απέχουν από ένα σταθερό σημείο O απόσταση ρ . Το σημείο O λέγεται **Κέντρο** του κύκλου. Συχνά με τον όρο **Ακτίνα OX** εννοούμε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το O και το σημείο του κύκλου X. Συχνά επίσης συμβολίζουμε αυτόν τον κύκλο με $O(\rho)$ ή με $\kappa(O, \rho)$. **Εσωτερικό** του κύκλου ονομάζουμε το σύνολο των σημείων Y των οποίων η απόσταση από το κέντρο O είναι μικρότερη της ακτίνας: $|OY| < \rho$. **Εξωτερικό** του κύκλου ονομάζουμε το σύνολο των σημείων Z των οποίων η απόσταση από το κέντρο O είναι μεγαλύτερη της ακτίνας: $|OZ| > \rho$. Από το Αξίωμα 1.3.3 των ευθειών συνάγεται ότι κάθε ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο του O συναντά τον κύκλο σε δύο σημεία ακριβώς A και B. Τέτοια σημεία του κύκλου ονομάζονται **Αντιδιαμετρικά** και το ευθύγραμμο τμήμα AB που ορίζεται από αυτά ονομάζεται **Διάμετρος** του κύκλου. Προφανώς το μέσον κάθε διαμέτρου είναι το κέντρο O και το μήκος της είναι διπλάσιο της ακτίνας $|AB| = 2\rho$. Δύο κύκλοι είναι λέγονται **Ίσοι** όταν οι ακτίνες τους είναι ίσες. **Χορδή** κύκλου λέγεται



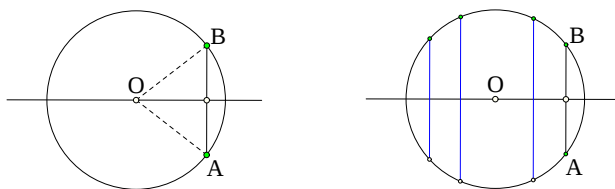
Σχήμα 114: (α) Χορδή κύκλου, (β) Κοινά σημεία χορδής και κύκλου

ένα ευθύγραμμο τμήμα AB που τα άκρα του είναι επί του κύκλου. Η διάμετρος είναι μιά ειδική περίπτωση χορδής. Κάθε χορδή AB που δεν είναι διάμετρος ορίζει, μαζί με το κέντρο O του κύκλου, ένα ισοσκελές τρίγωνο AOB, τα σκέλη του οποίου έχουν μήκος ρ .

Πρόταση 2.1.1 Μιά χορδή AB δεν περιέχει άλλα σημεία του κύκλου εκτός των άκρων της A και B.

Απόδειξη: Αν η χορδή περιείχε ένα ακόμη σημείο Γ του κύκλου, τότε το BOΓ θα ήταν ισοσκελές (σχήμα 114(β)) και το A θα ήταν στην προέκταση της βάσης του, άρα, κατά το Πορίσμα 1.10.6 θα ίσχυε $\rho = |OA| < |OG| = \rho$ που είναι άτοπο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.1.1 Το κέντρο του κύκλου περιέχεται στην μεσοκάθετο πάσης χορδής αυτού.



Σχήμα 115: (α) Μέσον χορδής, (β) Μέσα παραλλήλων χορδών

Απόδειξη: Προφανώς, αφού το κέντρο ισαπέχει από τα άκρα της χορδής θα περιέχεται στην μεσοκάθετο αυτής (Πόρισμα 1.9.1), ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.1.2 Η κάθετος από το κέντρο προς την χορδή κύκλου διέρχεται από το μέσον αυτής.

Πόρισμα 2.1.3 Τα μέσα παραλλήλων χορδών κύκλου περιέχονται στην διάμετρο την κάθετη στις χορδές αυτές.

Απόδειξη: Φέρουμε από το κέντρο του κύκλου κάθετη προς μία τέτοια χορδή, αυτή θα περνά από το μέσον της χορδής και θα είναι και κάθετος σε όλες τις παράλληλες χορδές, άρα θα διέρχεται και από το μέσον αυτών (Πόρισμα 2.1.2), ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.1.4 Κάθε διάμετρος του κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του.

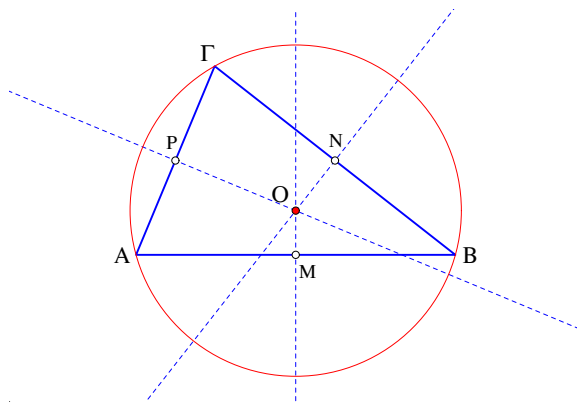
Πόρισμα 2.1.5 Το κέντρο του κύκλου είναι και κέντρο συμμετρίας του.

Πρόταση 2.1.2 Το μήκος χορδής κύκλου ακτίνας ρ είναι μικρότερο ή ίσο του μήκους 2ρ της διαμέτρου. Εάν η χορδή έχει μήκος 2ρ τότε συμπίπτει με διάμετρο του κύκλου.

Απόδειξη: Αν O είναι το κέντρο του κύκλου και $\delta = |AB|$ το μήκος της χορδής και τα σημεία $\{A, B, O\}$ δεν είναι στην ίδια ευθεία, τότε σχηματίζεται τρίγωνο ABO . Το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές και τα σκέλη του έχουν μήκος ρ . Συνεπώς κατά την τριγωνική ανισότητα $\delta = |AB| < |OA| + |OB| = 2\rho$. Αυτή η ανισότητα επίσης συνεπάγεται ότι δεν μπορεί η χορδή να έχει μήκος 2ρ και τα σημεία A, B και O να μην είναι στην ίδια ευθεία. Τούτο αποδεικνύει τον δεύτερο ισχυρισμό, ο.ε.δ.

Πρόταση 2.1.3 Για κάθε τριάδα σημείων A, B και Γ , μη περιεχομένων στην ίδια ευθεία, υπάρχει ένας και μοναδικός κύκλος διερχόμενος από αυτά.

Απόδειξη: Οι μεσοκάθετοι των ευθυγράμμων τμημάτων AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα τέμνονται σε σημείο O . Αν δεν ετέμοντο, τότε θα ήταν παράλληλες και από το B θα είχαμε τις κάθετες BM, BN σε δύο παράλληλες, άρα τα M, N και B συνευθειακά, που είναι άτοπο. Από την πρώτη μεσοκάθετο έχουμε (Πόρισμα 1.9.1) ότι $|OA| = |OB|$ και από την δεύτερη μεσοκάθετο ότι $|OB| = |O\Gamma|$. Συνάγεται λοιπόν ότι και $|OA| = |O\Gamma|$, άρα το O είναι και επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι οι τρεις μεσοκάθετοι στις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται από το ίδιο σημείο O , το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές του $|OA| = |OB| = |O\Gamma| = \rho$. Συνεπώς ο κύκλος με κέντρο O

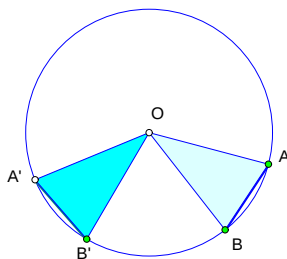


Σχήμα 116: Περιγεγραμμένος κύκλος (ΑΒΓ) τριγώνου ΑΒΓ

και ακτίνα r διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. Το ότι ο κύκλος αυτός είναι μοναδικός προκύπτει με το ίδιο επιχείρημα. Κάθε άλλος κύκλος που θα περνούσε από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, θα είχε το κέντρο του επι της μεσοκαθέτου των πλευρών του τριγώνου, αφού αυτές θα ήσαν τότε χορδές του κύκλου (Πόρισμα 2.1.1). Επομένως το κέντρο του και η ακτίνα του θα συνέπιπταν με τα αντίστοιχα του κύκλου που φτιάξαμε προηγουμένως, ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.1.6 Γιά κάθε τμήγωνο ΑΒΓ υπάρχει ένας και μοναδικός κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του.

Τον κύκλο του προηγουμένου πορίσματος ονομάζουμε **Περιγεγραμμένο κύκλο** του τριγώνου ή **Περίκυκλο**. Το κέντρο αυτού του κύκλου λέγεται **Περίκεντρο** του τριγώνου και όπως είδαμε στην απόδειξη παραπάνω, συμπίπτει με το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου. Συχνά τον κύκλο που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ συμβολίζουμε με (ΑΒΓ).



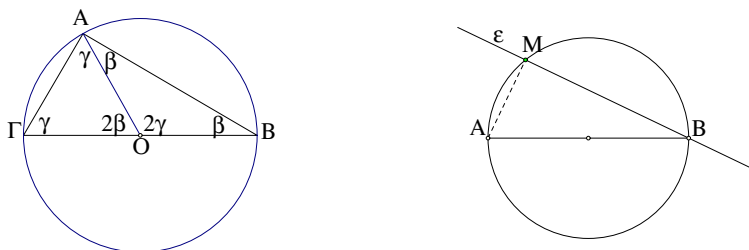
Σχήμα 117: Ισες χορδές και ίσα ισοσκελή τρίγωνα

Άσκηση 2.1.1 Δείξε ότι ίσες χορδές ΑΒ και ΑΒ' στον ίδιο κύκλο με κέντρο Ο ορίζουν ίσα (ισοσκελή) τρίγωνα ΑΟΒ και Α'ΟΒ'.

Πόρισμα 2.1.7 Αν σημείο Α βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ υπό ορθή γωνία, δηλαδή $|\angle BAG| = 90^\circ$, τότε περιέχεται στον κύκλο με διάμετρο ΒΓ.

Απόδειξη: Αν το ΒΓ φαίνεται υπό ορθή γωνία από το Α, τότε, κατά το Πόρισμα 1.15.13, η διάμεσος από το Α επί την ΒΓ θα είναι το ήμισυ αυτής, συνεπώς τα σημεία Α, Β και Γ θα είναι στον κύκλο με διάμετρο ΒΓ, ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.1.8 Για κάθε σημείο A του κύκλου με διάμετρο $B\Gamma$ η γωνία BAG είναι ορθή. *Ισοδύναμα:* μία διάμετρος φαίνεται από κάθε σημείο του κύκλου (πλην των άκρων της) υπό ορθή γωνία. Αντίστροφα, αν μία χορδή κύκλου φαίνεται από ένα σημείο του υπό ορθή γωνία, τότε είναι διάμετρος του κύκλου.



Σχήμα 118: (α) Διάμετροι φαίνονται υπό ορθή γωνία, (β) Προβολή σε ευθεία

Απόδειξη: Πράγματι, αν η $B\Gamma$ είναι διάμετρος και το A σημείο του κύκλου (διαφορετικό των B και Γ) τότε δημιουργούνται τα ισοσκελή τρίγωνα OAB και OAG με γωνίες στην βάση αντίστοιχα τις γωνίες β και γ του τριγώνου $AB\Gamma$. Το άθροισμα των (εξωτερικών) γωνιών των δύο ισοσκελών στο O είναι $2\beta + 2\gamma = 180$ (Πόρισμα 1.15.2), άρα $\beta + \gamma = 90$, που δείχνει ότι το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A . Αντίστροφα, αν η χορδή $B\Gamma$ φαίνεται υπό ορθή γωνία από το A , τότε, κατά το προηγούμενο πόρισμα το A θα είναι στον κύκλο με διάμετρο $B\Gamma$, ο οποίος έχοντας τρία κοινά σημεία με τον δοθέντα (τα A, B και Γ) θα πρέπει να συμπίπτει με αυτόν, ο.ε.δ.

Άσκηση 2.1.2 Δείξε ότι από δύο χορδές κύκλου α και β , η μεγαλύτερη απέχει την μικρότερη απόσταση από το κέντρο.

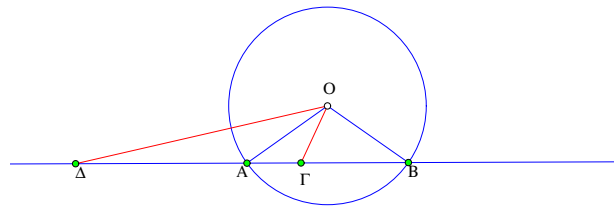
Άσκηση 2.1.3 Δείξε ότι αν τρία σημεία X, Y και Z είναι επί κύκλου κ , τότε και τα συμμετρικά τους X', Y', Z' (ως προς άξονα ή σημείο) θα είναι επί κύκλου κ' που είναι ίσος με τον κ .

Άσκηση 2.1.4 Έστω ότι A και B είναι δύο σταθερά σημεία και ε ευθεία διερχόμενη διά του B . Έστω επίσης M η προβολή του A επί της ε . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M καθώς η ευθεία ε περιστρέφεται περί το B .

Υπόδειξη: Όταν η ε δεν συμπίπτει με την AB ή την κάθετο αυτής στο B , τότε το τρίγωνο ABM (σχήμα 118(β)) είναι ορθογώνιο με σταθερά υποτείνουσα AB , άρα κατά το προηγούμενο πόρισμα το σημείο M θα είναι επί του κύκλου με διάμετρο AB .

Άσκηση 2.1.5 Δίδονται δύο συγκεντρικοί κύκλοι α και β . Ευθεία ε τέμνουσα και τους δύο κύκλους ορίζει ευθύγραμμα τμήματα $AB, \Gamma\Delta$ περιεχόμενα μεταξύ των κύκλων που είναι ίσα.

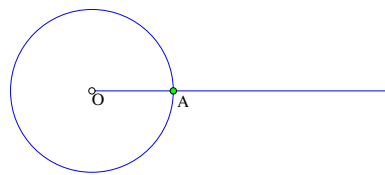
2.2 Κύκλος και ευθεία



Σχήμα 119: Κοινά σημεία ευθείας και κύκλου

Πρόταση 2.2.1 Μία ευθεία AB περιέχει το πολύ δύο σημεία ενός κύκλου.

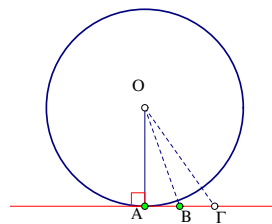
Απόδειξη: Δείχνουμε ότι μία ευθεία δεν μπορεί να περιέχει τρία ή περισσότερα σημεία. Πράγματι, αν η ευθεία, είχε τρία κοινά σημεία A , B και Γ με τον κύκλο τότε ένα από τα τρία θα ήταν μεταξύ των δύο άλλων τα οποία θα όριζαν μία χορδή του κύκλου. Έτσι θα είχαμε χορδή που θα περιήχε και τρίτο σημείο του κύκλου. Κάτι που αποκλείσαμε με την Πρόταση 2.1.1, ο.ε.δ.



Σχήμα 120: Τομή κύκλου και ημιευθείας

Πόρισμα 2.2.1 Κάθε ημιευθεία με άκρο που συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου τέμνει τον κύκλο σε ένα ακριβώς σημείο.

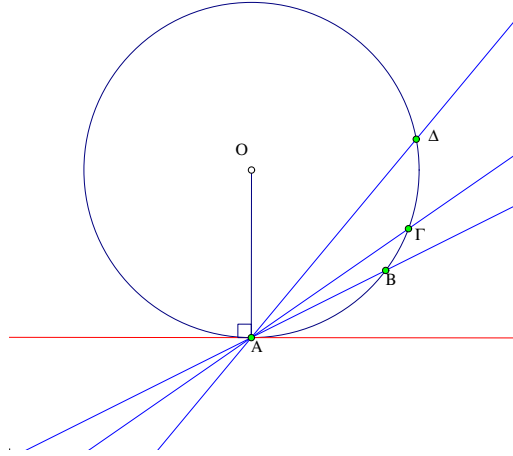
Εφαπτόμενη του κύκλου λέγεται μία ευθεία που έχει ένα και μόνο κοινό σημείο με αυτόν. Το σημείο αυτό λέγεται **Σημείο επαφής** του κύκλου και της ευθείας.



Σχήμα 121: Εφαπτόμενη κύκλου

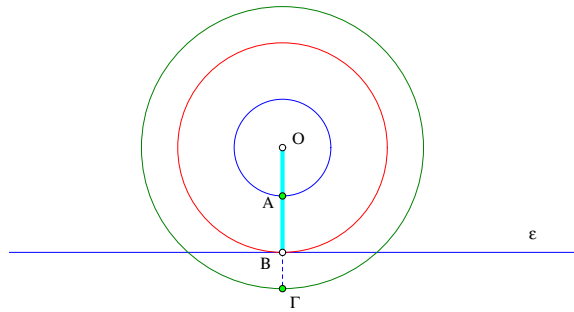
Πρόταση 2.2.2 Μία ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο A με κύκλο είναι κάθετη στο A στην ακτίνα OA του κύκλου.

Απόδειξη: Διά της εις άτοπον απαγωγής. Αν δεν ήταν κάθετη, τότε έστω OB η κάθετη και όρισε το Γ επί της ευθείας έτσι ώστε το B να είναι το μέσον του $A\Gamma$ (σχήμα 121). Τότε τα τρίγωνα OBA και $OB\Gamma$ θα ήταν ορθογώνια και ίσα, ως έχοντα την OB κοινή τις BA και $B\Gamma$ ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες OBA και $OB\Gamma$ ίσες ως ορθές. Τότε και το OAG θα ήταν ισοσκελές και θα είχαμε $|OG| = |OA| = \rho$, δηλαδή το Γ θα ήταν επί του κύκλου και η ευθεία θα είχε και άλλο κοινό σημείο με τον κύκλο εκτός του A , άτοπο, ο.ε.δ.



Σχήμα 122: Ευθείες διά του σημείου A του κύκλου

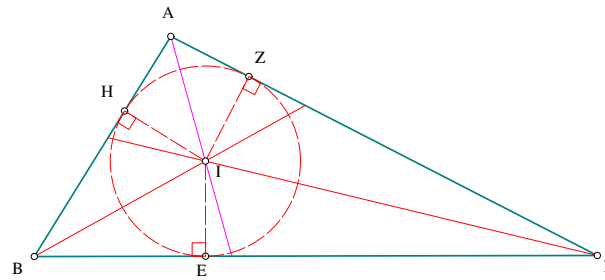
Πόρισμα 2.2.2 Όλες οι ευθείες που διέρχονται από σημείο A κύκλου, εκτός της καθέτου της ακτίνας OA στο A , τέμνουν τον κύκλο σε ένα δεύτερο σημείο B . Η κάθετος αυτή είναι η μία και μοναδική εφαπτόμενη του κύκλου στο A .



Σχήμα 123: Τομή ευθείας και κύκλου

Πόρισμα 2.2.3 Δοθείσης ευθείας ε και σημείου O εκτός αυτής, ο κύκλος $O(\rho)$ τέμνει την ευθεία τότε και μόνον, όταν $\rho > |OB|$ όπου το B είναι η προβολή του O επί της ε ($|OB|$ είναι η απόσταση του σημείου O από την ευθεία ε). Όταν $\rho = |OB|$ τότε ο κύκλος εφάπτεται της ευθείας στο B , τέλος όταν $\rho < |OB|$ ο κύκλος δεν τέμνει την ευθεία.

Πρόταση 2.2.3 Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται από κοινό σημείο I που είναι το κέντρο κύκλου $I(r)$ εφαιπόμενου ταυτόχρονα και στις τρεις πλευρές του.

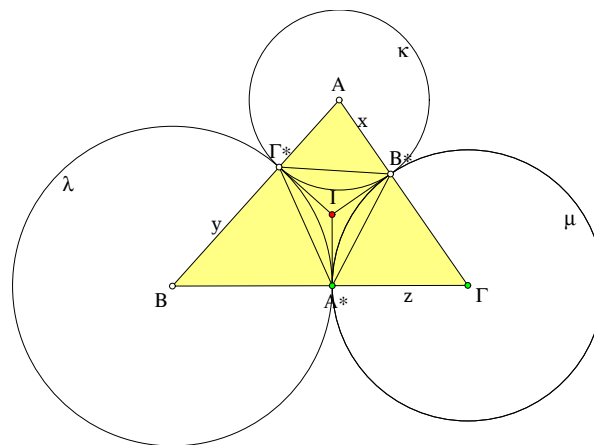


Σχήμα 124: Εγγεγραμμένος του τριγώνου κύκλος

Απόδειξη: Έστω I το σημείο τομής των δύο διχοτόμων του τριγώνου και συγκεκριμένα των διχοτόμων των γωνιών B και Γ . Θα δείξουμε ότι και η τρίτη διχοτόμος της γωνίας A διέρχεται από το I . Πράγματι, κατά την Πρόταση 1.15.12, οι αποστάσεις του I από τις πλευρές της γωνίας B : IE και IH θα είναι ίσες. Παρόμοια και οι αποστάσεις του I από τις πλευρές της γωνίας Γ : IE και IZ θα είναι ίσες. Συνεπώς οι τρεις αποστάσεις: IE , IH και IZ θα είναι ίσες μεταξύ τους, άρα ακτίνες του κύκλου με κέντρο I και ακτίνα $r = |IE|$. Η ισότητα των αποστάσεων IH και IZ από τις πλευρές τις γωνίας A δείχνουν ότι το I ευρίσκεται και επί της διχοτόμου της γωνίας A (Πρόταση 1.15.12). Η κάθετοτητα των πλευρών στα άκρα των ακτίνων αυτών του κύκλου δείχνει (2.2.2) ότι ο κύκλος εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου, ο.ε.δ.

Άσκηση 2.2.1 Δείξε ότι το σημείο I επί της διχοτόμου AD τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων, τότε και μόνον, όταν η γωνία $|B\Gamma| = 90 + \frac{|BA\Gamma|}{2}$.

Το σημείο I που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση λέγεται **Έγκεντρο του τριγώνου**. Ο κύκλος με κέντρο το I που εφάπτεται των τριών πλευρών του τριγώνου λέγεται **Εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου**. Η ακτίνα του $r = |IE| = |IZ| = |IH|$ ισούται με την απόσταση του I από μία οποιαδήποτε από τις πλευρές του. Σημείωσε ότι από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $E\Gamma I$, $Z\Gamma I$ προκύπτει ότι $|\Gamma E| = |\Gamma Z|$ και ανάλογα $|BE| = |BH|$, $|AH| = |AZ|$.



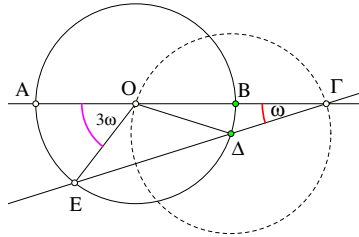
Σχήμα 125: Τρεις εφαπτόμενοι κύκλοι

Άσκηση 2.2.2 Κατασκεύασε κύκλους κ , λ , μ που ανά δύο εφάπτονται και έχουν αντίστοιχα κέντρα στις κορυφές A , B και Γ τριγώνου. Δείξε ότι οι αντίστοιχες ακτίνες x, y, z αυτών των κύκλων ικανοποιούν τις ισότητες (με $a = |B\Gamma|, b = |\Gamma A|, c = |AB|$):

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2}(a + b + c), & y &= \frac{1}{2}(c + a - b) = \tau - b, \\ x &= \frac{1}{2}(b + c - a) = \tau - a, & z &= \frac{1}{2}(a + b - c) = \tau - c. \end{aligned}$$

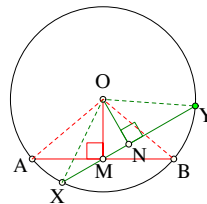
Άσκηση 2.2.3 Στην προηγούμενη άσκηση δείξε ότι τα σημεία επαφής των κύκλων A^* , B^* , Γ^* είναι επί των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου το έγκεντρο I συμπίπτει με το περίκεντρο του $A^*B^*\Gamma^*$.

Άσκηση 2.2.4 Στην προέκταση της διαμέτρου AB κύκλου $\kappa(O, \rho)$ και από την μεριά του B παίρνουμε σημείο Γ και τέμνουσα του κύκλου $\Gamma\Delta E$, έτσι ώστε $|\Gamma\Delta| = \rho$. Δείξε ότι η γωνία $|\angle AOE| = 3|\angle O\Gamma\Delta|$.



Σχήμα 126: Τριπλασιασμός γωνίας

Άσκηση 2.2.5 Δείξε ότι η ελάχιστου μήκους χορδή XY , κύκλου $\kappa(O, \rho)$, που διέρχεται από σταθερό σημείο M (διαφορετικό του O) στο εσωτερικό του κύκλου, είναι η κάθετη AB στην OM .



Σχήμα 127: Ελάχιστη χορδή διά σημείου

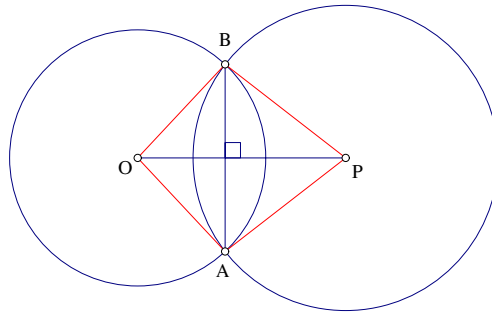
Υπόδειξη: Το τρίγωνο OMN έχει υποτείνουσα $|OM| > |ON|$, άρα το ισοσκελές OAB έχει μικρότερη βάση του ισοσκελούς OXY (Άσκηση 2.1.2).

2.3 Δύο κύκλοι

Πόρισμα 2.3.1 Δύο διαφορετικοί κύκλοι έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη: Διότι αν είχαν τρία ή περισσότερα θα ταυτίζονταν κατά την Πρόταση 2.1.3 ο.ε.δ.

Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ορίζεται από τα δύο σημεία τομής A και B δύο κύκλων που τέμνονται σε δύο σημεία λέγεται **Κοινή χορδή** των δύο κύκλων. Δύο κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο λέγονται **Συγκεντρικοί**. Η ευθεία που ενώνει τα κέντρα O και P δύο μη συγκεντρικών κύκλων λέγεται **Διάκεντρος** των κύκλων. Συχνά ονομάζουμε Διάκεντρο και το ευθύγραμμο τμήμα OP που ενώνει τα κέντρα. Το τί ακριβώς ενοούμε σε κάθε περίπτωση συνάγεται από τα συμφραζόμενα.

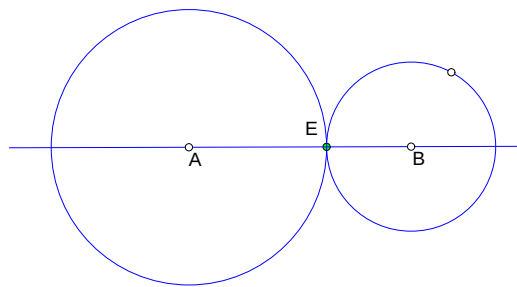


Σχήμα 128: Κοινή χορδή και διάκεντρος δύο τεμνομένων κύκλων

Πόρισμα 2.3.2 Η διάκεντρος OP δύο κύκλων που τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία A και B συμπίπτει με την μεσοκάθετο της κοινής χορδής τους AB .

Απόδειξη: Κατά το Πόρισμα 2.1.1 τα κέντρα των δύο κύκλων θα ευρίσκονται στην μεσοκάθετο της χορδής τους AB , ο.ε.δ.

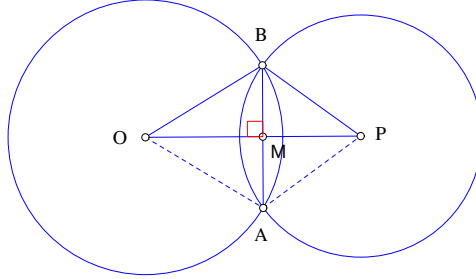
Δύο κύκλοι λέγονται **Εφαπτόμενοι** όταν έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A . Το σημείο αυτό λέγεται **Σημείο επαφής** των δύο κύκλων.



Σχήμα 129: Σημείο επαφής επί της διακέντρου

Πρόταση 2.3.1 Το σημείο επαφής δύο εφαπτομένων κύκλων ευρίσκεται επί της διακέντρου αυτών. Αντίστροφα, αν οι κύκλοι έχουν ένα σημείο τομής επί της διακέντρου τότε αυτό είναι μοναδικό σημείο τομής και οι κύκλοι εφάπτονται.

Απόδειξη: Διά της εις άτοπον απαγωγής. Έστω ότι το σημείο επαφής A των δύο κύκλων δεν είναι στην διάκεντρο OP αυτών (επόμενο σχήμα). Φέρε τότε κάθετο AM από το A στην διάκεντρο OP και προέκτεινέ την κατά το διπλάσιο μέχρι το B. Τα τρίγωνα OMA και OMB είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο). Ανάλογα και τα PMA και PMB είναι ίσα. Συνάγεται λοιπόν ότι $|OB| = |OA| = \rho$ και $|PB| = |PA| = \rho'$, όπου ρ και ρ' οι ακτίνες των δύο κύκλων.

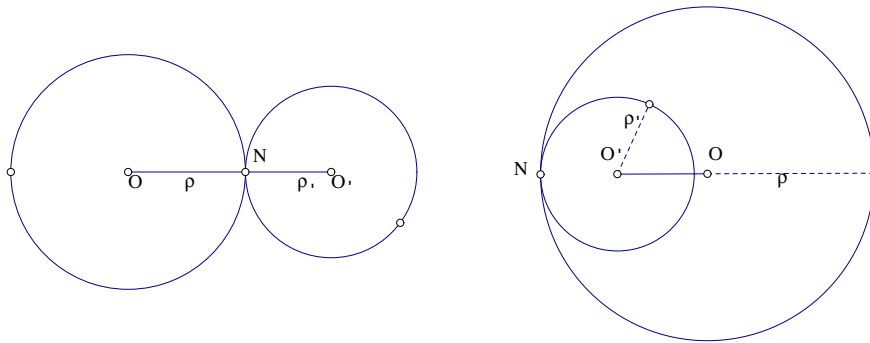


Σχήμα 130: Συμμετρία ως προς διάκεντρο

Συνεπώς εκτός του A ευρίσκουμε και άλλο σημείο B κοινό των δύο κύκλων, πράγμα άτοπον. Αντίστροφα, αν οι κύκλοι έχουν δύο σημεία τομής A και B, τότε η διάκεντρός τους συμπίπτει με την μεσοκάθετο του AB (Πόρισμα 2.3.2) και κανένα από τα δύο σημεία δεν μπορεί να είναι επί της διακέντρου, ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.3.3 Δύο κύκλοι $O(\rho)$ και $O'(\rho')$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο (εφάπτονται) τότε και μόνον όταν ισχύει μία από τις ισότητες:

$$\rho + \rho' = |OO'|, \quad |\rho - \rho'| = |OO'|.$$

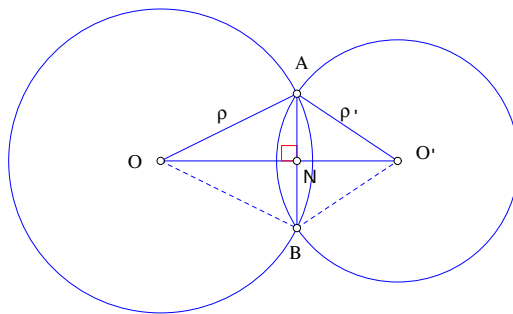


Σχήμα 131: $\rho + \rho' = |OO'|$ και $|\rho - \rho'| = |OO'|$

Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι οι κύκλοι εφάπτονται *εξωτερικά* και στην δεύτερη λέμε ότι εφάπτονται *εσωτερικά*.

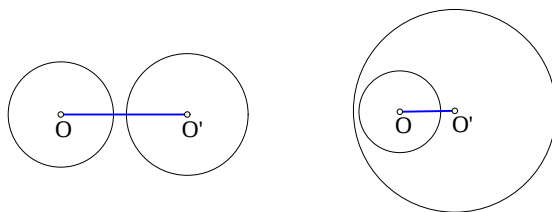
Πρόταση 2.3.2 Δύο κύκλοι $O(\rho)$ και $O'(\rho')$ τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία τότε και μόνον όταν η διάκεντρος αυτών $|OO'|$ και οι ακτίνες τους ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες

$$|\rho - \rho'| < |OO'| < \rho + \rho'.$$



Σχήμα 132: Τομή δύο κύκλων

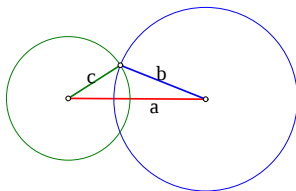
Απόδειξη: Αν οι κύκλοι τέμνονται και ένα (από τα δύο) σημείο τομής είναι το A, τότε σχηματίζεται τρίγωνο με πλευρές μηκών ρ , ρ' και $|OO'|$ (Πρόταση 2.3.1). Κατά τα Πρόταση 1.11.1 και Πρόταση 1.11.2 θα ικανοποιούνται οι τριγωνικές ανισότητες. Αντίστροφα, αν ικανοποιούνται οι ανισότητες αυτές, τότε οι δύο κύκλοι δεν μπορούν να εφάπτονται, διότι τότε θα είχαμε $\rho + \rho' = |OO'|$ ή $|\rho - \rho'| = |OO'|$. Επίσης δεν μπορεί να μην τέμνονται διότι

Σχήμα 133: $\rho + \rho' < |OO'|$ και $|\rho - \rho'| > |OO'|$

μετρώντας αποστάσεις επί της διακέντρου τους θα είχαμε ή $\rho + \rho' < |OO'|$ ή $|\rho - \rho'| > |OO'|$. Επομένως αν οι ανισότητες ικανοποιούνται οι κύκλοι θα τέμνονται σε δύο σημεία, ο.ε.δ.

Πρόταση 2.3.3 Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών τρεις δοθέντες θετικούς αριθμούς a, b, c , τότε και μόνον όταν οι αριθμοί αυτοί ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες

$$|b - c| < a < b + c.$$

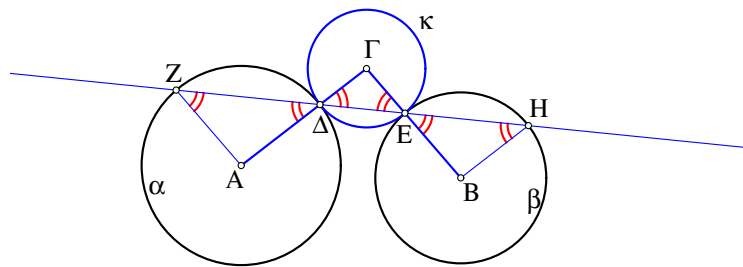
Σχήμα 134: Κατασκευή τριγώνου από τις πλευρές του a, b και c

Απόδειξη: Αν τα a, b, c είναι μήκη πλευρών τριγώνου ABΓ τότε ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες (1.11). Αντίστροφα, αν οι τρεις αυτοί αριθμοί ικανοποιούν αυτές τις ανισότητες, τότε κατασκευάζεται τρίγωνο με αυτά τα μήκη πλευρών. Πράγματι έστω ευθύγραμμο τμήμα BG μήκους a . Με κέντρα τα B και Γ αντιστοίχως γράφουμε κύκλους ακτίνας c και b . Οι κύκλοι αυτοί θα τέμνονται σε δύο σημεία A και A' μη κείμενα επί της BG, διότι οι ανισότητες

που ικανοποιούν οι ακτίνες τους είναι ακριβώς οι ανισότητες του Πορίσματος 2.3.2. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Gamma'$ είναι ίσα (ΠΠΠ κριτήριο) και έχουν μήκη πλευρών a, b και c , ο.ε.δ.

Άσκηση 2.3.1 Δείξε ότι το σχήμα που αποτελείται από δύο κύκλους είναι συμμετρικό ως προς άξονα που ταυτίζεται με την διάκεντρό τους. Αν οι δύο κύκλοι είναι ίσοι, δείξε ότι υπάρχει και άλλος άξονας συμμετρίας κάθετος στον προηγούμενο, καθώς και κέντρο συμμετρίας του σχήματος.

Άσκηση 2.3.2 Δείξε ότι αν ένας κύκλος κ εφάπτεται δύο άλλων α και β , τότε η ευθεία ΔE που ενώνει τα δύο σημεία επαφής του κ τέμνει ξανά τους δύο άλλους σε σημεία Z και H , έτσι ώστε οι ακτίνες AZ και BE να είναι παράλληλες και οι $A\Delta$ και BH να είναι επίσης παράλληλες.



Σχήμα 135: Κύκλος ταυτόχρονα εφαπτόμενος δύο άλλων

Υπόδειξη: Τρίγωνα που σχηματίζονται από ακτίνες είναι ισοσκελή. Οι γωνίες τέτοιων ισοσκελών στα Z και E είναι ίσες εντός-εκτός και επί τα αυτά μέρη για την ΔE ως προσπίπτουσα στις ευθείες AZ και $B\Gamma$.

Άσκηση 2.3.3 Χώρισε χορδή AB κύκλου $\kappa(O, \rho)$ σε τρία ίσα τμήματα $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔB . Δείξε ότι οι γωνίες $\angle A\Gamma O$, $\angle \Gamma O \Delta$ και $\angle \Delta O B$ δεν είναι ίσες μεταξύ τους. Ακριβέστερα, οι $\angle A\Gamma O$ και $\angle \Delta O B$ είναι ίσες αλλά μικρότερες της $\angle \Gamma O \Delta$.

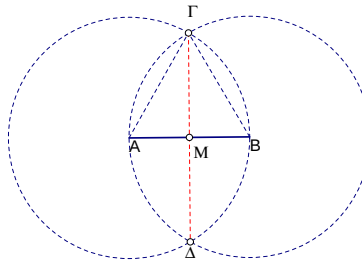
Άσκηση 2.3.4 Δίδονται δύο παράλληλες ευθείες ϵ και ζ και σημείο A μη περιεχόμενο σε αυτές. Κατασκεύασε κύκλο διερχόμενο από το A και εφαπτόμενο των δύο ευθειών.

Άσκηση 2.3.5 Δίδεται κύκλος κ και δύο σημεία A και B εκτός αυτού. Κατασκεύασε ορθή γωνία $\angle XOY$ της οποίας η κορυφή O να είναι σημείο του κύκλου κ και οι πλευρές OX, OY να διέρχονται αντίστοιχα από τα A και B .

2.4 Κατασκευές

Με τον όρο αυτό εννοούμε μία ακολουθία κατασκευών κύκλων ή/και ευθειών και των τομών τους. Ο κανόνας (χάρακας) υποτίθεται ότι μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε την ευθεία (και το ευθύγραμμο τμήμα) που ορίζεται από δύο σημεία A και B . Ο διαβήτης μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε τον κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε ακτίνα. Επίσης έχουμε την δυνατότητα να βρούμε τα σημεία τομής α) ευθείας και ευθείας, β) ευθείας και κύκλου, γ) κύκλου και κύκλου.

Κατασκευή 2.4.1 Κατασκευή του μέσου M ευθυγράμμου τμήματος και της μεσοκαθέτου σε αυτό.



Σχήμα 136: Κατασκευή του μέσου

Κατασκευή: Με κέντρο το A και ακτίνα $\rho = |AB|$ κατασκευάζουμε τον κύκλο $A(\rho)$. Παρόμοια με κέντρο B και ακτίνα ρ κατασκευάζουμε τον κύκλο $B(\rho)$. Οι ακτίνες των δύο κύκλων ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες ($0 < \rho < 2\rho$), άρα κατά το Πρόταση 2.3.2 οι δύο κύκλοι θα τέμνονται σε δύο σημεία Γ και Δ . Το ζητούμενο μέσον είναι το σημείο τομής M της ευθείας AB και της $\Gamma\Delta$. Πράγματι από το Πόρισμα 2.3.2 έπεται ότι η AB είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$, και επειδή εκ κατασκευής το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η $\Gamma\Delta$ θα διέρχεται από το μέσον της AB και θα ταυτίζεται με την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος (Πόρισμα 1.8.3), ο.ε.κ.

Κατασκευή 2.4.2 Κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου με μία πλευρά ταυτιζόμενη με δοθέν ευθύγραμμο τμήμα AB .

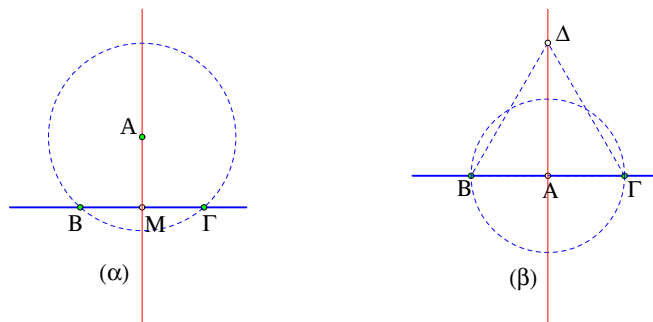
Κατασκευή: Ίδια κατασκευή με την προηγούμενη (και ίδιο σχήμα). Το τρίγωνο $AB\Gamma$ που κατασκευάζεται στην προηγούμενη κατασκευή είναι το ζητούμενο ισόπλευρο, ο.ε.κ.

Κατασκευή 2.4.3 Κατασκευή των γωνιών 30 και 60 μοιρών.

Κατασκευή: Το ορθογώνιο τρίγωνο $AM\Gamma$, που προκύπτει στην πρώτη κατασκευή έχει οξείες γωνίες $\alpha = 60$ και $\gamma = 30$, ο.ε.κ.

Κατασκευή 2.4.4 Κατασκευή της καθέτου προς ευθεία ε από σημείο A εκτός αυτής.

Κατασκευή: Επιλέγουμε τυχαίο σημείο B επί της ε και με ακτίνα $\rho = |AB|$ γράφουμε κύκλο $A(\rho)$ (σχήμα 137(α)). Αν ο κύκλος αυτός δεν τέμνει την ε σε άλλο σημείο τότε η ε είναι εφαπτόμενη αυτού και επομένως κάθετη στην ακτίνα AB (Πρόταση 2.2.2). Αν ο κύκλος



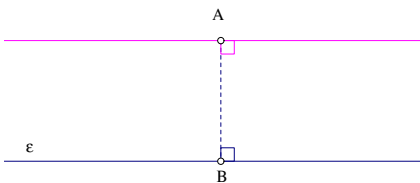
Σχήμα 137: Κάθετος από σημείο A (α:) εκτός της ε , (β:) επί της ε

τέμνει την ε σε ένα δεύτερο σημείο Γ , τότε ενώνουμε το μέσον M της $B\Gamma$ (Κατασκευή 2.4.1) με το A και ορίζουμε την ζητούμενη κάθετο (Πόρισμα 1.8.3), ο.ε.κ.

Κατασκευή 2.4.5 Κατασκευή της καθέτου προς ευθεία ε από σημείο A της ευθείας.

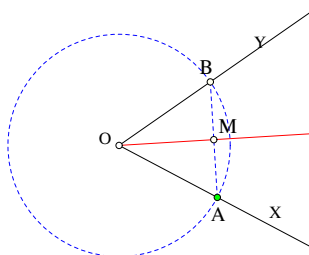
Κατασκευή: Επιλέγουμε τυχαίο σημείο B επί της ε (σχήμα 137(β)), διαφορετικό του A και γράφουμε τον κύκλο $A(\rho)$ με κέντρο A και ακτίνα $\rho = |AB|$ που τέμνει την ε σε ένα δεύτερο σημείο Γ . Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ με μία πλευρά την $B\Gamma$ (Κατασκευή 2.4.2) και φέρουμε την ευθεία $A\Delta$ που είναι η ζητούμενη, ο.ε.κ.

Κατασκευή 2.4.6 Κατασκευή της παράλληλου προς ευθεία ε από σημείο A εκτός της ευθείας.



Σχήμα 138: Παράλληλος προς την ε από σημείο A εκτός αυτής

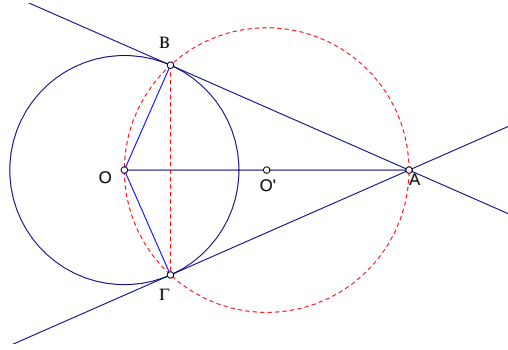
Κατασκευή: Κατασκευάζουμε την κάθετο AB επί της ε (Κατασκευή 2.4.4) και κατόπιν την κάθετο επί την AB στο σημείο A αυτής (Κατασκευή 2.4.5) που είναι η ζητούμενη (Πόρισμα 1.10.7), ο.ε.κ.



Σχήμα 139: Κατασκευή διχοτόμου γωνίας XOY

Κατασκευή 2.4.7 Κατασκευή της διχοτόμου γωνίας XOY .

Κατασκευή: Παίρνουμε αυθαίρετο σημείο A επί της OX και κατασκευάζουμε τον κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα $\rho = |OA|$, τέμνοντα την άλλη πλευρά OY της γωνίας στο σημείο B . Εάν M το μέσον της AB (Κατασκευή 2.4.1), τότε η OM είναι η ζητούμενη (Πόρισμα 1.8.1), ο.ε.κ.

Κατασκευή 2.4.8 Κατασκευή των εφαπτομένων κύκλου από σημείο εκτός αυτού.

Σχήμα 140: Κατασκευή εφαπτομένων από σημείο

Κατασκευή: Έστω ο κύκλος $O(\rho)$ και το σημείο A εκτός αυτού, δηλαδή $|OA| > \rho$. Κατασκευάζουμε τον κύκλο $O'(\rho')$ με κέντρο το μέσον O' του OA και ακτίνα $\rho' = |OA|/2$, δηλαδή τον κύκλο με διάμετρο το OA . Ισχύει $\rho' - \rho < |OO'| = \rho' < \rho + \rho'$, άρα κατά το Πρόταση 2.3.2 οι δύο κύκλοι θα τέμνονται σε δύο σημεία B και Γ . Στα τρίγωνα OAB και OAG που προκύπτουν οι κορυφές B και Γ βλέπουν την διάμετρο OA υπό ορθή γωνία (Πόρισμα 2.1.7), άρα οι AB και $A\Gamma$ είναι αντίστοιχα κάθετες στις ακτίνες OB και $O\Gamma$ του κύκλου $O(\rho)$, άρα είναι εφαπτόμενες σε αυτόν (Πρόταση 2.2.2), ο.ε.κ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$ ονομάζουμε πάλι *Εφαπτόμενες* του κύκλου $O(\rho)$ από το A . Η διάκριση μεταξύ εφαπτομένων ευθειών και ευθυγράμμων τμημάτων γίνεται κάθε φορά από τα συμφραζόμενα.

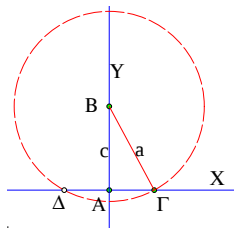
Πόρισμα 2.4.1 Από σημείο A εκτός κύκλου $O(\rho)$ υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς αυτόν που είναι ίσες.

Απόδειξη: Οι δύο εφαπτόμενες της προηγούμενης κατασκευής είναι ίσες, ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων, των OAB και OAG . Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα διότι έχουν την OA κοινή, τις OB και $O\Gamma$ ίσες και τις γωνίες τους στο O ίσες, αφού το $OB\Gamma$ είναι ισοσκελές και η OA είναι διχοτόμος της $OB\Gamma$ (Πόρισμα 2.3.2). Επίσης εκτός από τις δύο εφαπτόμενες από το A της προηγούμενης κατασκευής δεν υπάρχουν άλλες. Πράγματι αν υπήρχε μία ακόμη $A\Delta$, με Δ το σημείο επαφής επί του κύκλου $O(\rho)$, τότε και το τρίγωνο $O\Delta A$ θα ήταν ορθογώνιο και το Δ θα έβλεπε την OA υπό ορθή γωνία, άρα το Δ θα ήταν επί του κύκλου με διάμετρο OA (Πόρισμα 2.1.7) και θα συνέπιπτε με ένα εκ των B και Γ , ο.ε.δ.

Εκτός των στοιχειωδών κατασκευών, κατά τις οποίες με την βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη ευρίσκομε γωνίες, κάθετες, εφαπτόμενες, κατά το πρότυπο των προηγούμενων παραδειγμάτων, υπάρχουν και κατασκευές πιο σύνθετες, στις οποίες δίδονται κάποια στοιχεία του

σχήματος και ζητείται η κατασκευή του. Ιδιαίτερα οι κατασκευές του απλούστερου επίπεδου σχήματος, που είναι το τρίγωνο, κατέχουν ένα σημαντικό πεδίο προβλημάτων της Γεωμετρίας. Γενικά, όταν ζητείται η κατασκευή ενός σύνθετου σχήματος από ορισμένα δεδομένα, καταφεύγουμε στο τρίπτυχο: **Ανάλυση, Σύνθεση, Διερεύνηση**. Στην **Ανάλυση** ξεκινάμε με την φράση: *Έστω ότι το ζητούμενο κατασκευάστηκε*, υποθέτουμε δηλαδή ότι η κατασκευή ολοκληρώθηκε και συνδυάζοντας τα κατασκευασμένα προχωρούμε σε διασυνδέσεις τους με τα δεδομένα. Στην **Σύνθεση** πάμε ανάποδα. Χρησιμοποιούμε τα βήματα που κάναμε στην ανάλυση σε αντίστροφη σειρά και πάμε από τα δεδομένα προς τα ζητούμενα. Τέλος, στην **Διερεύνηση** εξετάζουμε υπό ποιες συνθήκες τα δοθέντα στοιχεία οδηγούν σε λύση και πόσες είναι αυτές οι λύσεις. Στα προβλήματα που συζητώ στο βιβλίο, συχνά περιορίζομαι στην **Σύνθεση**, αφήνοντάς τα δύο άλλα στάδια ως ασκήσεις. Ιδιαίτερα, όταν η κατασκευή είναι πολύ απλή, η ανάλυση περιττεύει.

Κατασκευή 2.4.9 Κατασκευάσε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται μία κάθετος πλευρά και η υποτείνουσα.



Σχήμα 141: Κατασκευή ορθογωνίου από κάθετο και υποτείνουσα

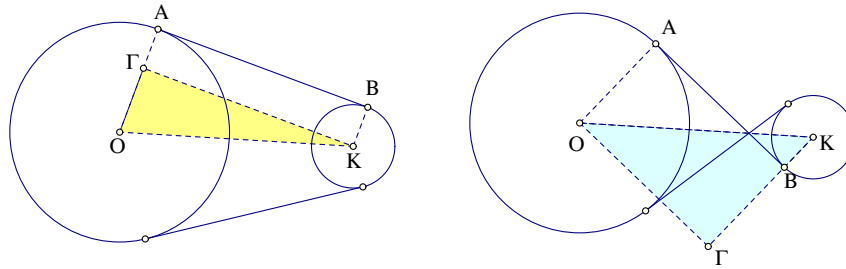
Κατασκευή: Ανάλυση Έστω ότι το ζητούμενο τρίγωνο $AB\Gamma$, ορθογώνιο στο A , κατασκευάστηκε και έχει δεδομένη κάθετος AB και υποτείνουσα $B\Gamma$. Το Γ είναι σημείο τομής της πλευράς OX γωνίας YOX και κύκλου με κέντρο B επί της πλευράς OY της γωνίας και ακτίνας ίσης με το δοθέν μήκος $|B\Gamma|$ της υποτείνουσας.

Σύνθεση: Πάρε δύο κάθετες ευθείες AX , AY και όρισε στην AY τμήμα AB ίσο με το δοθέν της κάθετου πλευράς. Κατόπιν με κέντρο το B και ακτίνα $|B\Gamma|$ ίση με το δοθέν μήκος της υποτείνουσας γράψε κύκλο που τέμνει την OX στα Γ και Δ . Τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα και ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Διερεύνηση: Το τρίγωνο κατασκευάζεται τότε ακριβώς, όταν το δοθέν μήκος $a = |B\Gamma|$ της υποτείνουσας είναι μεγαλύτερο του μήκους της κάθετου $c = |AB|$. Υπάρχει τότε μία ακριβώς λύση (τα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα τρίγωνα), ο.ε.κ.

Κατασκευή 2.4.10 Κατασκευή των κοινών εφαπτομένων δύο κύκλων εξωτερικών αλλήλων.

Κατασκευή: Ανάλυση Έστω ότι οι κύκλοι $O(\rho)$ και $K(\rho')$ έχουν ακτίνες $\rho \geq \rho'$ και έστω ότι η κοινή εφαπτομένη AB κατασκευάστηκε. Αυτή μπορεί να έχει τους κύκλους από την ίδια ή από διαφορετικές μεριές. Και στις δύο περιπτώσεις οι ευθείες OA και KB είναι κάθετες στην AB και περιέχονται αντίστοιχα στην ίδια ή διαφορετικές πλευρές της AB . Στην πρώτη περίπτωση προβάλλουμε το K στην OA . Στην δεύτερη προβάλλουμε το O στην KB . Δημιουργείται έτσι το τρίγωνο $OK\Gamma$, ορθογώνιο στο Γ και κατασκευάσιμο από τα δεδομένα. Τούτο διότι $|O\Gamma| = \rho - \rho'$ στην πρώτη περίπτωση και $|K\Gamma| = \rho + \rho'$ στην δεύτερη. Επομένως το



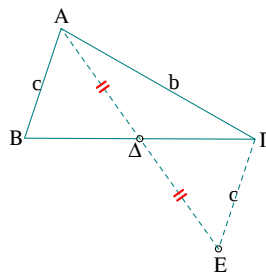
Σχήμα 142: Κατασκευή κοινών εφαπτομένων δύο κύκλων

ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΚΓ$ κατασκευάζεται αφού γνωρίζουμε την υποτείνουσά του $|ΟΚ|$ και μία κάθετο (Κατασκευή 2.4.9).

Σύνθεση Κατασκεύασε το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΓΚ$ με υποτείνουσα την διάκεντρο $ΟΚ$ και μία κάθετο την $ΟΓ$ μήκους ίσου με την διαφορά $\rho - \rho'$. Προέκτεινε την $ΟΓ$ μέχρι το A επί του $Ο(\rho)$ και φέρε παράλληλη ακτίνα $ΚΒ$ του $Κ(\rho')$. Η $ΑΒ$ είναι η ζητούμενη. Παρόμοια κατασκεύασε ορθογώνιο $ΟΓΚ$ με υποτείνουσα την $ΟΚ$ και μία κάθετη $ΟΓ$ μήκους $\rho + \rho'$. Προσδιόρισε την τομή B της $ΚΓ$ με τον $Κ(\rho')$ και φέρε παράλληλη της $ΚΒ$ ακτίνα $ΟΑ$ του $Ο(\rho)$ έτσι ώστε η γωνία $ΑΟΚ$ να είναι ίση με την $ΟΚΒ$. Η πρώτη κατασκευή δίδει την εφαπτόμενη $ΑΒ$ που αφήνει τους δύο κύκλους από το ίδιο μέρος. Η δεύτερη αφήνει τους κύκλους εκατέρωθεν αυτής.

Διερεύνηση Το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς την διάκεντρο $ΚΡ$ και με τον προηγούμενο τρόπο κατασκευάζονται δύο ίσες εφαπτόμενες από το κάθε είδος, ο.ε.κ.

Άσκηση 2.4.1 Να κατασκευασθεί τρίγωνο $ΑΒΓ$ του οποίου δίδονται τα μήκη δύο πλευρών $b = |ΑΓ|$, $c = |ΑΒ|$ και το μήκος της περιεχομένης σε αυτές διαμέσου $\mu_A = |ΑΔ|$.



Σχήμα 143: Κατασκευή τριγώνου από διάμεσο και πλευρές

Υπόδειξη: Ανάλυση: Έστω ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ κατασκευάσθηκε. Προέκτεινε την διάμεσο $ΑΔ$ κατά το διπλάσιο μέχρι το E . Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $EΔΓ$ είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο). Το τρίγωνο $ΑΓΕ$ κατασκευάζεται διότι γνωρίζουμε τα μήκη των τριών πλευρών του $|ΑΓ| = b$, $|ΕΓ| = c$, $|ΑΕ| = 2\mu_A$.

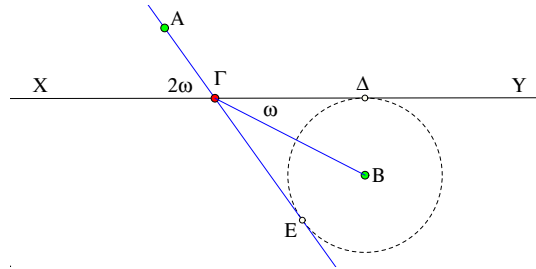
Σύνθεση: Κατασκευάζουμε το τρίγωνο $ΑΓΕ$ με πλευρές $|ΑΓ| = b$, $|ΕΓ| = c$, $|ΑΕ| = 2\mu_A$. Αυτού του τριγώνου φέρνουμε την διάμεσο $ΓΔ$ και την προεκτείνουμε έως το B . Το $ΑΒΓ$ είναι το ζητούμενο. Τούτο διότι τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $EΔΓ$ είναι ίσα, άρα $|ΑΒ| = |ΕΓ| = c$, η $|ΑΓ| = b$ εκ κατασκευής και η διάμεσος $|ΑΔ| = \frac{|ΑΕ|}{2} = \mu_A$. Έχει λοιπόν το $ΑΒΓ$ τις ζητούμενες ιδιότητες.

Συνεπώς το ορθογώνιο τρίγωνο $AY\Delta$ κατασκευάζεται από τα δεδομένα, αφού γνωρίζουμε την υποτείνουσα δ_A και τις γωνίες του.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $AY\Delta$ του οποίου γνωρίζουμε την υποτείνουσα δ_A και τις γωνίες του. Κατόπιν κατασκευάζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα AYB και $AY\Gamma$. Το πρώτο διότι γνωρίζουμε την υποτείνουσα AB και την κάθετο AY από το προηγούμενο βήμα. Από την κατασκευή του AYB βρίσκουμε την γωνία β και αφαιρώντας $\beta - \omega = \gamma$ ευρίσκουμε την γ . Το ορθογώνιο τρίγωνο $AY\Gamma$ λοιπόν κατασκευάζεται διότι γνωρίζουμε την κάθετο AY και τις γωνίες του.

Διερεύνηση: Η κατασκευή είναι δυνατή όταν το δοθέν μήκος $c = |AB| > |AY|$. Προκύπτει τότε μία λύση. Αργότερα (Παράγραφος 3.6) θα δούμε ότι το $|AY|$, που προκύπτει κατά την διαδικασία της κατασκευής, εκφράζεται με την βοήθεια των αρχικών δεδομένων ($|AY| = \delta_A \cdot \sin(\frac{\omega}{2})$). Άρα, τότε θα μπορέσουμε να εκφράσουμε την συνθήκη ύπαρξης λύσης μέσω μίας ανισότητας που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα: $c > \delta_A \cdot \sin(\frac{\omega}{2})$.

Άσκηση 2.4.4 Δίδονται σημεία A και B εκατέρωθεν της ευθείας XY . Να βρεθεί σημείο Γ επί της ευθείας έτσι ώστε $|X\Gamma A| = 2|B\Gamma Y|$.



Σχήμα 146: Σημείο Γ επ' ευθείας με $|X\Gamma A| = 2|B\Gamma Y|$

Υπόδειξη: **Ανάλυση:** Ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο σημείο Γ της ευθείας XY κατασκευάσθηκε. Προεκτείνουμε την ΓA προς την μεριά του B . Τότε η ΓB θα είναι διχοτόμος της γωνίας $E\Gamma Y$ και το B θα ισαπέχει από τις ευθείες XY και $A\Gamma$. Θα είναι συνεπώς κέντρο του κύκλου $\kappa(B, |B\Delta|)$, όπου Δ η προβολή του B στην XY . Το Δ ευρίσκεται από τα δεδομένα και επομένως ο κύκλος κ κατασκευάζεται.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τον κύκλο $\kappa(B, |B\Delta|)$ και φέρνουμε τις εφαπτόμενες από το A προς τον κ . Από τις δύο εφαπτόμενες επιλέγουμε την AE που μαζί με την δοθείσα XY περιέχει τον κύκλο στο εσωτερικό της γωνίας $Y\Gamma E$, όπου Γ το σημείο τομής της AE και της XY . Τότε η $|A\Gamma X| = |Y\Gamma E| = 2|Y\Gamma B|$ και το Γ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει πάντοτε μία λύση.

Άσκηση 2.4.5 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται η πλευρά $|B\Gamma|$, η διάμεσος $\mu_A = |A\Delta|$ και το ύψος $\nu_A = |AY|$.

Άσκηση 2.4.6 Κατασκεύασε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίδονται τα ίχνη των δύο ίσων υψών επί των σκελών και ένα σημείο της βάσης του.

Άσκηση 2.4.7 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται η διάμεσος $\mu_A = |A\Delta|$ καθώς και οι γωνίες που αυτή σχηματίζει με τις πλευρές AB και AG .

Άσκηση 2.4.8 Κατασκεύασε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίδονται τα μέσα των δύο ίσων σκελών και ένα σημείο της βάσης του.

Άσκηση 2.4.9 Κατασκεύασε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίδονται τα ίχνη των δύο διχοτόμων επί των σκελών του και ένα σημείο της βάσης του.

Άσκηση 2.4.10 Από σημείο της προέκτασης διαμέτρου του κύκλου να αχθεί εφαπτόμενη της οποίας το μήκος να είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Άσκηση 2.4.11 Να κατασκευασθεί κύκλος κ διερχόμενος από δύο δοθέντα σημεία A και B και τέμνων δοθέντα κύκλο λ κατά χορδή $\Gamma\Delta$ παράλληλο προς δοθείσα ευθεία ε .

Άσκηση 2.4.12 Να κατασκευασθεί κύκλος κ με δοθείσα ακτίνα ρ , διερχόμενος δια δοθέντος σημείου A και έχων εφαπτόμενη από δοθέν σημείο με δοθέν μήκος.

Άσκηση 2.4.13 Δοθέντων τριών ίσων κύκλων, των οποίων τα κέντρα δεν είναι συνευθειακά, να βρεθεί σημείο από το οποίο οι εφαπτόμενες προς τους κύκλους αυτούς είναι ίσες.

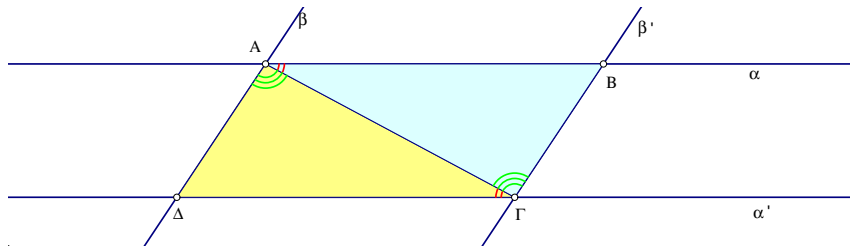
Άσκηση 2.4.14 Να βρεθεί σημείο M επί της πλευράς AB τριγώνου $AB\Gamma$, έτσι ώστε

$$|MA| + |A\Gamma| = |MB| + |B\Gamma|.$$

Άσκηση 2.4.15 Δείξε ότι για κάθε σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, διαφορετικό από τα B και Γ , υπάρχει ευθεία ΔX που αποτελεί από τις άλλες πλευρές τρίγωνο με γωνίες ίσες με αυτές του $AB\Gamma$. Δείξε ότι για κάθε τέτοιο Δ υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές ευθείες ΔX που έχουν αυτή την ιδιότητα.

2.5 Παραλληλόγραμμο

Πρόταση 2.5.1 Δύο παράλληλες ευθείες α και α' αποτέμνουν επί δύο άλλων παραλλήλων β και β' αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ που είναι ίσα.

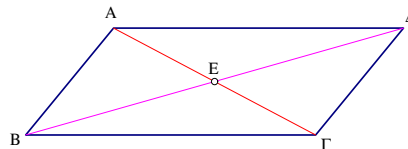


Σχήμα 147: Παράλληλες μεταξύ παραλλήλων

Απόδειξη: Φέροντας την $A\Gamma$ σχηματίζονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$. Τα τρίγωνα αυτά έχουν κοινή την πλευρά $A\Gamma$. Επίσης έχουν τις γωνίες $\Delta A\Gamma$ και $A\Gamma B$ ίσες ως εντός και εναλλάξ μεταξύ παραλλήλων (των β και β') τεμνομένων υπό της $A\Gamma$. Οι γωνίες $A\Gamma\Delta$ και $\Gamma A B$ είναι επίσης ίσες διότι είναι και αυτές εντός και εναλλάξ μεταξύ παραλλήλων (των α και α') τεμνομένων υπό της $A\Gamma$. Εφαρμόζοντας το ΓΠΓ-κριτήριο ισότητας τριγώνων συμπεραίνουμε ότι τα αναφερθέντα τρίγωνα είναι ίσα. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει η ισότητα των $A\Delta$ και $B\Gamma$, ο.ε.δ.

Παραλληλόγραμμο λέγεται το σχήμα $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από δύο ζεύγη παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων ($AB, \Gamma\Delta$) και ($B\Gamma, \Delta E$), όπως στην προηγούμενη πρόταση. Τα σημεία A, B, Γ και Δ λέγονται **Κορυφές** του παραλληλογράμμου. Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔE λέγονται **Πλευρές** του παραλληλογράμμου και τα $A\Gamma$ και $B\Delta$ λέγονται **Διαγώνιοι** του παραλληλογράμμου.

Πόρισμα 2.5.1 α) Κάθε διαγώνιος χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα.
β) Οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες.
γ) Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες.
δ) Δύο διαδοχικές γωνίες του παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.

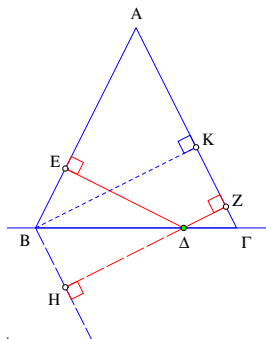


Σχήμα 148: Διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται

Πρόταση 2.5.2 Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται από το σημείο τομής τους.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των τριγώνων $AE\Delta$ και $BE\Gamma$. Αυτή πάλι προκύπτει από το ότι οι πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι ίσες και το ότι οι γωνίες $E A \Delta$ και $E \Gamma B$ είναι ίσες καθώς και οι $A \Delta E$ και $E B \Gamma$ είναι επίσης ίσες (ως εντός και εναλλάξ κτλ.), ο.ε.δ.

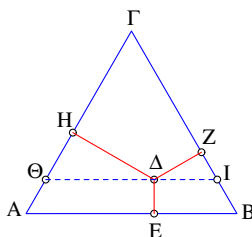
Άσκηση 2.5.1 Δείξε ότι κάθε σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ έχει άθροισμα αποστάσεων $|\Delta E| + |\Delta Z|$ από τα σκέλη σταθερό και ίσο με το ύψος BK από το B .



Σχήμα 149: Ιδιότητα βάσης του ισοσκελούς

Υπόδειξη: Φέρε από το B παράλληλο προς την $ΑΓ$ και προέκτεινε την ΔZ έως ότου τμήσει αυτήν στο H . Η γωνία στο H είναι ορθή και τα ορθογώνια τρίγωνα $BE\Delta$ και $BH\Delta$ έχουν την $B\Delta$ κοινή και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα. Επομένως $|\Delta E| + |\Delta Z| = |\Delta H| + |\Delta Z| = |BK|$. Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι το $ZHBK$ είναι παραλληλόγραμμο (δες και Άσκηση 1.15.8).

Άσκηση 2.5.2 Δείξε ότι κάθε σημείο Δ στο εσωτερικό του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ έχει άθροισμα αποστάσεων από τις πλευρές του $|\Delta E| + |\Delta Z| + |\Delta H|$ σταθερό και ίσο με το ύψος του ισοπλεύρου.

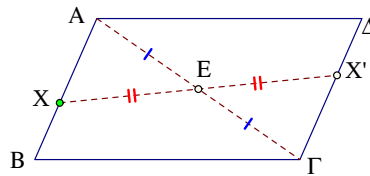


Σχήμα 150: Ιδιότητα του ισοπλεύρου

Υπόδειξη: Φέρε από το Δ παράλληλο ΘI προς την AB και εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση στο (ισόπλευρο) τρίγωνο $\Theta\Gamma I$. Το $|\Delta Z| + |\Delta H|$ είναι κατ' αυτήν ίσο με το ύψος του $\Theta\Gamma I$ από το Θ . Επειδή το τρίγωνο $\Theta\Gamma I$ είναι και αυτό ισόπλευρο, το ύψος αυτό ισούται με το ύψος από το Γ και προσθέτοντας σε αυτό το $|\Delta E|$ έχουμε το ύψος του αρχικού τριγώνου από το Γ .

Άσκηση 2.5.3 Κατασκεύασε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου δίδονται τα μήκη των πλευρών $|AB|, |B\Gamma|$ και η μεταξύ αυτών γωνία $|AB\Gamma|$. Παρόμοια το παραλληλόγραμμο του οποίου δίδονται οι δύο πλευρές, ως ανωτέρω, καθώς και η διαγώνιος $|A\Gamma|$.

Άσκηση 2.5.4 Δείξε ότι το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του .



Σχήμα 151: Σημειακή συμμετρία παραλληλογράμμου

Υπόδειξη: Για το τυχόν σημείο X της πλευράς AB του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, διαφορετικό από τις κορυφές του, φέρε την XE , όπου E το σημείο τομής των διαγωνίων, και προέκτεινέ την κατά το διπλάσιο μέχρι το X' . Τα τρίγωνα AXE και $\Gamma EX'$ είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο), συνεπώς οι γωνίες XAE και $X'GE$ ίσες, που σημαίνει ότι το X' είναι επί της $\Gamma\Delta$. Η ίδια διαδικασία εφαρμοζόμενη στις κορυφές δίνει τις απέναντι κορυφές. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει μιά αντιστοίχιση όλων των σημείων του παραλληλογράμμου $X \leftrightarrow X'$ όπως απαιτεί ο ορισμός της συμμετρίας ως προς κέντρο (δες και την Άσκηση 2.6.6).

Άσκηση 2.5.5 Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο του οποίου δίδονται τα μήκη των πλευρών και η απόσταση δύο παραλλήλων πλευρών του.

Άσκηση 2.5.6 Να βρεθεί σημείο E στην πλευρά $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έτσι ώστε η γωνία AEB να είναι ίση με την BEG .

Άσκηση 2.5.7 Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ που έχει τις κορυφές του A και Γ σε δοθέντα σημεία και τις B, Δ επί δοθέντος κύκλου.

Άσκηση 2.5.8 Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ που έχει τις κορυφές του A και Γ σε δοθέντα σημεία, τις B, Δ επί δοθέντων παραλλήλων και την διαγώνιο $B\Delta$ να διέρχεται από δοθέν σημείο.

Άσκηση 2.5.9 Από το σημείο τομής O των διαγωνίων παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ άγονται δύο ευθείες XOY κάθετες μεταξύ τους. Εάν η OX τέμνει τις AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία K και Λ και η OY τέμνει τις AB και $\Gamma\Delta$ στα M και N αντιστοίχως, δείξε ότι το $KMAN$ είναι παραλληλόγραμμο και έχει ίσες πλευρές.

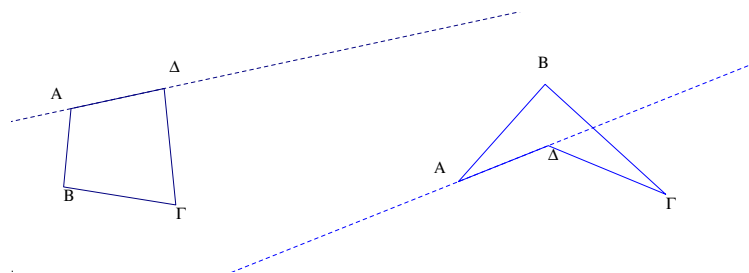
Άσκηση 2.5.10 Δείξε ότι το ύψος προς μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου είναι μικρότερο από το ύψος προς μικρότερη πλευρά.

Άσκηση 2.5.11 Δείξε ότι σε τρίγωνο $AB\Gamma$ για το οποίο η γωνία $\alpha = |\angle B\Lambda\Gamma| > \beta = |\angle \Gamma B A|$ η διάμεσος $\Gamma\Delta$ σχηματίζει γωνία $|\angle A\Delta\Gamma| < |\angle \Gamma\Delta B|$.

Άσκηση 2.5.12 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου η πλευρά $|\Lambda\Gamma|$ είναι ίση με την διάμεσο $|\Lambda\Delta|$ και η γωνία $|\angle \Delta\Lambda\Gamma| = 120^\circ$.

Άσκηση 2.5.13 Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από δύο δοθέντα σημεία A, B καθώς και από δοθείσα ευθεία μη κάθετο στην ευθεία AB .

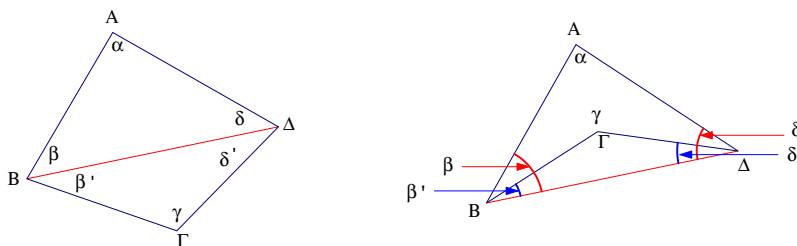
2.6 Τετράπλευρα



Σχήμα 152: Κυρτό και μη-κυρτό τετράπλευρο

Τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ που αποτελούν μία κλειστή τεθλασμένη ορίζουν ένα **Τετράπλευρο**. Ειδική περίπτωση τετραπλεύρου είναι το παραλληλόγραμμο. Το πρώτο τετράπλευρο του παραπάνω σχήματος είναι **Κυρτό**, δηλαδή κάθε πλευρά του προεκτεινόμενη αφήνει το τετράπλευρο από την μία πλευρά. Το δεύτερο τετράπλευρο του σχήματος είναι μη-κυρτό. Προεκτείνοντας λ.χ. την $A\Delta$ έχουμε μέρη του τετραπλεύρου και από τις δύο μεριές της ευθείας $A\Delta$. Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με κυρτά τετράπλευρα, ένα παράδειγμα των οποίων είναι τα παραλληλόγραμμα. Λέμε ότι δύο τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες και αντίστοιχες γωνίες επίσης ίσες.

Πρόταση 2.6.1 Το άθροισμα των μέτρων των γωνιών τετραπλεύρου είναι 360 μοίρες.



Σχήμα 153: Διαίρεση σε δύο τρίγωνα

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει αμέσως χωρίζοντας το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα με μία διαγώνιό του. Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών των δύο τριγώνων $\alpha + \beta + \delta = 180$ και $\beta' + \gamma + \delta' = 180$ (Πρόταση 1.15.1) ο.ε.δ.

Τα παραλληλόγραμμα αποτελούν μία ειδική κατηγορία τετραπλεύρων που είναι χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές. Για τις ιδιότητες που αποδείξαμε προηγουμένως ισχύουν και τα αντίστροφα που εκφράζονται με τα επόμενα θεωρήματα.

Πρόταση 2.6.2 Ένα κυρτό τετράπλευρο στο οποίο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

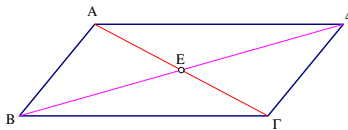
Απόδειξη: Φέρνουμε μία διαγώνιο και αποδεικνύουμε ότι τα δύο τρίγωνα που προκύπτουν είναι ίσα εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο. Από την ισότητα των τριγώνων έπεται ότι κάθε

διαγώνιος σχηματίζει ίσες εναλλάξ γωνίες με τις απέναντι πλευρές, οι οποίες επομένως είναι παράλληλες, ο.ε.δ.

Πρόταση 2.6.3 Ένα κυρτό τετράπλευρο στο οποίο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη: Πρώτα δείχνουμε ότι διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές. Πράγματι αφού οι γωνίες είναι ανά ζεύγη ίσες τότε τα μέτρα τους θα είναι διαδοχικά $\alpha, \beta, \alpha, \beta$ και το άθροισμα θα πρέπει να είναι $2\alpha + 2\beta = 360$. Συνεπώς $\alpha + \beta = 180$. Προκύπτει λοιπόν ότι το τετράπλευρο έχει απέναντι πλευρές παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο, ο.ε.δ.

Πρόταση 2.6.4 Ένα τετράπλευρο στο οποίο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται από το σημείο τομής τους είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 154: Διαγώνιοι διχοτομούνται

Απόδειξη: Και εδώ αρκεί να θεωρήσουμε τα τρίγωνα $\triangle AED$ και $\triangle BEC$ που σχηματίζονται από δύο απέναντι πλευρές (AD, BC) και το σημείο τομής των διαγωνίων E . Τα τρίγωνα αυτά αποδεικνύονται ίσα βάσει του ΠΓΠ-κριτηρίου ισότητας τριγώνων και από την ισότητα αυτή προκύπτει η παραλληλία των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου, ο.ε.δ.

Πρόταση 2.6.5 Ένα τετράπλευρο στο οποίο δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη: Και εδώ αρκεί να θεωρήσουμε τα τρίγωνα $\triangle AED$ και $\triangle BEC$ που σχηματίζονται από τις δύο ίσες απέναντι πλευρές (AD, BC) και το σημείο τομής των διαγωνίων E . Τα τρίγωνα αυτά αποδεικνύονται ίσα βάσει του ΓΠΓ-κριτηρίου ισότητας τριγώνων και από την ισότητα αυτή προκύπτει η παραλληλία των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου, ο.ε.δ.

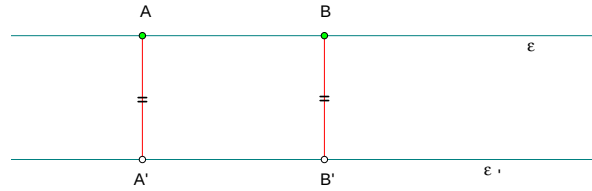
Άσκηση 2.6.1 Δείξε ότι αν σε τετράπλευρο κάθε ζεύγος διαδοχικών γωνιών αποτελείται από παραπληρωματικές γωνίες τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόδειξη: Ξεχώρισε μία γωνία α του τετραπλεύρου. Αφού η προηγούμενη αυτής και η επόμενη είναι παραπληρωματικές της ($=180-\alpha$), αυτές θα είναι ίσες μεταξύ τους. Εφάρμοσε το 2.6.3.

Άσκηση 2.6.2 Δίδονται δύο παράλληλες ευθείες ε και ε' . Από δύο σημεία A και B της ε φέρνουμε τις κάθετες AA' και BB' επί την ε' . Δείξε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AA' και BB' είναι ίσα.

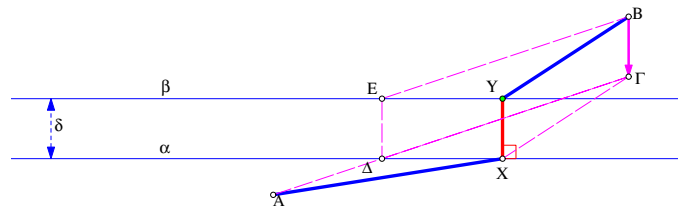
Υπόδειξη: Οι ευθείες AA' και BB' είναι παράλληλες, άρα το $ABB'A'$ παραλληλόγραμμο.

Απόσταση δύο παραλλήλων ε και ε' λέμε το μήκος ενός κάθετου ευθυγράμμου τμήματος από σημείο A της ε προς την ε' . Η τελευταία άσκηση δείχνει ότι η επιλογή της θέσης του A πάνω στην ε δεν παίζει κανένα ρόλο. Επίσης δεν αλλάζει η απόσταση αν ξεκινήσουμε από σημείο A' της ε' και φέρουμε την κάθετο $A'A$ στην ε .



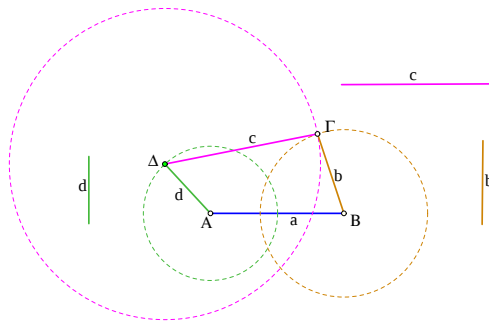
Σχήμα 155: Απόσταση δύο παραλλήλων

Άσκηση 2.6.3 Ένας ποταμός έχει παράλληλες όχθες σε απόσταση δ . Από τις δύο μεριές του ευρίσκονται δύο πόλεις A και B . Να βρεθεί η θέση της γέφυρας XY που καθιστά το άθροισμα των δρόμων (και το κέρδος του εργολάβου) $|AX| + |XY| + |YB|$ ελάχιστο.



Σχήμα 156: Η θέση της γέφυρας

Υπόδειξη: Πάρε το σημείο Γ σε απόσταση δ από το B στην κάθετο από το B προς τον ποταμό. Ο δρόμος προς ελαχιστοποίηση $|AX| + |XY| + |YB|$ είναι πάντα ίσος με τον $|AX| + |X\Gamma| + |\Gamma B| = |AX| + |X\Gamma| + \delta$. Άρα αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το $|AX| + |X\Gamma|$ (το Γ είναι σταθερό σημείο). Όμως η τεθλασμένη αυτή έχει πάντοτε μήκος μεγαλύτερο του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$. Άρα το σημείο X πρέπει να συμπίπτει με το σημείο Δ στο οποίο η $A\Gamma$ τέμνει την α .

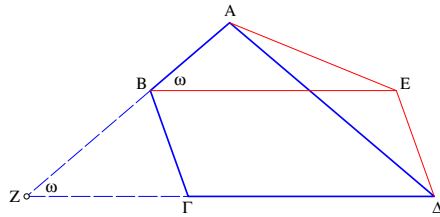


Σχήμα 157: Τετράπλευρα με δοθέντα μήκη πλευρών

Σχόλιο Δοθέντων μηκών a, b, c και d , εάν υπάρχει ένα τετράπλευρο με αυτά τα μήκη πλευρών, τότε υπάρχουν εν γένει και άπειρα άλλα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ με τα ίδια μήκη πλευρών. Για τον προσδιορισμό ενός από αυτά τα τετράπλευρα αρκεί ένα ακόμη στοιχείο του, όπως λ.χ. η γωνία $BA\Delta$ και το γεγονός ότι είναι κυρτό. Αντί της γωνίας αρκεί και μία διαγώνιος, λ.χ.

η $B\Delta$, η οποία τότε προσδιορίζει πλήρως τα δύο τρίγωνα στα οποία διαιρεί το τετράπλευρο. Αναγκαία πάλι η διάκριση σε τετράπλευρο κυρτό ή μη.

Άσκηση 2.6.4 Κατασκεύασε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου δίδονται τα μήκη των πλευρών και η γωνία υπό την οποία τέμνονται δύο απέναντι πλευρές του AB και $\Gamma\Delta$.



Σχήμα 158: Κατασκευή τετραπλεύρου

Υπόδειξη: Φέρε από το B παράλληλο και ίσο τμήμα BE προς την $\Gamma\Delta$ και το ημιεπίπεδο της $B\Gamma$ που ανήκει το Δ . Το τρίγωνο ABE κατασκευάζεται διότι γνωρίζουμε την AB την BE (ίση με $\Gamma\Delta$) και την γωνία $\omega = \angle ABE = \angle A\Gamma\Delta$. Επομένως η AE είναι γνωστού μήκους, άρα το τρίγωνο AED κατασκευάζεται διότι γνωρίζουμε τα μήκη των τριών πλευρών του ($|ED| = |B\Gamma|$). Κατόπιν κατασκευάζεται και το παραλληλόγραμμο $BE\Delta\Gamma$ και με αυτό το ζητούμενο τετράπλευρο.

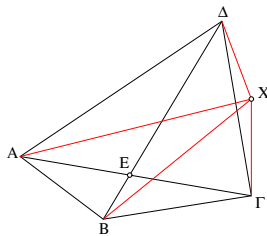
Άσκηση 2.6.5 Δείξε ότι αν ένα τετράπλευρο έχει κέντρο συμμετρίας τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόδειξη: Θεώρησε την πλευρά AB και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες του τετραπλεύρου. Κατά την συμμετρία η πλευρά θα πηγαίνει σε άλλη πλευρά και οι προσκείμενες γωνίες σε αντίστοιχες ίσες γωνίες. Επομένως οι γωνίες του τετραπλεύρου θα είναι της μορφής $\alpha, \beta, \alpha, \beta$ με $2(\alpha + \beta) = 360$, άρα α, β παραπληρωματικές (Άσκηση 2.6.1).

Άσκηση 2.6.6 Δείξε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο τότε και μόνον τότε όταν έχει κέντρο συμμετρίας.

Υπόδειξη: Συνδύασε την προηγούμενη άσκηση και την Άσκηση 2.5.4.

Άσκηση 2.6.7 Δοθέντος κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, δείξε ότι το άθροισμα των αποστάσεων σημείου X από τις κορυφές του γίνεται ελάχιστο όταν συμπίπτει με το σημείο E της τομής των διαγωνίων του.

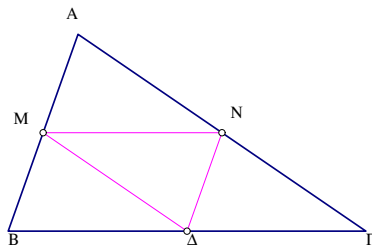


Σχήμα 159: Ελαχιστοποίηση του $|XA| + |XB| + |X\Gamma| + |X\Delta|$

Υπόδειξη: Εφάρμοσε την τριγωνική ανισότητα $|XA| + |X\Gamma| > |A\Gamma|$, $|XB| + |X\Delta| > |B\Delta|$.

2.7 Τα μέσα των πλευρών

Πρόταση 2.7.1 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η παράλληλος από το μέσον M της AB προς την πλευρά $B\Gamma$ τέμνει την τρίτη πλευρά $A\Gamma$ στο μέσον της N . Επί πλέον η MN έχει μήκος το ήμισυ της $B\Gamma$.

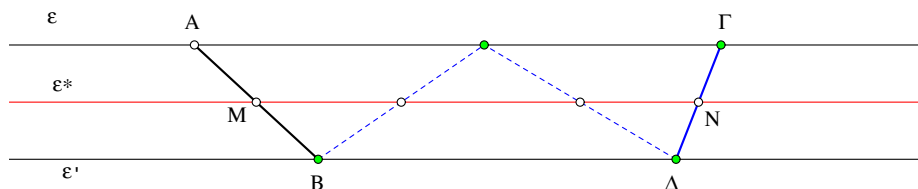


Σχήμα 160: Η ευθεία MN που ενώνει τα μέσα πλευρών

Απόδειξη: Έστω λοιπόν N το σημείο τομής με την $A\Gamma$ της παραλλήλου από το M προς την $B\Gamma$. Θα δείξουμε ότι το N είναι το μέσον της $A\Gamma$ στηριζόμενοι στους προηγούμενους χαρακτηρισμούς του παραλληλογράμμου. Προς τούτο φέρουμε την $N\Delta$ παράλληλο της AB , Δ επί της $B\Gamma$. Το $BMN\Delta$ είναι εκ κατασκευής παραλληλόγραμμο άρα οι $N\Delta$ και BM είναι ίσες και παράλληλες. Επειδή και οι AM και BN είναι ίσες συνάγεται ότι και το $AM\Delta N$ είναι παραλληλόγραμμο (Πρόταση 2.6.5). Για τον ίδιο λόγο προκύπτει επίσης ότι και το $MN\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Από τα δύο παραλληλόγραμμα $AM\Delta N$ και $MN\Gamma\Delta$ με κοινή την $M\Delta$ προκύπτει ότι οι AN και $N\Gamma$ είναι ίσες. Ο δεύτερος ισχυρισμός του θεωρήματος για το ήμισυ του μήκους προκύπτει πάλι από τα παραλληλόγραμμα $MN\Delta B$ και $MN\Gamma\Delta$ που έχουν κοινή πλευρά την MN , ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.7.1 Το ευθύγραμμο τμήμα MN που ενώνει τα μέσα πλευρών AB και $A\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά $B\Gamma$ και έχει το μισό μήκος αυτής.

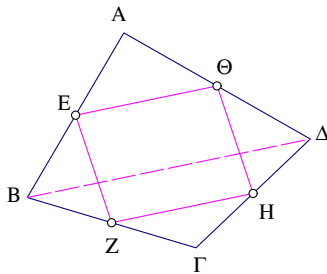
Πόρισμα 2.7.2 Αν τα σημεία A, B είναι αντίστοιχα επί των παραλλήλων $\varepsilon, \varepsilon'$ και φέρουμε από το μέσον M του AB παράλληλο ε^* προς την ε , τότε η ε^* περιέχει το μέσον κάθε ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ με άκρα επί των ε και ε' αντιστοίχως.



Σχήμα 161: Η μεσοπαράλληλος των παραλλήλων ε και ε'

Την ευθεία ε^* που ορίζεται από το προηγούμενο πόρισμα ονομάζουμε **Μεσοπαράλληλο** των παραλλήλων ευθειών ε και ε' .

Πρόταση 2.7.2 Τα μέσα των πλευρών παντός τετραπλεύρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.



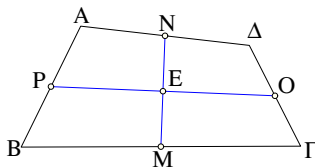
Σχήμα 162: Το παραλληλόγραμμο των μέσων

Απόδειξη: Αν στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα σημεία E και Θ είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Delta$ αντίστοιχα, τότε η ευθεία $E\Theta$ είναι παράλληλη της διαγωνίου $B\Delta$ και έχει το μισό μήκος αυτής. Το ίδιο συμβαίνει και με το ευθύγραμμο τμήμα ZH που ενώνει τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Συνεπώς τα $E\Theta$ και ZH είναι παράλληλα και ίσα, άρα σχηματίζουν παραλληλόγραμμο (Πρόταση 2.6.5), ο.ε.δ.

Άσκηση 2.7.1 Δείξε ότι δύο παράλληλες ευθείες είναι συμμετρικές ως προς κάθε σημείο O της μεσοπαράλληλής τους.

Άσκηση 2.7.2 Περιγράψε όλες τις συμμετρίες, αξονικές και σημειακές, του σχήματος που αποτελείται από δύο παράλληλες ευθείες.

Άσκηση 2.7.3 Δείξε ότι σε κάθε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα ευθύγραμμα τμήματα MN και OP που ενώνουν τα μέσα απέναντι πλευρών του διχοτομούνται από το σημείο τομής τους E .

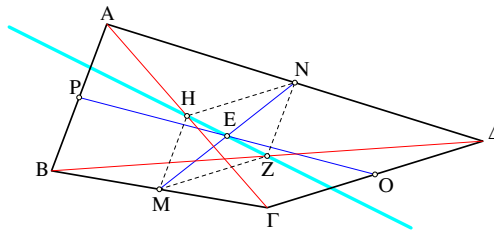


Σχήμα 163: Ενώνοντας τα μέσα απέναντι πλευρών

Υπόδειξη: Οι MN και OP είναι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου των μέσων των πλευρών του τετραπλεύρου.

Άσκηση 2.7.4 Δείξε ότι σε κάθε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων MN και OP που ενώνουν τα μέσα απέναντι πλευρών του και τα μέσα H, Z των διαγωνίων του περιέχονται στην ίδια ευθεία και το E είναι το μέσον της HZ .

Υπόδειξη: Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ η MZ ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $B\Delta$, άρα είναι παράλληλη και το μισό της $\Gamma\Delta$. Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η HN ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $A\Delta$, άρα είναι παράλληλη και το μισό της $\Delta\Gamma$. Συμπεραίνουμε ότι το $HNZM$ είναι παραλληλόγραμμο, του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

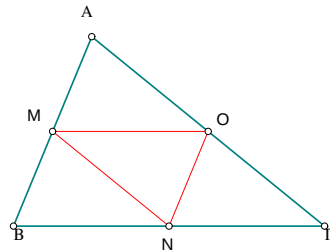


Σχήμα 164: Η ευθεία του Newton τετραπλεύρου ABΓΔ

Η ευθεία HZ του προηγούμενου προβλήματος ορίζεται για κάθε τετράπλευρο που δεν είναι παραλληλόγραμμο και λέγεται **Ευθεία του Newton** (1643-1727) του τετραπλεύρου. Στην περίπτωση του παραλληλογράμμου τα σημεία H και Z του προβλήματος συμπίπτουν και έτσι η ευθεία αυτή δεν ορίζεται.

Οι δύο επόμενες ασκήσεις δείχνουν ότι το τρίγωνο καθορίζεται πλήρως από την θέση των μέσων των πλευρών του. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με το τετράπλευρο, στο οποίο τα μέσα των πλευρών σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 2.7.5 Δείξε ότι αν δοθούν οι θέσεις των μέσων M, N και O των πλευρών του τριγώνου $ABΓ$ τότε αυτό είναι πλήρως καθορισμένο (υπάρχει ένα ακριβώς με αυτά τα σημεία ως μέσα των πλευρών του).

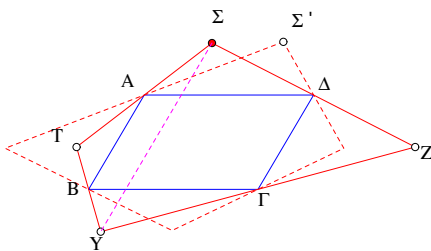


Σχήμα 165: Τρίγωνο με προκαθορισμένα μέσα πλευρών

Υπόδειξη: Έστω ότι κατασκευάστηκε το ζητούμενο τρίγωνο ABΓ. Κατά την Πρόταση 2.7.1 η ΑΓ θα είναι παράλληλη και διπλάσιου μήκους προς την MN. Ανάλογες ιδιότητες θα ισχύουν και για τις άλλες πλευρές του ABΓ, άρα αυτό συμπίπτει με το τρίγωνο που κατασκευάζεται φέρνοντας παράλληλες από τα O, M, N αντίστοιχα προς τις MN, NO, OM.

Άσκηση 2.7.6 Δείξε ότι δοθέντος παραλληλογράμμου ABΓΔ και σημείου Σ εκτός των ευθειών-φορέων των πλευρών του, υπάρχει ένα ακριβώς τετράπλευρο με μέσα των πλευρών του τις κορυφές του παραλληλογράμμου και μία κορυφή του στο Σ.

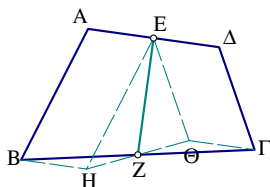
Υπόδειξη: Ξεκίνησε από το Σ, φέρε την ΣΑ και διπλασίασε μέχρι το Τ. Φέρε κατόπιν την ΤΒ και διπλασίασε μέχρι το Υ, φέρε την ΥΓ και διπλασίασε μέχρι το Ζ. Το μέσον της ΖΣ είναι το Δ. Αυτό προκύπτει εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.7.1 στο τρίγωνο ΣΥΖ και δείχνει ότι για κάθε θέση του Σ προκύπτει ένα τετράπλευρο με τα προδιαγεγραμμένα μέσα.



Σχήμα 166: Πολλά τετράπλευρα με τα ίδια μέσα πλευρών

Άσκηση 2.7.7 Κατασκεύασε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου δίδονται οι θέσεις των μέσων τριών πλευρών του.

Άσκηση 2.7.8 Κατασκεύασε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου δίδονται τα μήκη των πλευρών καθώς και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος EZ που ενώνει τα μέσα των απέναντι πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.



Σχήμα 167: Κατασκευή τετραπλεύρου

Υπόδειξη: Από το B φέρε παράλληλη και ίση προς την AE και την ίδια μεριά της AB με το E . Από το Γ φέρε παράλληλη και ίση της ΔE και προς την ίδια μεριά της $\Delta\Gamma$ με το E . Σχηματίζονται τα παραλληλόγραμμα $AENB$ και $ED\Gamma\Theta$, άρα το $BH\Gamma\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιες $H\Theta$ και $B\Gamma$. Άρα το μέσον της $H\Theta$ είναι το Z (Πρόταση 2.5.2). Έπεται ότι στο τρίγωνο $EH\Theta$ είναι γνωστά τα μήκη των πλευρών EH και $E\Theta$ καθώς και το μήκος της μεταξύ αυτών περιεχομένης διαμέσου EZ . Κατά την Άσκηση 2.4.1 το τρίγωνο $EH\Theta$ κατασκευάζεται. Επίσης κατασκευάζονται τα ίσα μεταξύ τους τρίγωνα ZHB και $Z\Theta\Gamma$ διότι είναι γνωστές οι τρεις πλευρές τους. Από αυτά κατασκευάζονται κατόπιν και τα παραλληλόγραμμα $HBAE$ και $\Theta\Gamma\Delta E$ που προσδιορίζουν πλήρως το τετράπλευρο.

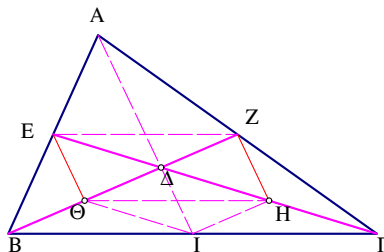
Άσκηση 2.7.9 Προέκτεινε την ακτίνα OA κύκλου $\kappa(O, \rho)$ προς το A κατά το διπλάσιο μέχρι το B και φέρε εφαπτόμενες του κ από το B με σημεία επαφής Γ και Δ . Βρες τις γωνίες του τετραπλεύρου $O\Gamma B\Delta$.

Άσκηση 2.7.10 Κατασκεύασε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου οι γωνίες στα A, B, Γ έχουν μέτρο $\varphi, 2\varphi, 3\varphi$ και η $\Gamma\Delta$ είναι το μισό της AB . Προσδιόρισε το φ και δείξε ότι το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

Άσκηση 2.7.11 Κατασκεύασε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου οι δύο κορυφές A και B είναι δοθέντα σημεία και οι δύο άλλες ευρίσκονται επί δοθέντος κύκλου κ .

2.8 Οι διάμεσοι τριγώνου

Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τις κορυφές τριγώνου με τα μέσα των απέναντι πλευρών τριγώνου λέγονται **Διάμεσοι** του τριγώνου. Οι δύο σημαντικότερες ιδιότητες των διαμέσων είναι οι εκφραζόμενες από τα επόμενα θεωρήματα.

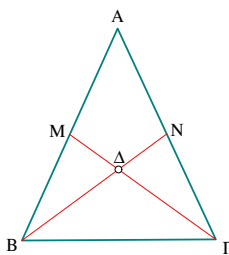


Σχήμα 168: Το κέντρο βάρους

Πρόταση 2.8.1 Οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που χωρίζει την κάθε μία από αυτές σε λόγο 2:1.

Απόδειξη: Έστω ότι BZ και ΓΕ είναι δύο από τις διαμέσους του τριγώνου ABΓ. Θα δείξουμε ότι και η τρίτη περνά από το σημείο τομής τους Δ. Προς τούτο θεωρήσε τα μέσα Θ και Η των BΔ και ΓΔ αντίστοιχα. Από τα προηγούμενα (Πρόταση 2.7.1) συνάγεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΕ και ΗΖ είναι παράλληλα προς την ΑΔ ίσα με το ήμισυ αυτής. Άρα είναι ίσα μεταξύ τους και παράλληλα (Πόρισμα 1.15.3), συνεπώς το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο (Πρόταση 2.6.5) και οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Δ (Πρόταση 2.5.2). Φέρε από το Η παράλληλο ΗΙ προς την BZ με Ι επί της BΓ. Πάλι από τα προηγούμενα η ΗΙ είναι παράλληλη και το ήμισυ της BΔ και το Ι είναι το μέσον της BΓ. Συνάγεται ότι και το ΔΖΗΙ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως η ΔΙ είναι στην ίδια ευθεία με το ΑΔ (μονοσήμαντο της παραλλήλου προς την ΖΗ από το Δ). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και η τρίτη διάμεσος ΑΙ διέρχεται από το Δ. Επί πλέον δείξαμε ότι το Δ επί των τριών διαμέσων χωρίζει κάθε μία τους σε λόγο 2:1 (τα ΑΔ, BΔ, ΓΔ είναι αντίστοιχα διπλάσια των ΔΙ, ΔΖ, ΔΕ), ο.ε.δ.

Το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου λέγεται **Κέντρο βάρους** ή **Κεντροειδές** του τριγώνου.

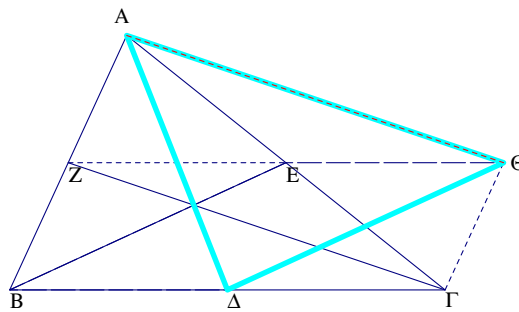


Σχήμα 169: Ίσες διάμεσοι χαρακτηρίζουν το ισοσκελές

Άσκηση 2.8.1 Δείξε ότι αν οι διάμεσοι BN και GM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Υπόδειξη: Το σημείο τομής Δ των διαμέσων (σχήμα 169) χωρίζει αυτές σε τμήματα 2:1, άρα το $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές και οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσες. Τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma\Delta N$ είναι ίσα ως έχοντα α) τις γωνίες στο Δ κατά κορυφήν άρα ίσες, β) τις ΔM και ΔN ίσες ως $1/3$ των ίσων διαμέσων και γ) τις ΔB και $\Delta \Gamma$ ίσες ως $2/3$ των ίσων διαμέσων. Τότε οι γωνίες των τριγώνων $MB\Delta$ και $NG\Delta$ είναι ίσες και αθροιζόμενες με τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς $\Delta B\Gamma$ δίδουν ίσες γωνίες του $AB\Gamma$ στα B και Γ . Σημείωσε ότι η άσκηση αυτή εκφράζει την αντίστροφη της Άσκησης 1.9.4, όσον αφορά τις διαμέσους.

Πρόταση 2.8.2 Οι τρεις διάμεσοι τριγώνου μεταφερόμενες παράλληλα ώστε να γίνουν διαδοχικές κλείνουν και σχηματίζουν τρίγωνο.



Σχήμα 170: Το τρίγωνο των διαμέσων

Απόδειξη: Στο σχήμα οι $A\Delta, BE$ και ΓZ είναι αντίστοιχες διάμεσοι των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A$ και AB . Η $\Delta\Theta$ κατασκευάζεται έτσι ώστε να είναι παράλληλη και της BE και προς την ίδια μεριά της $B\Gamma$ με αυτήν. Δείχνουμε ότι και η ΘA είναι παράλληλη και ίση προς την τρίτη διάμεσο ΓZ . Πράγματι, εκ κατασκευής το $B\Delta\Theta E$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα προεκτείνοντας την $E\Theta$ που περνά από το μέσον E της $A\Gamma$ αυτή θα τέμνει την AB στο μέσον της Z (Πρόταση 2.7.1). Τα ZE και $E\Theta$ είναι ίσα, καθώς επίσης ίσα είναι και τα EA και EG . Άρα στο τετράπλευρο $\Gamma\Theta A Z$ οι διαγώνιοι θα διχοτομούνται, άρα θα είναι παραλληλόγραμμο (Πρόταση 2.6.4), ο.ε.δ.

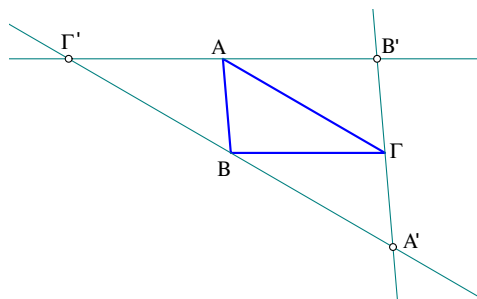
Το τρίγωνο $A\Delta\Theta$ λέγεται **Τρίγωνο των διαμέσων** του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άσκηση 2.8.2 Δείξε ότι οι διάμεσοι του τριγώνου $A\Delta\Theta$ των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παράλληλες και ίσες με τα τρία τέταρτα των πλευρών του αρχικού τριγώνου.

Υπόδειξη: Στο τελευταίο σχήμα το E είναι το σημείο τομής των διαμέσων του $A\Delta\Theta$ και το $E\Theta$ είναι το μισό της $B\Gamma$. Συνδύασε αυτά τα δύο και ολοκλήρωσε την απόδειξη.

Άσκηση 2.8.3 Από τις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ φέρε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές. Δείξε ότι σχηματίζεται τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ που έχει τις ίδιες γωνίες με το $AB\Gamma$ και επιπλέον οι κορυφές του $AB\Gamma$ είναι τα μέσα των πλευρών του.

Υπόδειξη: Έστω ότι οι $A'B', B'\Gamma', \Gamma'A'$ είναι αντίστοιχα παράλληλες προς τις $AB, B\Gamma, \Gamma A$. Τότε το $A\Gamma B\Gamma'$ είναι παραλληλόγραμμο και οι γωνίες στα Γ και Γ' ίσες. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και οι άλλες γωνίες του $A'B'\Gamma'$ είναι ίσες με τις αντίστοιχες του $AB\Gamma$. Από το

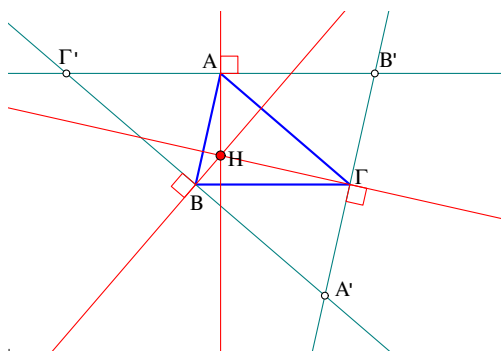


Σχήμα 171: Το αντισυμπληρωματικό τριγώνου

ότι και το $B\Gamma B'A$ είναι παραλληλόγραμμο έπεται ότι οι AB' και $A\Gamma'$ είναι ίσες (προς την $B\Gamma$).

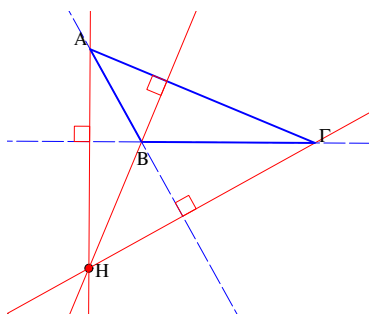
Το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ που αναφέρεται στην προηγούμενη άσκηση ονομάζεται **Αντισυμπληρωματικό** του τριγώνου $AB\Gamma$. Μιά σημαντική εφαρμογή του είναι στην απόδειξη της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 2.8.3 Οι ευθείες οι κάθετες από τις κορυφές του τριγώνου στις απέναντι πλευρές του διέρχονται από κοινό σημείο.



Σχήμα 172: Το ορθόκεντρο τριγώνου

Απόδειξη: Έστω $A'B'\Gamma'$ το αντισυμπληρωματικό του $AB\Gamma$. Οι κάθετες από τις κορυφές του $AB\Gamma$ προς τις απέναντι πλευρές είναι μεσοκάθετες των πλευρών του $A'B'\Gamma'$, άρα τέμνονται σε ένα σημείο H (Πρόταση 2.1.3), ο.ε.δ.



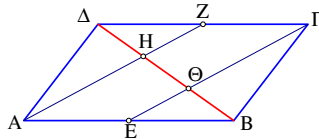
Σχήμα 173: Το ορθόκεντρο αμβλυγωνίου τριγώνου

Το σημείο H που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση είναι το σημείο τομής των τριών

υψών (ή προεκτάσεων αυτών) και λέγεται **Ορθόκεντρο** του τριγώνου $AB\Gamma$. Σημείωσε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο το H ταυτίζεται με την κορυφή του στην ορθή γωνία του και σε αμβλυγώνια τρίγωνα το ορθόκεντρο είναι εκτός του τριγώνου.

Άσκηση 2.8.4 Δείξε ότι αν το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ συμπίπτει με το κέντρο βάρους του τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

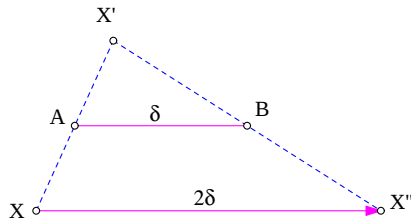
Άσκηση 2.8.5 Δείξε ότι αν το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ συμπίπτει με το περίκεντρό του τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 174: Τριχοτόμηση διαγωνίου

Άσκηση 2.8.6 Θεώρησε τα μέσα E, Z των απέναντι πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και φέρε τις $AZ, \Gamma E$. Δείξε ότι αυτές χωρίζουν την διαγώνιο $B\Delta$ σε τρία ίσα τμήματα.

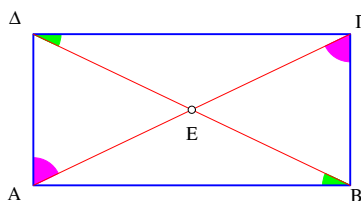
Άσκηση 2.8.7 Δείξε ότι αν ένα σχήμα Σ έχει δύο διαφορετικά κέντρα συμμετρίας τότε εκτείνεται στο άπειρο, δηλαδή όποιον θετικό αριθμό θ και αν δώσουμε υπάρχουν σημεία του Σ σε απόσταση μεγαλύτερη του θ .



Σχήμα 175: Δύο συμμετρίες ως προς σημείο

Υπόδειξη: Έστω ότι το Σ έχει δύο κέντρα συμμετρίας τα A και B . Πάρε τυχόν σημείο X του Σ και το συμμετρικό του X' ως προς A , καθώς και το συμμετρικό X'' του X' ως προς B . Επειδή στο τρίγωνο $XX'X''$ που δημιουργείται η AB ενώνει τα μέσα πλευρών, η XX'' θα έχει μήκος διπλάσιο του μήκους $\delta = |AB|$, που είναι σταθερό και ανεξάρτητο του X . Συνεπώς το Σ θα έχει σημείο X'' σε απόσταση 2δ από το X . Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία με το X'' βρίσκουμε σημείο X''' σε απόσταση 4δ από το X , κατόπιν 6δ από το X κ.ο.κ.. Τελικά, όποιος θετικός θ και αν δοθεί, επαναλαμβάνοντας την διαδικασία ν φορές, για κατάλληλο ν , θα βρούμε σημείο Y έτσι ώστε $|XY| = \nu(2\delta) > \theta$, που σημαίνει ότι μέσα στο Σ μπορούμε να βρούμε σημεία που να έχουν μεταξύ τους απόσταση μεγαλύτερη από όποιον θετικό θ και αν μας δώσουνε.

2.9 Το ορθογώνιο και το τετράγωνο



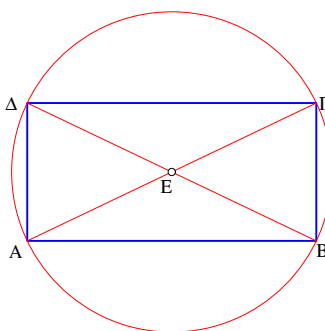
Σχήμα 176: Το ορθογώνιο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που όλες του οι γωνίες είναι ίσες (με α). Επειδή το άθροισμα των ίσων γωνιών του $4\alpha=360$, κάθε μία πρέπει να είναι ορθή ($\alpha=90$).

Πρόταση 2.9.1 Όλα τα τρίγωνα που σχηματίζονται από δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου και την διαγώνιο που συνδέει τα άκρα τους είναι ίσα μεταξύ τους.

Υπάρχουν τέσσερα τέτοια ορθογώνια στο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta\Gamma$, $\Delta\Gamma B$, $\Gamma B A$ και $BA\Delta$). Το ότι τα τρίγωνα με κοινή πλευρά την διαγώνιο, όπως τα $AB\Delta$ και $B\Delta\Gamma$, είναι ίσα το είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 2.5.1. Στα ορθογώνια είναι ίσα και τα άλλα τρίγωνα που έχουν κοινή μία πλευρά του ορθογώνιου (και όχι την διαγώνιό του), όπως λ.χ. τα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$. Πράγματι τα δύο τρίγωνα έχουν κοινή την πλευρά AB , τις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στα A και B ορθές άρα ίσες. Κατά το ΠΓΠ-κριτήριο είναι λοιπόν ίσα, ο.ε.δ.

Πόρισμα 2.9.1 Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο τότε και μόνον, όταν οι διαγώνιοί του είναι ίσες και διχοτομούνται από το σημείο τομής τους.

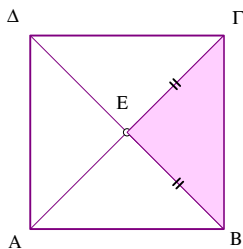


Σχήμα 177: Ίσες διαγώνιοι και διχοτομούμενες από το κοινό σημείο τους

Απόδειξη: Από την ισότητα των τριγώνων της προηγούμενης πρότασης προκύπτει η ισότητα των διαγωνίων. Το ότι αυτές διχοτομούνται στο μέσον τους είναι γενική ιδιότητα του παραλληλογράμμου (Πρόταση 2.5.2). Αντίστροφα, αν οι διαγώνιοι τετραπλεύρου είναι ίσες και διχοτομούνται από το σημείο τομής τους, τότε το σημείο τομής τους E είναι κέντρο κύκλου που περιέχει όλες τις κορυφές του τετραπλεύρου. Επιπλέον κάθε διαγώνιος είναι διάμετρος του κύκλου αυτού, άρα θα φαίνεται από την απέναντι κορυφή υπό ορθή γωνία (Πόρισμα 2.1.7). Άρα όλες οι γωνίες του τετραπλεύρου θα είναι ορθές και αυτό θα είναι ορθογώνιο,

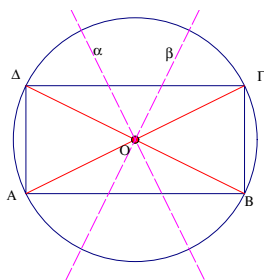
ο.ε.δ.

Τετράγωνο λέγεται το ορθογώνιο που επί πλέον έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



Σχήμα 178: Τετράγωνο

Πόρισμα 2.9.2 Σε κάθε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ τα τρίγωνα που σχηματίζονται από μία πλευρά του και το σημείο τομής των διαγωνίων του E (λ.χ. $EB\Gamma$) είναι ισοσκελή, ορθογώνια στο E και όλα ίσα μεταξύ τους.



Σχήμα 179: Χαρακτηρισμός ορθογωνίου

Πόρισμα 2.9.3 Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο τότε και μόνον τότε όταν εγγράφεται σε κύκλο, δηλαδή υπάρχει κύκλος διερχόμενος και από τις τέσσερις κορυφές του.

Απόδειξη: Αν είναι ορθογώνιο τότε (Πόρισμα 2.9.1) το σημείο τομής των διαγωνίων του ισαπέχει από τις κορυφές του, άρα εγγράφεται σε κύκλο. Αντίστροφα, αν είναι παραλληλόγραμμο και εγγράφεται σε κύκλο τότε οι μεσοκάθετοι των διαγωνίων του θα περιέχουν και οι δύο το κέντρο O του κύκλου Πόρισμα 2.1.3. Επομένως αυτό θα συμπίπτει με το σημείο τομής των διαγωνίων του και οι διαγώνιοι θα είναι διάμετροι του κύκλου, ο.ε.δ.

Ο κύκλος που ορίζεται από την προηγούμενη πρόταση λέγεται **Περιγεγραμμένος κύκλος** του ορθογωνίου. Για την απόδειξη του ότι ο κύκλος αυτός είναι μοναδικός (δηλαδή κάθε άλλος που διέρχεται επίσης από τις κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ θα ταυτίζεται με τον προηγούμενο) αρκεί να σκεφτούμε ότι αυτός ο κύκλος ταυτίζεται με αυτόν που περνά από τις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ που είναι μοναδικός (Πρόταση 2.1.3), ο.ε.δ.

Άσκηση 2.9.1 Δείξε ότι σε κάθε ορθογώνιο η ευθεία που ενώνει τα μέσα απέναντι πλευρών του είναι άξονας συμμετρίας του. Δείξε ότι στο τετράγωνο εκτός των προηγούμενων και οι διαγώνιοι είναι άξονες συμμετρίας του.

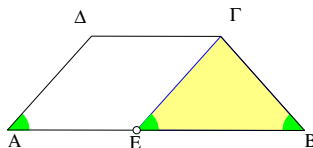
2.10 Άλλα είδη τετραπλεύρων



Σχήμα 180: Το τραπέζιο και το ισοσκελές τραπέζιο

Τραπέζιο λέγεται το τετράπλευρο που έχει δύο (μόνο) απέναντι πλευρές παράλληλες. Αν επί πλέον οι άλλες (μη-παράλληλες) πλευρές του είναι ίσες, τότε το τραπέζιο λέγεται **Ισοσκελές**.

Άσκηση 2.10.1 Δείξε ότι σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία παράλληλη πλευρά του είναι ίσες, και αντίστροφα: αν οι γωνίες που πρόσκεινται σε παράλληλη πλευρά τραπέζιου είναι ίσες τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.



Σχήμα 181: Οι γωνίες ισοσκελούς τραπέζιου

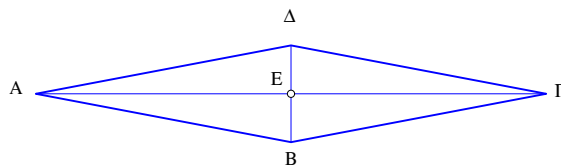
Υπόδειξη: Έστω το ισοσκελές $AB\Gamma\Delta$ με παράλληλες τις AB και $\Gamma\Delta$. Φέρε από το Γ παράλληλη της ΔA και σχημάτισε το τρίγωνο $B\Gamma E$. Το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές διότι $E\Gamma = A\Delta = B\Gamma$. Άρα οι γωνίες $\Gamma E B$ και $\Gamma B E$ είναι ίσες και συνεπώς και οι $\Delta A E$ και $\Gamma B E$ είναι ίσες. Αντίστροφα, αν οι $\Delta A E$ και $\Gamma B E$ είναι ίσες, τότε φέρνοντας παράλληλο της $A\Delta$ από το Γ και σχηματίζοντας το ίδιο τρίγωνο $\Gamma E B$ θα έχουμε ότι $\Gamma E B = \Gamma B E$ και συνεπώς το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές άρα $B\Gamma = \Gamma E = \Delta A$ και το τραπέζιο θα είναι ισοσκελές.

Άσκηση 2.10.2 Δείξε ότι ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε και μόνον τότε όταν οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Υπόδειξη: Κατά την προηγούμενη άσκηση οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία παράλληλη πλευρά του λ.χ. την AB θα είναι ίσες. Εφάρμοσε λοιπόν το ΠΓΠ κριτήριο. Το αντίστροφο αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Ρόμβος λέγεται ένα τετράπλευρο του οποίου όλες οι πλευρές είναι ίσες. Ειδική περίπτωση ρόμβου είναι το τετράγωνο στο οποίο, εκτός των πλευρών, και όλες οι γωνίες του είναι ίσες μεταξύ τους.

Πρόταση 2.10.1 Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος τότε και μόνον όταν οι διαγώνιοί του είναι κάθετοι και διχοτομούνται από το σημείο τομής τους.

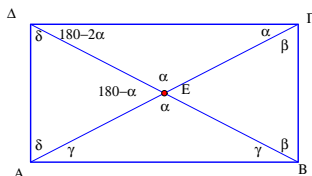


Σχήμα 182: Ρόμβος

Απόδειξη: Πράγματι, αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε το τρίγωνο που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του και την διαγώνιο που συνδέει τα άκρα τους (λ.χ. το $AB\Gamma$) είναι ισοσκελές. Κατά το Πόρισμα 1.8.2 η διάμεσος BE του ισοσκελούς θα είναι κάθετη στην βάση του $AB\Gamma$. Η BE όμως είναι τμήμα της διαγωνίου $B\Delta$ αφού περνά από το και το μέσον της άλλης διαγωνίου AG . Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα. Αντίστροφα, αν οι διαγώνιοι είναι κάθετοι και διχοτομούνται από το σημείο τομής τους E , τότε, εφαρμόζοντας το ΠΠΠ-κριτήριο ισότητας αποδεικνύουμε εύκολα ότι όλα τα τρίγωνα που σχηματίζονται από μία πλευρά και το E είναι ίσα μεταξύ τους. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει η ισότητα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ και η απόδειξη ότι είναι ρόμβος, ο.ε.δ.

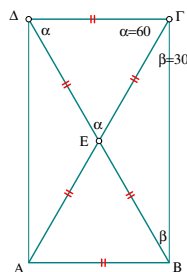
Άσκηση 2.10.3 Δείξε ότι αν σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με σημείο τομής των διαγωνίων του E τα τρίγωνα που σχηματίζονται από μία πλευρά του και το E είναι όλα ισοσκελή, τότε το τετράπλευρο είναι ή ορθογώνιο ή ισοσκελές τραπέζιο.

Υπόδειξη: Κατ' αρχήν εξετάζουμε τι συμβαίνει όταν ένα σκέλος ενός από τα ισοσκελή αυτά τρίγωνα είναι πλευρά του τετραπλεύρου. Αν το ισοσκελές $E\Delta\Gamma$ είχε ίσες τις $E\Delta$ και $\Delta\Gamma$

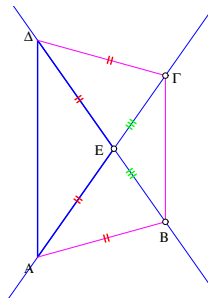


Σχήμα 183: Περίεργο ισοσκελές

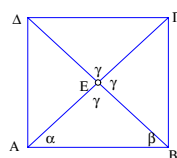
με γωνίες στην βάση $E\Gamma$ ίσες με α , τότε το διπλανό ισοσκελές $E\Gamma B$ δεν θα είχε βάση την $E\Gamma$ διότι η γωνία $180-\alpha$ σε αυτήν θα ήταν αμβλεία. Άρα θα είχε ως βάση την $B\Gamma$. Για τον ίδιο λόγο το ισοσκελές $A\Delta E$ θα είχε ως βάση την $A\Delta$. Αν το ισοσκελές AEB είχε βάση την AB , τότε οι $E\Delta$, EA , EB και $E\Gamma$ θα ήταν ίσες, άρα το $E\Delta\Gamma$ θα ήταν ισόπλευρο και εκ της $\alpha=2\beta=2\delta$ και $2\beta+2\gamma=180$ προκύπτει το ειδικό ορθογώνιο με $\alpha=60$, $\beta=30$, $\gamma=60$. Η περίπτωση το ισοσκελές EBA να έχει βάση την EA οδηγεί πάλι στο ίδιο ειδικό ορθογώνιο. Η τρίτη δυνατότητα για το ισοσκελές EAB είναι η βάση του να ταυτίζεται με την EB . Σε αυτήν την περίπτωση τα τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $\Delta B A$ είναι ίσα (ΠΠΠ-κριτήριο) και τα ισοσκελή $E\Gamma B$ και $E\Delta A$ έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες, άρα οι $B\Gamma$ και $A\Delta$ είναι παράλληλοι και το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Η ανάλυση αυτή εξαντλεί όλες τις περιπτώσεις όπου ένα από τα τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα έχει βάση μία πλευρά του τετραπλεύρου. Αν κανένα από τα ισοσκελή δεν έχει βάση ταυτιζόμενη με πλευρά του τετραπλεύρου, τότε όλα τα σκέλη θα είναι ίσα μεταξύ τους ($|EA|=|EB|=|E\Gamma|=|E\Delta|$), οπότε οι διαγώνιοι του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα αυτό είναι ορθογώνιο (Πόρισμα 2.9.1).



Σχήμα 184: Ένα ειδικό ορθογώνιο

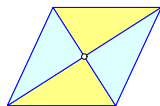


Σχήμα 185: Η περίπτωση ισοσκελούς τραπεζίου



Σχήμα 186: Χαρακτηρισμός ρόμβου

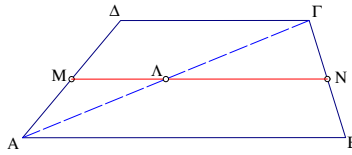
Άσκηση 2.10.4 Δείξε ότι αν σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με σημείο τομής των διαγωνίων του E τα τρίγωνα που σχηματίζονται από μία πλευρά του και το E είναι όλα ίσα μεταξύ τους, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος.



Σχήμα 187: Διαίρεση ρόμβου σε ίσα τρίγωνα

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι ένα από τα τρίγωνα λ.χ. το EAB έχει γωνίες α , β , και γ στην κορυφή E . Τότε και τα άλλα θα έχουν τις ίδιες γωνίες. Το θέμα είναι ποιές είναι οι σχετικές θέσεις τους. Πάντως στο E θα πρέπει όλες οι γωνίες να είναι γ . Διαφορετικά, αν η γωνία στο E του $BE\Gamma$ ήταν α ή β , πες α , τότε θα ήταν εξωτερική του EAB και θα έπρεπε $\alpha = \alpha + \beta$, που συνεπάγεται $\beta = 0$, άτοπο. Άρα όλες οι γωνίες στο E είναι ίσες και $\gamma = 90$. Αυτό έχει σαν συνέπεια όλες οι πλευρές του τετραπλεύρου να είναι ίσες μεταξύ τους, άρα αυτό να είναι ρόμβος.

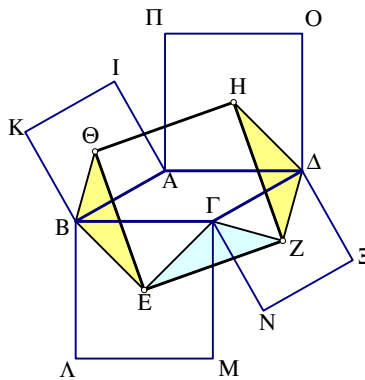
Άσκηση 2.10.5 Δείξε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών ενός τραπέζιου είναι παράλληλο και ίσο προς το ημιάθροισμα των παραλλήλων πλευρών του.



Σχήμα 188: $|MN| = \frac{1}{2}(|AB| + |ΓΔ|)$

Υπόδειξη: Έστω ότι στο τραπέζιο ABΓΔ το ευθύγραμμο τμήμα MN ενώνει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του τραπέζιου. Παίρνοντας το μέσον Λ της διαγωνίου ΑΓ και εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2.7.1 δείχνουμε ότι τα τρία σημεία M, N και Λ είναι στην ίδια ευθεία που είναι η μεσοπαράλληλος (Πόρισμα 2.7.2) των AB και ΓΔ. Από το Πόρισμα 2.7.1 έχουμε επίσης ότι η ΜΛ είναι το μισό της βάσης ΓΔ του τριγώνου ΑΓΔ και η ΛΝ είναι το μισό της βάσης ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ. Προσθέτοντας τα μήκη των ΜΛ και ΛΝ προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 2.10.6 Δείξε ότι οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι και άξονες συμμετρίας του. Δείξε επίσης ότι η ευθεία που ενώνει τα μέσα των παραλλήλων πλευρών του ισοσκελούς τραπέζιου είναι άξονας συμμετρίας του.



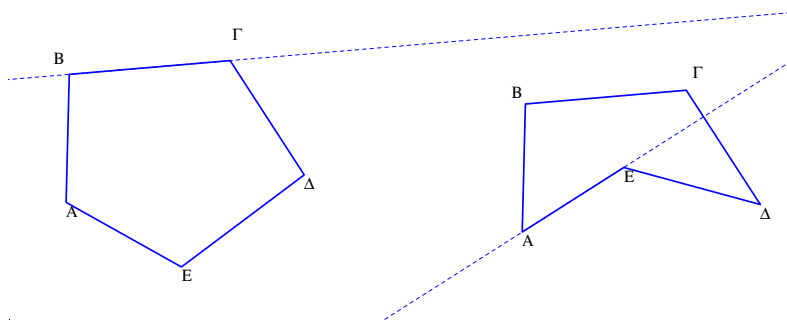
Σχήμα 189: Τετράγωνα στις πλευρές παραλληλογράμμου

Άσκηση 2.10.7 Στις πλευρές παραλληλογράμμου ABΓΔ κατασκευάζουμε τετράγωνα προς τα έξω. Δείξε ότι τα κέντρα αυτών των τετραγώνων (σημεία τομής των διαγωνίων τους) σχηματίζουν ένα τετράγωνο EZHΘ.

Άσκηση 2.10.8 Στις πλευρές παραλληλογράμμου ABΓΔ κατασκευάζουμε τετράγωνα προς την ίδια μεριά με το ABΓΔ. Δείξε ότι τα κέντρα αυτών των τετραγώνων σχηματίζουν ένα τετράγωνο.

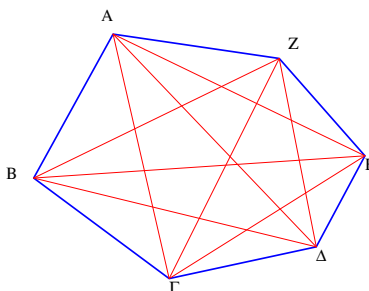
Άσκηση 2.10.9 Δείξε ότι η διάμεσος προς μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από την διάμεσο προς μικρότερη πλευρά.

2.11 Πολύγωνα, κανονικά πολύγωνα



Σχήμα 190: Πεντάγωνο

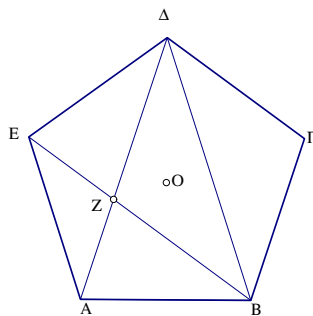
Παίρνοντας διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \dots$ που αποτελούν μία κλειστή τεθλασμένη (Παράγραφος 1.11) ορίζουμε ένα **Πολύγωνο**. Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \dots$ λέγονται **Πλευρές** του πολυγώνου και οι γωνίες που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές λέγονται **Γωνίες** του πολυγώνου. Δύο πολύγωνα $AB\Gamma\Delta, \dots$ και $A'B'\Gamma'\Delta', \dots$ λέγονται **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες και αντίστοιχες γωνίες επίσης ίσες. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα δύο κορυφές του πολυγώνου που δεν είναι άκρα της ίδιας πλευράς λέγεται **Διαγώνιος** του πολυγώνου. Και εδώ, όπως και στα τετράπλευρα, διακρίνουμε **Κυρτά**



Σχήμα 191: Διαγώνιες πολυγώνου

και μή-κυρτά πολύγωνα. Τα κυρτά είναι αυτά που κάθε πλευρά τους προεκτενόμενη τα αφήνει ολόκληρα από την ίδια μεριά της. Μη-κυρτά αυτά τα οποία έχουν μία τουλάχιστον πλευρά, η οποία προεκτενόμενη χωρίζει το πολύγωνο σε μέρη κείμενα και από τις δύο πλευρές της. Ανάλογα με το πλήθος των πλευρών/γωνιών τους δίνουμε στα πολύγωνα ειδικές ονομασίες: πεντάπλευρο, εξάπλευρο, επτάπλευρο, κτλ.. Αν θέλουμε να τονίσουμε τις γωνίες (τα πολύγωνα έχουν τόσες πλευρές όσες και γωνίες) λέμε: πεντάγωνο, εξάγωνο, κτλ. Προς το παρόν θα ασχοληθούμε με κυρτά πολύγωνα και μάλιστα με κάποια ειδικά πολύγωνα που λέγονται **Κανονικά** και χαρακτηρίζονται από το ότι όλες οι πλευρές τους είναι ίσες μεταξύ τους αλλά και όλες οι γωνίες τους είναι ίσες μεταξύ τους. Δύο ειδικές περιπτώσεις τέτοιων πολυγώνων, που έχουμε ήδη συναντήσει, αποτελούν τα ισόπλευρα τρίγωνα και τα τετράγωνα.

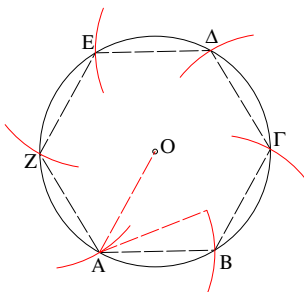
Πρόταση 2.11.1 Το άθροισμα των μέτρων των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n γωνίες είναι $(n - 2)180$ μοίρες.



Σχήμα 194: Το κανονικό πεντάγωνο

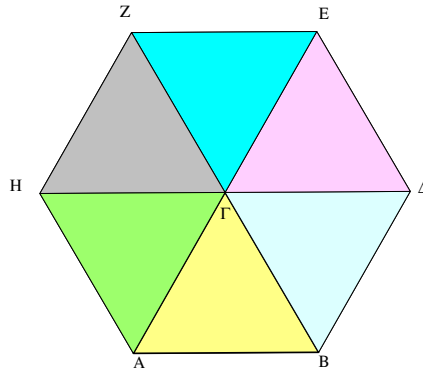
Απόδειξη: Το ότι τα αναφερόμενα έχουν ίσες διαγωνίους προκύπτει εύκολα εφαρμόζοντας κατάλληλα το ΓΠΓ-κριτήριο ισότητας τριγώνων. Το αντίστροφο έχει περισσότερο ενδιαφέρον. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι το κανονικό πολύγωνο έχει περισσότερες από τέσσερις πλευρές και ίσες διαγωνίους. Σε ένα τέτοιο πολύγωνο έστω το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τρεις διαδοχικές πλευρές του και μία διαγώνιο, όπως το $AB\Delta E$ στο σχήμα. Κατά τις υποθέσεις μας τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta E B$ είναι ίσα (ΠΠΠ-κριτήριο) και ισοσκελή. Ομοίως και τα ABE και $\Delta E A$ είναι ίσα μεταξύ τους και ισοσκελή. Θεωρώντας λοιπόν το σημείο τομής Z των διαγωνίων BE και $A\Delta$ σχηματίζουμε δύο τρίγωνα AZE και $BZ\Delta$ που έχουν τις γωνίες τους στο Z ίσες, ως κατά κορυφήν και επιπροσθέτως είναι και ισοσκελή. Συνάγεται ότι και οι άλλες γωνίες των τριγώνων αυτών είναι ίσες μεταξύ τους, συνεπώς οι ευθείες AE και $B\Delta$ είναι παράλληλες, αφού η τέμνουσα αυτές EB σχηματίζει εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Αυτό πάλι έχει σαν συνέπεια το ότι η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $AB\Delta$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα να είναι ισοσκελές και η γωνία στην κορυφή του να έχει μέτρο το ήμισυ της γωνίας στην βάση του. Συνεπώς, αν το μέτρο της γωνίας στην κορυφή είναι ω , οι άλλες δύο γωνίες θα έχουν μέτρο 2ω έκαστη. Επομένως το άθροισμα των μέτρων τους θα είναι $\omega + 2\omega + 2\omega = 5\omega = 180$. Από την οποία προκύπτει ότι $\omega = \frac{180}{5} = 36$. Από όλα αυτά προκύπτει ότι η γωνία του κανονικού πολυγώνου στο A είναι $3\omega = 108$. Έτσι για να βρούμε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου δεν έχουμε παρά να λύσουμε την εξίσωση $\frac{N-2}{N}180 = 108$ ως προς N . Η εξίσωση είναι ισοδύναμη της $72N = 360$ και έχει λύση την $N=5$, ο.ε.δ.

Άσκηση 2.11.1 Κατασκεύασε τετράγωνο που έχει μήκος πλευράς δ .



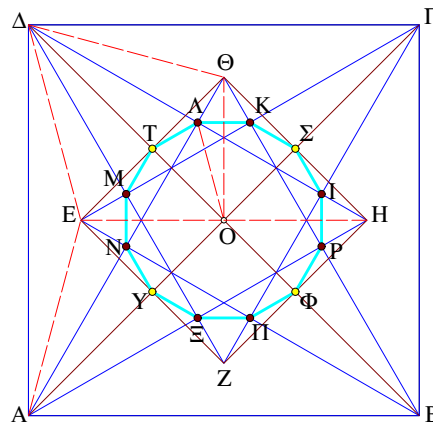
Σχήμα 195: Κατασκευή κανονικού εξαγώνου

Άσκηση 2.11.2 Δίδεται κύκλος κ ακτίνας ρ . Δείξε ότι η επόμενη διαδικασία κατασκευάζει ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον κ : Με κέντρο τυχόν σημείο A του κ όρισε κύκλο ακτίνας ρ , που τέμνει τον κ στο B . Με κέντρο το B και ακτίνα ρ όρισε κύκλο που τέμνει τον κ στο Γ . Με κέντρο Γ και ακτίνα ρ όρισε κύκλο που τέμνει τον κ στο Δ κτλ. Από τα δύο σημεία τομής διάλεγε πάντα ένα προς την ίδια φορά (αντίθετη του ρολογιού). Ορίζονται συνολικά έξι σημεία του κ που είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.



Σχήμα 196: Το κανονικό εξάγωνο

Άσκηση 2.11.3 Έστω το ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Στην πλευρά $ΓΒ$ κατασκευάζουμε άλλο ισόπλευρο $ΓΒΔ$, στην πλευρά $ΓΔ$ αυτού του ισοπλεύρου κατασκευάζουμε άλλο ισόπλευρο $ΓΔΕ$ κ.ο.κ.. Δείξε ότι μετά από πέντε παρόμοιες κατασκευές επιστρέφουμε στο αρχικό ισόπλευρο και το πολύγωνο που κατασκευάζεται από τις πλευρές $ΑΒ$, $ΒΔ$, $ΔΕ$, κτλ. είναι ένα κανονικό εξάγωνο με κέντρο το $Γ$.



Σχήμα 197: Κανονικό δωδεκάγωνο

Άσκηση 2.11.4 Στις πλευρές τετραγώνου προς τα μέσα κατασκευάζονται ισόπλευρα τρίγωνα $ΑΒΘ$, $ΒΓΕ$, $ΓΔΖ$, $ΔΑΗ$. Δείξε ότι τα μέσα των πλευρών τους $Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ρ$ και τα μέσα $Σ, Τ, Υ, Φ$ των $ΗΘ, ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ$ αντίστοιχα είναι κορυφές κανονικού δωδεκαγώνου ([Wel91, σ. 137]).

Άσκηση 2.11.5 Δείξε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο έχει άξονα συμμετρίας, αλλά κέντρο συμμετρίας έχουν μόνο τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο αριθμό πλευρών. Δείξε επιπλέον ότι τα κανονικά πολύγωνα με n το πλήθος πλευρές έχουν n άξονες συμμετρίας.

Σχόλιο-1 Ο Gauss(1777-1855) απέδειξε ([Kle97, σ. 16]) ότι, ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη τότε και μόνον, όταν το n είναι της μορφής

$$n = 2^\mu \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_k,$$

όπου οι ακέραιοι $\delta_1, \dots, \delta_k$ είναι διαφορετικοί και πρώτοι (δηλαδή δεν διαιρούνται παρά μόνο με το 1 και τον εαυτό τους) και μάλιστα της μορφής (όταν είναι διάφοροι του 1)

$$\delta = 2^\lambda + 1.$$

Στην προηγούμενη εξίσωση για το n , μερικοί παράγοντες μπορεί να λείπουν, λ.χ. μερικά δ μπορεί να είναι 1 ή/και να λείπει το 2^μ . Ο επόμενος πίνακας, φτιαγμένος σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, δίνει τα κατασκευάσιμα και μη-κατασκευάσιμα κανονικά πολύγωνα για τους πρώτους 32 αριθμούς.

κατασκευάσιμα	3	4	5	6	8	10	12	15	16	17	20	24	25	30	32
μη-κατασκευάσιμα	7	9	11	13	14	18	19	21	22	23	26	27	28	29	31

Άσκηση 2.11.6 Για κάθε ακέραιο της πρώτης γραμμής του προηγούμενου πίνακα, προσδιόρισε τα (n, μ, δ) που υπεισέρχονται στο κριτήριο κατασκευασιμότητας του Gauss. Απόδειξε επίσης ότι κάθε ακέραιος της δεύτερης γραμμής δεν ικανοποιεί αυτό το κριτήριο.

Σχόλιο-2 Απο ένα θεώρημα του Fermat(1601-1665) ([Wei03, σ. 1022]) αποδεικνύεται ότι οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $\delta = 2^\lambda + 1$, πρέπει να έχουν το λ ίσο με μία δύναμη του 2 και τελικά να είναι της μορφής

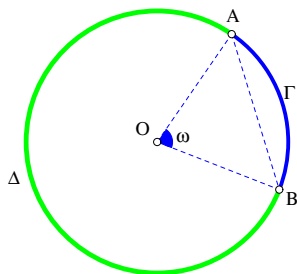
$$\delta = 2^{2^p} + 1.$$

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **Αριθμοί του Fermat** και είναι πρώτοι για $p < 5$ (πρόκειται για τους 3,5,17, 257, 65537), ενώ για $p \geq 5$ μόνο μη-πρώτοι αυτής της μορφής είναι γνωστοί. Από αυτά τα πολύγωνα, στο μάθημα, κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ($n=3$, Κατασκευή 2.4.2), και το πεντάγωνο ($n=5$, Ασκήσεις 4.2.1, 4.2.2). Υπάρχουν πολλές μέθοδοι κατασκευής του κανονικού 17-γώνου ([Eve63, σ. 217]), όλες όμως σχετικά περίπλοκες. Ο Richelot(1808-1875) εδημοσίευσε κατασκευή του 257-γώνου, ενώ ο Hermes(1846-1912) αφιέρωσε δέκα χρόνια της ζωής του στην κατασκευή του κανονικού 65537-γώνου.

Σχόλιο-3 Το πρόβλημα της κατασκευής του κανονικού πολυγώνου με n πλευρές είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα της κατασκευής της γωνίας μέτρου $\frac{360}{n}$, που προκύπτει ενώνοντας το κέντρο O του πολυγώνου με τα άκρα A, B μιάς πλευράς του. Επομένως, εαν κατασκευάζεται το κανονικό πολύγωνο με n πλευρές, τότε κατασκευάζεται και το κανονικό πολύγωνο με $2n$ πλευρές διχοτομώντας την αντίστοιχη γωνία AOB του αρχικού πολυγώνου. Έτσι, ο μαθητής ξεκινώντας από το ισόπλευρο, τετράγωνο, πεντάγωνο κτλ. μπορεί εύκολα να κατασκευάσει διαδοχικά τα κανονικά πολύγωνα με 6, 8, 10, 12, 16 κτλ. πλευρές.

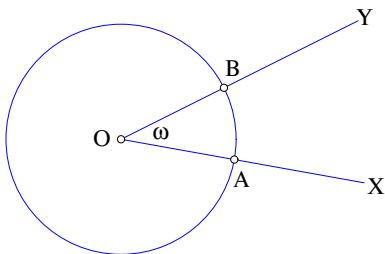
2.12 Τόξα, επίκεντρες γωνίες

Δύο σημεία Α και Β πάνω στον κύκλο ορίζουν την χορδή του ΑΒ, δύο **Τόξα** και μία γωνία ΑΟΒ. Το ένα τόξο ΑΓΒ είναι το μέρος του κύκλου που περιέχεται στο εσωτερικό της γωνίας ΑΟΒ. Το άλλο τόξο ΑΔΒ είναι το υπόλοιπο κομμάτι του κύκλου. Τα δύο τόξα είναι από τις δύο μεριές της ευθείας ΑΒ και λέγονται **Συμπληρωματικά**. Το μικρότερο ευρίσκεται από την άλλη μεριά της ΑΒ απ' ότι το κέντρο του κύκλου. Η γωνία $\omega = \text{ΑΟΒ}$ λέγεται **Επίκεντρη** και το τόξο ΑΓΒ λέγεται **Αντίστοιχο της επίκεντρης τόξο**. Οι ίδιες



Σχήμα 198: Τόξα $\widehat{ΑΓΒ}$ και $\widehat{ΑΔΒ}$

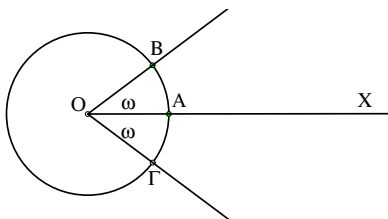
ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ ορίζουν και το τόξο ΑΔΒ για το οποίο θεωρούμε ότι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι η μή-κυρτή που ορίζεται από αυτές. Στην ειδική περίπτωση που η χορδή είναι διάμετρος η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι πεπλατυσμένη και το αντίστοιχο τόξο λέγεται **Ημιπεριφέρεια**. Δύο τόξα του ίδιου κύκλου τα θεωρούμε **Ίσα** όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι ίσες. Έστω ημιευθεία ΟΧ και κύκλος με κέντρο



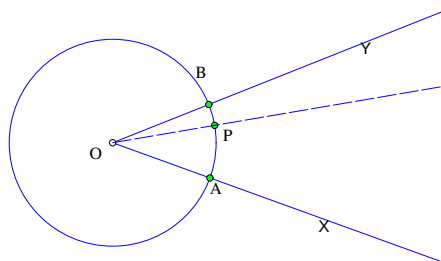
Σχήμα 199: Αντιστοίχιση τόξων - γωνιών

το Ο και ακτίνα ρ . Κατά το Αξίωμα 1.3.3 η ημιευθεία θα τέμνει τον κύκλο σε ένα ακριβώς σημείο Α (με $|OA| = \rho$). Το ίδιο θα συμβαίνει και με κάθε άλλη ημιευθεία ΟΥ που θα έχει το ίδιο άκρο Ο. Και αυτή θα έχει ένα ακριβώς σημείο Β πάνω στον κύκλο. Επομένως κάθε γωνία ΧΟΥ θα ορίζει ένα τόξο του κύκλου και αντίστροφα, κάθε τόξο του κύκλου θα ορίζει μία επίκεντρη γωνία. Μέσω της αντιστοίχισης αυτής έννοιες που ορίσαμε για γωνίες και ιδιότητες των γωνιών μεταφέρονται στα τόξα κύκλου. Για παράδειγμα τα αξιώματα 1.4.2 και 1.4.3 των γωνιών της παραγράφου 1.4 παίρνουν την επομένη μορφή.

1. Δοθείσης ημιευθείας ΟΧ και κύκλου με κέντρο Ο που τέμνει την ημιευθεία στο Α καθώς και αριθμού ω με $0 < \omega < 180$, υπάρχουν δύο ακριβώς ημιευθείες εκατέρωθεν της ΟΧ που ορίζουν τόξα με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .



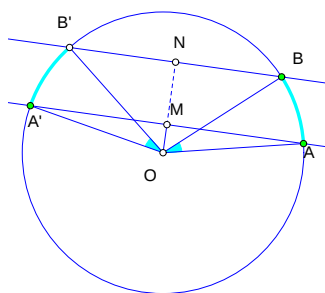
Σχήμα 200: Τόξα εκατέρωθεν ημιευθείας



Σχήμα 201: Πρόσθεση τόξων

2. Για κάθε σημείο P του τόξου AB του κύκλου λέμε ότι το τόξο AB είναι το άθροισμα των τόξων AP και PB.

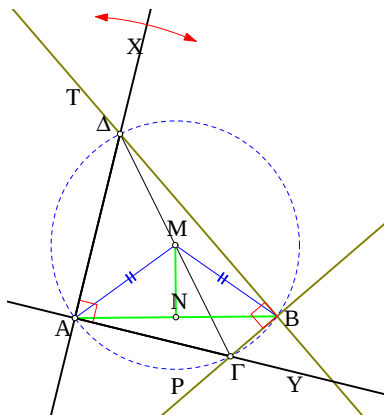
Πρόταση 2.12.1 Τα άκρα μη-τεμνομένων ίσων τόξων του ίδιου κύκλου ορίζουν δύο παράλληλες ευθείες. Αντίστροφα, δύο παράλληλες που τέμνουν τον ίδιο κύκλο ορίζουν δύο ίσα τόξα.



Σχήμα 202: Ίσα τόξα

Απόδειξη: Για τα ίσα τόξα AB και A'B' (όπως στο σχήμα 202) θεωρήσε την χορδή AA' και το μέσον της M. Ισότητα των τόξων σημαίνει ισότητα των επικέντρων γωνιών τους άρα οι OB και OB' σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις OA και OA' αντίστοιχα. Συνάγεται ότι η OM είναι διχοτόμος του ισοσκελούς BOB', άρα περνά από το μέσον N της BB' και είναι κάθετος σε αυτήν, άρα οι AA' και BB' είναι παράλληλοι. Για το αντίστροφο παρατήρησε ότι τα ισοσκελή τρίγωνα OAA' και OBB' με κοινή κορυφή το κέντρο του κύκλου και παράλληλες βάσεις έχουν κοινή διχοτόμο και μεσοκάθετο (Πόρισμα 2.1.1) OM. Άρα οι (επίκεντρες) γωνίες AOB και A'OB' είναι ίσες, ο.ε.δ.

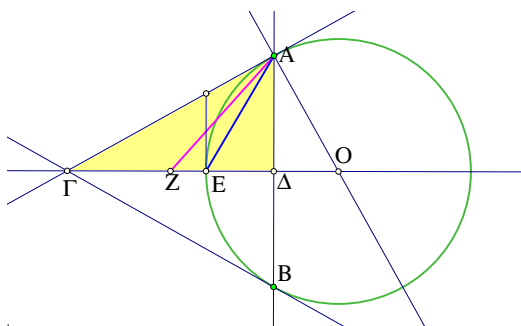
Άσκηση 2.12.5 Ορθή γωνία XAY περιστρεφόμενη περί την σταθερή κορυφή της A τέμνει τις πλευρές άλλης σταθερής ορθής γωνίας PBT στα Γ και Δ . Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AB .



Σχήμα 205: Ορθή γωνία περιστρεφόμενη

Άσκηση 2.12.6 Κατασκεύασε τετράπλευρο του οποίου δίδονται τρεις πλευρές και οι προσκείμενες γωνίες στην τέταρτη πλευρά.

Άσκηση 2.12.7 Στα άκρα τόξου AB μικρότερου ημιπεριφέρειας φέρε τις εφαπτόμενες τεμνόμενες στο Γ . Δείξε ότι το μέσον Z του ύψους $\Gamma\Delta$ του ισοσκελούς $AB\Gamma$ είναι εκτός του κύκλου που περιέχει το τόξο.



Σχήμα 206: Η θέση του μέσου

Υπόδειξη: Εφάρμοσε την Άσκηση 1.10.9

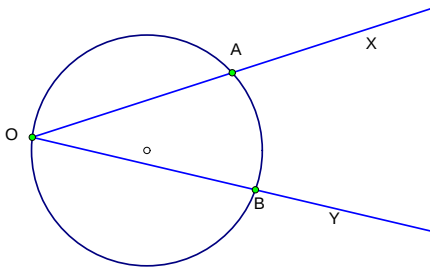
Άσκηση 2.12.8 Δείξε ότι οι ακτίνες προς τα μέσα δύο τόξων που ορίζονται από δύο κάθετες χορδές του ιδίου κύκλου σχηματίζουν μία ορθή γωνία.

Άσκηση 2.12.9 Δίδεται σημείο A στο εσωτερικό του κύκλου $\kappa(O, \rho)$. Να κατασκευασθεί χορδή $B\Gamma$ του κ διερχόμενη διά του A και έχουσα δοθέν μήκος λ .

Άσκηση 2.12.10 Δείξε ότι το τόξο που εφάπτεται των δύο μη παραλλήλων πλευρών ισοσκελούς τραπέζιου στα άκρα της μεγάλης βάσης εφάπτεται και της μικρής βάσης του τότε και μόνον, όταν αυτή είναι διπλάσια των μη παραλλήλων πλευρών του.

2.13 Εγγεγραμμένες γωνίες

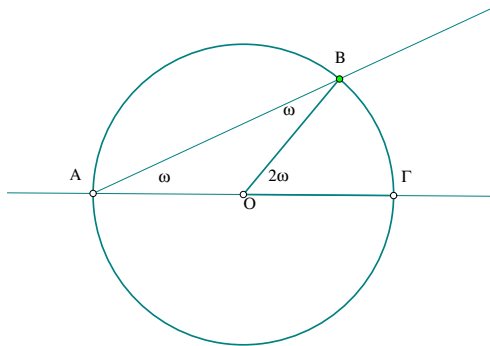
Μία γωνία XOY λέγεται **Εγγεγραμμένη** σε κύκλο κ όταν η κορυφή της είναι επί του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο σε δύο άλλα σημεία A και B διαφορετικά του O . Η χορδή AB λέγεται **Χορδή της εγγεγραμμένης**. Το επόμενο θεώρημα εκφράζει μία



Σχήμα 207: Εγγεγραμμένη γωνία

θεμελιώδη σχέση μεταξύ εγγεγραμμένων και επικέντρων γωνιών, που, όπως λέμε **Βαίνουν επί του ιδίου τόξου** ή **Βλέπουν το ίδιο τόξο**.

Πρόταση 2.13.1 Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που μία πλευρά της είναι διάμετρος έχει μέτρο το ήμισυ του μέτρου της αντίστοιχης επικέντρου γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.



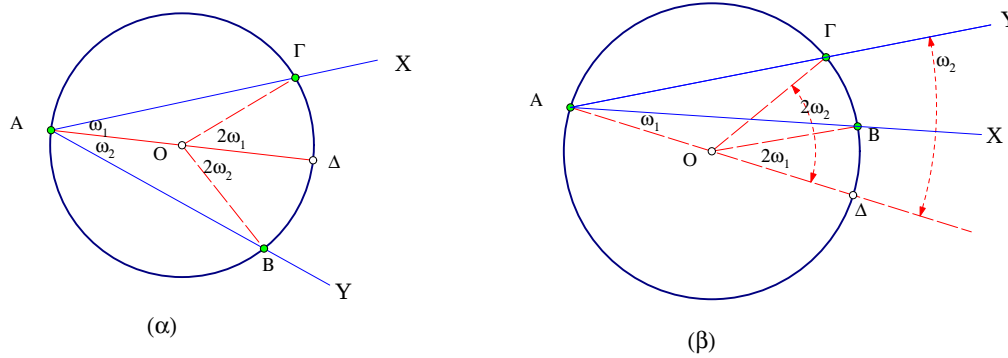
Σχήμα 208: Εγγεγραμμένη και αντίστοιχη επίκεντρος

Απόδειξη: Έστω $BA\Gamma$ η εγγεγραμμένη γωνία και AG διάμετρος του κύκλου. Η επίκεντρος $BO\Gamma$ που σχηματίζεται είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου OAB . Άρα το μέτρο της που είναι ίσο με το άθροισμα των δύο ίσων γωνιών του ισοσκελούς θα είναι 2ω , όπου ω το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας $BA\Gamma$, ο.ε.δ.

Πρόταση 2.13.2 Κάθε εγγεγραμμένη σε κύκλο γωνία έχει μέτρο το ήμισυ της αντιστοίχου επικέντρου.

Απόδειξη: Σε αυτό το θεώρημα απαλασσόμεθα από τον περιορισμό της μίας πλευράς να είναι διάμετρος. Ανάγουμε όμως την απόδειξη στην προηγούμενη περίπτωση παριστάνοντας την γωνία ως άθροισμα ή διαφορά δύο εγγεγραμμένων που μία τους πλευρά είναι διάμετρος.

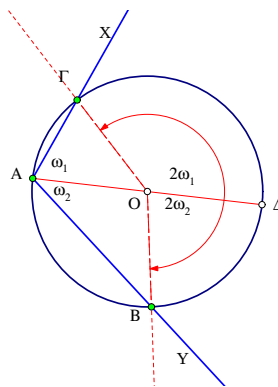
Αν λοιπόν καμία πλευρά της εγγεγραμμένης δεν είναι διάμετρος, τότε φέρουμε από την κορυφή της A μία διάμετρο $A\Delta$. Η πρώτη περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία η διάμετρος που φέρουμε περιέχεται στο εσωτερικό της αρχικής γωνίας BAG . Σε αυτήν την περίπτωση



Σχήμα 209: Εγγεγραμμένη και αντίστοιχη επίκεντρος II

το μέτρο ω της αρχικής γωνίας είναι το άθροισμα $\omega = \omega_1 + \omega_2$ των μέτρων των δύο γωνιών. Εφαρμόζοντας λοιπόν το προηγούμενο θεώρημα ευρίσκουμε ότι η αντίστοιχη επίκεντρος θα έχει μέτρο $2\omega_1 + 2\omega_2 = 2\omega$. Η δεύτερη περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία η διάμετρος που φέρουμε δεν περιέχεται στο εσωτερικό της αρχικής γωνίας. Σε αυτήν την περίπτωση το μέτρο ω της αρχικής γωνίας είναι η διαφορά $\omega = \omega_2 - \omega_1$ των μέτρων των δύο γωνιών. Εφαρμόζοντας λοιπόν το προηγούμενο θεώρημα ευρίσκουμε ότι η αντίστοιχη επίκεντρος θα έχει μέτρο $2\omega_2 - 2\omega_1 = 2\omega$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Υπάρχει μία λεπτομέρεια στην διατύπωση της πρότασης που πρέπει να σημειωθεί. Όταν η εγγεγραμμένη γωνία είναι αμβλεία, τότε η αντίστοιχος επίκεντρος έχει μέτρο μεγαλύτερο από 180° , δηλαδή είναι μή-κυρτή. Το χαρακτηριστικό της είναι ότι το κέντρο του κύκλου και το τόξο είναι από την ίδια μεριά της χορδής $B\Gamma$.

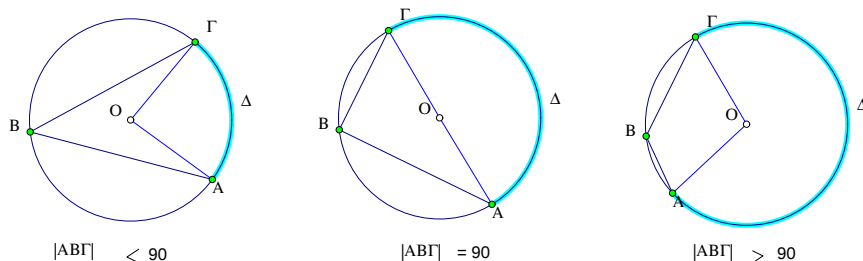


Σχήμα 210: Εγγεγραμμένη αμβλεία και αντίστοιχη επίκεντρος (μη κυρτή)

Πόρισμα 2.13.1 Αν $AB\Gamma$ είναι γωνία εγγεγραμμένη σε κύκλο κ και $A\Delta\Gamma$ συμβολίζει το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρος της (το τόξο που “βλέπει η γωνία”):

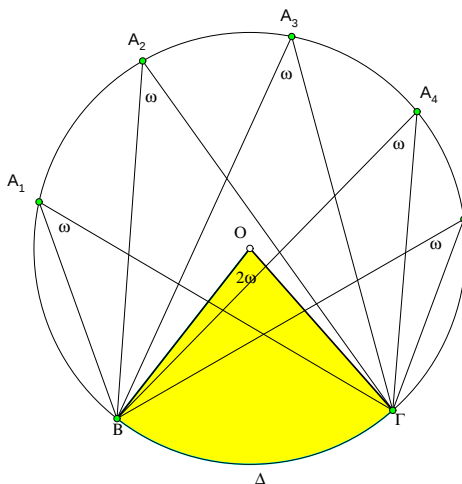
α) Εάν η εγγεγραμμένη $AB\Gamma$ είναι οξεία τότε το τόξο $A\Delta\Gamma$ είναι μικρότερο της ημιπεριφέρειας,

- β) Εάν η εγγεγραμμένη $AB\Gamma$ είναι ορθή τότε το τόξο $A\Delta\Gamma$ είναι ίσο με μία ημιπεριφέρεια,
 γ) Εάν η εγγεγραμμένη $AB\Gamma$ είναι αμβλεία τότε το τόξο $A\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ημιπεριφέρειας.



Σχήμα 211: Εγγεγραμμένη και τόξο που αυτή “βλέπει”

Στο προηγούμενο σχήμα απεικονίζονται οι τρεις περιπτώσεις του προηγούμενου πορίσματος και τονίζονται τα τόξα $A\Delta\Gamma$ επί των οποίων **βαίνει** (ή βλέπει) η αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία. Το κοινό και αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό των τόξων του κύκλου είναι ότι όλα τα σημεία του κύκλου που είναι από το άλλο μέρος της χορδής του βλέπουν αυτό το τόξο υπό σταθερή γωνία, της οποίας το μέτρο είναι ίσο με το ήμισυ του μέτρου της αντιστοίχου επικέντρου του τόξου.

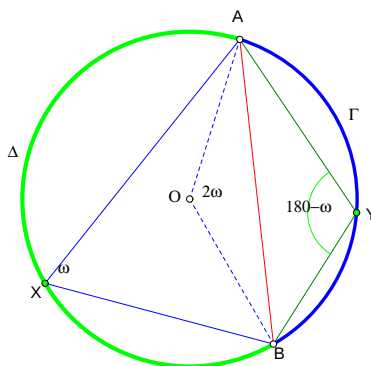


Σχήμα 212: Ισες εγγεγραμμένες γωνίες

Πόρισμα 2.13.2 Κάθε χορδή AB ενός κύκλου τον χωρίζει σε δύο τόξα $A\Gamma B$ και $A\Delta B$ περιεχόμενα έκαστον σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την ευθεία AB . Τα δύο τόξα αυτά είναι συμπληρωματικά. Κάθε σημείο X του τόξου $A\Delta B$ βλέπει το άλλο τόξο $A\Gamma B$ υπό σταθερή γωνία ω και κάθε σημείο Y του τόξου $A\Gamma B$ βλέπει το τόξο $A\Delta B$ υπο την παραπληρωματική της ω , $\omega' = 180 - \omega$.

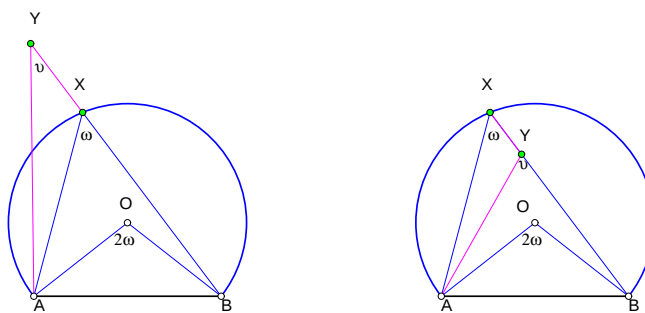
Πρόταση 2.13.3 Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X του επιπέδου που είναι από την ίδια μεριά του ευθυγράμμου τμήματος AB και το βλέπουν υπό δοθείσα σταθερή γωνία ω είναι τόξο κύκλου που διέρχεται από τα άκρα A και B του ευθυγράμμου τμήματος.

Απόδειξη: Έστω X σημείο του τόπου, δηλαδή σημείο που βλέπει το τμήμα AB υπό γωνία ω και κ ο κύκλος που διέρχεται από τα τρία σημεία AB και X (Πρόταση 2.1.3). Έστω ότι το X περιέχεται στο τόξο ADB με άκρα τα A και B . Κατά το προηγούμενο πόρισμα και



Σχήμα 213: Συμπληρωματικά τόξα οριζόμενα από χορδή AB

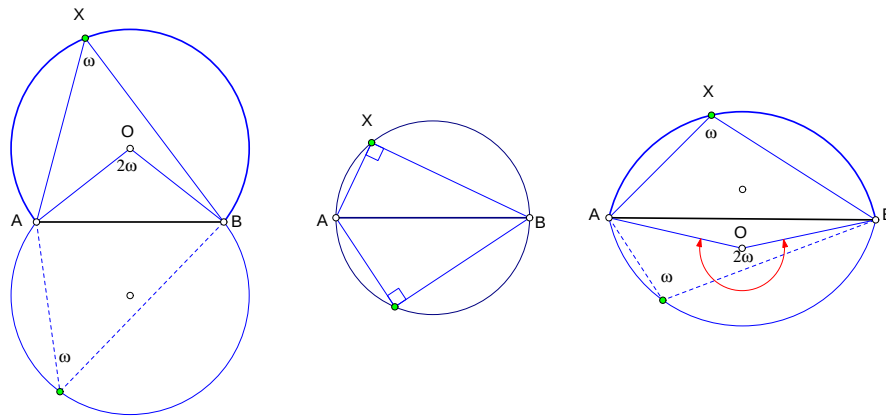
κάθε άλλο σημείο αυτού του τόξου (σχήμα 213) θα βλέπει το AB υπό γωνία ω . Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνουμε ότι κανένα άλλο σημείο του επιπέδου εκτός αυτού του τόξου δεν βλέπει το AB υπό γωνία ω . Πράγματι, αν το σημείο Y είναι εξωτερικό του



Σχήμα 214: Σημεία που δεν βλέπουν το AB υπό γωνίαν ω

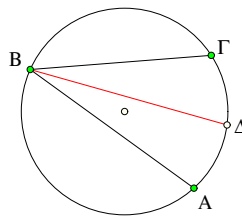
τόξου AXB τότε ενώνοντάς το με τα A και B σχηματίζεται το τρίγωνο AYB του οποίου μία εκ των πλευρών τουλάχιστον (γιατί;) λ.χ. η YB θα τέμνει το τόξο σε κάποιο σημείο X (σχήμα 214 αριστερά). Τότε η γωνία ω στο X θα είναι εξωτερική του τριγώνου AXY , άρα μεγαλύτερη της εντός και απέναντι που είναι η u . Παρόμοια δείχνουμε (σχήμα 214 δεξιά) ότι ένα σημείο Y στο εσωτερικό του τόξου βλέπει το AB υπό γωνίαν u μεγαλύτερη της ω . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Αν θέλουμε τον γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων X που βλέπουν το AB υπό σταθερή γωνία ω , ανεξάρτητα της πλευράς του AB , πρέπει να κάνουμε την κατασκευή



Σχήμα 215: Σημεία που βλέπουν το AB υπό δοθείσαν γωνίαν ω

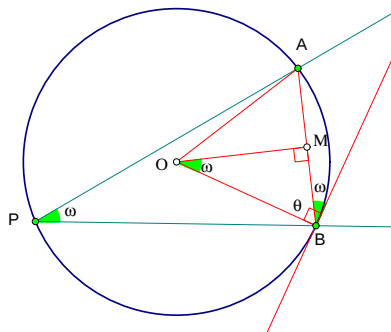
του τόξου και από τις δύο μεριές του AB. Το σχήμα 215 δείχνει αυτήν την κατασκευή στην περίπτωση α) της οξείας γωνίας ω , β) στην περίπτωση της ορθής γωνίας, όπου τα δύο τόξα είναι δύο ημιπεριφέρειες του ιδίου κύκλου και γ) στην περίπτωση της αμβλείας γωνίας ω .



Σχήμα 216: Διχοτόμος εγγεγραμμένης και μέσον τόξου

Άσκηση 2.13.1 Εάν $AB\Gamma$ είναι μία εγγεγραμμένη σε κύκλο γωνία βαίνουσα επί τόξου $A\Delta\Gamma$, τότε η ευθεία $B\Delta$ που ορίζεται από την κορυφή της γωνίας B και το μέσον Δ του τόξου είναι η διχοτομος της εγγεγραμμένης γωνίας.

Υπόδειξη: Οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες των τόξων $\Gamma\Delta$ και $\Delta\Lambda$ είναι ίσες μεταξύ τους και διπλάσιες των $\Gamma B\Delta$ και $\Delta B\Lambda$ αντίστοιχα.

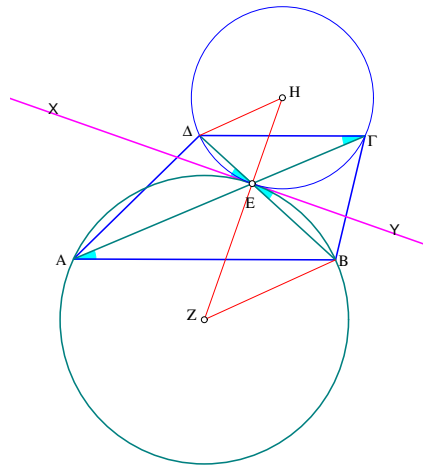


Σχήμα 217: Γωνία χορδής και εφαπτομένης

Πρόταση 2.13.4 Η γωνία ω που σχηματίζεται από χορδή AB του κύκλου και εφαπτόμενη στο άκρο της B είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βλέπει το τόξο μεταξύ της χορδής αυτής και της εφαπτομένης.

Απόδειξη: Η γωνία χορδής και εφαπτομένης στο B έχει τις πλευρές της κάθετες στις πλευρές της γωνίας BOM , όπου M το μέσον της χορδής. Και οι δύο αυτές γωνίες είναι συμπληρωματικές της γωνίας θ που σχηματίζει η χορδή με την ακτίνα στο B , άρα είναι ίσες. Η εγγεγραμμένη BPA είναι όμως ίση με την BOM , ο.ε.δ.

Άσκηση 2.13.2 Έστω τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με παράλληλες πλευρές AB , $\Gamma\Delta$ και E το σημείο τομής των διαγωνίων του. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\Delta E\Gamma$ και $A B E$ εφάπτονται στο σημείο E .



Σχήμα 218: Εφαπτόμενοι κύκλοι

Υπόδειξη: Έστω η εφαπτόμενη EX του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\Delta E\Gamma$ στο E (σχήμα 218) και EY η εφαπτόμενη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A B E$ στο E . Η γωνία XED ισούται με την $E\Gamma\Delta$ (2.13.4) η οποία με την σειρά της ισούται με την EAB , η οποία με την σειρά της ισούται με την BEY . Αφού τα Δ , E και B είναι στην ίδια ευθεία (διαγώνιο του $AB\Gamma\Delta$) η ισότητα των ΔEX και YEB συνεπάγεται ότι οι δύο αυτές γωνίες είναι κατά κορυφήν και τα X , E και Y είναι στην ίδια ευθεία.

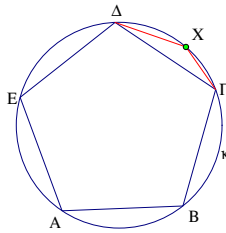
Άσκηση 2.13.3 Δίδεται κύκλος κ . Δείξε ότι από όλα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ που έχουν κοινή την βάση $B\Gamma$ και είναι εγγεγραμμένα στον κ αυτό που έχει μέγιστη περίμετρο είναι ισοσκελές.

Υπόδειξη: Προέκτεινε την $A\Gamma$ και πάρε $A\Delta$ ίσο με την πλευρά AB . Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές και η γωνία του στο Δ είναι $\frac{\alpha}{2}$. Συνεπώς το Δ βλέπει την $B\Gamma$ υπο σταθερά γωνία και περιέχεται σε κύκλο λ διερχόμενο από τα B και Γ (Πρόταση 2.13.3). Παρατήρησε ότι το κέντρο Z του λ είναι στην μεσοκάθετο της χορδής $B\Gamma$ καθώς επίσης και στον κύκλο κ , διότι βλέπει το $B\Gamma$ υπό γωνία α (διπλάσια της γωνίας στο Δ). Επιστρέφοντας στο πρόβλημα, η περίμετρος του τριγώνου $p = |B\Gamma| + |BA| + |A\Gamma| = |B\Gamma| + |\Gamma\Delta|$ και επειδή η $B\Gamma$ είναι σταθερά το p γίνεται μέγιστο τότε ακριβώς όταν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ γίνει μέγιστο. Η $\Gamma\Delta$ όμως, ως χορδή του κύκλου λ , μεγιστοποιείται όταν γίνει διάμετρός του (Πρόταση 2.1.2). Άν λοιπόν E είναι το αντιδιαμετρικό του Γ στον κύκλο λ , απ' όσα είπαμε, το τρίγωνο γίνεται

Άσκηση 2.13.6 Δίδεται κύκλος κ . Δείξε ότι από όλα τα πολύγωνα με n πλευρές τα εγγεγραμμένα στον κ , αυτό που έχει μέγιστη περίμετρο είναι το κανονικό πολύγωνο με n πλευρές.

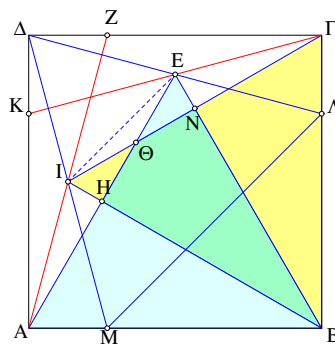
Υπόδειξη: Όπως η προηγούμενη, έτσι και αυτή η άσκηση είναι απλή λογική συνέπεια της Άσκησης 2.13.3. Πράγματι, αν το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta\ldots$ με n πλευρές ήταν εγγεγραμμένο στον κ , είχε μέγιστη περίμετρο p και δεν ήταν το κανονικό πολύγωνο με n πλευρές, τότε θα είχε δύο διαδοχικές πλευρές άνισες λ.χ. την $\Gamma\Delta$ και ΔE . Τότε φέρνοντας την διαγώνιο ΓE θα σχηματίζαμε τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ και κατά την Άσκηση 2.13.3 θα υπήρχε άλλο τρίγωνο (ισοσκελές) $\Gamma E Z$ με περίμετρο μεγαλύτερη αυτής του $\Gamma E\Delta$. Αντικαθιστώντας τότε τις δύο πλευρές $E\Delta$ και $\Delta\Gamma$ με τις EZ και $Z\Gamma$ θα βρίσκαμε πολύγωνο με μεγαλύτερη περίμετρο, πράγμα άτοπο αφού αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το αρχικό πολύγωνο είχε την μέγιστη δυνατή περίμετρο.

Άσκηση 2.13.7 Δίδεται κύκλος κ . Δείξε ότι η περίμετρος του κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου με $(n+1)$ πλευρές είναι μεγαλύτερη της περιμέτρου του κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου με n πλευρές.



Σχήμα 221: Περίμετροι κανονικών πολυγώνων

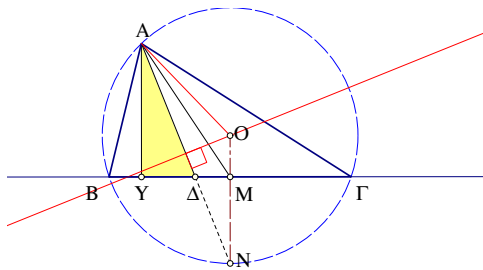
Υπόδειξη: Θεώρησε ένα κανονικό εγγεγραμμένο στον κύκλο κ πολύγωνο $\Pi = AB\Gamma\ldots$ με n πλευρές. Έστω ότι η περίμετρος του Π είναι p . Πάρε σημείο X στον κ διαφορετικό από τις κορυφές του. Έστω ότι το X περιέχεται στο τόξο που ορίζεται από την πλευρά $\Gamma\Delta$ του πολυγώνου. Αντικατάστησε την πλευρά $\Gamma\Delta$ με τις δύο πλευρές ΓX και $X\Delta$. Προκύπτει πολύγωνο με $n+1$ κορυφές $\Pi' = AB\Gamma X\Delta\ldots$ και περίμετρο $p' > p$. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση το κανονικό πολύγωνο Π'' με $(n+1)$ πλευρές θα έχει περίμετρο $p'' > p'$. Συνολικά λοιπόν $p'' > p' > p$.



Σχήμα 222: Ισόπλευρα εγγεγραμμένα σε τετράγωνο

Άσκηση 2.13.8 Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζονται ισόπλευρα ABE και $B\Gamma I$ στις πλευρές του. Δείξε ότι προεκτείνοντας τις ΔE και ΔI μέχρι της τομής τους με το τετράγωνο σχηματίζεται άλλο ισόπλευρο $\Delta\Lambda M$. Διερεύνησε το σχήμα-222 και βρες όλες τις γωνίες που σχηματίζονται σε αυτό.

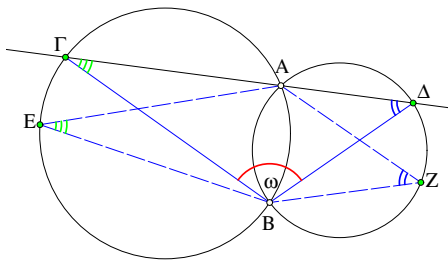
Άσκηση 2.13.9 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ από τα μήκη τού ύψους $|AY|$, διχοτόμου $|AD|$ και διαμέσου $|AM|$.



Σχήμα 223: Κατασκευή από ύψος, διχοτόμο και διάμεσο

Υπόδειξη: Από τα δεδομένα κατασκευάζονται άμεσα τα ορθογώνια τρίγωνα $AY\Delta$ και AYM . Η κάθετος της $Y\Delta$ στο M τέμνει την διχοτόμο AD σε σημείο N , ευρισκόμενο επί του περιγεγραμμένου κύκλου του ζητούμενου τριγώνου. Κατασκευάζεται το N και η μεσοκάθετος του AN τέμνει την ευθεία MN στο κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου. Με κέντρο O και ακτίνα OA γράφεται κύκλος που διέρχεται από το A και τέμνει την $Y\Delta$ στα ζητούμενα σημεία B και Γ , που μαζί με το A αποτελούν τις κορυφές του ζητούμενου τριγώνου.

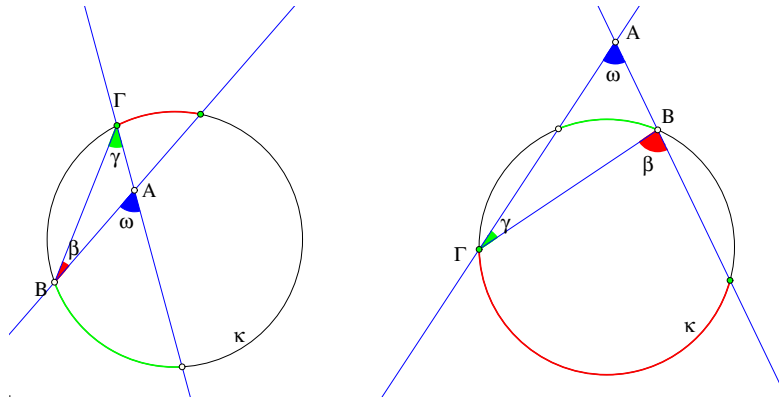
Άσκηση 2.13.10 Έστω ότι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία A και B και $\Gamma\Delta$ είναι ευθεία διερχόμενη από το και τέμνουσα τους δύο κύκλους στα Γ και Δ αντίστοιχα. Τότε η γωνία $\omega = \Gamma B\Delta$ έχει σταθερό μέτρο ανεξάρτητο της κατεύθυνσης της $\Gamma\Delta$.



Σχήμα 224: Σταθερή γωνία

Υπόδειξη: Οι γωνίες $ΑΓΒ$ και $ΑΔΒ$ είναι σταθερού μέτρου (σχήμα-224), ανεξάρτητα της κατεύθυνσης της $\Gamma\Delta$ και $|\omega| = 180 - |ΑΓΒ| - |ΑΔΒ|$.

Άσκηση 2.13.11 Δείξε ότι η γωνία $\omega = |ΒΑΓ|$ δύο ευθειών τεμνομένων στο εσωτερικό/εξωτερικό κύκλου κ ισούται με το άθροισμα/διαφορά δύο εγγεγραμμένων γωνιών του κ που ορίζονται από τα σημεία τομής των ευθειών με τον κύκλο.

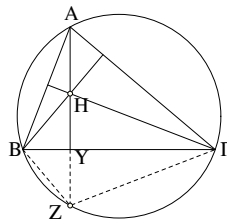


Σχήμα 225: Γωνία τεμνομένων στο εσωτερικό/εξωτερικό κύκλου

Άσκηση 2.13.12 Εάν H και I αντίστοιχα το ορθόκεντρο και το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, προσδιόρισε τις γωνίες $BH\Gamma$ και BIG συναρτήσει των γωνιών του $AB\Gamma$.

Άσκηση 2.13.13 Έστω O το περίκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$, A' το συμμετρικό του A ως προς O και A^* το σημείο τομής του ύψους AD με τον περίκυκλο. Δείξε ότι η AA^* είναι παράλληλη της $B\Gamma$ και ότι οι γωνίες BAG και $AA'A^*$ έχουν κοινή διχοτόμο.

Άσκηση 2.13.14 Έστω H το ορθόκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι για κάθε τρίγωνο τ με κορυφές τρία από τα σημεία A, B, Γ, H , το τέταρτο σημείο είναι το ορθόκεντρο του τ . Δείξε επίσης ότι το συμμετρικό του H ως προς μία πλευρά είναι σημείο του περικύκλου του $AB\Gamma$.



Σχήμα 226: Ορθοκεντρική τετράδα

Ορθοκεντρική τετράδα ονομάζουμε τέσσερα σημεία που αποτελούνται από τις κορυφές τριγώνου και το ορθόκεντρο αυτού.

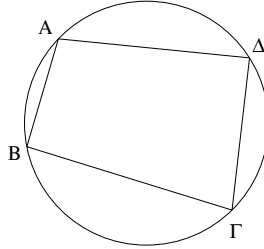
Άσκηση 2.13.15 Δοθέντων δύο σημείων A και B και κύκλου $\kappa(O, \rho)$ έτσι ώστε τα A, B και O να μην είναι συνευθειακά, να αχθούν δύο παράλληλες AX και BY έτσι ώστε να αποτεμνουν από τον κύκλο δύο ίσες χορδές. Να εξετασθεί τότε το πρόβλημα έχει λύση.

Άσκηση 2.13.16 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται η διάμεσος AD και οι ακτίνες των περικύκλων των τριγώνων ABD και AGD .

Άσκηση 2.13.17 Κατασκεύασε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου δίδεται το μήκος της διαγωνίου AG και η διαφορά των γωνιών ΓAB και $\Gamma A\Delta$.

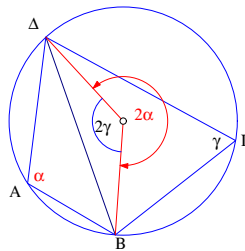
2.14 Εγγεγραμμένα τετράπλευρα

Εγγεγραμμένο ή κυκλικό ή εγγράψιμο σε κύκλο λέγεται ένα κυρτό τετράπλευρο το οποίο μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο, δηλαδή τετράπλευρο για το οποίο υπάρχει κύκλος διερχόμενος και από τις τέσσερις κορυφές του.



Σχήμα 227: Εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Πρόταση 2.14.1 Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Αντίστροφα, αν δύο απέναντι κείμενες γωνίες τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές τότε αυτό είναι εγγράψιμο.

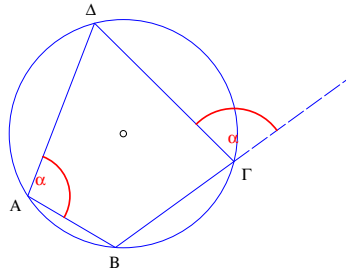


Σχήμα 228: Απέναντι γωνίες εγγεγραμμένου τετραπλεύρου

Απόδειξη: Δύο απέναντι γωνίες του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου, λ.χ. οι Α και Γ μέτρων α και γ , βλέπουν την διαγώνιο ΒΔ υπό παραπληρωματικές γωνίες, διότι οι αντίστοιχες επίκεντρές τους έχουν $2\alpha + 2\gamma = 360$. Αντίστροφα, αν οι απέναντι γωνίες μέτρων α και γ είναι παραπληρωματικές, τότε το Α ανήκει στον γεωμετρικό τόπο των σημείων που βλέπουν το ΒΔ υπό γωνίαν α , που κατά την Πρόταση 2.13.3 είναι ένα τόξο κύκλου και το Γ θα ανήκει αντίστοιχα στο συμπληρωματικό τόξο του προηγούμενου ως προς τον ίδιο κύκλο, ο.ε.δ.

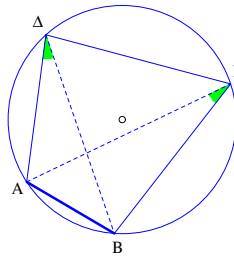
Πόρισμα 2.14.1 Κάθε γωνία του εγγεγραμμένου κυρτού τετραπλεύρου είναι ίση με την εκτός και απέναντί της και αντίστροφα, αν μία γωνία κυρτού τετραπλεύρου είναι ίση με την εκτός και απέναντί της τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη: Το πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης, διότι για κάθε γωνία του τετραπλεύρου η αντίστοιχη εκτός και απέναντι αυτής γωνία είναι η παραπληρωματική της απέναντι γωνίας.



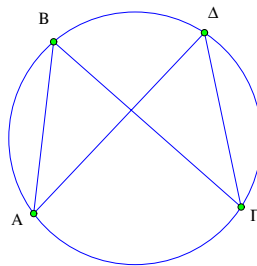
Σχήμα 229: Ίσες γωνίες σε εγγράψιμο τετράπλευρο

Πρόταση 2.14.2 Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο κάθε μία από τις πλευρές του φαίνεται από τις άλλες δύο κορυφές υπό ίσες γωνίες. Αντίστροφα, αν μία πλευρά τετραπλεύρου φαίνεται από τις δύο άλλες κορυφές του υπό ίσες γωνίες τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



Σχήμα 230: Πλευρά που φαίνεται υπό ίσες γωνίες

Απόδειξη: Και πάλι η απόδειξη είναι εφαρμογή της Πρότασης 2.13.3, ο.ε.δ.



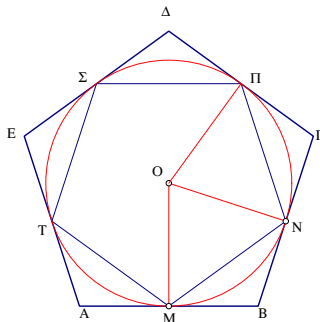
Σχήμα 231: Μη-κυρτό κυκλικό τετράπλευρο

Παρατήρηση Το τελευταίο θεώρημα ισχύει και για μη κυρτά τετράπλευρα. Ωστόσο στην περίπτωση μη-κυρτών εγγεγραμμένων τετραπλεύρων οι απέναντι γωνίες είναι ίσες και όχι παραπληρωματικές, όπως συμβαίνει στα κυρτά τετράπλευρα.

Άσκηση 2.14.1 Δίδεται κύκλος κ και δύο χορδές αυτού. Η $\Gamma\Delta$ σταθερά και η AB μεταβλητή αλλά σταθερού μήκους. Δείξε ότι η τομή X των ευθειών $A\Gamma$ και $B\Delta$ ευρίσκεται επί άλλου κύκλου λ που διέρχεται από τα άκρα Γ και Δ της σταθεράς χορδής.

Άσκηση 2.14.4 Δείξε ότι τα μέσα των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου ορίζουν άλλο κανονικό πολύγωνο με το ίδιο πλήθος πλευρών.

Υπόδειξη: Αν $M, N, K, \dots$ τα μέσα των πλευρών του κανονικού πολυγώνου $AB\Gamma\Delta\dots$, δείξε ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται από μία πλευρά και το O αντίστοιχα, όπως τα OAB και OMN στο προηγούμενο σχήμα, είναι ισοσκελή που έχουν ίσες γωνίες.



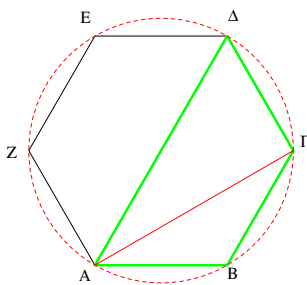
Σχήμα 237: Εγγεγραμμένος κύκλος κανονικού πολυγώνου

Άσκηση 2.14.5 Δείξε ότι υπάρχει κύκλος που εφάπτεται ταυτόχρονα των πλευρών κανονικού πολυγώνου και έχει το κέντρο του στο κέντρο του πολυγώνου.

Υπόδειξη: Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι τα μέσα των πλευρών κανονικού πολυγώνου ορίζουν άλλο κανονικό πολύγωνο. Ο περιγεγραμμένος κύκλος αυτού του δευτέρου πολυγώνου είναι ο εφαπτόμενος του αρχικού. Οι πλευρές του πρώτου είναι εφαπτόμενες στα άκρα των ακτίνων προς τις κορυφές του δευτέρου.

Άσκηση 2.14.6 Από μία κορυφή ενός κανονικού πολυγώνου φέρε όλες τις διαγωνίους. Δείξε ότι οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών διαγωνίων είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

Υπόδειξη: Οι γωνίες αυτές είναι οι γωνίες υπό τις οποίες η εν λόγω κορυφή, που είναι επί του περιγεγραμμένου κύκλου, βλέπει τις πλευρές του πολυγώνου. Επειδή όλες οι πλευρές είναι ίσες χορδές του περιγεγραμμένου κύκλου, αυτές οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.



Σχήμα 238: Τραπεζίο τριών διαδοχικών πλευρών

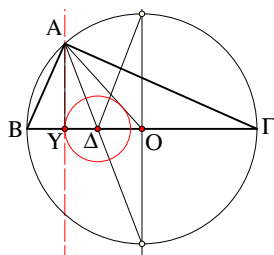
Άσκηση 2.14.7 Δείξε ότι τρεις διαδοχικές πλευρές AB, BG και $ΓΔ$ ενός κανονικού πολυγώνου μαζί με την διαγώνιο $AΔ$ σχηματίζουν ένα ισοσκελές τραπέζιο. Δείξε ακόμη ότι οι διαγώνιοι $AΓ$ και $BΔ$ αυτού του τραπέζιου διχοτομούν τις γωνίες που πρόσκεινται στην βάση του $AΔ$.

Υπόδειξη: Οι γωνίες $BAΓ$ και $BΓA$ είναι ίσες διότι το $ABΓ$ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες $BAΓ$ και $ΓAΔ$ είναι ίσες διότι το A είναι σημείο του κύκλου του οποίου οι $BΓ$ και $ΓΔ$ είναι ίσες χορδές. Από την ισότητα των γωνιών $ΔAΓ$ και $AΓB$ προκύπτει η παραλληλία των $AΔ$ και $BΓ$.

Άσκηση 2.14.8 Κατασκεύασε ισόπλευρο τρίγωνο που έχει μία κορυφή σε δοθέν σημείο και τις άλλες δύο κορυφές επί δοθέντων παραλλήλων ευθειών.

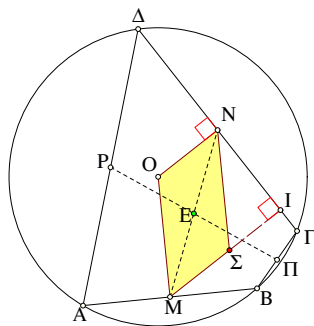
Άσκηση 2.14.9 Κατασκεύασε τρίγωνο $ABΓ$ του οποίου δίδεται η ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου και τα μήκη υ_A, δ_A τού ύψους και της διχοτόμου από το A .

Άσκηση 2.14.10 Κατασκεύασε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου δίδονται τα ίχνη του ύψους, της διχοτόμου και της διαμέσου επί της ευθείας που ορίζεται από την υποτίνουσα.



Σχήμα 239: Κατασκευή ορθογωνίου από τα Y, Δ, O

Άσκηση 2.14.11 (Αντικέντρο εγγεγραμμένου τετραπλεύρου) Έστω E το σημείο τομής των τμημάτων που ενώνουν τα μέσα απέναντι πλευρών κυρτού εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $ABΓΔ$ και Σ το συμμετρικό του κέντρου O του περιγεγραμμένου κύκλου ως προς E . Δείξε η ευθεία που ενώνει το μέσον M μιάς πλευράς με το Σ είναι κάθετη στην απέναντι αυτής πλευρά.



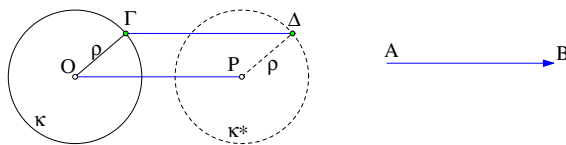
Σχήμα 240: Αντικέντρο Σ

Υπόδειξη: Αν N το μέσον της απέναντι πλευράς, δείξε ότι το $OMΣN$ είναι παραλληλόγραμμο.

2.15 Γεωμετρικοί τόποι

Γεωμετρικούς τόπους συναντήσαμε ήδη στην πορεία του μαθήματος (Πόρισμα 1.9.1 και συνακόλουθο σχόλιο, Άσκηση 1.15.6, Άσκηση 2.1.4). Πρόκειται για σύνολα σημείων που χαρακτηρίζονται από κάποια ιδιότητα. Από τους απλούστερους τόπους είναι ο κύκλος $\kappa(O, \rho)$. Χαρακτηρίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν απόσταση ρ από το σταθερό σημείο O . Παρόμοια η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος AB : είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα A και B του τμήματος. Οι απλούστεροι γεωμετρικοί τόποι καταλήγουν σε ευθείες και κύκλους. Υπάρχουν όμως και απλές ιδιότητες που οδηγούν σε νέες καμπύλες (λ.χ κωνικές τομές (Παράγραφος 10.1)). Για την εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου συχνά χρησιμοποιούμε κάποια ειδικά σημεία, για τα οποία γνωρίζουμε ότι ανήκουν σε αυτόν ή και σχετίζονται άμεσα με αυτόν. Η επόμενη άσκηση δίνει ένα τέτοιο παράδειγμα.

Άσκηση 2.15.1 Δοθέντος κύκλου $\kappa(O, \rho)$ και ευθυγράμμου τμήματος AB , από κάθε σημείο Γ του κ φέρνουμε παράλληλο ίσο και ομόρροπο προς το AB ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Δ .



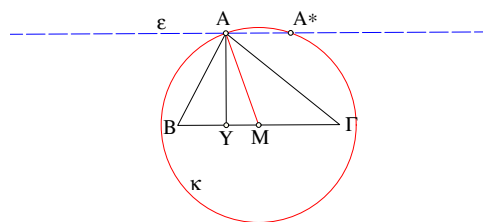
Σχήμα 241: Παράλληλος μεταφορά κύκλου

Υπόδειξη: Την ίδια διαδικασία που εφαρμόζουμε σε κάθε σημείο Γ του κύκλου κ εφαρμόσες και στο κέντρο του O . Ορίζεται έτσι το σημείο P έτσι ώστε το OP να είναι παράλληλο ίσο και ομόρροπο προς το AB . Τότε το $OP\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα το μήκος $|P\Delta| = \rho$ είναι σταθερό και ίσο με την ακτίνα του δοθέντος κύκλου. Συνεπώς τα σημεία του ζητούμενου τόπου περιέχονται στον κύκλο $\kappa^*(P, \rho)$. Αντίστροφα, δείχνουμε ότι κάθε σημείο του κύκλου $\kappa^*(P, \rho)$ είναι σημείο του τόπου. Προς τούτο, ξεκινώντας από σημείο Δ του κ^* ευρίσκουμε το σημείο Γ επί του κ , έτσι ώστε το $\Gamma\Delta$ να είναι παράλληλο, ίσο και ομόρροπο του AB . Αυτό δείχνει ότι το Δ είναι σημείο του τόπου και ολοκληρώνει την απόδειξη της ταύτισης του κύκλου $\kappa^*(P, \rho)$ με τον ζητούμενο γεωμετρικό τόπο.

Μιά σημαντική χρήση των γεωμετρικών τόπων είναι αυτή της εφαρμογής τους στις κατασκευές. Σε αυτές ζητούμε σημείο το οποίο αποδεικνύουμε ότι περιέχεται σε δύο γεωμετρικούς τόπους ταυτόχρονα. Η συνέπεια είναι ότι το ζητούμενο σημείο συμπίπτει με ένα σημείο τομής των δύο γεωμετρικών τόπων. Η επόμενη κατασκευή δίνει ένα παράδειγμα αυτής της μεθόδου.

Κατασκευή 2.15.1 Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ από την πλευρά $a = |B\Gamma|$, το ύψος $u_A = |AY|$ και την διάμεσο $\mu_A = |AM|$.

Κατασκευή: Ανάλυση: Έστω ότι το ζητούμενο τρίγωνο κατασκευάσθηκε. Η κορυφή A θα απέχει απόσταση u_A από την βάση $B\Gamma$, άρα θα είναι σημείο μίας εκ των παραλλήλων ευθειών ϵ προς την $B\Gamma$ σε απόσταση u_A από αυτήν. Επίσης η κορυφή A θα απέχει απόσταση μ_A από

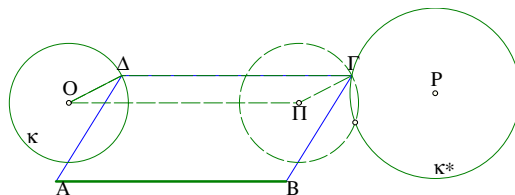
Σχήμα 242: Κατασκευή τριγώνου από τα a, u_A, μ_A

το μέσον της $B\Gamma$, άρα θα είναι σημείο του κύκλου $\kappa(M, \mu_A)$. Συνεπώς το A θα είναι σημείο τομής των δύο αυτών γεωμετρικών τόπων.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τμήμα $B\Gamma$ μήκους a και φέρνουμε παράλληλο ϵ προς αυτό σε απόσταση u_A . Κατασκευάζουμε επίσης τον κύκλο $\kappa(M, \mu_A)$. Ένα από τα σημεία τομής της ευθείας ϵ και του κύκλου κ ορίζει την κορυφή A τριγώνου $AB\Gamma$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της κατασκευής.

Διερεύνηση: Γιά να υπάρχει λύση θα πρέπει οι δύο τόποι να τέμνονται. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση u_A της ευθείας από το $B\Gamma$ θα πρέπει να είναι μικρότερη της ακτίνας μ_A του κύκλου κ . Συνεπώς έχουμε λύση όταν $\mu_A \geq u_A$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι τα τρίγωνα που προκύπτουν από τα διάφορα σημεία τομής των δύο τόπων είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς, από τα δεδομένα κατασκευάζεται ένα ακριβώς τρίγωνο, ο.ε.κ.

Άσκηση 2.15.2 Δίδεται η θέση και το μέγεθος ευθυγράμμου τμήματος AB και δύο κύκλων $\kappa(O, \rho)$ και $\kappa^*(P, \rho^*)$. Να κατασκευασθεί παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, μία πλευρά του οποίου να είναι η AB και οι κορυφές του Δ και Γ να είναι σημεία των κύκλων κ και κ^* αντίστοιχα.



Σχήμα 243: Παραλληλόγραμμο με δοθείσα βάση και κορυφές επί κύκλων

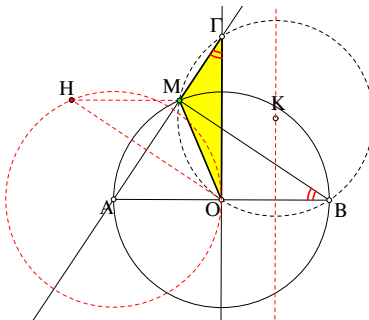
Υπόδειξη: **Ανάλυση:** Έστω ότι το ζητούμενο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάσθηκε. Η πλευρά του $\Delta\Gamma$ θα είναι παράλληλη, ίση και ομόρροπη του AB , άρα το άκρο της Γ θα περιέχεται σε γνωστό γεωμετρικό τόπο που ορίζεται από κύκλο $\mu(\Pi, \rho)$ (Άσκηση 2.15.1), έτσι ώστε η $O\Pi$ να είναι παράλληλη, ίση και ομόρροπη της AB . Το Γ λοιπόν θα είναι σημείο τομής του δοθέντος κύκλου $\kappa^*(P, \rho^*)$ και του κύκλου $\mu(\Pi, \rho)$ που κατασκευάζεται από τα δεδομένα.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τον κύκλο $\mu(\Pi, \rho)$ όπως αναφέρεται στην ανάλυση. Έστω Γ ένα σημείο τομής των κύκλων $\mu(\Pi, \rho)$ και $\kappa^*(P, \rho^*)$. Ευρίσκουμε το σημείο Δ επί του κύκλου κ έτσι ώστε το $O\Pi\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Τότε και το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις της κατασκευής.

Διερεύνηση: Υπάρχει λύση τότε ακριβώς όταν οι κύκλοι $\mu(\Pi, \rho)$ και $\kappa^*(P, \rho^*)$ τέμνονται. Εάν οι κύκλοι αυτοί τέμνονται σε δύο σημεία, τότε υπάρχουν δύο διαφορετικές λύσεις. Αν οι

κύκλοι εφάπτονται, τότε υπάρχει μία ακριβώς λύση. Εάν οι κύκλοι ταυτίζονται τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις.

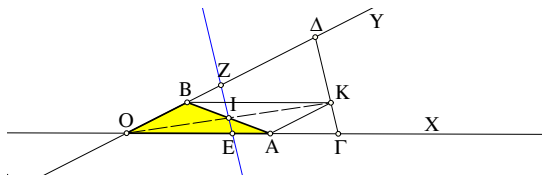
Άσκηση 2.15.3 Σημείο M μεταβάλλεται επί κύκλου με διάμετρο AB . Η ευθεία AM τέμνει την μεσοκάθετο του AB στο σημείο Γ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του περικέντρου του κύκλου $OM\Gamma$ καθώς και ο γεωμετρικός τόπος του ορθοκέντρου H αυτού του τριγώνου.



Σχήμα 244: Γεωμετρικός τόπος περικέντρου και ορθοκέντρου

Υπόδειξη: Ο περίκυκλος του $OM\Gamma$ διέρχεται από το B . Αυτό φαίνεται από το ότι οι γωνίες ABM και AGO είναι ίσες, ως συμπληρωματικές της γωνίας BAG . Επομένως το περικέντρο K του κύκλου $(OM\Gamma)$ θα ευρίσκεται επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος OB . Το ορθόκεντρο H του $OM\Gamma$ συμπίπτει με την τομή της κάθετης από το M στην OG και της κάθετης από το O στην AG . Άρα στο τετράπλευρο $OBMH$ οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και επομένως αυτό είναι παραλληλόγραμμο. Τούτο συνεπάγεται ότι η MH είναι παράλληλη, ίση και ομόρροπη της BO , άρα ο γεωμετρικός τόπος του H είναι ο κύκλος με κέντρο A και ακτίνα ίση με $\frac{|AB|}{2}$ (Άσκηση 2.15.1).

Άσκηση 2.15.4 Στις πλευρές OX, OY γωνίας XOY ορίζονται αντίστοιχα σημεία A και B , έτσι ώστε $|OA| + |OB| = \lambda$ να είναι σταθερό. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος AB .



Σχήμα 245: Γεωμετρικός τόπος με σταθερό $|OA| + |OB|$

Υπόδειξη: Θεώρησε το συμμετρικό K του O ως προς το μέσον I του AB . Στο τετράπλευρο $OAKB$ οι διαγώνιοι AB και OK διχοτομούνται στο σημείο I , άρα είναι παραλληλόγραμμο. Όρισε επί των OX, OY αντίστοιχα τα σημεία Γ και Δ , έτσι ώστε $|O\Gamma| = |O\Delta| = \lambda$. Προκύπτει τότε άμεσα ότι τα τρίγωνα ΓAK και $K B \Delta$ είναι ισοσκελή και τα σημεία Δ, K και Γ είναι επ' ευθείας. Συνάγεται ότι το μέσον I της AB που είναι και μέσον της OK περιέχεται στην ευθεία EZ που ενώνει τα μέσα E, Z των πλευρών του ισοσκελούς $\Gamma O \Delta$.

Άσκηση 2.15.5 Τριγώνου $AB\Gamma$ δίδεται η θέση και το μέγεθος της βάσης $B\Gamma$ και το μήκος m_B της διαμέσου του από το B . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής του A .

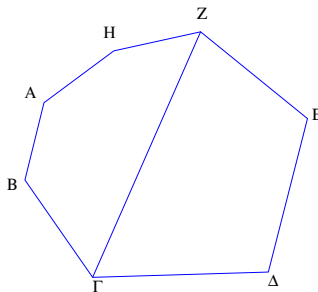
Κεφάλαιο 3

Εμβαδά, Θαλής, Πάππος,
Πυθαγόρας

3.1 Εμβαδόν πολυγώνων

Μετά τα ευθύγραμμα τμήματα και τις γωνίες, το τρίτο μέγεθος που μετράμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου είναι τα **Εμβαδά** πολυγώνων. Το εμβαδόν ενός κυρτού πολυγώνου Π είναι ένα θετικός αριθμός $\epsilon(\Pi) > 0$ για τον οποίον απαιτούμε τις επόμενες ιδιότητες.

Ιδιότητα 3.1.1 Δύο ίσα πολύγωνα έχουν ίσα εμβαδά.

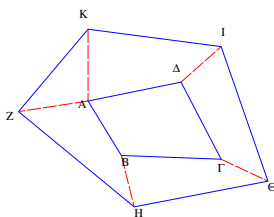


Σχήμα 246: $\epsilon(AB\Gamma ZH) + \epsilon(\Gamma\Delta EZ) = \epsilon(AB\Gamma\Delta EZH)$

Ιδιότητα 3.1.2 Ένα πολύγωνο Π που συντίθεται από άλλα, πεπερασμένα το πλήθος, πολύγωνα $\Pi, \Pi', \Pi'', \dots$ που δεν επικαλύπτονται έχει εμβαδόν το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων

$$\epsilon(\Pi) = \epsilon(\Pi') + \epsilon(\Pi'') + \dots$$

Στο προηγούμενο σχήμα τα δύο πολύγωνα $AB\Gamma ZH$ και $\Gamma\Delta EZ$ έχουν κοινή πλευρά την ΓZ και σχηματίζουν το νέο πολύγωνο $AB\Gamma\Delta EZH$.



Σχήμα 247: $\epsilon(AB\Gamma\Delta) < \epsilon(ZH\Theta IK)$

Ιδιότητα 3.1.3 Ένα πολύγωνο Π που περιέχεται μέσα σέ ένα άλλο Π' έχει εμβαδόν

$$\epsilon(\Pi) < \epsilon(\Pi').$$

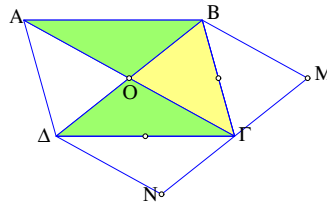
Ιδιότητα 3.1.4 Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την μονάδα μήκους είναι ένα.

Σχόλιο-1 Όπως θα δούμε παρακάτω, οι τέσσερις αυτές ιδιότητες που απαιτούμε από το εμβαδόν καθορίζουν πλήρως την μορφή του και για ορθογώνια παραλληλόγραμμα οδηγούν στον γνωστό τύπο που το εκφράζουν ως γινόμενο των πλευρών του. Είναι συνεπώς η ύπαρξή του μιά συνέπεια των αξιωμάτων. Γι' αυτό τον λόγο ομιλώ για τις "ιδιότητες" και όχι για τα "αξιώματα" του εμβαδού.

Σχόλιο-2 Η ιδιότητα 3.1.2 θα μπορούσε να αναχθεί με επαγωγή στην αντίστοιχη προσθετικότητα των εμβαδών για πολύγωνα που συντίθενται από δύο μόνο άλλα πολύγωνα. Επίσης η ιδιότητα 3.1.3 είναι συνέπεια της ιδιότητας 3.1.2 και θα μπορούσε να αποδειχθεί από τις άλλες ιδιότητες. Ωστόσο η απόδειξη περιλαμβάνει αρκετά λεπτά σημεία, που στα πρώτα στάδια της γνωριμίας με την γεωμετρία δεν είναι ανάγκη να αναλυθούν περαιτέρω.

Σχόλιο-3 Αξίζει να παρατηρήσουμε τις ομοιότητες που παρουσιάζουν οι μετρήσεις μηκών και εμβαδών. Πρόκειται για ειδικές περιπτώσεις **Μέτρων**, δηλαδή μηχανισμών μέτρησης μήκους και γενικότερα, περιεχομένου (εμβαδού, όγκου), που εντάσσονται στην γενική, ούτως ονομαζόμενη, *Θεωρία μέτρου*, ως μέτρα του Jordan και ακόμη γενικότερα ως *μέτρα του Lebesgue* ([KF70, σ. 254]). Τα μέτρα αυτά ξεκινώντας από μετρήσεις πολύ απλών σχημάτων, επεκτείνονται και επιτρέπουν την μέτρηση πιό πολύπλοκων σχημάτων από αυτά που μας απασχολούν σε αυτό το μάθημα. Ειδικές περιπτώσεις τους είναι και ο όγκος πολυέδρων που θα συναντήσουμε στην στερεομετρία (Παράγραφος 9.5) αλλά και το εμβαδόν σφαιρικών πολυγώνων (Παράγραφος 9.3). Σε όλες τις περιπτώσεις ο μηχανισμός μέτρησης κατασκευάζεται με τον ίδιο τρόπο. Απαιτούμε από αυτόν ορισμένες ιδιότητες και αποδεικνύουμε ότι αυτές οι απαιτήσεις συνεπάγονται την ύπαρξη ενός και μοναδικού μηχανισμού που τις ικανοποιεί.

Άσκηση 3.1.1 Δείξε ότι κάθε παραλληλόγραμμο χωρίζεται από μία διαγώνίό του σε δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα. Δείξε γενικότερα, ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ισοεμβαδικά σχήματα.



Σχήμα 248: Ισοεμβαδικά τρίγωνα

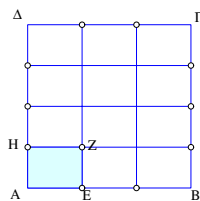
Άσκηση 3.1.2 Δείξε ότι οι δύο διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου το χωρίζουν σε τέσσερα ισοεμβαδικά τρίγωνα.

Υπόδειξη: Τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$, όπου O το κέντρο του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ (σημείο τομής των διαγωνίων), είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά. Θεώρησε τα συμμετρικά M, N του O ως προς τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Τα παραλληλόγραμμα $BO\Gamma M$ και $O\Delta N\Gamma$ είναι ίσα, άρα και τα μισά τους κατά το εμβαδόν (σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση), που είναι τα $BO\Gamma$ και $\Delta O\Gamma$ θα έχουν ίσα εμβαδά.

Άσκηση 3.1.3 Δείξε ότι η διάμεσος AD ενός τριγώνου $AB\Gamma$ το χωρίζει σε δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα.

Άσκηση 3.1.4 Δείξε ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ίσα, και επομένως ισοεμβαδικά, τραπέζια (ή τρίγωνα).

3.2 Το εμβαδόν του ορθογωνίου

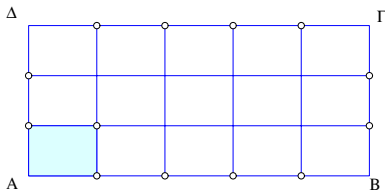


Σχήμα 249: $\epsilon(\text{AEZH}) = \frac{1}{\mu\nu}$

Λήμμα 3.2.1 Διαιρούμε τις δύο απέναντι πλευρές του μοναδιαίου (πλευράς μήκους 1) τετραγώνου σε μ ίσα μέρη και τις δύο άλλες απέναντι πλευρές σε ν ίσα μέρη και φέρνουμε παράλληλες που ενώνουν απέναντι κείμενα σημεία. Σχηματίζονται $\mu\nu$ παραλληλόγραμμα έκαστον των οποίων έχει εμβαδόν $\frac{1}{\mu\nu}$.

Απόδειξη: Προφανώς προκύπτουν $\mu\nu$ ίσα ορθογώνια που κατά την ιδιότητα 3.1.1 θα έχουν το ίδιο εμβαδόν E . Κατά την ιδιότητα 3.1.2 το εμβαδόν του τετραγώνου που είναι 1 (Ιδιότητα 3.1.4) θα είναι το άθροισμα των εμβαδών $1 = \mu\nu E$, ο.ε.δ.

Λήμμα 3.2.2 Το εμβαδόν ϵ ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές AB και $A\Delta$ που έχουν μήκος ρητούς αριθμούς ισούται με το γινόμενο των μηκών των πλευρών $\epsilon = |AB||A\Delta|$.



Σχήμα 250: $|AB| = \frac{\alpha}{\beta}, |A\Delta| = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \epsilon(AB\Gamma\Delta) = |AB||A\Delta|$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι ρητοί $|AB| = \frac{\alpha}{\beta}, |A\Delta| = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ανάγωγοι και διαιρούμε το μοναδιαίο τετράγωνο σε $\beta\delta$ ίσα ορθογώνια όπως στο προηγούμενο λήμμα, κατά το οποίο έκαστον έχει εμβαδόν $\epsilon' = \frac{1}{\beta\delta}$. Εξ υποθέσεως η πλευρά AB του ορθογωνίου μπορεί να διαιρεθεί σε α το πλήθος τμήματα μήκους $\frac{1}{\beta}$ και η πλευρά $A\Delta$ μπορεί να διαιρεθεί σε γ το πλήθος τμήματα μήκους $\frac{1}{\delta}$. Φέρνοντας παραλλήλους από τα σημεία διαίρεσης αυτών των πλευρών σχηματίζουμε λοιπόν $\alpha\gamma$ το πλήθος ίσα ορθογώνια, έκαστον των οποίων έχει εμβαδόν $\frac{1}{\beta\delta}$. Το άθροισμα των εμβαδών αυτών των ορθογωνίων είναι $\alpha\gamma \frac{1}{\beta\delta}$ και ισούται, κατά την ιδιότητα 3.1.2, με το εμβαδόν του ορθογωνίου, ο.ε.δ.

Λήμμα 3.2.3 Για κάθε θετικό αριθμό θ και φυσικό αριθμό ν υπάρχει άλλος φυσικός μ (ή το μηδέν) έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα

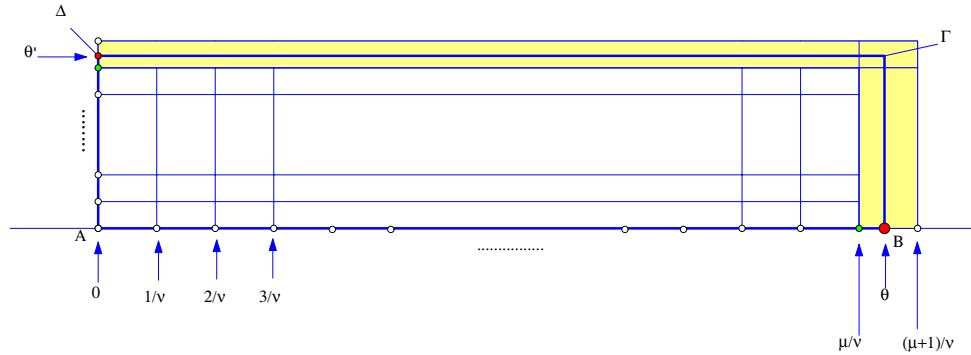
$$\left| \theta - \frac{\mu}{\nu} \right| \leq \frac{1}{\nu}.$$



Σχήμα 251: Αρχιμήδειο αξίωμα

Απόδειξη: Στην ουσία το λήμμα ταυτίζεται με το λεγόμενο **Αρχιμήδειο αξίωμα** (Αρχιμήδης 287-212 π.Χ.) για ευθύγραμμα τμήματα μιάς ευθείας και απεικονίζεται στο σχήμα-251. Για την απόδειξη τοποθετούμε από την αρχή ενός ευθυγράμμου τμήματος μήκους θ διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{\nu}$. Κατά το Αρχιμήδειο αξίωμα, υπάρχει ένα κρίσιμο μ έτσι ώστε το $(\mu + 1)\frac{1}{\nu}$ να ξεπεράσει το μήκος θ , με άλλα λόγια το θ να βρεθεί στο διάστημα (μήκους $\frac{1}{\nu}$) μεταξύ των $\frac{\mu}{\nu}$ και $\frac{\mu+1}{\nu}$, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.2.1 Το εμβαδόν ϵ ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές AB και $A\Delta$ ισούται με το γινόμενο των μηκών των πλευρών $\epsilon = |AB||A\Delta|$.



Σχήμα 252: Προσέγγιση ορθογωνίου

Απόδειξη: Για την απόδειξη θεωρούμε τα μήκη των πλευρών $\theta = |AB|$ και $\theta' = |A\Delta|$ και ένα (αρκετά μεγάλο) ν . Κατά το προηγούμενο λήμμα υπάρχουν δύο αντίστοιχοι ακέραιοι μ και μ' που ικανοποιούν

$$\left| \theta - \frac{\mu}{\nu} \right| \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{και} \quad \left| \theta' - \frac{\mu'}{\nu} \right| \leq \frac{1}{\nu}.$$

Έτσι το εμβαδόν ϵ του ορθογωνίου ως περιέχον το ορθογώνιο με πλευρές ρητού μήκους $\frac{\mu}{\nu}$ και $\frac{\mu'}{\nu}$ είναι μεγαλύτερο του

$$\frac{\mu}{\nu} \frac{\mu'}{\nu} \leq \epsilon.$$

Ανάλογα σκεπτόμενοι βλέπουμε ότι το ίδιο εμβαδόν είναι ταυτόχρονα μικρότερο του εμβαδού με πλευρές ρητού μήκους $\frac{\mu+1}{\nu}$ και $\frac{\mu'+1}{\nu}$, δηλαδή

$$\epsilon \leq \frac{\mu+1}{\nu} \frac{\mu'+1}{\nu}.$$

Συνολικά λοιπόν βλέπουμε ότι οι αριθμοί $\theta\theta'$ και ϵ ικανοποιούν τις ίδιες ανισότητες

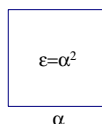
$$\frac{\mu}{\nu} \frac{\mu'}{\nu} \leq \theta\theta' \leq \frac{\mu+1}{\nu} \frac{\mu'+1}{\nu} \quad \text{και} \quad \frac{\mu}{\nu} \frac{\mu'}{\nu} \leq \epsilon \leq \frac{\mu+1}{\nu} \frac{\mu'+1}{\nu}.$$

Άρα η διαφορά τους θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$|\epsilon - \theta\theta'| \leq \frac{\mu + \mu' + 1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{\nu} \frac{\mu'}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} \leq \frac{1}{\nu} \theta + \frac{1}{\nu} \theta' + \frac{1}{\nu^2} \leq \frac{\theta + \theta' + 1}{\nu}.$$

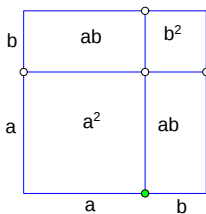
Επειδή η ποσότητα δεξιά μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή, αρκεί να εκλέξουμε μεγάλο ν , έπεται ότι η (σταθερή) ποσότητα αριστερά δεν μπορεί να είναι γνήσια θετική, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.2.1 Το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά μήκους α ισούται με α^2 .



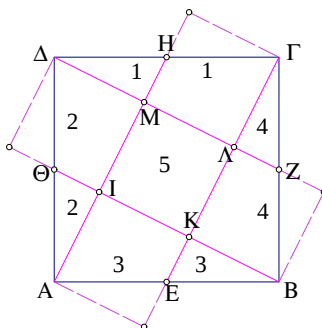
Σχήμα 253: Εμβαδόν τετραγώνου

Άσκηση 3.2.1 Δοθέντων των θετικών αριθμών a και b θεώρησε το τετράγωνο με πλευρά μήκους $a + b$ και δείξε βάσει των αξιωμάτων των εμβαδών την ταυτότητα $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.



Σχήμα 254: Τετράγωνο αθροίσματος γεωμετρικά

Άσκηση 3.2.2 Χρησιμοποίησε την ίδια μέθοδο για να δείξεις την ταυτότητα $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

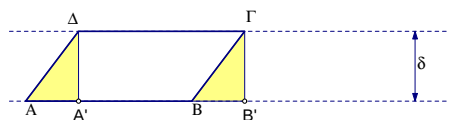


Σχήμα 255: Τετραγώνου διαίρεση

Άσκηση 3.2.3 Αν E, Z, H, Θ είναι τα μέσα πλευρών τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ δείξε ότι οι $GE, \Delta Z, AH$ και $B\Theta$ ορίζουν τετράγωνο $IK\Lambda M$ με εμβαδόν το $1/5$ του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$.

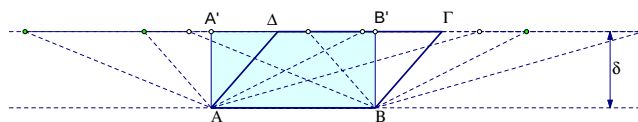
3.3 Εμβαδόν παραλληλογράμμου, τριγώνου

Πρόταση 3.3.1 Το εμβαδόν παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με το γινόμενο του μέτρου μίας πλευράς του επί την απόσταση από την απέναντι αυτής παράλληλο.



Σχήμα 256: $\epsilon(AB\Gamma\Delta) = \epsilon(A'B'\Gamma\Delta)$

Απόδειξη: Έστω ότι A' και B' είναι οι προβολές των κορυφών Δ και Γ επί της πλευράς AB . Τα τρίγωνα $AA'\Delta$ και $BB'\Gamma$ είναι, κατά το ΠΓΠ-κριτήριο, ίσα ως έχοντα τις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ ίσες, τις πλευρές $\Delta A'$ και $\Delta B'$ επίσης ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες $\Delta A'A$ και $\Delta B'B$ ίσες, αφού οι πλευρές των τελευταίων είναι παράλληλες. Συνεπώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου $A'B'\Gamma\Delta$, το οποίο, κατά το προηγούμενο θεώρημα, είναι ίσο με το αναφερόμενο, ο.ε.δ.

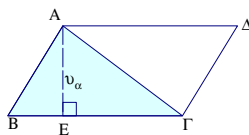


Σχήμα 257: Ίδια βάση ίδιο ύψος

Από το θεώρημα συνάγεται ότι όλα τα παραλληλόγραμμα με σταθερή βάση AB και απέναντι πλευρά $\Gamma\Delta$, κινούμενη σε μία παράλληλη της ευθείας AB , έχουν σταθερό εμβαδόν $\epsilon = |AB|\delta$, όπου δ η απόσταση των παραλλήλων πλευρών AB και $\Gamma\Delta$. Μία ιδιαίτερη περίπτωση αποτελεί το ορθογώνιο $ABB'A'$, του οποίου το εμβαδόν είναι ακριβώς το γινόμενο των μηκών των πλευρών του. Παρατήρησε, ότι ενώ όλα αυτά τα παραλληλόγραμμα έχουν το ίδιο εμβαδόν, η περίμετρός τους είναι μεταβλητή και μπορεί να γίνει όσο μεγάλη θέλουμε. Η επόμενη άσκηση χαρακτηρίζει αυτό το ορθογώνιο και η μεθεπόμενη αντιστρέφει αυτήν την παρατήρηση.

Άσκηση 3.3.1 Δείξε ότι από όλα τα παραλληλόγραμμα που έχουν σταθερή βάση και η απέναντι αυτής πλευρά κινείται σε μία παράλληλο της βάσης, το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Άσκηση 3.3.2 Δύο παραλληλόγραμμα που έχουν το ίδιο εμβαδόν και δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες έχουν τις πλευρές, απέναντι των ίσων πλευρών τους, σε ίση απόσταση.



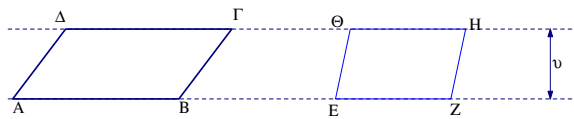
Σχήμα 258: $\epsilon(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|B\Gamma|v_\alpha$

Πόρισμα 3.3.1 Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με το ήμισυ του γινομένου μιάς πλευράς του επί την επ' αυτήν ύψος.

Απόδειξη: Ας επιλέξουμε μία πλευρά λ.χ. την $B\Gamma$ και ας σχηματίσουμε το παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Gamma$ φέροντας παράλληλες από το Γ προς την AB και από το A προς την $B\Gamma$. Το παραλληλόγραμμο αυτό έχει την $A\Gamma$ ως διαγώνιο και τα δύο τρίγωνα που σχηματίζονται: $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα. Κατά τα προηγούμενα θα πρέπει λοιπόν $2\epsilon(AB\Gamma) = |AB|\nu$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.3.2 Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ήμισυ του γινομένου των καθέτων πλευρών του.

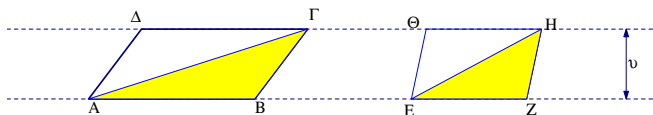
Πόρισμα 3.3.3 Ο λόγος των εμβαδών δύο παραλληλογράμμων $AB\Gamma\Delta$ και $EZH\Theta$ που έχουν το ίδιο ύψος προς τις βάσεις AB και EZ είναι ίσος με τον λόγο των μηκών αυτών των βάσεων $\frac{|AB|}{|EZ|}$.



$$\text{Σχήμα 259: } \frac{\epsilon(AB\Gamma\Delta)}{\epsilon(EZH\Theta)} = \frac{|AB|}{|EZ|}$$

Απόδειξη: Προκύπτει αμέσως από το ότι το εμβαδόν είναι βάση επί αντίστοιχο ύψος: $\epsilon(AB\Gamma\Delta) = |AB| \cdot \nu$ και $\epsilon(EZH\Theta) = |EZ| \cdot \nu$. Η αναφερθείσα σχέση προκύπτει διαιρώντας τις προηγούμενες ισότητες κατά μέλη, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.3.4 Ο λόγος των εμβαδών δύο τριγώνων $AB\Gamma$ και EZH που έχουν το ίδιο ύψος προς τις βάσεις AB και EZ είναι ίσος με τον λόγο των μηκών αυτών των βάσεων $\frac{|AB|}{|EZ|}$.



Σχήμα 260: Λόγος εμβαδών

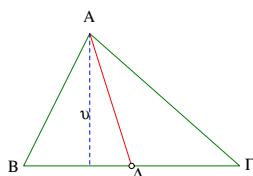
Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα και το γεγονός ότι το τρίγωνο έχει εμβαδόν το ήμισυ του αντιστοίχου παραλληλογράμμου, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.3.5 Η διάμεσος $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοεμβαδικά τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$.

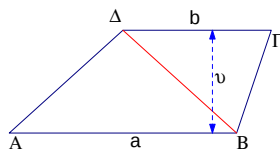
Απόδειξη: Τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο ύψος ν και ίσες βάσεις $|B\Delta| = |\Delta\Gamma|$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.3.6 Το εμβαδόν τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με $\frac{1}{2}(a+b)\nu$, όπου a και b τα μήκη των παραλλήλων πλευρών του και ν η μεταξύ αυτών απόσταση.

Απόδειξη: Χώρισε με την διαγώνιο $A\Gamma$ το τραπέζιο σε δύο τρίγωνα και εφάρμοσε το Πόρισμα-3.3.1, προσθέτοντας το εμβαδόν των δύο τριγώνων, ο.ε.δ.

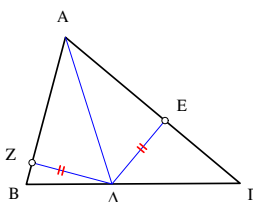


Σχήμα 261: Διάμεσος χωρίζει σε ισοεμβαδικά τρίγωνα



Σχήμα 262: Εμβαδόν τραπεζίου

Πόρισμα 3.3.7 Η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την απέναντι πλευρά ΒΓ σε δύο τμήματα ΒΔ και ΔΓ των οποίων ο λόγος είναι ό ίδιος με τον λόγο των προσκειμένων σε αυτά πλευρών: $\frac{|BΔ|}{|ΔΓ|} = \frac{|AB|}{|ΑΓ|}$.

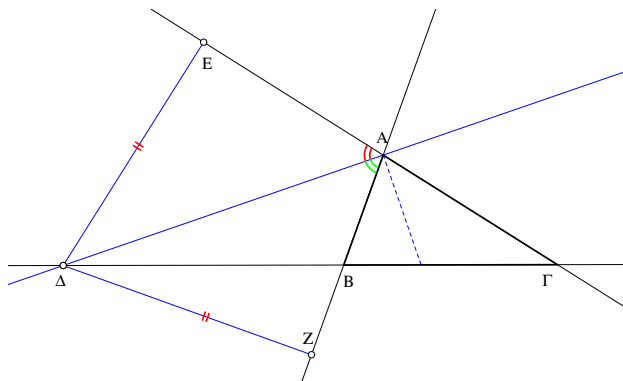


Σχήμα 263: Διχοτόμος τέμνουσα απέναντι πλευρά

Απόδειξη: Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, τότε το συμπέρασμα προκύπτει από το ότι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ταυτίζεται με την μεσοκάθετο της βάσης (Πόρισμα 1.8.2). Η απόδειξη στην γενική περίπτωση προκύπτει εύκολα υπολογίζοντας τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ με δύο τρόπους. Την πρώτη φορά θεωρούμε ως βάση τους αντίστοιχα τις ΒΔ και ΔΓ. Επειδή το ύψος τους από το Α είναι το ίδιο έχουμε (3.3.4) ότι ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με $\frac{|BΔ|}{|ΔΓ|}$. Την δεύτερη φορά θεωρούμε ως βάση τους τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Και πάλι τα ύψη τους από το Δ είναι ίσα (Πόρισμα 1.15.12), άρα από το (3.3.4) προκύπτει, ότι ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με $\frac{|AB|}{|ΑΓ|}$, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.3.3 Δείξε ότι το ίδιο συμπέρασμα με αυτό του προηγούμενου πορίσματος ισχύει και για την εξωτερική διχοτόμο ενός τριγώνου, εφόσον αυτή τέμνει την απέναντι βάση. Δηλαδή ότι η εξωτερική διχοτόμος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την απέναντι πλευρά ΒΓ σε τμήματα τα οποία ικανοποιούν την $\frac{|BΔ|}{|ΔΓ|} = \frac{|AB|}{|ΑΓ|}$.

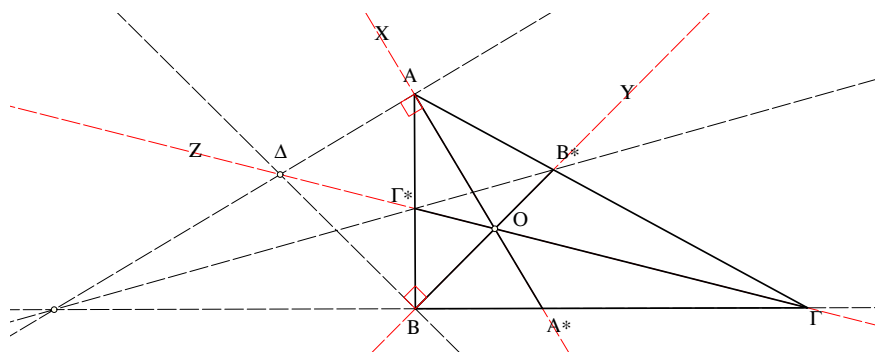
Υπόδειξη: Όπως και προηγουμένως, υπολόγισε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ και τον λόγο τους με δύο τρόπους. Πρώτα θεωρώντας ως βάσεις τους τις ΒΔ και ΓΔ και κατόπιν θεωρώντας ως βάσεις τους τις ΑΒ και ΑΓ προς τις οποίες τα ύψη από το Δ είναι



Σχήμα 264: Εξωτερική διχοτόμος τέμνουσα απέναντι πλευρά

ίσες (Πόρισμα 1.15.12). Σημείωσε ότι η εξωτερική διχοτόμος στο A τέμνει την απέναντι βάση τότε ακριβώς, όταν το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές ως προς την κορυφή A.

Άσκηση 3.3.4 Δίδονται τρεις ευθείες διά του ιδίου σημείου OX , OY και OZ . Κατασκεύασε τρίγωνο που έχει αυτές τις ευθείες ως διχοτόμους.



Σχήμα 265: Κατασκευή τριγώνου από τις διχοτόμους ευθείες

Υπόδειξη: Από τυχόν σημείο A της OX φέρε κάθετο σε αυτήν, τέμνουσα την OZ στο Δ. Πρόβαλε το Δ στην OY στο σημείο B. Τέλος όρισε τις συμμετρικές ευθείες της AB ως προς τις OX και OB που τέμνονται στο Γ. Το ABΓ έχει την απαιτούμενη ιδιότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι το Γ είναι επί της OZ. Προς τούτο θεωρούμε το σημείο Γ' στο οποίο η AG τέμνει την OZ, το σημείο Γ'' στο οποίο η BG τέμνει την OZ και δείχνουμε ότι αυτά τα δύο ταυτίζονται και συμπίπτουν με το σημείο Γ. Πράγματι, εκ κατασκευής, οι ευθείες OX και AΔ είναι διχοτόμοι της γωνίας A του τριγώνου AG*Γ', όπου Γ* το σημείο τομής της AB με την OZ. Άρα (Πόρισμα 3.3.7 και Άσκηση 3.3.3)

$$\frac{|OG^*|}{|OG'|} = \frac{|ΔΓ^*|}{|ΔΓ'|} \Rightarrow \frac{|Γ'O|}{|Γ'Δ|} = \frac{|Γ^*O|}{|Γ^*Δ|}.$$

Παρόμοια εκ κατασκευής, οι BO και BΔ είναι διχοτόμοι της γωνίας B του τριγώνου Γ*BΓ'', άρα θα ισχύει και η ανάλογη της προηγούμενης

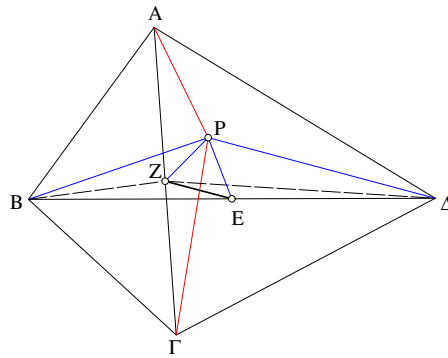
$$\frac{|OG^*|}{|OG''|} = \frac{|ΔΓ^*|}{|ΔΓ''|} \Rightarrow \frac{|Γ''O|}{|Γ''Δ|} = \frac{|Γ^*O|}{|Γ^*Δ|}.$$

Τα δύο σημεία Γ' και Γ'' έχουν συνεπώς τον ίδιο λόγο ως προς τα O και Δ της ευθείας OZ και ευρίσκονται από την ίδια μεριά του τμήματος $O\Delta$, άρα ταυτίζονται (Πόρισμα 1.17.3). Επειδή οι δύο εκ των ευθειών OX και OZ είναι διχοτόμοι του τριγώνου $AB\Gamma$ και η τρίτη OZ που διέρχεται από το σημείο τομής των δύο πρώτων και το Γ θα είναι και αυτή διχοτόμος του τριγώνου (Πρόταση 2.2.3).

Άσκηση 3.3.5 Δοθέντος τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P για τα οποία ισχύει

$$\epsilon(PAB) + \epsilon(P\Gamma\Delta) = \epsilon(PB\Gamma) + \epsilon(PA\Delta)$$

είναι η ευθεία *Newton* (που ενώνει τα μέσα E, Z των διαγωνίων) του τετραπλεύρου.



Σχήμα 266: Χαρακτηρισμός ευθείας *Newton*

Υπόδειξη: Η διαφορά των εμβαδών $\epsilon(PB\Gamma) - \epsilon(PAB)$ γράφεται με την βοήθεια των τετραπλεύρων $PABZ$ και $PZB\Gamma$, όπου Z το μέσον της διαγωνίου AG . Τα δύο αυτά τετράπλευρα έχουν ίσα εμβαδά και ισχύει:

$$\epsilon(PB\Gamma) - \epsilon(PAB) = [\epsilon(P\Gamma BZ) + \epsilon(PBZ)] - [\epsilon(PABZ) - \epsilon(PBZ)] = 2\epsilon(PBZ).$$

Ανάλογα, επειδή $\epsilon(PAZ) = \epsilon(PZ\Gamma)$,

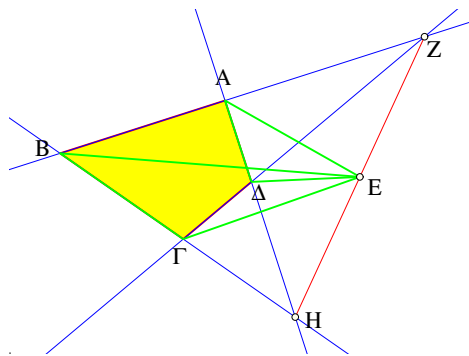
$$\begin{aligned} \epsilon(P\Gamma\Delta) - \epsilon(PA\Delta) &= [\epsilon(P\Gamma\Delta) + \epsilon(PZ\Gamma)] - [\epsilon(PA\Delta) + \epsilon(PAZ)] \\ &= [\epsilon(Z\Delta\Gamma) + \epsilon(PZ\Delta)] - [\epsilon(ZA\Delta) - \epsilon(PZ\Delta)] \\ &= 2\epsilon(PZ\Delta). \end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι η σχέση $\epsilon(PAB) + \epsilon(P\Gamma\Delta) = \epsilon(PB\Gamma) + \epsilon(PA\Delta)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon(PBZ) - \epsilon(PZ\Delta) = [\epsilon(PZB) + \epsilon(ZBE)] - [\epsilon(PZ\Delta) + \epsilon(ZE\Delta)] \\ &= [\epsilon(PBE) - \epsilon(PZE)] - [\epsilon(PE\Delta) + \epsilon(PZE)] = -2\epsilon(PZE). \end{aligned}$$

Όμως $\epsilon(PZE) = 0$ σημαίνει ότι το P είναι στην ευθεία των E και Z .

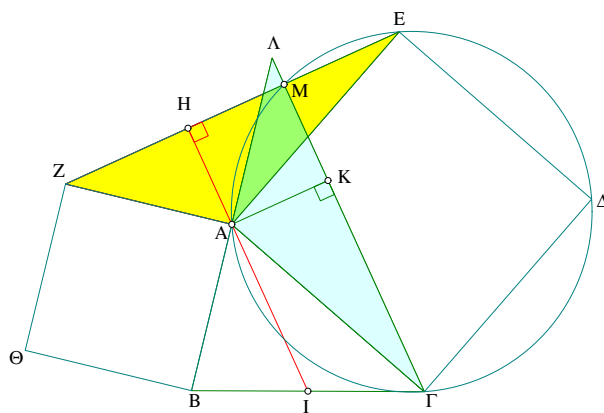
Άσκηση 3.3.6 Τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ οι απέναντι πλευρές τέμνονται στα σημεία H και Z . Δείξε ότι το μέσον E της ZH είναι επί της ευθείας του *Newton* του τετραπλεύρου.



Σχήμα 267: Θεώρημα του Newton

Υπόδειξη: Βάσει της προηγούμενης άσκησης, αρκεί ναδειχθεί ότι $\epsilon(A\Delta E) + \epsilon(B\Gamma E) = \epsilon(\Gamma\Delta E) + \epsilon(A\Delta B)$ ή ισοδύναμα $\epsilon(A\Delta E) - \epsilon(\Gamma\Delta E) = \epsilon(A\Delta B) - \epsilon(B\Gamma E)$. Η ισότητα αυτή προκύπτει εκφράζοντας τα εμβαδά μέσω των τριγώνων AHZ , ΓHZ , ΔHZ και BHZ , λ.χ. $\epsilon(A\Delta E) = \epsilon(AEH) - \epsilon(\Delta EH) = \epsilon(AZH)/2 - \epsilon(\Delta ZH)/2$ κτλ.

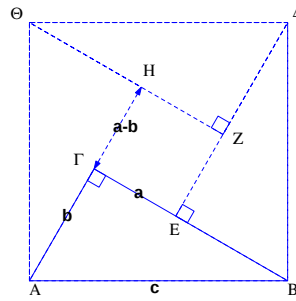
Άσκηση 3.3.7 Στις πλευρές AB , $ΑΓ$ τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα αντίστοιχα $AB\Theta Z$ και $ΑΓΔΕ$. Δείξε ότι η διάμεσος AI του $AB\Gamma$ είναι κάθετος στην πλευρά EZ του AEZ . Δείξε επίσης ότι το τρίγωνο AEZ έχει το ίδιο εμβαδόν με το $AB\Gamma$.



Σχήμα 268: Πτέρυγα τριγώνου

Υπόδειξη: Προέκτεινε την BA μέχρι διπλασιασμού της στο Λ . Το τρίγωνο $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ίσο με το ΛZE (ΠΓΠ-κριτήριο) διότι $AZ = \Lambda\Lambda$, $AE = \Lambda\Gamma$ και οι γωνίες $ZAE = \Lambda\Lambda\Gamma$ διότι και οι δύο είναι παραπληρωματικές της γωνίας $B\Lambda\Gamma$. Λόγω της ισότητας των τριγώνων οι γωνίες $ZE\Lambda$ και $\Lambda\Gamma\Lambda$ είναι ίσες. Αν M είναι το σημείο τομής των ZE και $\Gamma\Lambda$, τα E και Γ βλέπουν το τμήμα ΛM υπό ίσες γωνίες, άρα είναι επί του ίδιου κύκλου (Πρόταση 2.13.3). Ο κύκλος αυτός διέρχεται από τα E , Λ και Γ , άρα είναι ο περιγεγραμμένος του τετραγώνου $\Lambda\Gamma\Delta E$ που έχει διάμετρο την EG . Συνάγεται ότι η γωνία $EM\Gamma$ βαίνει επί διαμέτρου άρα οι $M\Gamma$ και ME είναι κάθετες (Πόρισμα 2.1.7). Συνεπώς η $\Gamma\Lambda$ είναι όπως και η AH κάθετη στην EZ , άρα αυτές οι δύο είναι παράλληλες. Στο τρίγωνο $B\Gamma\Lambda$ η AH διέρχεται από το μέσον της $B\Lambda$ και είναι παράλληλη προς την πλευρά $\Lambda\Gamma$, άρα η AH διέρχεται και από το μέσον της $B\Gamma$. Η $ΑΓ$ είναι διάμεσος του $\Lambda B\Gamma$, συνεπώς τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Lambda\Gamma\Lambda$ (ίσο του ΛEZ) είναι ίσα (Πόρισμα 3.3.5).

3.4 Πυθαγόρας και Πάππος



Σχήμα 269: $c^2 = a^2 + b^2$

Θεώρημα 3.4.1 (Θεώρημα του Πυθαγόρα, περίπου 570-475 π.Χ.) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $c = |AB|$ είναι το μήκος της υποτείνουσας και $b = |AG| \leq a = |BG|$ είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών του τριγώνου. Επειδή οι γωνίες του $\alpha = \angle GAB$ και $\beta = \angle BGA$ είναι συμπληρωματικές, το τρίγωνο μπορεί να τοποθετηθεί στις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου με πλευρά BG , ως εις το σχήμα. Δημιουργείται τότε στο κέντρο ένα άλλο τετράγωνο με πλευρά μήκους $a - b$. Γράφοντας το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου σαν άθροισμα των επιμέρους εμβαδών έχουμε:

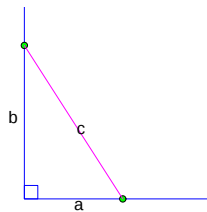
$$c^2 = \epsilon(AB\Delta\Theta) = 4\epsilon(AB\Gamma) + \epsilon(ΓΕΖΗ).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\epsilon(AB\Gamma) = \frac{1}{2}ab, \quad \text{και} \quad \epsilon(ΓΕΖΗ) = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

και αντικαθιστώντας στην ισότητα των εμβαδών παίρνουμε την ζητούμενη ισότητα:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

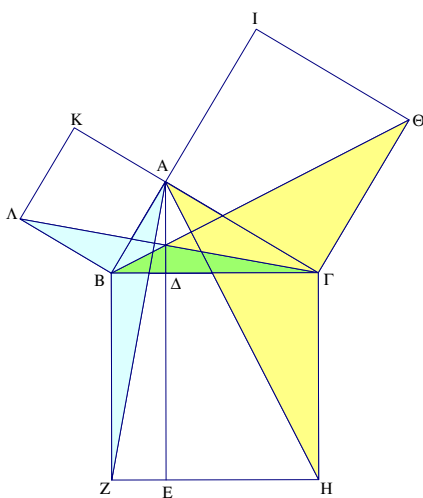


Σχήμα 270: Αντίστροφο θεωρήματος Πυθαγόρα

Θεώρημα 3.4.2 (Αντίστροφο θεωρήματος Πυθαγόρα) Αν τα μήκη a, b και c των πλευρών τριγώνου ικανοποιούν την $a^2 + b^2 = c^2$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα μήκους c και κάθετες πλευρές μήκους a και b .

Απόδειξη: Στις πλευρές μιάς ορθής γωνίας τοποθετούμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκη a και b . Σηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο κατά Πυθαγόρα έχει υποτείνουσα μήκους $a^2 + b^2 = c^2$. Το δοθέν τρίγωνο και το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχουν λοιπόν αντίστοιχες πλευρές ίσες, άρα κατά το ΠΠΠ-κριτήριο θα είναι ίσα και το δοθέν θα είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία απέναντι από την c , ο.ε.δ.

Άσκηση 3.4.1 (Η απόδειξη του Ευκλείδη) Δείξε το Πυθαγόρειο θεώρημα αποδεικνύοντας ότι το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα είναι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων με πλευρές αντίστοιχα τις κάθετες πλευρές του τετραγώνου.



Σχήμα 271: Απόδειξη του Ευκλείδη

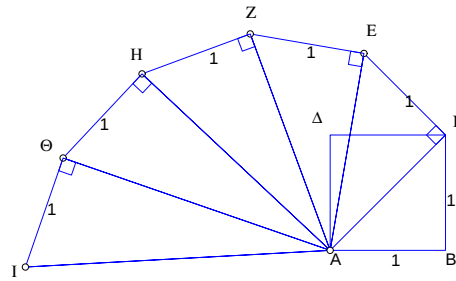
Υπόδειξη: Στο σχήμα: $\epsilon(BGHZ) = \epsilon(AG\Theta I) + \epsilon(BAK\Lambda)$. Φέρε το ύψος από την ορθή γωνία A και προέκτεινε μέχρι το σημείο τομής E με την απέναντι πλευρά ZH του τετραγώνου $BGHZ$ (στην υποτείνουσα). Το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των δύο ορθογωνίων: $\Delta E\eta\Gamma$ και ΔEZB . Δείξε ότι τα εμβαδά αυτών των ορθογωνίων ισούνται αντίστοιχα με τα εμβαδά των τετραγώνων $\Lambda\Gamma\Theta I$ και $\Lambda\kappa\Lambda B$. Προς τούτο παρατήρησε ότι τα τρίγωνα $\Lambda\Gamma\eta$ και ΛBZ έχουν εμβαδόν το μισό των εμβαδών αυτών των ορθογωνίων (ίδια βάση και ίδιο ύψος). Παρατήρησε επίσης ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα αντίστοιχα με τα $\Gamma\Theta\eta$ και $\Gamma\eta\Lambda$ (ΠΓΠ-κριτήριο) τα οποία με την σειρά τους έχουν εμβαδό το μισό των τετραγώνων $\Lambda\Gamma\Theta I$ και $\Lambda\kappa\Lambda B$ αντίστοιχα (ίδια βάση και ίδιο ύψος).

Άσκηση 3.4.2 Δείξε στο σχήμα 271 ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$ και $B\Theta$ τέμνονται επί της $A\Delta$.

Σχόλιο-1 Αργότερα (Θεώρημα 3.10.1) θα δούμε ότι το θεώρημα του Πυθαγόρα γενικεύεται σε ένα σχήμα που μοιάζει με το προηγούμενο και στο οποίο το τετράγωνο αντικαθίσταται με ένα πολύγωνο.

Σχόλιο-2 Η σημασία του θεωρήματος του Πυθαγόρα υποδηλώνεται από το πλήθος των

αποδείξεων που έχουν δοθεί κατά καιρούς. Στο βιβλίο του Loomis ([Loo68]) αναλύονται 370 αποδείξεις, η πρώτη από τις οποίες, θεωρούμενη η απλούστερη όλων (δες σχόλιο-2, Παράγραφος 3.7) οφείλεται στον Legendre.



Σχήμα 272: $|AG| = \sqrt{2}, |AE| = \sqrt{3}, \dots$

Πόρισμα 3.4.1 Οι τετραγωνικές ρίζες των ακεραίων $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ κατασκευάζονται με τον κανόνα και τον διαβήτη.

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την διαγώνιο ΑΓ του μοναδιαίου τετραγώνου ΑΒΓΔ που έχει μήκος $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$, κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΑΓΕ με κάθετες πλευρές ΑΓ και ΓΕ $|GE| = 1$. Η υποτεινούσα αυτού $|AE|^2 = |AG|^2 + 1^2 = 2 + 1 \Rightarrow |AE| = \sqrt{3}$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας κάθε φορά την πλευρά που κατασκευάσαμε ($\sqrt{k}$) και μία πλευρά μήκους 1 ως κάθετες για να ορίσουμε την επόμενη ρίζα $\sqrt{k+1}$, ο.ε.δ.

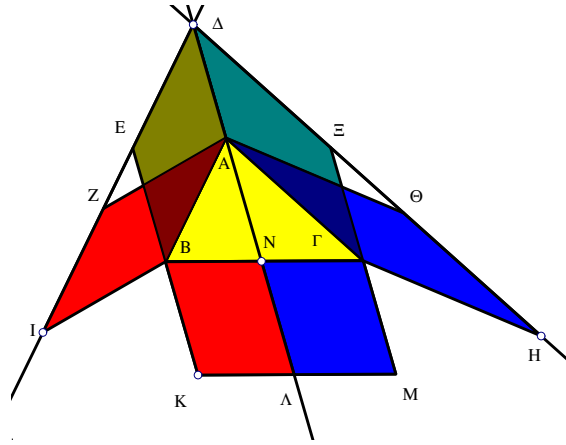
Άσκηση 3.4.3 Δείξε ότι οι ακέραιοι 3, 4 και 5 είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

Άσκηση 3.4.4 Δείξε ότι για κάθε ζεύγος ακεραίων (μ, ν) οι ακέραιοι $a = |\mu^2 - \nu^2|, b = 2\mu\nu, c = \mu^2 + \nu^2$, εφ' όσον κανείς τους δεν είναι μηδέν, εκφράζουν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

Άσκηση 3.4.5 Δείξε ότι για κάθε θετικό a υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών $a, \frac{a}{2}, a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Πως συνδέεται ένα τέτοιο τρίγωνο με το ισόπλευρο που έχει μήκος πλευράς a ;

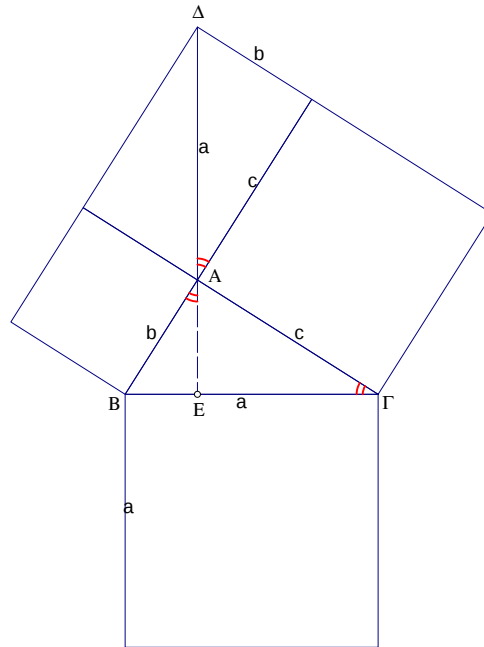
Θεώρημα 3.4.3 (Θεώρημα του Πάππου 290-350) Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, κατασκεύασε αυθαίρετα παραλληλόγραμμα ΑΒΙΖ και ΑΓΗΘ. Προέκτεινε τις πλευρές τους ΙΖ και ΘΗ μέχρι το σημείο τομής τους Δ. Στην τρίτη πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, κατασκεύασε το παραλληλόγραμμο ΒΓΜΚ έτσι ώστε η ΒΚ να είναι παράλληλη και ίση με την ΔΑ. Τότε το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων ΑΒΙΖ και ΑΓΗΘ είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΒΓΜΚ.

Απόδειξη: Προέκτεινε την ΔΑ ώστε να χωρίσει το παραλληλόγραμμο ΒΓΜΚ στο ΒΝΑΚ και ΝΑΜΓ. Προφανώς $\epsilon(BΓΜΚ) = \epsilon(BΝΑΚ) + \epsilon(ΝΑΜΓ)$. Όμως τα δύο αυτά παραλληλόγραμμα είναι αντιστοιχα ίσα με $\epsilon(BΝΑΚ) = \epsilon(BΕΔΑ)$ και $\epsilon(ΝΑΜΓ) = \epsilon(ΑΓΞΔ)$ διότι έχουν ίσες βάσεις και είναι μεταξύ των ιδίων παραλλήλων αντιστοιχα. Για τον ίδιο λόγο είναι όμως ίσα και τα $\epsilon(ΙΒΑΖ) = \epsilon(BΕΔΑ)$ και $\epsilon(ΑΓΗΘ) = \epsilon(ΑΓΞΔ)$, ο.ε.δ.



Σχήμα 273: Το θεώρημα του Πάππου

Άσκηση 3.4.6 Δείξε ότι το θεώρημα του Πάππου γενικεύει το θεώρημα του Πυθαγόρα. Δηλαδή, όταν το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο τότε η $A\Delta$ είναι κάθετη και ίση προς την $B\Gamma$ και το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων στις κάθετες πλευρές ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτεινουσας.



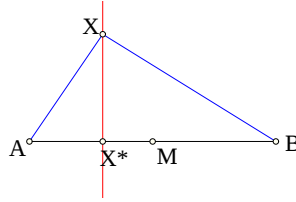
Σχήμα 274: Πάππου γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος

Υπόδειξη: Απόδειξη διά του σχήματος! Το $A\Xi\Delta$ είναι σε αυτήν την περίπτωση ορθογώνιο τρίγωνο ίσο με το $AB\Gamma$, άρα οι $B\Gamma$ και $A\Delta$ θα είναι ίσες. Είναι και κάθετες διότι οι γωνίες $\Delta A\Xi$ και EAB , όπου AE το ύψος από το A , είναι ίσες και έχουν τις πλευρές τους $A\Xi$, AB στην ίδια ευθεία, άρα είναι κατά κορυφήν και τα Δ , A , E είναι στην ίδια ευθεία.

Πρόταση 3.4.1 Σε κάθε τρίγωνο XAB ισχύει

$$|XA|^2 - |XB|^2 = 2|AB||X^*M|$$

όπου X^* η προβολή του X στην AB και M το μέσον του AB .



Σχήμα 275: Διαφορά τετραγώνων πλευρών τριγώνου

Απόδειξη: Τα τρίγωνα AXX^* και BXX^* είναι ορθογώνια στο X^* , άρα $|XA|^2 = |XX^*|^2 + |X^*A|^2$ και $|XB|^2 = |XX^*|^2 + |X^*B|^2$. Το ζητούμενο προκύπτει αφαιρώντας κατά μέλη τις ισότητες, γράφοντας $|AX^*| = |AM| - |MX^*|$, $|BX^*| = |BM| + |MX^*|$ και κάνοντας πράξεις, ο.ε.δ.

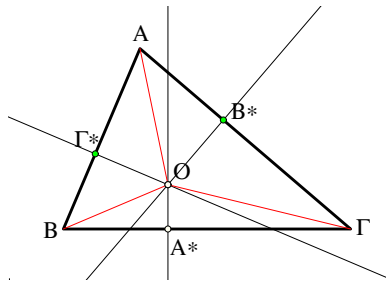
Άσκηση 3.4.7 Δίδεται ευθύγραμμο τμήμα AB . Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία η διαφορά των τετραγώνων των αποστάσεων είναι σταθερά: $|XA|^2 - |XB|^2 = \kappa$ είναι ευθεία κάθετη στο AB .

Άσκηση 3.4.8 Δείξε ότι, εάν a, b, c είναι αντίστοιχα τα μήκη των καθέτων πλευρών και της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου και v το επί την υποτείνουσαν ύψος, τότε

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Άσκηση 3.4.9 Θεώρησε τα σημεία A^*, B^*, Γ^* επί των πλευρών τριγώνου $B\Gamma, \Gamma A, AB$ αντίστοιχα. Δείξε ότι οι κάθετες σε αυτές τις πλευρές στα αντίστοιχα σημεία διέρχονται από κοινό σημείο O , τότε και μόνον, όταν ισχύει (*[Bot07, σ. 15]*)

$$|BA^*|^2 + |\Gamma B^*|^2 + |A\Gamma^*|^2 = |A^*\Gamma|^2 + |B^*A|^2 + |\Gamma^*B|^2.$$

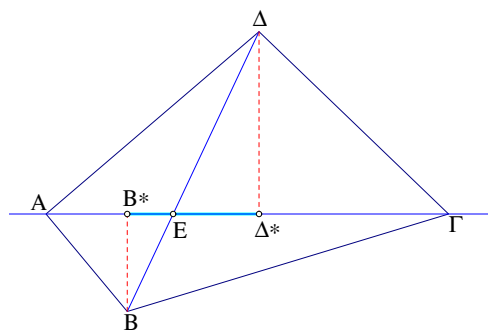


Σχήμα 276: Κάθετες διερχόμενες από κοινό σημείο

Άσκηση 3.4.10 Για κάθε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει η σχέση

$$(|AB|^2 + |\Gamma\Delta|^2) - (|B\Gamma|^2 + |\Delta A|^2) = 2|A\Gamma||B^*\Delta^*|,$$

όπου B^* και Δ^* οι προβολές των B, Δ επί της διαγωνίου $A\Gamma$.



Σχήμα 277: Διαφορά τετραγώνων πλευρών τετραπλεύρου

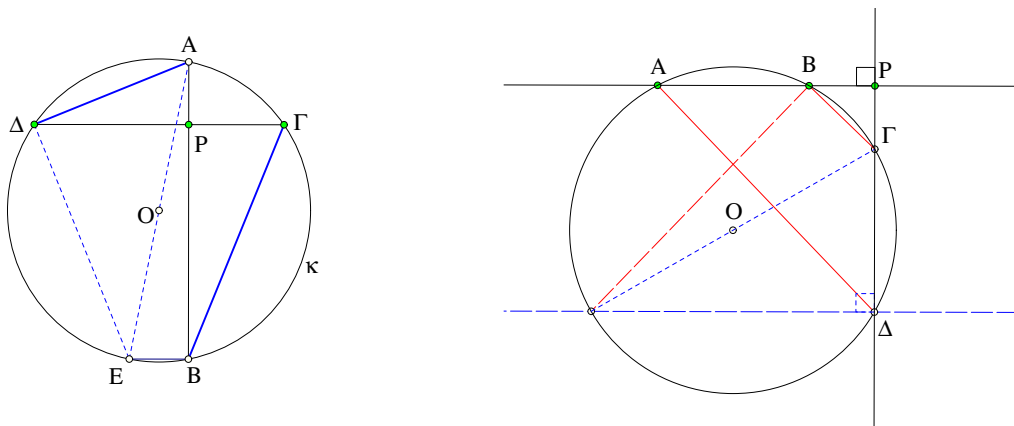
Υπόδειξη: Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έπεται (δες και Άσκηση 3.4.7)

$$\begin{aligned}
 |\Delta A|^2 - |\Delta \Gamma|^2 &= |A\Delta^*|^2 - |\Delta^* \Gamma|^2 = (|A\Delta^*| + |\Delta^* \Gamma|)(|A\Delta^*| - |\Delta^* \Gamma|) \\
 &= |A\Gamma|(|A\Delta^*| - |\Delta^* \Gamma|), \\
 |B\Gamma|^2 - |BA|^2 &= |B^* \Gamma|^2 - |AB^*|^2 = (|B^* \Gamma| + |AB^*|)(|B^* \Gamma| - |AB^*|) \\
 &= |A\Gamma|(|B^* \Gamma| - |AB^*|) \Rightarrow \\
 (|\Delta A|^2 + |B\Gamma|^2) - (|\Delta \Gamma|^2 + |BA|^2) &= |A\Gamma|(|A\Delta^*| - |\Delta^* \Gamma| + (|B^* \Gamma| - |AB^*|)) \\
 &= |A\Gamma|((|A\Delta^*| - |AB^*|) + (|B^* \Gamma| - |\Delta^* \Gamma|)) \\
 &= |A\Gamma|(2|B^* \Delta^*|).
 \end{aligned}$$

Οι απόλυτες τιμές εξασφαλίζουν ότι ο τύπος θα ισχύει και στην περίπτωση που η αριστερή πλευρά είναι αρνητική.

Άσκηση 3.4.11 Δείξε ότι αν το άθροισμα τετραγώνων δύο απέναντι πλευρών τετραπλεύρου ισούται με το άθροισμα τετραγώνων των δύο άλλων απέναντι πλευρών του, τότε: (α) το τετράπλευρο έχει ορθογώνιες διαγωνίους και (β) τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Τετράπλευρα με κάθετες διαγωνίους λέγονται **Ορθοδιαγώνια**.



Σχήμα 278: Ορθογώνιες χορδές

Άσκηση 3.4.12 Δείξε ότι, εάν οι χορδές AB , $\Gamma\Delta$ κύκλου $\kappa(O, \rho)$ τέμνονται κάθετα στο εσωτερικό/εξωτερικό του κ , σημείο P , τότε

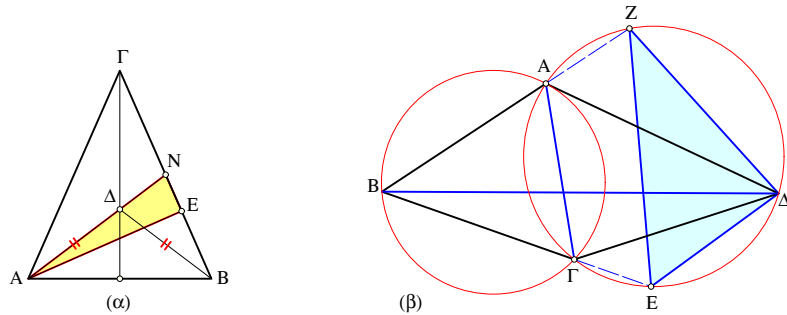
$$|PA|^2 + |PB|^2 + |P\Gamma|^2 + |P\Delta|^2 = |A\Delta|^2 + |B\Gamma|^2 = (2\rho)^2.$$

Άσκηση 3.4.13 Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο με ορθή γωνία στο A και ύψος $A\Delta$. Δείξε ότι ισχύει $\frac{|AB|^2}{|\Gamma\Delta|^2} = \frac{|B\Delta|}{|\Gamma\Delta|}$.

Άσκηση 3.4.14 Κατασκεύασε τετράγωνο του οποίου οι δύο διαδοχικές πλευρές να διέρχονται από δοθέντα σημεία και η κορυφή που περιέχεται στις άλλες δύο να είναι δοθέν σημείο.

Άσκηση 3.4.15 Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει δοθείσα περίμετρο.

Άσκηση 3.4.16 Τριγώνου $AB\Gamma$ η θέση και το μέγεθος της βάσης $B\Gamma$ και το μέτρο της γωνίας $\alpha = |\angle B\Gamma A|$ μένουν σταθερά. Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της προβολής του μέσου της $B\Gamma$ στην διχοτόμο από το A .



Σχήμα 279: (α) Κατασκευή ισοσκελούς, (β) κατασκευή τετραπλεύρου

Άσκηση 3.4.17 Κατασκεύασε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση AB , του οποίου δίδεται το μήκος του ύψους AE και το μήκος της διαμέσου AN .

Υπόδειξη: Από τα δεδομένα κατασκευάζεται το ορθογώνιο τρίγωνο AEN (σχήμα 279-α). Το σημείο τομής των διαμέσων Δ είναι γνωστό σημείο της AN και $|\Delta A| = |\Delta B|$. Επομένως, το B ευρίσκεται ως τομή του κύκλου με ακτίνα ΔA με την ευθεία EN .

Άσκηση 3.4.18 Κατασκεύασε τετράπλευρο του οποίου δίδονται τα μήκη των διαγωνίων και τα μέτρα των γωνιών του.

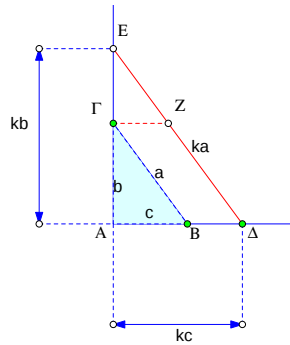
Υπόδειξη: Από τα δεδομένα κατασκευάζονται οι κύκλοι $(A\Gamma\Delta)$ και $(AB\Gamma)$ διότι τα Δ και B βλέπουν υπό δοθείσες γωνίες το δοθέν $A\Gamma$ (σχήμα 279-β). Προεκτείνοντας τις BA και $B\Gamma$ ορίζουμε τα σημεία του κύκλου $(A\Gamma\Delta)$: Z και E . Στον κατασκευασθέντα κύκλο $(A\Gamma\Delta)$ οι γνωστές γωνίες $\angle ZAD$ και $\angle EGD$ ορίζουν κατασκευάσιμα μήκη $|\Delta Z|$, $|\Delta E|$. Συνεπώς το τρίγωνο ΔEZ κατασκευάζεται. Το B προσδιορίζεται ως τομή των κύκλων $(AB\Gamma)$ και $\Delta(|B\Delta|)$.

3.5 Όμοια ορθογώνια τρίγωνα

Όμοια λέγονται δύο ορθογώνια τρίγωνα τα οποία, εκτός της ορθής, έχουν και δύο ακόμη αντίστοιχες γωνίες τους ίσες (άρα και όλες τις γωνίες τους αντίστοιχα ίσες). Στην παράγραφο αυτή διαπιστώνουμε ότι αυτή η σχέση μεταξύ ορθογωνίων τριγώνων είναι ισοδύναμη με την σχέση **Αναλογίας των πλευρών τους**. Αυτό πάλι σημαίνει ότι τα τρία μήκη a, b, c των πλευρών του ενός τριγώνου και τα τρία μήκη a', b', c' των αντιστοίχων πλευρών του άλλου τριγώνου ικανοποιούν την σχέση:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Πρόταση 3.5.1 Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθή γωνία στο A και μήκη πλευρών $a = |B\Gamma|, b = |\Gamma A|, c = |AB|$ και k θετικός αριθμός. Επί των καθέτων ημιευθειών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Δ και E έτσι ώστε $|A\Delta| = kc$ και $|AE| = kb$. Το τρίγωνο που προκύπτει $A\Delta E$ είναι ορθογώνιο, η υποτείνουσά του ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$ και τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες.



Σχήμα 280: Όμοια ορθογώνια τρίγωνα

Απόδειξη: Το πρώτο συμπέρασμα είναι αποτέλεσμα του ότι η $a^2 = b^2 + c^2$ συνεπάγεται την $(ka)^2 = (kb)^2 + (kc)^2$. Για το δεύτερο συμπέρασμα αναλύουμε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ που είναι k^2bc στο άθροισμα των εμβαδών ενός τριγώνου και ενός τραπεζίου. Προς τούτο φέρουμε παράλληλο από το Γ που τέμνει την ΔE στο Z . Το εμβαδόν του τραπεζίου που προκύπτει είναι (Πρόταση 3.3.6) $\epsilon(A\Delta Z\Gamma) = \frac{1}{2}(kc + z)b$, όπου $z = |\Gamma Z|$. Το εμβαδόν του τριγώνου $\epsilon(\Gamma ZE) = \frac{1}{2}z(k - 1)b$. Η εξίσωση μεταξύ των εμβαδών δίδει:

$$\epsilon(A\Delta E) = \epsilon(A\Delta Z\Gamma) + \epsilon(\Gamma ZE),$$

η οποία ισοδυναμεί με

$$\frac{1}{2}k^2bc = \frac{1}{2}(kc + z)b + \frac{1}{2}z(k - 1)b,$$

που απλοποιείται στην

$$z = (k - 1)c.$$

Επειδή συμβαίνει και $|B\Delta| = (k - 1)c$ η προηγούμενη ισότητα δείχνει ότι το $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Από αυτό έπεται ότι τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.5.2 (Αντίστροφο του προηγούμενου) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθή γωνία στο A και μήκη πλευρών $a = |B\Gamma|$, $b = |\Gamma A|$, $c = |AB|$ και k θετικός αριθμός. Επί της κάθετης πλευράς AB παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $|A\Delta| = kc$ και φέρουμε παράλληλο τέμνουσα την άλλη κάθετο στο E . Τότε $|AE| = kb$ και τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν ανάλογες πλευρές μηκών a, b, c και ka, kb, kc αντιστοίχως.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε πάλι το τελευταίο σχήμα, αυτή τη φορά με διαφορετικές υποθέσεις. Έστω ότι $|AE| = k'b$. Θα δείξουμε ότι $k' = k$. Και πάλι κάνοντας την ανάλυση του $\epsilon(A\Delta E) = \epsilon(A\Delta Z\Gamma) + \epsilon(\Gamma ZE)$ παίρνουμε αυτήν την φορά την εξίσωση:

$$\frac{1}{2}kk'bc = \frac{1}{2}((k-1)c + kc)b + \frac{1}{2}(k-1)c(k'-1)b,$$

που απλοποιείται στην

$$k' = k.$$

Από αυτήν προκύπτει ότι και $|DE|^2 = (kc)^2 + (kb)^2 = k^2(b^2 + c^2) = (ka)^2$ και συνεπώς η αναφερομένη αναλογία πλευρών, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.5.3 Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις ίδιες γωνίες έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ανάλογες. Αντίστροφα, δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ανάλογες έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Απόδειξη: Γιά το ευθύ εφάρμοσε το Θεώρημα-3.5.2 τοποθετώντας τα δύο τρίγωνα ως εις το τελευταίο σχήμα. Γιά το αντίστροφο εφάρμοσε το Θεώρημα-3.5.1 τοποθετώντας τα τρίγωνα πάλι κατά τον ίδιο τρόπο. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό στα ορθογώνια τρίγωνα είναι ότι η αναλογία των καθέτων πλευρών συνεπάγεται άμεσα και την αναλογία των υποτεινουσών, λόγω του Πυθαγορείου θεωρήματος. ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.5.1 Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια τότε και μόνον, όταν έχουν τον ίδιο λόγο καθέτων πλευρών ή όταν έχουν τον ίδιο λόγο μιάς καθέτου προς την υποτείνουσα.

Απόδειξη: Έστω ότι τα ορθογώνια $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν τις ίδιες γωνίες στις κορυφές με τα ίδια γράμματα και στο A αντιστοιχεί ορθή γωνία. Κατά την προηγούμενη πρόταση είναι όμοια τότε και μόνον όταν $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|A\Gamma|}{|A'\Gamma'|}$. Αυτή όμως είναι ισοδύναμη με την $\frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|A'B'|}{|A'\Gamma'|}$. Αυτό δείχνει τον πρώτο ισχυρισμό. Ο δεύτερος ανάγεται στον πρώτο. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A'B'|}{|B'\Gamma'|}$, τούτη είναι συνεπάγεται την

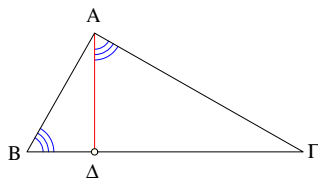
$$\frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|AB|}{\sqrt{|B\Gamma|^2 - |AB|^2}} = \frac{|A'B'|}{\sqrt{|B'\Gamma'|^2 - |A'B'|^2}} = \frac{|A'B'|}{|A'\Gamma'|},$$

ο.ε.δ.

Πρόταση 3.5.4 Έστω Δ η προβολή της κορυφής A ορθογωνίου τριγώνου στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Τότε ισχύουν οι τύποι

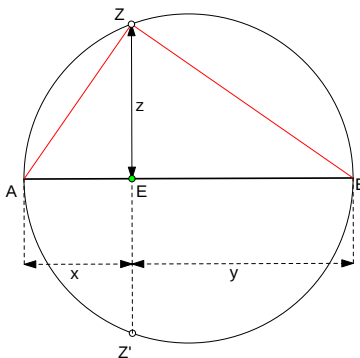
$$|A\Delta|^2 = |B\Delta||\Gamma\Delta|, \quad |A\Gamma|^2 = |\Gamma\Delta||B\Gamma|, \quad |AB|^2 = |B\Delta||B\Gamma|.$$

Απόδειξη: Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ έχουν τις ίδιες γωνίες, άρα θα έχουν και ανάλογες πλευρές: $\frac{|A\Delta|}{|\Gamma\Delta|} = \frac{|B\Delta|}{|A\Delta|}$ από την οποία προκύπτει η πρώτη σχέση. Ανάλογα προκύπτουν και οι υπόλοιπες συγκρίνοντας, τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ με το $AB\Gamma$, ο.ε.δ.

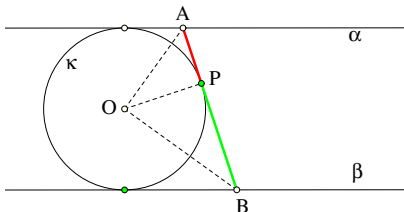
Σχήμα 281: $|AD|^2 = |BΔ||ΓΔ|$

Γιά τρεις αριθμούς x, y και z που ικανοποιούν την σχέση $z^2 = xy$ λέμε ότι ο z είναι **Μέσος ανάλογος** των x και y . Η προηγούμενη πρόταση δείχνει ένα τρόπο να κατασκευάσουμε γεωμετρικά τον μέσο ανάλογο δύο αριθμών.

Κατασκευή 3.5.1 Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων μήκους x και y κατασκευάσε (με κανόνα και διαβήτη) ευθύγραμμο τμήμα μήκους z έτσι ώστε $z^2 = xy$.

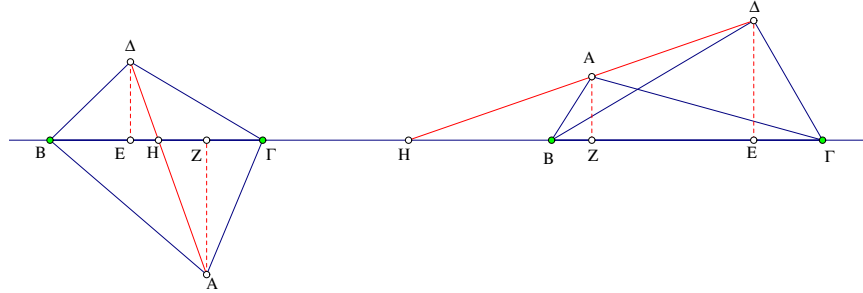
Σχήμα 282: Κατασκευή του μέσου αναλόγου $z^2 = xy$

Απόδειξη: Τοποθέτησε τα δύο τμήματα επί ευθείας ώστε να γίνουν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματά της: AE ($|AE| = x$) και EB ($|EB| = y$). Γράψε τον κύκλο με διάμετρο AB και φέρε την κάθετο στο AB στο E , τέμνουσα τον κύκλο στα σημεία Z και Z' . Τα ευθύγραμμα τμήματα EZ , EZ' έχουν το απαιτούμενο μήκος z . Πράγματι κάθε ένα από τα σημεία αυτά ορίζει ένα ορθογώνιο τρίγωνο (Πόρισμα 2.1.7) του οποίου τα τμήματα αυτά είναι τα ύψη από την ορθή γωνία. Το συμπέρασμα προκύπτει εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση, ο.ε.δ.

Σχήμα 283: Σταθερό γινόμενο $|PA||PB|$

Άσκηση 3.5.1 Δείξε ότι το γινόμενο $|PA||PB|$ τμημάτων της εφαπτομένης κύκλου $\kappa(O,\rho)$ στο σημείο του P , τα οποία αποτεμνούνται από δύο παράλληλες εφαπτόμενες α, β του κύκλου, είναι σταθερό.

Πρόταση 3.5.5 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ έχουν κοινή πλευρά την $B\Gamma$. Τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των τμημάτων $\frac{|H\Delta|}{|HA|}$, όπου H το σημείο τομής της ευθείας $B\Gamma$ με την $A\Delta$.



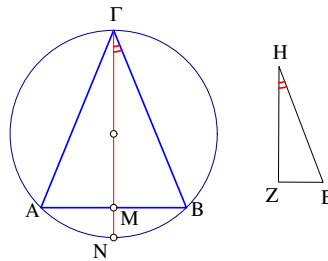
Σχήμα 284: Λόγος εμβαδών

Απόδειξη: Τα δύο τελευταία σχήματα αντιστοιχούν στις περιπτώσεις που τα τρίγωνα είναι σε διαφορετικές μεριές της $B\Gamma$ ή από την ίδια μεριά. Η απόδειξη είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Έστω ότι ΔE και AZ είναι τα ύψη από τις αντίστοιχες κορυφές. Τότε ο λόγος των εμβαδών είναι

$$\frac{\epsilon(B\Gamma\Delta)}{\epsilon(B\Gamma A)} = \frac{\frac{1}{2}|B\Gamma||\Delta E|}{\frac{1}{2}|B\Gamma||AZ|} = \frac{|\Delta E|}{|AZ|}.$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $H\Delta E$ και HAZ είναι όμοια, συνεπώς ο τελευταίος λόγος ισούται ακριβώς με τον $\frac{|H\Delta|}{|HA|}$, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.5.2 Να κατασκευασθεί ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται ο περιγεγραμμένος κύκλος και ο λόγος του ύψους προς την βάση του $\kappa = \frac{|GM|}{|AB|}$.



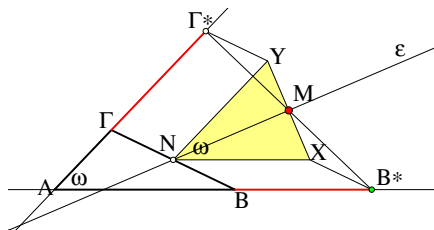
Σχήμα 285: Κατασκευή ισοσκελούς

Υπόδειξη: Του ορθογωνίου τριγώνου ΓMB είναι τότε γνωστός ο λόγος των καθέτων πλευρών

$$\frac{|GM|}{|MB|} = \frac{|GM|}{(|AB|/2)} = 2\kappa.$$

Επομένως κατασκευάζεται εύκολα όμοιο του ΓMB ορθογώνιο τρίγωνο με αυτό τον λόγο καθέτων, λ.χ. παίρνοντας σε μία ορθή γωνία $|ZH| = 2\kappa$ και $|ZE| = 1$. Κατόπιν σε μία διάμετρο ΓN του δοθέντος κύκλου σχηματίζουμε γωνία $\angle NGB$ ίση με την $\angle ZHE$ και παίρνουμε το συμμετρικό A του B ως προς την διάμετρο.

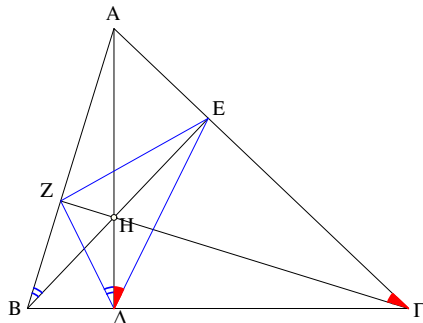
Άσκηση 3.5.3 *Επί των προεκτάσεων των πλευρών AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνονται ίσα τμήματα BB^* και $\Gamma\Gamma^*$. Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M των τμημάτων $B^*\Gamma^*$ είναι ευθεία παράλληλος της διχοτόμου της γωνίας A και διερχόμενη από το μέσον N της $B\Gamma$.*



Σχήμα 286: Ευθεία των μέσων

Υπόδειξη: Φέρε παράλληλες και ίσες $|NX| = |BB^*|$, $|NY| = |\Gamma\Gamma^*|$. Το $\triangle XNY$ είναι ισοσκελές και η NM διχοτόμος της κορυφής του (δες και Άσκηση 3.9.6).

Άσκηση 3.5.4 *Δείξε ότι το τρίγωνο $\triangle EZ$ με κορυφές τα ίχνη των υψών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει τα αντίστοιχα ύψη ως διχοτόμους.*



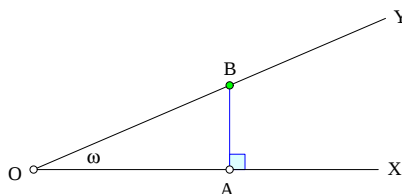
Σχήμα 287: Ορθικό τρίγωνο $\triangle EZ$ τριγώνου $AB\Gamma$

Υπόδειξη: Το τετράπλευρο $B\Delta HZ$ έχει απέναντι γωνίες στα Δ και Z ορθές, άρα είναι εγγράψιμο. Συνάγεται ότι οι γωνίες $\angle ZBH$ και $\angle Z\Delta H$ είναι ίσες. Παρόμοια και οι γωνίες $\angle E\Delta H$ και $\angle E\Gamma H$ είναι ίσες. Όμως και οι $\angle E\Gamma H$ και $\angle ZBH$ είναι ίσες γιατί το $\triangle GBZE$ είναι επίσης εγγράψιμο, αφού τα E και Z βλέπουν την $B\Gamma$ υπό ορθή γωνία.

Το τρίγωνο $\triangle EZ$ των ίχνων των υψών του $AB\Gamma$ λέγεται **Ορθικό τρίγωνο** του $AB\Gamma$. Αποδεικνύεται (Θεώρημα 5.10.2) ότι, για οξυγώνιο $AB\Gamma$, το τρίγωνο αυτό είναι το ελαχίστης περιμέτρου μεταξύ όλων των τριγώνων που εγγράφονται στο $AB\Gamma$, δηλαδή έχουν τις κορυφές τους επί των πλευρών του $AB\Gamma$. Το ορθικό τρίγωνο οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι επίσης η μοναδική κλειστή τροχιά μπίλιας που ανακλάται μία ακριβώς φορά σε κάθε τοίχωμα τριγωνικού μπιλιάρδου που έχει το σχήμα του $AB\Gamma$ [Ber87, σ. 213 (I)].

3.6 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Η άρτι αποδειχθείσα ισοδυναμία ομοιότητας και αναλογίας πλευρών για ορθογώνια τρίγωνα οδηγεί άμεσα στον ορισμό των **τριγωνομετρικών συναρτήσεων** μίας γωνίας. Προς το παρόν περιοριζόμαστε σε γωνίες που εμφανίζονται σε ορθογώνια τρίγωνα, δηλαδή οξείες. Πράγματι έστω XOY μία οξεία γωνία και B σημείο της πλευράς OY το οποίο προβάλλουμε στο σημείο A επί της OX , έτσι ώστε να σχηματισθεί το ορθογώνιο τρίγωνο OAB . Κατά τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου οι λόγοι



Σχήμα 288: $\frac{|AB|}{|OB|}$ ανεξάρτητο θέσης του A

$$s = \frac{|AB|}{|OB|}, \quad c = \frac{|OA|}{|OB|},$$

και επομένως και οι

$$t = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{s}{c}, \quad t' = \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{1}{t}$$

δεν εξαρτώνται από την ειδική θέση του B επί της ημιευθείας OY , αφού τα τρίγωνα που προκύπτουν έχουν πλευρές ανάλογες. Συνεπώς οι ποσότητες αυτές εξαρτώνται αποκλειστικά και μόνο από το μέτρο ω της γωνίας XOY και μεταβάλλονται μόνον όταν η γωνία αυτή αλλάσσει. Ορίζονται συνεπώς αντίστοιχες συναρτήσεις του μέτρου ω της γωνίας:

$$\eta\mu(\omega) = s, \quad \sigma\upsilon\nu(\omega) = c, \quad \epsilon\varphi(\omega) = t, \quad \sigma\varphi(\omega) = t',$$

οι οποίες ονομάζονται αντίστοιχα **ημίτονο**, **συνημίτονο**, **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** της γωνίας ω . Οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται με κάποιες σχέσεις. Στις δύο τελευταίες αυτό είναι φανερό από τον ίδιο τον ορισμό τους:

$$\sigma\varphi(\omega) = \frac{1}{\epsilon\varphi(\omega)} = \frac{\eta\mu(\omega)}{\sigma\upsilon\nu(\omega)}.$$

Αλλά και για τις δύο πρώτες προκύπτει από το θεώρημα του Πυθαγόρα (προηγούμενο σχήμα) ότι

$$|AB|^2 + |OA|^2 = |OB|^2 \Rightarrow \left(\frac{|AB|}{|OB|}\right)^2 + \left(\frac{|OA|}{|OB|}\right)^2 = 1$$

δηλαδή

$$\eta\mu(\omega)^2 + \sigma\upsilon\nu(\omega)^2 = 1.$$

Στην ουσία λοιπόν μία είναι η ανεξάρτητη συνάρτηση και μπορούμε να διαλέξουμε όποια από τις τέσσερις θέλουμε και να εκφράσουμε τις άλλες συναρτήσεις αυτής που διαλέξαμε. Έτσι

λ.χ. αν διαλέξω την $\eta\mu(\omega)$ σαν βασική τριγωνομετρική συνάρτηση, οι άλλες εκφράζονται μέσω αυτής:

$$\sigma\upsilon\nu(\omega) = \sqrt{1 - \eta\mu^2(\omega)}, \quad \epsilon\varphi(\omega) = \frac{\eta\mu(\omega)}{\sqrt{1 - \eta\mu^2(\omega)}}, \quad \sigma\varphi(\omega) = \frac{\sqrt{1 - \eta\mu^2(\omega)}}{\eta\mu(\omega)}.$$

Άσκηση 3.6.1 Δείξε ότι για κάθε γωνία με μέτρο $0 < \omega < 90$ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ικανοποιούν $|\eta\mu(\omega)| < 1$ και $|\sigma\upsilon\nu(\omega)| < 1$.

Άσκηση 3.6.2 Δείξε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις εκφράζονται μέσω του $\sigma\upsilon\nu(\omega)$ και των τύπων:

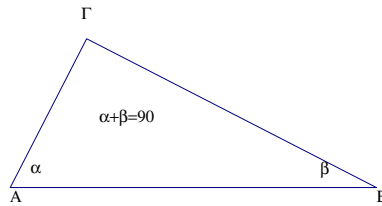
$$\eta\mu(\omega) = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2(\omega)}, \quad \epsilon\varphi(\omega) = \frac{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2(\omega)}}{\sigma\upsilon\nu(\omega)}, \quad \sigma\varphi(\omega) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\omega)}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2(\omega)}}.$$

Άσκηση 3.6.3 Δείξε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις εκφράζονται μέσω της $\sigma\varphi(\omega)$ και των τύπων:

$$\eta\mu(\omega) = \frac{\epsilon\varphi(\omega)}{\sqrt{1 + \epsilon\varphi^2(\omega)}}, \quad \sigma\upsilon\nu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\varphi^2(\omega)}}, \quad \sigma\varphi(\omega) = \frac{1}{\epsilon\varphi(\omega)}.$$

Άσκηση 3.6.4 Δείξε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις εκφράζονται μέσω της $\epsilon\varphi(\omega)$ και των τύπων:

$$\eta\mu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\varphi^2(\omega)}}, \quad \sigma\upsilon\nu(\omega) = \frac{\sigma\varphi(\omega)}{\sqrt{1 + \sigma\varphi^2(\omega)}}, \quad \epsilon\varphi(\omega) = \frac{1}{\sigma\varphi(\omega)}.$$



Σχήμα 289: Συμπληρωματικές γωνίες

Πρόταση 3.6.1 Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με οξείες γωνίες $\alpha = |\angle B A \Gamma|$ και $\beta = |\angle A B \Gamma| = 90 - \alpha$, ισχύουν:

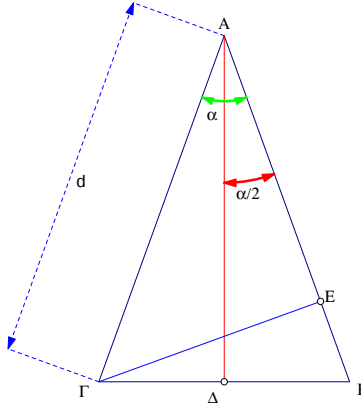
1. $|B\Gamma| = |AB| \eta\mu(\alpha)$: η απέναντι κάθετος ισούται με την υποτείνουσα επί το ημίτονο της γωνίας.
2. $|A\Gamma| = |AB| \sigma\upsilon\nu(\alpha)$: η προσκείμενη κάθετος ισούται με την υποτείνουσα επί το συνημίτονο της γωνίας.
3. $\epsilon\varphi(\alpha) = \frac{|B\Gamma|}{|A\Gamma|}$: η εφαπτομένη ισούται με τον λόγο απέναντι προς προσκείμενη κάθετο.
4. $\sigma\varphi(\alpha) = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|}$: η εφαπτομένη ισούται με τον λόγο προσκείμενης προς απέναντι κάθετο.

$$5. \eta\mu(\alpha) = \sigma\upsilon\nu(\beta), \sigma\upsilon\nu(\alpha) = \eta\mu(\beta), \epsilon\varphi(\alpha) = \sigma\varphi(\beta), \sigma\varphi(\alpha) = \epsilon\varphi(\beta)$$

Απόδειξη: Όλες οι ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού. Οι τέσσερις πρώτες διατυπώνονται για την απομνημόνευσή τους και μόνο, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.6.5 Δείξε ότι για μία οξεία γωνία α ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha) &= 2 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \sigma\upsilon\nu(\alpha) &= \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ \epsilon\varphi(\alpha) &= \frac{2 \epsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \epsilon\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, & \sigma\varphi(\alpha) &= \frac{\sigma\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{\sigma\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \end{aligned}$$



Σχήμα 290: Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιας γωνίας

Υπόδειξη: Θεώρησε ένα ισοσκελές με γωνία κορυφής α και σκέλη μήκους d και υπολόγισε το εμβαδόν του με δύο τρόπους.

$$\begin{aligned} \epsilon(AB\Gamma) &= \frac{1}{2}|B\Gamma| \cdot |A\Delta| = |B\Delta| \cdot |A\Delta| = \left(d \cdot \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \left(d \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= d^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right). \\ \epsilon(AB\Gamma) &= \frac{1}{2}|AB| \cdot |\Gamma E| = \frac{1}{2}d \cdot (d \cdot \sin(\alpha)) = \frac{1}{2}d^2 \cdot \eta\mu(\alpha). \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει εξισώνοντας τις δύο παραστάσεις για το ίδιο εμβαδόν. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη και τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

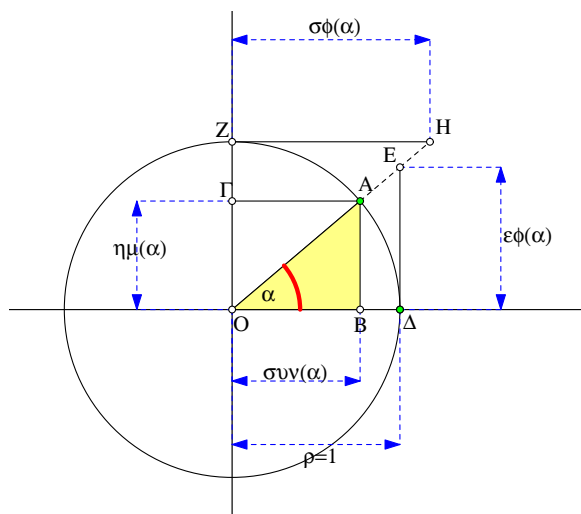
$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(\alpha) &= \sqrt{1 - \eta\mu(\alpha)^2} = \sqrt{1 - \left(2 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(4 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{1 - \left(4 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 - 4 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 4 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4} = \sqrt{\left(1 - 2 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)^2} \\ &= 1 - 2 \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(1 - \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) - \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες ισότητες προκύπτουν άμεσα από τις προηγούμενες, διαιρώντας της κατά μέλη.

Άσκηση 3.6.6 Δείξε ότι για μία οξεία γωνία α ισχύουν οι τύποι:

$$\begin{aligned}\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\sigma\upsilon\nu(\alpha)}{2}, & \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\sigma\upsilon\nu(\alpha)}{2}, \\ \epsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\eta\mu(\alpha)}{1+\sigma\upsilon\nu(\alpha)}, & \sigma\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\sigma\upsilon\nu(\alpha)}{\eta\mu(\alpha)}.\end{aligned}$$

Σχόλιο-1 Από τον ίδιο τον ορισμό τους προκύπτει μία ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και του μοναδιαίου κύκλου (κύκλου με ακτίνα την μονάδα μέτρησης). Αν από το κέντρο του μοναδιαίου κύκλου φέρουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες $ΟΔ$ και $ΟΖ$, τότε κάθε σημείο A του τόξου $ΔΖ$ ορίζει μία επίκεντρη γωνία $\alpha = \angle ΟΑ$ καθώς και το ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΒ$, όπου B η προβολή του A στην $ΟΔ$. Οι αριθμοί $\sigma\upsilon\nu(\alpha)$, $\eta\mu(\alpha)$, $\epsilon\varphi(\alpha)$, $\sigma\varphi(\alpha)$ εκφράζονται τότε ως μήκη των πλευρών του τριγώνου $ΟΑΒ$ και των ομοίων αυτού $ΟΔΕ$ και $ΟΖΗ$, που προκύπτουν τέμνοντας την $ΟΑ$ με τις εφαπτόμενες στα $Δ$ και $Ζ$ αντίστοιχα.



Σχήμα 291: Τριγωνομετρικός κύκλος

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha) = |OB|, \quad \eta\mu(\alpha) = |AB|, \quad \epsilon\varphi(\alpha) = |DE|, \quad \sigma\varphi(\alpha) = |ZH|.$$

Κατά τον ορισμό τους μέσω λόγων λ.χ. το ημίτονο $\eta\mu(\alpha) = \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|$, διότι $|OA| = 1$. Ανάλογα και οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί προκύπτουν από τους λόγους με τους οποίους ορίζονται και το γεγονός ότι στην συγκεκριμένη μορφή τους ο παρανομαστής είναι 1. Δεν θα επεκταθώ περισσότερο σε αυτό το ζήτημα. Το θίγω απλώς εδώ ως προανάκρουσμα και πρώτη επαφή με τον λεγόμενο **Τριγωνομετρικό κύκλο**, που είναι ακριβώς ο μοναδιαίος κύκλος που είδαμε και η περιγραφή των σημείων του μέσω ζευγών αριθμών

$$(x = \sigma\upsilon\nu(\alpha), \quad y = \eta\mu(\alpha)).$$

Σχόλιο-2 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu(x)$, $\sigma\upsilon\nu(x)$, ... μαζί με τις στοιχειώδεις συναρτήσεις $x, x^2, x^3, \dots$ των δυνάμεων του x συναντώνται σε όλες σχεδόν τις εφαρμογές των μαθηματικών. Έχουν λοιπόν ιδιαίτερη σημασία και, όπως είδαμε από τον ορισμό τους, η

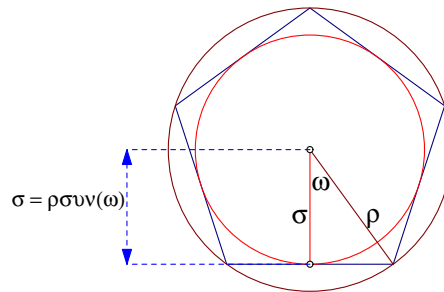
ύπαρξή τους είναι άμεση συνέπεια του Πυθαγορείου θεωρήματος. Όπως οι βασικές μετρικές σχέσεις που μόλις είδαμε στο ορθογώνιο τρίγωνο, έτσι και γενικότερα όλες οι σχέσεις μεταξύ μηκών και γωνιών σχημάτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας (όλη η τριγωνομετρία) ανάγονται στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Η δύναμή του σφραγίζει αυτήν την γεωμετρία και όπως αποδεικνύεται είναι ισοδύναμο με το αξίωμα των παραλλήλων. Τούτο σημαίνει ότι κρατώντας όλα τα άλλα αξιώματα και δεχόμενοι ότι κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ικανοποιεί την σχέση των πλευρών $a^2 = b^2 + c^2$ μπορούμε να αποδείξουμε το αξίωμα των παραλλήλων ως θεώρημα. Μιά καλογραμμένη και λεπτομερής μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων από την σκοπιά του απειροστικού λογισμού περιέχεται στο βιβλίο του Spivak [Σπί04, σελ. 255].

Άσκηση 3.6.7 Δείξε την ισχύ του επόμενου πίνακα, που δίνει τις τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων για τις αναφερόμενες στην πρώτη στήλη του γωνίες.

γωνία	ημ	συν	εφ	σφ
0	0	1	0	$\pm\infty$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	$\pm\infty$	0

Άσκηση 3.6.8 Δείξε ότι για κάθε κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές ο λόγος της ακτίνας σ του εγγεγραμμένου κύκλου του προς την ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου ισούται με

$$\frac{\sigma}{\rho} = \text{συν} \left(\frac{180}{\nu} \right).$$

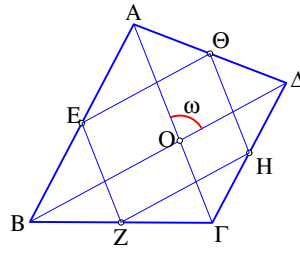


Σχήμα 292: Ακτίνα περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου

Άσκηση 3.6.9 Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z, H, Θ τα μέσα των πλευρών του. Δείξε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $EZH\Theta$ είναι το μισό του τετραπλεύρου και ισούται με

$$\epsilon(EZH\Theta) = \frac{1}{4}|A\Gamma||B\Delta|\eta\mu(\omega),$$

όπου ω είναι η γωνία των διαγωνίων του τετραπλεύρου.



Σχήμα 293: Εμβαδόν τετραπλεύρου

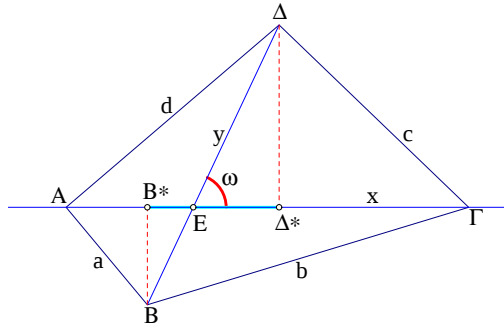
Άσκηση 3.6.10 Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ . Δείξε ότι το εμβαδόν του ισούται με

$$\epsilon(AB\Gamma\Delta) = 2\rho^2 \eta\mu(\widehat{A}) \eta\mu(\widehat{B}) \eta\mu(\omega),$$

όπου ω είναι η γωνία των διαγωνίων του τετραπλεύρου.

Άσκηση 3.6.11 Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με μήκη διαδοχικών πλευρών $a = |AB|$, $b = |B\Gamma|$, $c = |\Gamma\Delta|$, $d = |\Delta A|$ και μήκη διαγωνίων $x = |A\Gamma|$, $y = |B\Delta|$. Δείξε ότι

$$\epsilon(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2y^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}.$$



Σχήμα 294: Εμβαδόν τετραπλεύρου II

Υπόδειξη: Αν ω είναι το μέτρο της γωνίας των διαγωνίων του τετραπλεύρου, τότε, κατά την Άσκηση 3.6.9, το εμβαδόν $\epsilon = \epsilon(AB\Gamma\Delta)$ ισούται με

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{4} x^2 y^2 \eta\mu(\omega)^2 = \frac{1}{4} x^2 y^2 (1 - \sigma\upsilon\nu(\omega)^2) \\ &= \frac{1}{4} (x^2 y^2 - (xy \sigma\upsilon\nu(\omega))^2). \end{aligned}$$

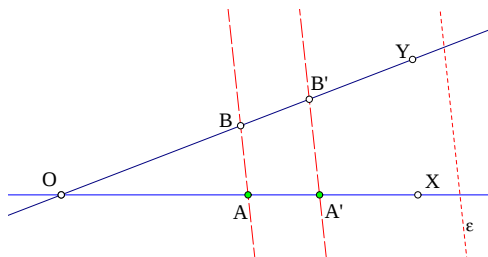
Όμως, κατά την Άσκηση 3.4.10 το τελευταίο γινόμενο ισούται με

$$xy \sigma\upsilon\nu(\omega) = |A\Gamma| |B^* \Delta^*| = \frac{1}{2} |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|,$$

όπου B^* και Δ^* οι προβολές των B και Δ αντίστοιχα επί της AG . Ο τύπος προκύπτει αντικαθιστώντας τον τελευταίο στον προηγούμενό του.

3.7 Το θεώρημα του Θαλή

Το θεώρημα του Θαλή (624-547 π.Χ.) εξετάζει την σχέση των μηκών ευθυγράμμων τμημάτων OA και OB που ορίζονται στις πλευρές μίας γωνίας XOY από μία ευθεία που μετακινείται παραμένοντας παράλληλη προς μία σταθερή ευθεία ε . Το θεώρημα λέει ότι υπάρχει μία στα-



Σχήμα 295: $|OB| = \kappa \cdot |OA|$

θερά κ έτσι ώστε $|OB| = \kappa \cdot |OA|$ για κάθε θέση του A επί της OX .

Θεώρημα 3.7.1 Δίδεται γωνία XOY και ευθεία ε τέμνουσα και τις δύο πλευρές της γωνίας. Από τα σημεία A της OX φέρουμε παράλληλο προς την ε τέμνουσα την OY στο B . Τότε ο λόγος

$$\kappa = \frac{|OB|}{|OA|}$$

είναι σταθερός και ανεξάρτητος της θέσης του A επί της OX . Αντίστροφα, αν για δύο σημεία A, A' της OX και δύο σημεία B, B' της OY οι λόγοι

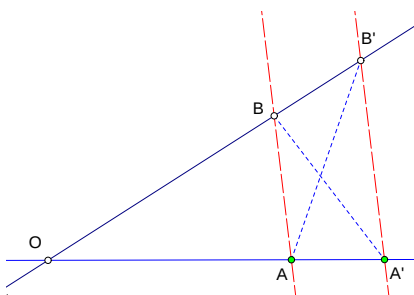
$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$$

είναι ίσοι, τότε οι AB και $A'B'$ είναι παράλληλες.

Απόδειξη: Για τον πρώτο ισχυρισμό αρκεί, για μία δεύτερη ευθεία $A'B'$ παράλληλη της AB , να δείξουμε την ισότητα των λόγων

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} \Leftrightarrow \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}.$$

Στην τελευταία ισότητα, οι δύο λόγοι είναι αντίστοιχα ίσοι με τους λόγους των εμβαδών

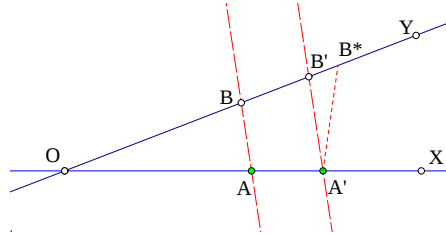


Σχήμα 296: Θαλής, η απόδειξη

(Πόρισμα 3.3.4):

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{\epsilon(OBA')}{\epsilon(OBA)}, \quad \frac{|OB'|}{|OB|} = \frac{\epsilon(OAB')}{\epsilon(OAB)}$$

Οι λόγοι των εμβαδών τέλος είναι ίσοι, καθώς οι παρανομαστές είναι ίσοι και οι αριθμητές επίσης ίσοι, αφού τα δύο τρίγωνα OAB' και OBA' έχουν κοινό μέρος το OAB (σχήμα 296) και διαφέρουν κατά τα τρίγωνα ABA' και ABB' που έχουν ίσα εμβαδά (Πόρισμα 3.3.4).



Σχήμα 297: Παραλληλία από την $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$

Γιά το αντίστροφο χρησιμοποιούμε το αποδειχθέν πρώτο μέρος. Έστω λοιπόν ότι ισχύει $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$ και έστω $A'B^*$ η παράλληλος από το A' προς την AB . Αρκεί να δείξουμε ότι $B' = B^*$. Πράγματι όμως, κατά το πρώτο μέρος, θα ισχύει τότε και η $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB^*|}{|OA'|}$, η οποία σε συνδυασμό με την προηγούμενη ισότητα δίδει $\frac{|OB'|}{|OA'|} = \frac{|OB^*|}{|OA'|}$, από την οποία προκύπτει $|OB'| = |OB^*|$ και συνεπώς η ζητούμενη $B' = B^*$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.7.1 Με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AA' επί της OX το αντίστοιχο τμήμα BB' επί της OY ο λόγος $\frac{|BB'|}{|AA'|}$ θα είναι σταθερός ($= \kappa$) και ανεξάρτητος της θέσης των A, A' επί της OX .

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το A είναι μεταξύ των O και A' , οπότε (Αξίωμα 1.3.2)

$$|OA'| = |OA| + |AA'|,$$

και λόγω της παραλληλίας των AB και $A'B'$ και το B θα είναι μεταξύ των O και B' συνεπώς θα ισχύει και

$$|OB'| = |OB| + |BB'|.$$

Κατά Θαλή υπάρχει κ έτσι ώστε $|OB| = \kappa \cdot |OA|$ για κάθε A επί της OX και το αντίστοιχο του B επί της OY . Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν με κ την πρώτη σχέση έχουμε

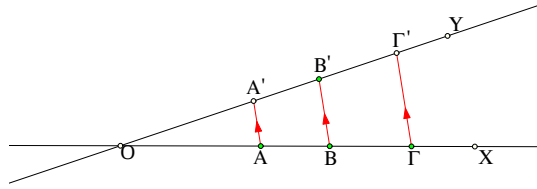
$$\kappa \cdot |OA'| = \kappa \cdot |OA| + \kappa \cdot |AA'|$$

που σημαίνει ότι $|OB'| = |OB| + \kappa|AA'|$ και συγκρίνοντας με την $|OB'| = |OB| + |BB'|$ προκύπτει $|BB'| = \kappa \cdot |AA'|$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.7.2 Έστω ότι A, B, Γ είναι σημεία της ευθείας OX και A', B', Γ' σημεία της ευθείας OY , έτσι ώστε οι AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$ να είναι παράλληλες ευθείες. Τότε

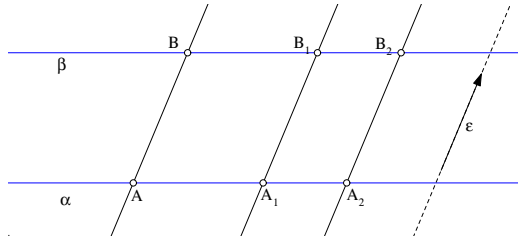
$$\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A'B'|}{|B'\Gamma'|}.$$

Και αντίστροφα, αν ισχύει αυτή η σχέση, τότε οι AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$ είναι παράλληλες.



Σχήμα 298: Μεταφορά λόγων μέσω παραλλήλων

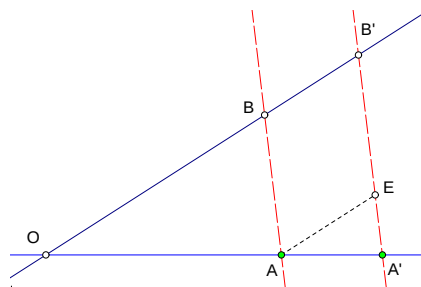
Απόδειξη: Η σχέση είναι ισοδύναμη με την $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|B\Gamma|}{|B'\Gamma'|}$ που ισχύει βάσει του προηγούμενου πορίσματος. Το αντίστροφο αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το αποδειχθέν μέρος του πορίσματος, όπως ακριβώς στο αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή, ο.ε.δ.



Σχήμα 299: Θαλής, γενίκευση από παραλληλόγραμμα

Σχόλιο-1 Η μορφή του θεωρήματος του Θαλή που εκφράζεται με τα δύο πορίσματα γενικεύει την ιδιότητα που προκύπτει όταν δύο παράλληλες ευθείες α και β τέμνονται από άλλες ευθείες παράλληλες προς σταθερά ευθεία ϵ . Από την ισότητα των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου προκύπτει τότε ότι $\frac{|BB_1|}{|AA_1|} = 1$. Δηλαδή στην περίπτωση που οι α, β είναι παράλληλες το συμπέρασμα του πορίσματος πάλι ισχύει με σταθερά $\kappa = 1$. Στην περίπτωση που οι α, β τέμνονται, απλά αλλάζει η τιμή της σταθεράς και έχουμε $\kappa \neq 1$.

Πόρισμα 3.7.3 Δίδεται γωνία XOY και σημεία A, A' επί της OX καθώς και B, B' επί της OY, έτσι ώστε οι AB και A'B' να είναι παράλληλοι. Τότε ισχύει $\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}$.



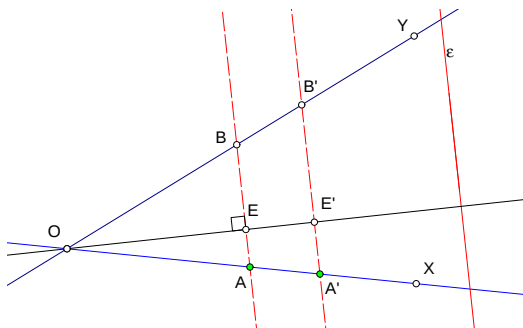
Σχήμα 300: Θαλής, η τρίτη πλευρά

Απόδειξη: Φέρε την AE παράλληλη της OB και τέμνουσα την A'B' στο E. Κατά το Πόρισμα 3.7.1, εφαρμόζόμενο στην γωνία OA'B' και τις δύο παράλληλες AE, BB':

$$\frac{|A'O|}{|A'B'|} = \frac{|AO|}{|EB'|}.$$

Όμως $|AB| = |EB'|$, άρα $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$, ο.ε.δ.

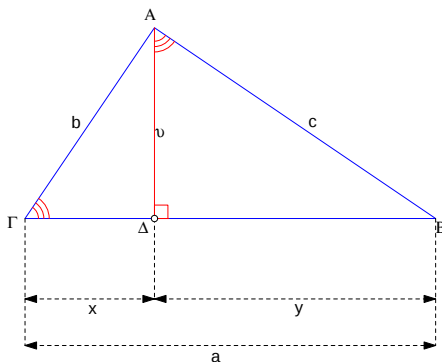
Άσκηση 3.7.1 Δώσε την απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή χρησιμοποιώντας την ομοιότητα δύο ορθογωνίων τριγώνων.



Σχήμα 301: Αναγωγή σε όμοια ορθογώνια

Υπόδειξη: Η άσκηση αναφέρεται στην Πρόταση 3.5.3. Φέρε την κάθετο από το O στην ε και όρισε τα ύψη OE και OE' των τριγώνων OAB και OA'B'. Τα ορθογώνια που σχηματίζονται είναι όμοια: το OAE με το OA'E' και το OBE με το OB'E'. Κατά την αναφερθήσα πρόταση θα έχουν πλευρές ανάλογες: $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OE|}{|OE'|}$ καθώς επίσης $\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|OE|}{|OE'|}$, άρα συνολικά $\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|OA|}{|OA'|}$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Η απόδειξη που δώσαμε για το θεώρημα του Θαλή δεν χρησιμοποιεί το θεώρημα του Πυθαγόρα. Η απόδειξη της άσκησης όμως το χρησιμοποιεί, άρα, μπορεί κανείς να πεί ότι το θεώρημα του Θαλή είναι συνέπεια του θεωρήματος του Πυθαγόρα. Ισχύει και το αντίστροφο. Μπορεί κανείς να δείξει ότι το θεώρημα του Πυθαγόρα προκύπτει από το θεώρημα του Θαλή. Πρώτα πρέπει να παρατηρήσει ότι φέρνοντας το ύψος AΔ ($v = |AΔ|$, $x = |ΓΔ|$, $y = |ΔΒ|$) από την ορθή γωνία του ορθογωνίου τριγώνου προκύπτουν τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΔΒ που έχουν τις ίδιες γωνίες με το αρχικό τρίγωνο. Τοποθετώντας αυτά τα τρίγωνα έτσι ώστε να συμπέσουν οι ίσες γωνίες τους και οι απέναντι πλευρές να είναι παράλληλες προκύπτουν κατά Θαλή οι σχέσεις:



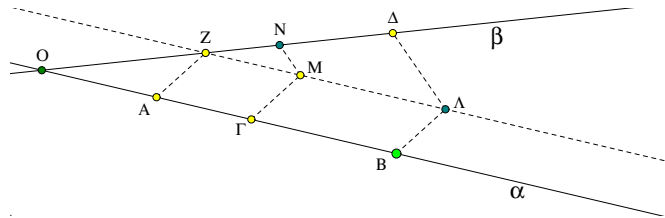
Σχήμα 302: Πυθαγόρας απο Θαλή

$$\frac{c}{y} = \frac{b}{v} = \frac{a}{c}, \quad \text{και} \quad \frac{v}{x} = \frac{y}{v} \Rightarrow v^2 = xy.$$

Από αυτές προκύπτουν τετραγωνίζοντας οι:

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{a^2}{c^2} y^2, & b^2 &= \frac{a^2}{c^2} v^2, \\ c^2 + b^2 &= \frac{a^2}{c^2} (y^2 + v^2) = \frac{a^2}{c^2} (y^2 + xy) = \frac{a^2}{c^2} y(y+x) = \frac{a^2}{c^2} y \cdot a = \frac{a^3}{c^2} y = a^2. \end{aligned}$$

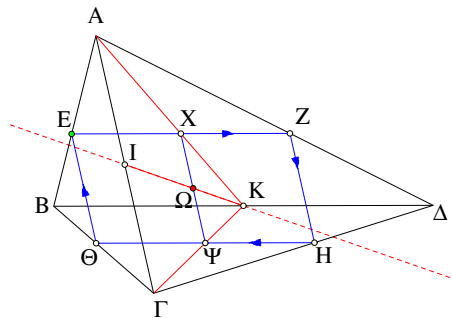
Άσκηση 3.7.2 Συμπλήρωσε όλες τις λεπτομέρειες που παραλήφθηκαν στο προηγούμενο σχήλιο.



Σχήμα 303: Μεταφορά λόγου σε άλλη ευθεία

Άσκηση 3.7.3 Δίδονται δύο ευθείες α και β τεμνόμενες στο σημείο O . Δίδονται επίσης τρία σημεία A, B, Γ επί της α και δύο σημεία Z, Δ επί της β . Να βρεθεί σημείο N επί της β έτσι ώστε $\frac{|GA|}{|GB|} = \frac{|NZ|}{|N\Delta|}$.

Υπόδειξη: Φέρε από το Z παράλληλο της α και από τα Γ και B παράλληλες προς την AZ , τέμνουσες την παράλληλο στα M και Λ αντίστοιχα. Φέρε την $\Lambda\Delta$ και από το M την παράλληλο προς την $\Lambda\Delta$, τέμνουσα την β στο N . Αυτό είναι το ζητούμενο σημείο. Λόγω των παραλλήλων ΓM και $B\Lambda$: $\frac{|GA|}{|GB|} = \frac{|MZ|}{|MA|}$. Επίσης λόγω των παραλλήλων MN και $\Lambda\Delta$: $\frac{|MZ|}{|MA|} = \frac{|NZ|}{|N\Delta|}$.

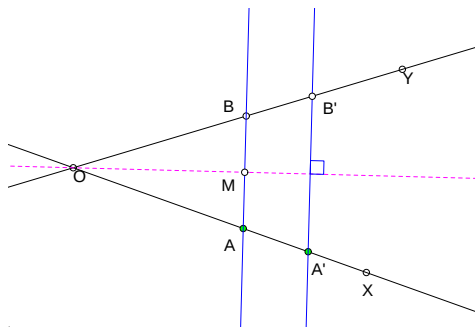


Σχήμα 304: Παραλληλόγραμμα εγγεγραμμένα σε τετράπλευρο

Άσκηση 3.7.4 Από τυχόν σημείο E της πλευράς AB κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, που δεν είναι παραλληλόγραμμο, φέρνουμε παράλληλο EZ της διαγωνίου $B\Delta$. Από το Z φέρνουμε

παράλληλο ZH της διαγωνίου AG και από το H παράλληλο $H\Theta$ της $B\Delta$. Δείξε ότι το $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. Δείξε επίσης ότι το σημείο τομής Ω των διαγωνίων του $EZH\Theta$ ευρίσκεται επί της ευθείας του Newton του τετραπλεύρου.

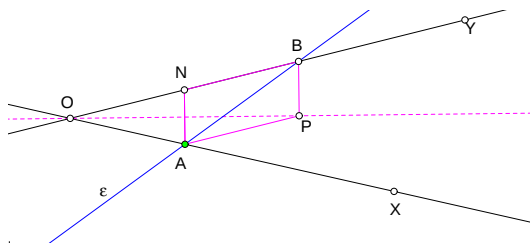
Υπόδειξη: Έστω $\kappa = \frac{|EA|}{|EB|}$ τότε θα είναι επίσης $\frac{|AZ|}{|Z\Delta|} = \kappa$ (Πόρισμα 3.7.2). Ανάλογα και $\frac{|GH|}{|H\Delta|} = \kappa$ και $\frac{|G\Theta|}{|\Theta B|} = \kappa$ και τελικά $\frac{|EA|}{|EB|} = \frac{|G\Theta|}{|\Theta B|}$, που συνεπάγεται ότι οι AG και ΘE είναι παράλληλες. Το δεύτερο μέρος της άσκησης προκύπτει από το γεγονός ότι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου $EZH\Theta$ συμπίπτει με το μέσον του τμήματος $X\Psi$, όπου X, Ψ τα μέσα των EZ καθ ΘH . Οι AX και $\Gamma\Psi$ τέμνονται στο μέσον της $B\Delta$ και η $K\Omega$ διέρχεται από το μέσον I της AG . Συμπλήρωσε την απόδειξη αυτών των ισχυρισμών και με αυτούς την απόδειξη της άσκησης.



Σχήμα 305: Θαλής, $\kappa = 1$

Άσκηση 3.7.5 Δίδεται γωνία XOY . Να βρεθεί ευθεία ε έτσι ώστε οι παράλληλες προς την ε ευθείες να αποτέμνουν επί των πλευρών της γωνίας αντίστοιχα τμήματα AA' και BB' , έτσι ώστε $\frac{|BB'|}{|AA'|} = 1$.

Άσκηση 3.7.6 Δίδεται γωνία XOY . Να βρεθεί ευθεία ε έτσι ώστε οι παράλληλες προς την ε ευθείες να αποτέμνουν επί των πλευρών της γωνίας αντίστοιχα τμήματα AA' και BB' , έτσι ώστε $\frac{|BB'|}{|AA'|} = 2$.

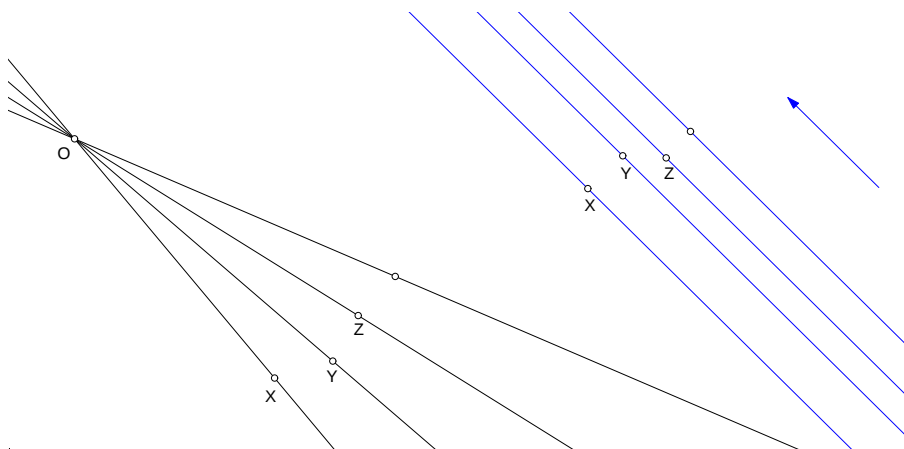


Σχήμα 306: Θαλής, $\kappa = 2$

Υπόδειξη: Έστω σημείο A της OX και B επί της OY έτσι ώστε $|OB| = 2|OA|$. Η ευθεία AB είναι η ζητούμενη. Μιά γεωμετρική κατασκευή μιάς παράλληλης προς την προηγούμενη ευθεία AB είναι η εξής. Από σημείο A της πλευράς OX φέρε παράλληλο προς την άλλη πλευρά που τέμνει την διχοτόμο της XOY στο P . Από το P φέρε κάθετο στην διχοτόμο που τέμνει την OY στο B . Η ευθεία AB είναι η ζητούμενη ($|OB| = 2|OA|$).

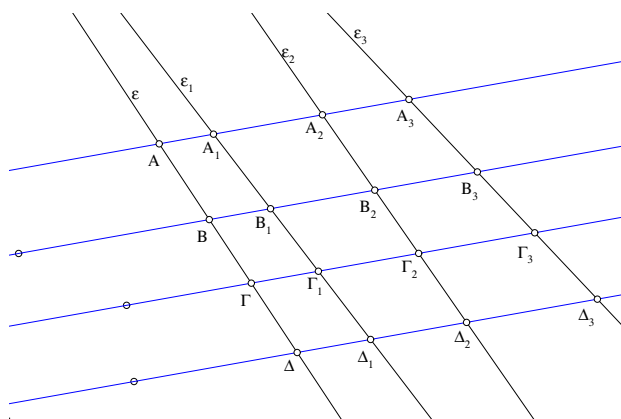
3.8 Δέσμες ευθειών

Το θεώρημα του Θαλή συνδέεται με τις λεγόμενες **Δέσμες** ευθειών. Τούτες αποτελούνται από όλες τις ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο O που ονομάζουμε **Κέντρο** της δέσμης. Συχνά ονομάζουμε αυτή την δέσμη **Σημειακή**. Ονομάζουμε επίσης δέσμη παραλλήλων ευθειών όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες προς μία συγκεκριμένη ευθεία που ονομάζουμε **Κατεύθυνση** της δέσμης. Συχνά επίσης χρησιμοποιούμε τον όρο δέσμη για μερικές από τις ευθείες που διέρχονται από το O ή είναι παράλληλες προς δοθείσα ευθεία (και όχι όλες με αυτήν την ιδιότητα).



Σχήμα 307: Δέσμη σημειακή και δέσμη παραλλήλων

Η πρώτη εκδοχή του θεωρήματος μιλά για τα τμήματα που ορίζονται πάνω σε οποιεσδήποτε ευθείες που τέμνουν μία δέσμη παραλλήλων ευθειών.



Σχήμα 308: Τμήματα που ορίζονται σε τέμνουσες δέσμης παραλλήλων

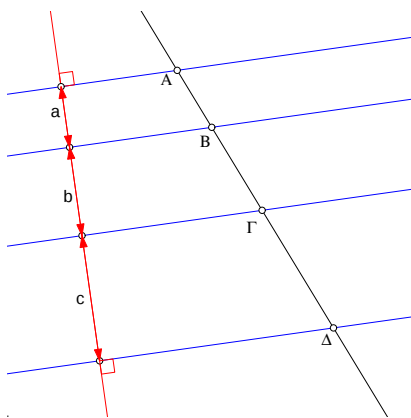
Πρόταση 3.8.1 Μία δέσμη παραλλήλων ευθειών τέμνουσα ευθείες $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, ορίζει ευθύγραμμα τμήματα επ' αυτών: $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \dots, A_1B_1, B_1\Gamma_1, \Gamma_1\Delta_1, \dots$, έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε εκ των ευθυγράμμων τμημάτων $|AB|, |B\Gamma|, |\Gamma\Delta|, \dots$ να έχουν τον ίδιο λόγο με τα δύο αντίστοιχα εκ των $|A_1B_1|, |B_1\Gamma_1|, |\Gamma_1\Delta_1|, \dots$.

Απόδειξη: Η απόδειξη της ισότητας των αντιστοίχων λόγων προκύπτει αμέσως από το Πρόσλημα 3.7.2, σύμφωνα με το οποίο

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1\Gamma_1|}{|B\Gamma|} = \frac{|\Gamma_1\Delta_1|}{|\Gamma\Delta|}, \dots,$$

που είναι μία σειρά ισοτήτων ισοδυνάμων με τις αναφερόμενες, ο.ε.δ.

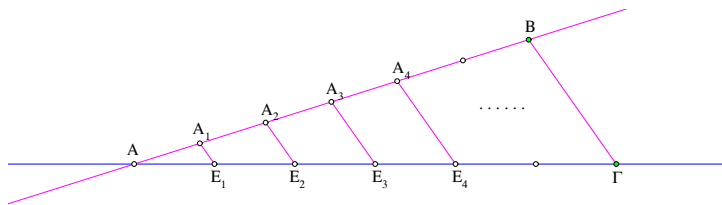
Σχόλιο-1 Η τελευταία πρόταση επισημαίνει ότι οι λόγοι μεταξύ των τμημάτων $|AB|$, $|B\Gamma|$, $|\Gamma\Delta|$, ... είναι ένα χαρακτηριστικό της δέσμης των παραλλήλων και όχι της ειδικής ευθείας που αυτές τέμνουν. Οι λόγοι αυτοί λ.χ. ισούνται με τους λόγους των τμημάτων που ορίζονται επί μιάς καθέτου προς τις παράλληλες ευθείες. Το μήκος των τμημάτων αυτών ορίζει τις αποστάσεις $a, b, c, \dots$ των παραλλήλων ανά δύο. Οι λόγοι λοιπόν των τμημάτων που αποτέμνονται επί άλλων ευθειών ισούνται με τους αντίστοιχους λόγους των αποστάσεων των παραλλήλων.



Σχήμα 309: Λόγοι αποστάσεων των παραλλήλων

$$\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{a}{b}, \quad \frac{|B\Gamma|}{|\Gamma\Delta|} = \frac{b}{c}, \dots$$

Κατασκευή 3.8.1 Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα AB σε n ίσα μέρη.

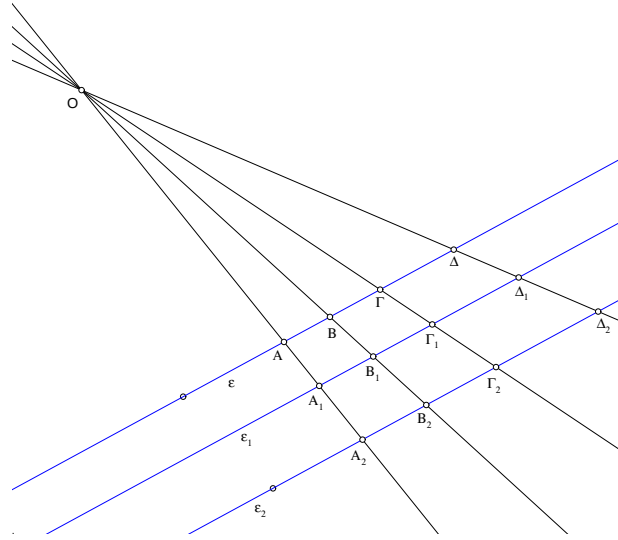


Σχήμα 310: Διαίρεση σε n ίσα μέρη

Κατασκευή: Στο άκρο A του ευθυγράμμου τμήματος κατασκεύασε αυθαίρετο ευθύγραμμο τμήμα AE_1 και κατόπιν όρισε επί της ευθείας AE_1 τα ισαπέχοντα σημεία $E_2, E_3, \dots, E_{n-1}, E_n = \Gamma$ τα οποία διαιρούν το AG σε n ίσα μέρη. Φέρε την GB και κατόπιν παράλληλες προς αυτήν $E_1A_1, E_2A_2, \dots$ που ορίζουν επί της $B\Gamma$ τα σημεία $A_1, A_2, \dots, A_n = B$. Κατά την τελευταία πρόταση οι λόγοι $\frac{|AA_1|}{|A_1A_2|}, \frac{|A_1A_2|}{|A_2A_3|}, \dots$ θα είναι αντίστοιχα ίσοι με τους $\frac{|AE_1|}{|E_1E_2|}, \frac{|E_1E_2|}{|E_2E_3|}, \dots$ που εκ κατασκευής είναι όλοι ίσοι με ένα, ο.ε.κ.

Η δεύτερη εκδοχή του θεωρήματος του Θαλή αφορά τα τμήματα που ορίζονται επί των ευθειών παράλληλης δέσμης καθώς αυτή τέμνεται από τις ευθείες μίας σημειακής δέσμης.

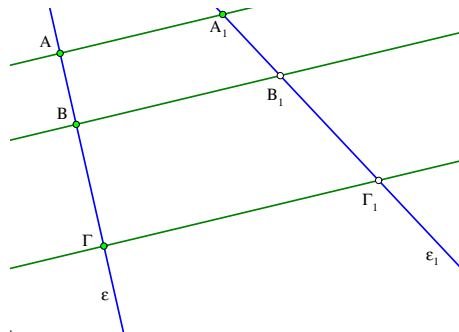
Πρόταση 3.8.2 Μία σημειακή δέσμη ευθειών τέμνουσα παράλληλες μεταξύ τους ευθείες $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, ορίζει ευθύγραμμα τμήματα επ' αυτών: $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \dots, A_1B_1, B_1\Gamma_1, \Gamma_1\Delta_1, \dots$, έτσι ώστε οι λόγοι δύο οποιονδήποτε εκ των $|AB|, |B\Gamma|, |\Gamma\Delta|, \dots$ είναι ίσοι με τους λόγους των αντίστοιχων τμημάτων εκ των $|A_1B_1|, |B_1\Gamma_1|, |\Gamma_1\Delta_1|, \dots$.



Σχήμα 311: Σημειακή δέσμη προσπίπτουσα επί παραλλήλων

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 3.7.3. Κατ' αυτό οι λόγοι $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|OA|}{|OA_1|}$ και παρόμοια και οι άλλοι λόγοι λ.χ. $\frac{|B\Gamma|}{|B_1\Gamma_1|} = \frac{|OB|}{|OB_1|}$. Αλλά, κατά Θαλή ίσοι είναι και οι λόγοι $\frac{|OA|}{|OA_1|} = \frac{|OB|}{|OB_1|}$, άρα προκύπτει ότι $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|B\Gamma|}{|B_1\Gamma_1|}$ που ισοδυναμεί με την $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1\Gamma_1|}$, που είναι μία από τις ζητούμενες ισότητες λόγων. Οι άλλες αποδεικνύονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ο.ε.δ.

Οι δύο τελευταίες προτάσεις έχουν και είδη αντιστρόφων προτάσεων που χρησιμοποιούνται συχνά όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι τρεις ευθείες είναι παράλληλες ή διέρχονται από κοινό σημείο.

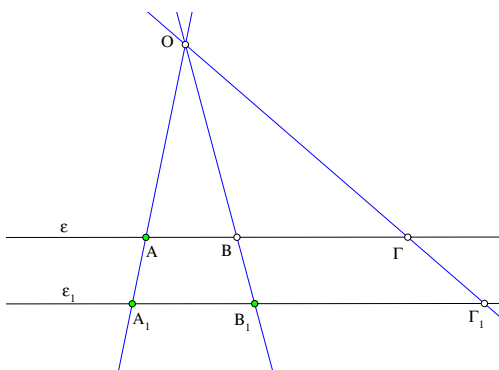


Σχήμα 312: Κριτήριο παραλληλίας τριών ευθειών

Πρόταση 3.8.3 (Κριτήριο παραλληλίας τριών ευθειών) Αν τρεις ευθείες τεμνόμενες από δύο άλλες ε και ε_1 στα σημεία A, B, Γ και A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα, σχηματίζουν λόγους $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1\Gamma_1|}$ και οι δύο πρώτες ευθείες AA_1 και BB_1 είναι παράλληλες, τότε και η τρίτη ευθεία $\Gamma\Gamma_1$ είναι παράλληλη προς τις δύο πρώτες.

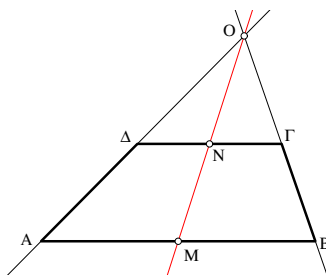
Απόδειξη: Από το Γ φέρε παράλληλη προς τις AA_1 και BB_1 που τέμνει την ε_1 στο σημείο Γ^* . Κατά Θαλή $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1\Gamma^*|}$. Όμως και εξ υποθέσεως $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1\Gamma_1|}$, άρα $|B_1\Gamma^*| = |B_1\Gamma_1|$, που σημαίνει ότι τα Γ^* και Γ_1 ταυτίζονται, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.8.4 (Κριτήριο διέλευσης από κοινό σημείο) Αν δύο παράλληλες ευθείες ε και ε_1 τεμνόμενες από τρεις άλλες στα σημεία A, B, Γ και A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα, σχηματίζουν λόγους $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1\Gamma_1|}$ τότε οι τρεις ευθείες ή είναι παράλληλες ή συντρέχουν στο ίδιο σημείο O .



Σχήμα 313: Κριτήριο διέλευσης από κοινό σημείο

Απόδειξη: Αν δύο από τις ευθείες είναι παράλληλες λ.χ. οι AA_1 και BB_1 , τότε εφαρμόζοντας το προηγούμενο κριτήριο βλέπουμε ότι και η τρίτη ευθεία $\Gamma\Gamma_1$ θα είναι παράλληλος προς τις δύο άλλες. Έστω λοιπόν ότι οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και έστω O το σημείο τομής των δύο πρώτων. Θα δείξουμε ότι και η τρίτη διέρχεται από το ίδιο σημείο. Η απόδειξη είναι η ίδια με την προηγούμενη. Φέρνουμε την $O\Gamma$ και θεωρούμε το σημείο τομής Γ^* αυτής της ευθείας με την ε_1 . Κατά την Πρόταση 3.8.2 οι λόγοι $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1\Gamma^*|}$. Όμως και εξ υποθέσεως $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1\Gamma_1|}$, άρα $|B_1\Gamma^*| = |B_1\Gamma_1|$, που σημαίνει ότι τα Γ^* και Γ_1 ταυτίζονται, ο.ε.δ.

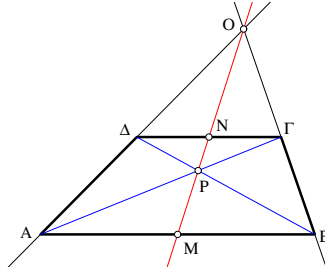


Σχήμα 314: Ιδιότητα τραπέζιου

Άσκηση 3.8.1 Δείξε ότι η ευθεία MN που ενώνει τα μέσα των παραλλήλων πλευρών τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ διέρχεται από το σημείο τομής O των μη-παρallήλων πλευρών του.

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το τελευταίο κριτήριο για τους λόγους $\frac{|\Delta N|}{|NT|} = \frac{|AM|}{|MB|} = 1$.

Άσκηση 3.8.2 Δείξε ότι η ευθεία MN που ενώνει τα μέσα των παραλλήλων πλευρών τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ διέρχεται από το σημείο τομής P των διαγωνίων του.



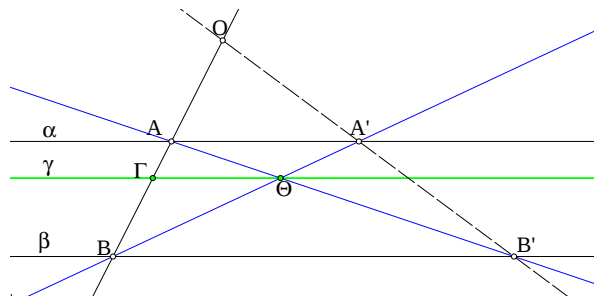
Σχήμα 315: Ιδιότητα διαγωνίων του τραπέζιου

Υπόδειξη: Σχεδόν η ίδια με την προηγούμενη: Εφάρμοσε το τελευταίο κριτήριο για τους λόγους $\frac{|\Delta N|}{|NT|} = \frac{|BM|}{|MA|} = 1$. Ποιά είναι η λεπτή διαφορά από την προηγούμενη;

Άσκηση 3.8.3 Δείξε στο προηγούμενο σχήμα (315) ότι οι λόγοι $\frac{|PN|}{|PM|}$ και $\frac{|ON|}{|OM|}$ είναι ίσοι, άρα τα (M, N, O, P) αποτελούν αρμονική τετράδα.

Υπόδειξη: Κατά το Πόρισμα 3.7: $\frac{|PN|}{|PM|} = \frac{|N\Delta|}{|MB|}$, καθώς και $\frac{|ON|}{|OM|} = \frac{|N\Delta|}{|MA|}$. Όμως από τις προηγούμενες ασκήσεις έπεται ότι $|MA| = |MB|$.

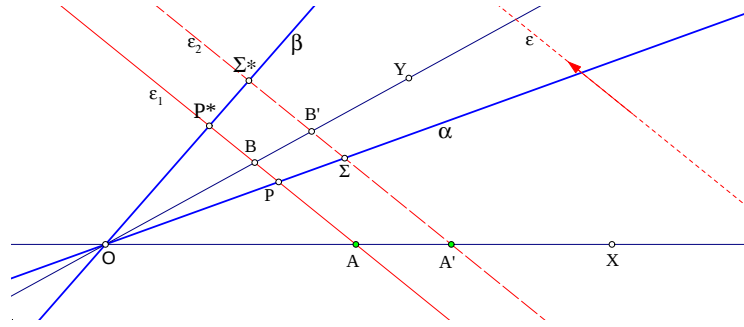
Άσκηση 3.8.4 Δίδονται δύο σημεία A και B αντίστοιχα επί των παραλλήλων ευθειών α και β . Έστω ότι A', B' είναι μεταβλητά σημεία αντίστοιχα επί των α και β . Δείξε ότι η ευθεία $A'B'$ διέρχεται από σταθερό σημείο O της AB τότε και μόνον, όταν το σημείο τομής Θ των AB' και $A'B$ περιέχεται σε ευθεία γ παράλληλη των α, β και διερχόμενη από το αρμονικό συζυγές του O ως προς τα A, B .



Σχήμα 316: Κριτήριο διέλευσης από σημείο O

Υπόδειξη: Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης.

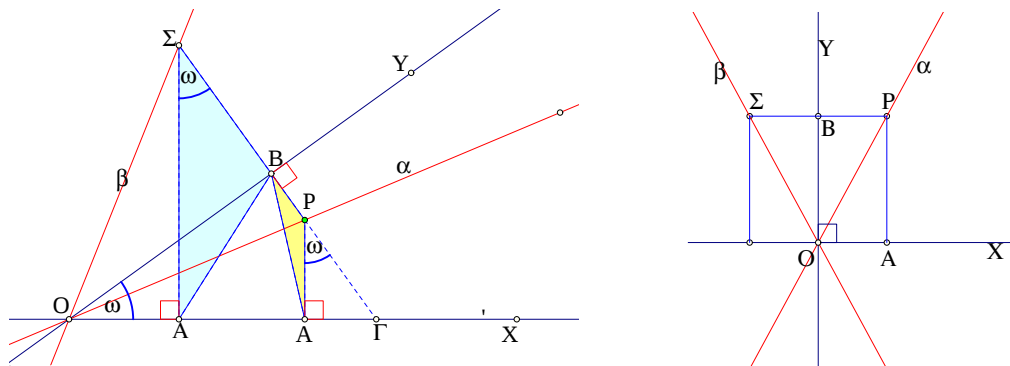
Πρόταση 3.8.5 Δοθείσης γωνίας XOY , ευθείας ε και θετικού αριθμού κ , υπάρχουν δύο ακριβώς ευθείες α και β , έτσι ώστε για κάθε σημείο P αυτών των ευθειών ο λόγος $\frac{|PA|}{|PB|} = \kappa$, όπου A και B τα σημεία τομής της παράλληλης της ε από το P με τις ευθείες OX και OY .



Σχήμα 317: Τόπος σταθερών λόγων $\frac{|PA|}{|PB|} = \kappa$

Απόδειξη: Έστω μία παράλληλος ϵ_1 της ϵ που τέμνει τις OX , OY στα A, B αντιστοίχως. Κατά το Πόρισμα 1.17.3 υπάρχουν δύο ακριβώς σημεία P και P^* επί της ϵ_1 με την ιδιότητα $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|P^*A|}{|P^*B|} = \kappa$. Οι ευθείες $\alpha = OP$ και $\beta = OP^*$ είναι οι ζητούμενες. Πράγματι, κατά την Πρόταση 3.8.2 και κάθε άλλη παράλληλος ϵ_2 της ϵ θα τέμνει τις τέσσερις ευθείες OX , OY , α και β σε σημεία A', B', Σ, Σ^* με την ίδια ιδιότητα $\frac{|\Sigma A'|}{|\Sigma B'|} = \frac{|\Sigma^* A'|}{|\Sigma^* B'|} = \kappa$. Και αντίστροφα, αν σε μία παράλληλο ϵ_2 τα σημεία A', B', Σ, Σ^* ορίζουν λόγους έτσι ώστε να ισχύει η προηγούμενη σχέση, τότε κατά την Πρόταση 3.8.4, οι OP και $O\Sigma$ θα συμπίπτουν και παρόμοια οι OP^* και $O\Sigma^*$ θα συμπίπτουν, (τις α και β θα ονομάσουμε αργότερα (Παράγραφος 5.13) *Αρμονικές συζυγείς* ως προς τις OX, OY) ο.ε.δ.

Πρόταση 3.8.6 Για κάθε γωνία XOY και θετικό αριθμό κ , υπάρχουν δύο ακριβώς ευθείες α, β των οποίων τα σημεία P έχουν λόγο αποστάσεων από τις πλευρές της γωνίας ίσο με κ : $\frac{|PA|}{|PB|} = \kappa$.



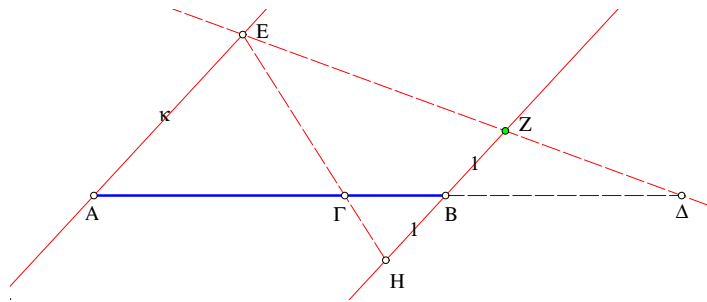
Σχήμα 318: Χαρακτηρισμός ευθείας διά του O

Απόδειξη: Υπόθεσε κατ' αρχήν ότι η γωνία XOY δεν είναι ορθή και θεώρησε σημείο P με αυτήν την ιδιότητα και προέκτεινε την PB έως ότου τμήσει την OX στο Γ . Ισχύει $|P\Gamma| = |PA|/\sin(\omega)$, όπου $\omega = |XOY|$. Συνεπώς, αν $\frac{|PA|}{|PB|} = \kappa$, τότε και ο λόγος $\kappa' = \frac{|P\Gamma|}{|PB|} = \kappa/\sin(\omega)$ θα είναι σταθερός. Επομένως η πρόταση είναι συνέπεια της Πρότασης 3.8.5, αφού οι ευθείες PB είναι κάθετες στην OY και ο λόγος κ' σταθερός. Στην περίπτωση που η γωνία XOY είναι ορθή η απόδειξη είναι ευκολότερη και οδηγεί σε δύο ευθείες α και β που έχουν τις πλευρές της XOY ως διχοτόμους της γωνίας τους, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.8.5 Απόδειξε την προηγούμενη πρόταση στην περίπτωση που η XOY είναι ορθή.

Υπόδειξη: Τα ορθογώνια τρίγωνα OAP είναι όμοια μεταξύ τους με σταθερό λόγο καθέτων $|PA|/|AO| = \kappa$.

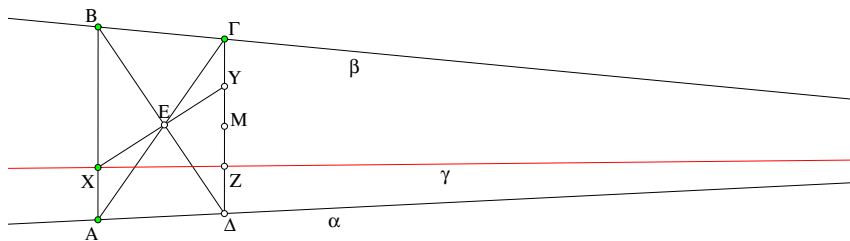
Άσκηση 3.8.6 Να ορισθεί σημείο Γ επί του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε ο λόγος $\frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} = \kappa$, όπου κ δοθείς θετικός αριθμός. Να ορισθεί επίσης σημείο Δ επί της προεκτάσεως του AB έτσι ώστε ο λόγος $\frac{|\Delta A|}{|\Delta B|} = \kappa$.



Σχήμα 319: Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε λόγο κ

Υπόδειξη: Από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος φέρε δύο παράλληλες ευθείες και πάρε στην διερχόμενη διά του A ευθύγραμμο τμήμα AE μήκους κ , ενώ στην άλλη παράλληλο, την διερχόμενη διά του B , πάρε τμήματα μήκους 1: BZ ομόρροπο και BH αντίρροπο του AE . Η τομή της EH με το AB ορίζει το Γ και η τομή της EZ με την προέκταση της AB ορίζει το Δ .

Άσκηση 3.8.7 Δίδονται δύο ευθείες α και β που τέμνονται εκτός του φύλλου σχεδιασμού και σημείο X . Να βρεθεί τρίτη ευθεία γ διά του X , η οποία να διέρχεται από το σημείο τομής των α και β .

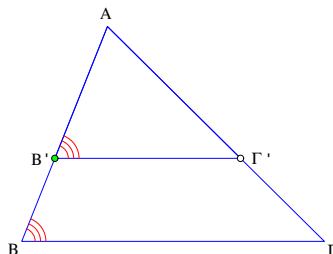


Σχήμα 320: Προς το σημείο τομής των α και β

Υπόδειξη: Φέρε από το X μία αυθαίρετη ευθεία τέμνουσα τις α και β αντίστοιχα στα A και B . Φέρε και μία παράλληλο $\Delta\Gamma$ προς την AB και βρες το σημείο τομής E των διαγωνίων του τραapeζίου $AB\Gamma\Delta$. Έστω Y το σημείο τομής της EX με την $\Gamma\Delta$. Κατά την Πρόταση 3.8.2 $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|EY|}{|Y\Delta|}$. Πάρε το Z συμμετρικό του Y ως προς το μέσον M του $\Gamma\Delta$ ($|YM| = |MZ|$). Τότε θα είναι $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AZ|}{|Z\Gamma|}$ και συνεπώς η XZ θα διέρχεται από το σημείο τομής των α και β (Πρόταση 3.8.4).

3.9 Όμοια τρίγωνα

Την έννοια των **Ομοίων** τριγώνων συναντήσαμε ήδη (γιά ορθογώνια τρίγωνα) στην Παράγραφο 3.5. Πρόκειται γιά τρίγωνα που έχουν αντίστοιχες γωνίες ίσες. Η ύπαρξη ομοίων και μη ίσων τριγώνων είναι χαρακτηριστική της Ευκλείδειας γεωμετρίας και αποδεικνύεται ισοδύναμη με το αξίωμα παραλληλίας. Η επόμενη πρόταση δείχνει μιιά ικανή και αναγκαία συνθήκη γιά να είναι δύο τρίγωνα όμοια.



Σχήμα 323: Τοποθέτηση ομοίων τριγώνων

Πρόταση 3.9.1 Δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε και μόνον, όταν μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε δύο αντίστοιχες γωνίες τους να συμπίπτουν και οι απέναντι σε αυτές πλευρές να είναι παράλληλες ή να ταυτίζονται.

Απόδειξη: Έστω πρώτα ότι τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε οι ίσες γωνίες τους στα A και A' να συμπέσουν και οι πλευρές τους AB και $A'B'$ επίσης να συμπέσουν, τα δε Γ και Γ' να είναι προς την ίδια μεριά της AB . Τότε η ισότητα των γωνιών στα B και B' συνεπάγεται ότι είτε τα B και B' ταυτίζονται, οπότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα (ΓΠΓ-κριτήριο) και συνεπώς οι $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ ταυτίζονται, είτε ότι οι $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ είναι παράλληλοι.

Αντίστροφα αν τα δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε τοποθετούμενα κατά τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω ή θα έχουν ταυτιζόμενες τις $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ ή αυτές θα είναι παράλληλες λόγω των ίσων γωνιών που σχηματίζουν με την AB , ο.ε.δ.

Πρόταση 3.9.2 Δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε και μόνον, όταν οι απέναντι αντιστοίχων ίσων γωνιών πλευρές τους είναι ανάλογες.

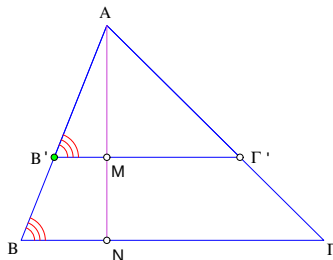
Απόδειξη: Και αυτή η πρόταση είναι γενίκευση της ανάλογης που είδαμε (Πρόταση 3.5.3) γιά ορθογώνια τρίγωνα. Αν τα τρίγωνα είναι όμοια, τότε τα τοποθετούμε όπως στην προηγούμενη πρόταση. Εφαρμόζοντας κατόπιν το Θεώρημα 3.7.1 και την Πρόταση 3.7.3 ευρίσκουμε ότι οι πλευρές είναι ανάλογες, δηλαδή ικανοποιούν την σχέση:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'\Gamma'|}{|B\Gamma|} = \frac{|\Gamma'A'|}{|\Gamma A|}.$$

Έστω τώρα ότι ισχύουν οι προηγούμενες σχέσεις και ο κοινός λόγος των κλασμάτων είναι κ . Επί της πλευράς AB και προς το μέρος του B παίρνουμε σημείο B^* έτσι ώστε $|AB^*| = \kappa \cdot |AB|$. Επί της πλευράς AG και προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Γ^* έτσι ώστε $|A\Gamma^*| = \kappa \cdot |AG|$. Προκύπτει το τρίγωνο $AB^*\Gamma^*$, του οποίου η τρίτη πλευρά $B^*\Gamma^*$ είναι παράλληλη προς την $B\Gamma$ (Θεώρημα 3.7.1) και ικανοποιεί $|B^*\Gamma^*| = \kappa \cdot |B\Gamma|$ λόγω της Πρότασης

3.5.3. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB^*\Gamma^*$ έχουν τις ίδιες γωνίες και το δεύτερο είναι ίσο με το $A'B'T'$ κατά το ΠΠΠ-κριτήριο αφού τα δύο τρίγωνα έχουν ίσες πλευρές, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.9.1 Δώσε απόδειξη της προηγούμενης πρότασης χρησιμοποιώντας την ομοιότητα ορθογωνίων τριγώνων.

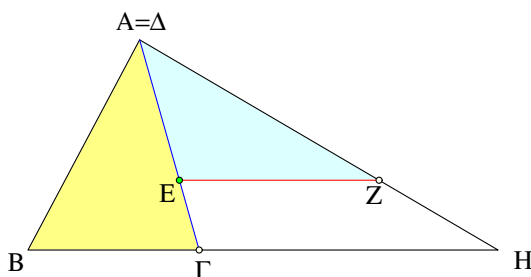


Σχήμα 324: Αναγωγή ομοιότητας στα ορθογώνια

Υπόδειξη: Η άσκηση αναφέρεται στην Πρόταση 3.5.3. Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι όμοια τότε όμοια είναι και τα ζεύγη ορθογωνίων τριγώνων $(ABN, AB'M)$ και $(AN\Gamma, AM\Gamma')$ που δημιουργούνται φέρνοντας τα ύψη από τις κορυφές A και A' . Από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων προκύπτει η αναλογία των πλευρών τους και από αυτήν η αναλογία των πλευρών των αρχικών τριγώνων. Το αντίστροφο, δηλαδή ότι όταν οι πλευρές είναι ανάλογες τα τρίγωνα είναι όμοια αποδεικνύεται με τον τρόπο της προηγούμενης πρότασης. Χρειάζεται πρώτα να δείξουμε ότι και τα ύψη των τριγώνων είναι ανάλογα προς τις πλευρές.

Πρόταση 3.9.3 (Περίπτωση “σχεδόν” ομοιότητας) Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ που έχουν τις γωνίες στα A και Δ ίσες και στα Γ και E παραπληρωματικές ικανοποιούν

$$\frac{|B\Gamma|}{|EZ|} = \frac{|AB|}{|\Delta Z|}.$$



Σχήμα 325: Περίπτωση “σχεδόν” ομοιότητας

Απόδειξη: Τοποθέτησε τα δύο τρίγωνα έτσι ώστε οι κορυφές A και Δ , με τις ίσες γωνίες, καθώς επίσης και οι πλευρές $A\Gamma$ και ΔE , οι προσκείμενες στις παραπληρωματικές, να συμπίπτουν. Προεκτείνοντας την $B\Gamma$ δημιουργείται το τρίγωνο ABH , στο οποίο η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος. Τότε (Πόρισμα 3.3.7) ισχύει

$$\frac{|B\Gamma|}{|\Gamma H|} = \frac{|AB|}{|AH|}.$$

Από τα όμοια τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΓΗ έχουμε επίσης

$$\frac{|GH|}{|AH|} = \frac{|EZ|}{|AZ|}.$$

Από τις δύο σχέσεις συνάγεται η ζητούμενη, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.9.2 Δείξε ότι η σχέση ομοιότητας μεταξύ δύο τριγώνων είναι μεταβατική. Δηλαδή αν το $AB\Gamma$ είναι όμοιο του $A'B'\Gamma'$ και αυτό όμοιο του $A''B''\Gamma''$, τότε και το $AB\Gamma$ είναι όμοιο του $A''B''\Gamma''$.

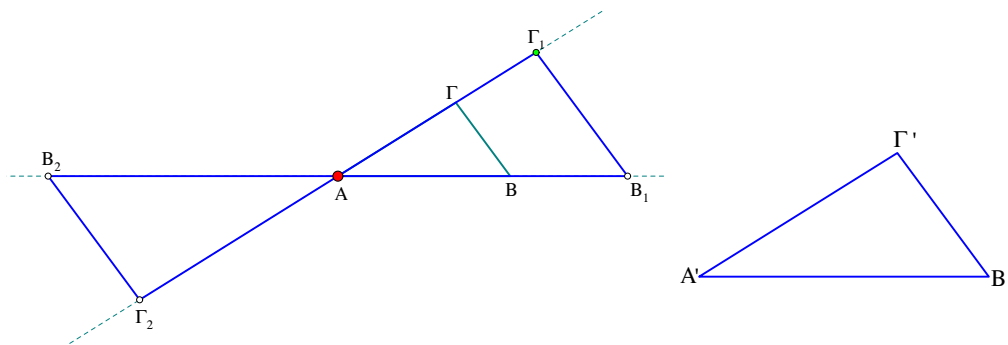
Πρόταση 3.9.4 Δύο όμοια τρίγωνα έχουν αντίστοιχα ύψη ανάλογα και τα εμβαδά τους έχουν λόγο το τετράγωνο του λόγου των πλευρών τους.

Απόδειξη: Αναφερόμενοι στην Πρόταση 3.9.1 και το σχήμα της, κατά το θεώρημα του Θαλή και ο λόγος των υψών $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB'|}{|AB|} = \kappa$, επομένως τα αντίστοιχα εμβαδά θα είναι

$$\epsilon(AB'\Gamma') = \frac{1}{2}|B'\Gamma'| \cdot |AM| = \frac{1}{2}(\kappa|B\Gamma|)(\kappa|AN|) = \kappa^2 \frac{1}{2}|B\Gamma| \cdot |AN| = \kappa^2 \epsilon(AB\Gamma),$$

ο.ε.δ.

Πρόταση 3.9.5 Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που έχουν αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες είναι όμοια.

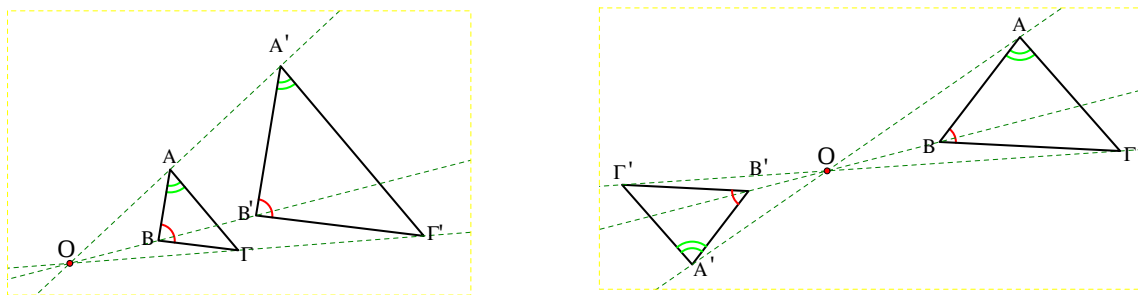


Σχήμα 326: Τρίγωνα με αντίστοιχες παράλληλες πλευρές

Απόδειξη: Μετατόπισε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ και τοποθέτησέ το έτσι ώστε οι κορυφές Α και Α' να συμπίψουν και οι πλευρές τους ΑΒ, ΑΓ να συμπίψουν αντίστοιχα με τις Α'Β' και Α'Γ'. Τό μετατοπισθέν τρίγωνο θα πάρει την θέση $AB_1\Gamma_1$ ή $AB_2\Gamma_2$ με την τρίτη πλευρά του παράλληλη της ΒΓ, άρα θα είναι όμοιο του ΑΒΓ ενώ είναι και ίσο προς το αρχικό $A'B'\Gamma'$, ο.ε.δ.

Δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες λέγονται **Ομοιόθετα**. Κατά την προηγούμενη πρόταση δύο ομοιόθετα τρίγωνα είναι και όμοια. Η επόμενη πρόταση δείχνει ένα χαρακτηριστικό δύο ομοιοθέτων τριγώνων. Ξεχωρίζει η περίπτωση που τα ομοιόθετα είναι όχι μόνον όμοια αλλά και ίσα μεταξύ τους.

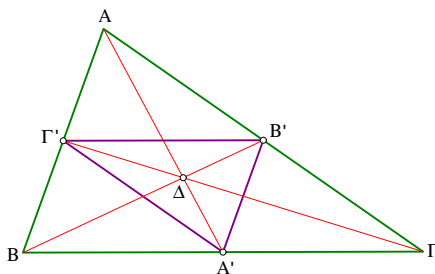
Πρόταση 3.9.6 Για δύο ομοιόθετα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ οι ευθείες AA' , BB' και $\Gamma\Gamma'$, που ενώνουν κορυφές τους με αντίστοιχες γωνίες ίσες, διέρχονται από κοινό σημείο ή είναι παράλληλες και τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 327: Ομοιόθετα τρίγωνα

Απόδειξη: Έστω O το σημείο τομής των AA' και BB' . Θα δείξουμε ότι και η GG' περνά από το O . Κατά Θαλή έχουμε ίσους λόγους $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|} = \kappa$. Παίρνουμε λοιπόν επί της OG σημείο Γ^* με $\frac{|OG|}{|OG^*|} = \kappa$. Τα τρίγωνα $A'B'\Gamma^*$ που σχηματίζεται έχει πλευρές ανάλογες με αυτές του $AB\Gamma$ άρα είναι όμοιο προς αυτό και συνεπώς έχει τις ίδιες γωνίες με αυτό. Προκύπτει λοιπόν ότι τα $A'B'\Gamma'$ και $A'B'\Gamma^*$ έχουν κοινή την $A'B'$ και τις ίδιες γωνίες στα A' και B' , άρα ταυτίζονται και $\Gamma' = \Gamma^*$, δηλαδή η OG διέρχεται και από το Γ' .

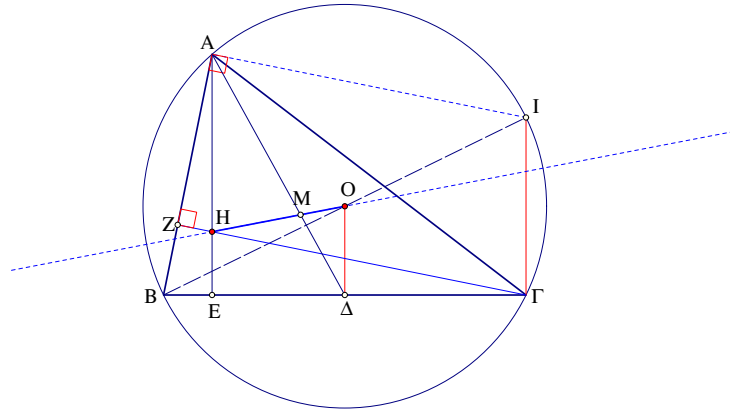
Ο συλλογισμός αυτός δείχνει επίσης ότι αν οι δύο ευθείες AA' και BB' δεν τέμνονται, δηλαδή είναι παράλληλες, τότε και η τρίτη ευθεία θα είναι αναγκαστικά παράλληλη αυτών και τα $ABB'A'$, $B\Gamma\Gamma'B$ και $A\Gamma\Gamma'A'$ θα είναι παραλληλόγραμμα, άρα τα τρίγωνα θα έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες. ο.ε.δ.

Σχήμα 328: Το τρίγωνο των μέσων των πλευρών (Συμπληρωματικό του $AB\Gamma$)

Το σημείο O που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση για δύο ομοιόθετα και μή-ίσα τρίγωνα λέγεται **Κέντρο ομοιοθεσίας** των δύο τριγώνων. Ο λόγος κ δύο αντιστοιχών πλευρών των ομοιοθέτων τριγώνων λέγεται **Λόγος ομοιοθεσίας** των δύο τριγώνων. Δύο αντίστοιχα σημεία όπως τα A και A' λέγονται **Ομόλογα**. Στην περίπτωση που το κέντρο O της ομοιοθεσίας είναι μεταξύ των ομολόγων σημείων λέμε ότι τα τρίγωνα είναι **Αντιομοιόθετα**. Το πιο διάσημο ζευγάρι (αντι)ομοιοθέτων τριγώνων και αντιστοίχου κέντρου ομοιοθεσίας είναι αυτό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και του τριγώνου των μέσων του $A'B'\Gamma'$ των πλευρών του, που συχνά αναφέρεται ως το **Συμπληρωματικό** του τριγώνου $AB\Gamma$. Το κέντρο ομοιοθεσίας σε αυτήν την περίπτωση συμπίπτει με το σημείο τομής των διαμέσων Δ (κέντρο βάρους) του τριγώνου $AB\Gamma$ και ο λόγος ομοιοθεσίας του $A'B'\Gamma'$ προς το $AB\Gamma$ είναι $\frac{1}{2}$. Η τελευταία πρόταση δίνει μία άλλη απόδειξη, από αυτήν που είδαμε στην Παράγραφο 2.8, για το ότι οι τρεις διάμεσοι τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Πρόταση 3.9.7 (Η ευθεία του Euler) Το κέντρο βάρους M τριγώνου $AB\Gamma$ περιέχεται στο

ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το περίκεντρο O και το ορθόκεντρο H και χωρίζει αυτό σε λόγο 2:1 ($|MH| = 2|MO|$).



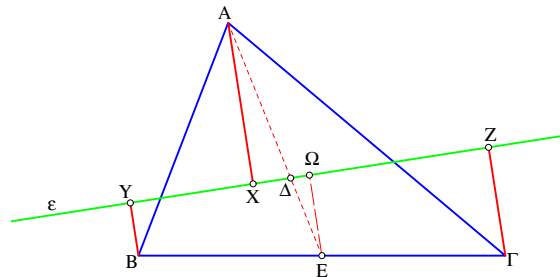
Σχήμα 329: Η ευθεία του Euler HO

Απόδειξη: Θεώρησε το αντιδιαμετρικό I της κορυφής B ως προς τον περίκυκλο. Τα A και Γ είναι επίσης στον περίκυκλο άρα βλέπουν την διάμετρο BI υπό ορθή γωνία. Συνάγεται ότι το $AH\Gamma I$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $|AH| = |I\Gamma|$. Όμως, εάν Δ είναι το μέσον της $B\Gamma$, το $O\Delta$ ενώνει μέσα πλευρών του τριγώνου $B\Gamma I$, άρα $|I\Gamma| = 2|O\Delta|$ και συνεπώς το AH είναι διπλάσιο και παράλληλο του $O\Delta$. Έστω M το σημείο τομής της διαμέσου $A\Delta$ με την OH . Τα τρίγωνα AHM και ΔOM είναι όμοια ως έχοντα αντίστοιχες γωνίες ίσες. Συνεπώς οι πλευρές τους θα είναι ανάλογες και επειδή $|AH| = 2|O\Delta|$ το ίδιο θα συμβαίνει και με τις άλλες αντίστοιχες πλευρές, δηλαδή:

$$|AM| = 2|M\Delta| \quad \text{και} \quad |HM| = 2|MO|,$$

ο.ε.δ.

Η ευθεία OH λέγεται **Ευθεία του Euler** του τριγώνου. Εκτός του περικέντρου O και του ορθοκέντρου H η ευθεία αυτή περιέχει και άλλα αξιοσημείωτα σημεία του τριγώνου (Πρόταση 5.2.1).



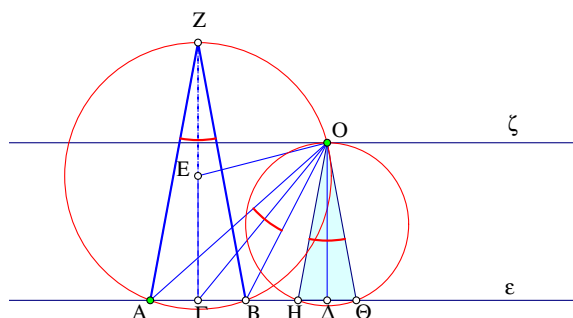
Σχήμα 330: Ιδιότητα του βαρυκέντρου

Άσκηση 3.9.3 Έστω ευθεία ε διερχόμενη από το κέντρο βάρους Δ του τριγώνου $AB\Gamma$. Αν τα σημεία X , Y και Z της ε είναι οι προβολές των A , B και Γ αντίστοιχα δείξε ότι το

μεγαλύτερο από τα ευθύγραμμα τμήματα AX , BY και ΓZ είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άλλων.

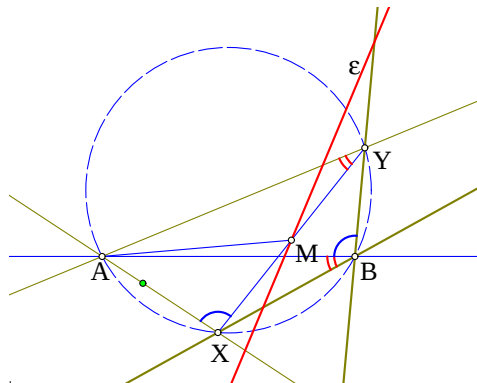
Υπόδειξη: Έστω ότι το AX είναι μεγαλύτερο από τα BY και ΓZ . Το τμήμα $E\Omega$ που ενώνει τα μέσα των $B\Gamma$ και YZ είναι κατά την Άσκηση 2.10.5 ίσο με το ημιάθροισμα των BY και ΓZ . Όμως τα τρίγωνα ΔAX και $\Delta E\Omega$ είναι (αντι)ομοιόθετα με λόγο 2. Επομένως $|AX| = 2|E\Omega| = |BY| + |\Gamma Z|$ ([PS88, σ. 5]).

Άσκηση 3.9.4 Γωνία AOB σταθερού μέτρου $|AOB| = \omega$ περιστρέφεται περί το σταθερό σημείο O αποτέμνουσα επί ευθείας ε ευθύγραμμο τμήμα AB . Να βρεθεί η θέση της AOB για την οποία το μήκος $|AB|$ γίνεται ελάχιστο.



Σχήμα 331: Αποτομή ελαχίστου τμήματος AB

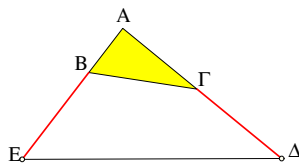
Υπόδειξη: Θεώρησε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOB και την τομή του Z με την μεσοκάθετο του AB από την μεριά της ε στην οποία είναι και το O . Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής μέτρου ω . Επομένως για κάθε θέση της γωνίας OAB δημιουργείται ένα τέτοιο ισοσκελές με βάση το AB . Όλα δε αυτά τα ισοσκελή είναι όμοια μεταξύ τους αφού έχουν την ίδια γωνία κορυφής ω . Το ύψος $Z\Gamma$ αυτών των ισοσκελών είναι πάντοτε μεγαλύτερο της απόστασης $O\Delta$ του O από την ε . Επομένως το ελάχιστο AB θα λαμβάνεται στην θέση $H\Theta$ για την οποία το ύψος του ισοσκελούς συμπίπτει με την απόσταση $O\Delta$ του O από την ε . Σημείωσε ότι σε αυτήν την θέση ο περιγεγραμμένος κύκλος του $OH\Theta$ εφάπτεται της παραλλήλου ζ της ε από το O .



Σχήμα 332: Γωνία περιστρεφόμενη και σχετικός τόπος

Υπόδειξη: Έστω ότι βρέθηκαν τα ζητούμενα σημεία. Υπόθεσε επίσης ότι η AB είναι μεγαλύτερη της AG και πάρε το Δ επί της AB , έτσι ώστε $|AD| = |AG|$. Φέρε από το K παράλληλο προς την AB τέμνουσα την GD στο Z . Λόγω της ομοιότητας προς το ισοσκελές $AG\Delta$, το GKZ είναι ισοσκελές τρίγωνο. Συνάγεται ότι $|KZ| = |KG| = |IB|$, άρα το $KZBI$ είναι ρόμβος. Όρισε το σημείο τομής E της παράλληλης από το Δ προς την ZB με την BG . Το σημείο E κατασκευάζεται από τα δεδομένα, κατασκευάζοντας πρώτα το Δ και γράφοντας κύκλο με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔA που τέμνει την BG στο E . Κατόπιν από το B φέρε παράλληλο της ED τέμνουσα την GD στο Z . Από το Z φέρε παράλληλο της BA τέμνουσα την AG στο K . Πάρε τέλος το I επί της BA έτσι ώστε $|BI| = |ZK|$. Τα K και I που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο είναι τα ζητούμενα.

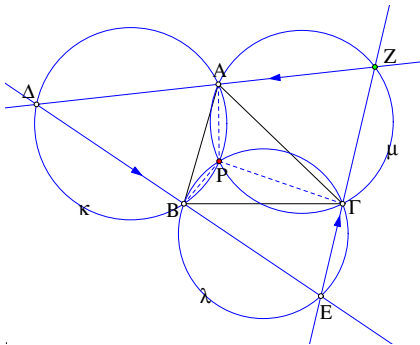
Άσκηση 3.9.8 Κατασκεύασε τρίγωνο από την γωνία $\alpha = B\hat{A}\Gamma$ και τα αθροίσματα μηκών πλευρών $b + a, c + a$.



Σχήμα 335: Κατασκευή τριγώνου από $A, b + a, c + a$

Υπόδειξη: Το τρίγωνο ADE με γωνία μέτρου α στο A και προσκείμενες σε αυτήν πλευρές $|AD| = b + a, |AE| = c + a$ κατασκευάζεται άμεσα. Χρησιμοποιώντας κατόπιν την προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε σημεία B και Γ στην AE και AD αντίστοιχα, έτσι ώστε $|EB| = |BG| = |GD|$. Το προκύπτον τρίγωνο $AB\Gamma$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Άσκηση 3.9.9 Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο P εκτός των πλευρών αυτού. Κατασκευάζουμε τους κύκλους $\kappa = (PAB), \lambda = (PBG), \mu = (PGA)$. Θεωρούμε τυχόν σημείο Δ του κ και το δεύτερο σημείο τομής E της ΔB με τον κύκλο λ . Έστω Z το σημείο τομής της $E\Gamma$ με τον κύκλο μ . Δείξε ότι τα Z, A και Δ είναι συνευθειακά και το τρίγωνο ΔEZ έχει πάντοτε τις ίδιες γωνίες, ανεξάρτητα από την θέση του Δ στον κ .



Σχήμα 336: Κατασκευή περιγεγραμμένου τριγώνου

Υπόδειξη: Οι γωνίες στο P: APB, BPG και ΓPA έχουν άθροισμα μετρων 360 μοίρες. Τα APBΔ και BPΓE είναι εγγράψιμα τετράπλευρα και οι γωνίες

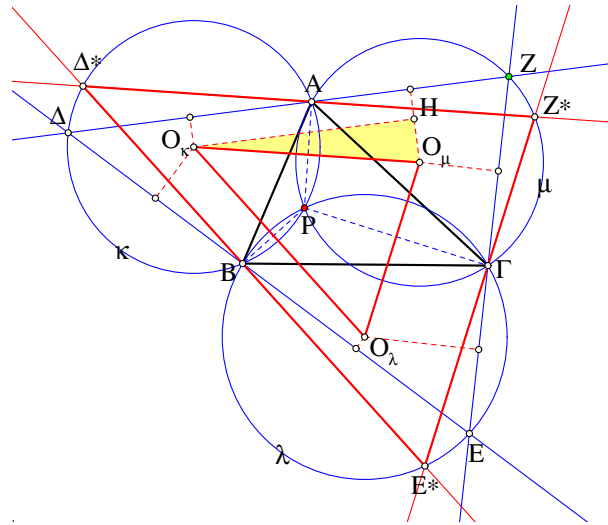
$$\begin{aligned} |A\Delta B| &= 180 - |APB|, \quad |B\Gamma E| = 180 - |BPG| \Rightarrow \\ |A\Delta B| + |B\Gamma E| &= 360 - (|APB| + |BPG|) = |AP\Gamma|. \end{aligned}$$

Αν ορίσουμε λοιπόν το Z ως σημείο τομής των AΔ και ΓE, τότε κατά τα προηγούμενα, στο τρίγωνο ΔEZ η $|AZ\Gamma| = 180 - |A\Delta B| - |B\Gamma E| = 180 - |AP\Gamma|$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο APΓZ είναι εγγράψιμο και το Z περιέχεται στον κύκλο μ.

Άσκηση 3.9.10 Δίδονται δύο τρίγωνα ABΓ και XYZ. Κατασκεύασε τρίγωνο ΔEZ περιγεγραμμένο του ABΓ και όμοιο προς το XYZ.

Υπόδειξη: Έστω ότι κατασκευάσθηκε το ζητούμενο ΔEZ, όπως στο σχήμα 336. Δείξε πρώτα ότι οι κύκλοι $\kappa=(A\Delta B)$, $\lambda=(B\Gamma E)$ και $\mu=(\Gamma Z A)$ διέρχονται από κοινό σημείο P. Δείξε κατόπιν ότι η θέση του P ευρίσκεται από τα δεδομένα. Τέλος ακολουθήσε την διαδικασία της προηγούμενης άσκησης για να ορίσεις το ΔEZ.

Άσκηση 3.9.11 Έστω τρίγωνο ΔEZ περιγεγραμμένο του τριγώνου ABΓ και $O_\kappa, O_\lambda, O_\mu$ τα κέντρα των κύκλων $\kappa=(A\Delta B)$, $\lambda=(B\Gamma E)$ και $\mu=(A\Gamma Z)$. Δείξε ότι το τρίγωνο $\Delta^*E^*Z^*$ με πλευρές παράλληλες προς αυτές του τριγώνου $O_\kappa O_\lambda O_\mu$ και διερχόμενες από τα A, B, Γ είναι όμοιο του ΔEZ και έχει περίμετρο μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν του τριγώνου ΔEZ.



Σχήμα 337: Κατασκευή μεγίστου περιγεγραμμένου τριγώνου

Υπόδειξη: Πρόβαλλε τα $O_\kappa, O_\lambda, O_\mu$ στις πλευρές του τριγώνου ΔEZ. Σχημάτισε το ορθογώνιο τρίγωνο $OH O_\mu$ (σχήμα 337). Η OH έχει το μισό μήκος της ΔZ και, ως κάθετος στην HO_μ είναι μικρότερη της υποτεινουσας $O_\kappa O_\mu$ που με την σειρά της έχει μήκος το μισό του Δ^*Z^* .

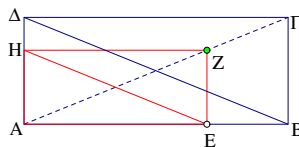
Άσκηση 3.9.12 Κατασκεύασε το μέγστο, κατά περίμετρο, ισόπλευρο τρίγωνο ΔEZ περιγεγραμμένο δοθέντος τριγώνου ABΓ.

3.10 Όμοια πολύγωνα

Η σχέση ομοιότητας, που αρχικά εξετάσαμε για ορθογώνια τρίγωνα (Παράγραφος 3.5) και μόλις γενικεύσαμε για οποιαδήποτε τρίγωνα, γενικεύεται ακόμη περισσότερο και για οποιαδήποτε σχήματα του επιπέδου. Εδώ θα αρκесθώ στον ορισμό για γενικά πολύγωνα. Δύο πολύγωνα λοιπόν με τον ίδιο αριθμό πλευρών (και επομένως γωνιών) λέγονται **Όμοια** όταν α) έχουν αντίστοιχες γωνίες ίσες και β) πλευρές ανάλογες. Έδώ η λέξη **αντίστοιχες**, όπως και στα τρίγωνα είναι κρίσιμη. Σημαίνει ότι μπορούμε να περιγράψουμε τα τρίγωνα με τα ίδια γράμματα $AB\Gamma\Delta\dots$ και $A'B'\Gamma'\Delta'\dots$ και οι γωνίες στις κορυφές που αντιστοιχούν στα ίδια γράμματα είναι ίσες και οι προσκείμενες σε αυτές πλευρές ανάλογες $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|B\Gamma|}{|B'\Gamma'|} = \frac{|\Gamma\Delta|}{|\Gamma'\Delta'|} = \dots = \kappa$. Οι δύο πλευρές που υπεισέρχονται σε καθένα από τους προηγούμενους λόγους αναφέρονται ως **Ομόλογες**. Η σταθερά κ λέγεται **Λόγος ομοιότητας** του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta\dots$ προς το πολύγωνο $A'B'\Gamma'\Delta'\dots$.

Σημείωσε ότι στην περίπτωση των τριγώνων η ισότητα των γωνιών συνεπάγεται την αναλογία των πλευρών και τούμπαλιν (Πρόταση 3.9.2), η αναλογία των πλευρών συνεπάγεται την ισότητα των γωνιών. Αυτό όμως δεν ισχύει γενικότερα, ούτε καν για τετράπλευρα. Για παράδειγμα το τετράγωνο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που δεν είναι τετράγωνο έχουν τις ίδιες γωνίες (όλες ορθές) αλλά όχι ανάλογες πλευρές. Ένα τετράγωνο και ένας μη-τετραγωνικός ρόμβος με το ίδιο μήκος πλευράς έχουν πλευρές ανάλογες (μάλιστα ίσες: $\kappa=1$) αλλά οι γωνίες τους δεν είναι αντίστοιχα ίσες.

Έτσι όλα τα τρίγωνα που έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες είναι όμοια μεταξύ τους. Όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία από τις οξείες γωνίες τους αντίστοιχα ίση είναι όμοια μεταξύ τους. Όλα τα τετράγωνα είναι όμοια μεταξύ τους. Όλοι οι ρόμβοι που έχουν αντίστοιχα ίση μία από τις γωνίες τους είναι όμοιοι μεταξύ τους.



Σχήμα 338: Όμοια ορθογώνια παραλληλόγραμμα

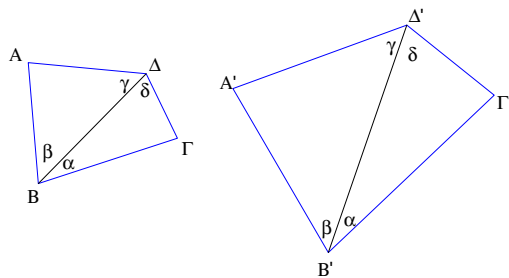
Άσκηση 3.10.1 Δείξε ότι δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμο είναι όμοια τότε και μόνον, όταν έχουν τον ίδιο λόγο καθέτων πλευρών.

Υπόδειξη: Αν τα $AB\Gamma\Delta$ και $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι όμοια τότε εξ ορισμού θα έχουν $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|B\Gamma|}{|B'\Gamma'|}$ που είναι ισοδύναμη με την $\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|A'B'|}{|B'\Gamma'|}$. Αν πάλι ισχύει αυτή η σχέση, επειδή και οι γωνίες είναι αντίστοιχα ίσες (όλες ορθές) ικανοποιείται ο ορισμός της ομοιότητας.

Άσκηση 3.10.2 Δείξε ότι δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμο είναι όμοια τότε και μόνον, όταν μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε δύο αντίστοιχες διαγώνιοί τους να είναι παράλληλοι ή να ταυτίζονται.

Υπόδειξη: Η συνθήκη είναι ισοδύναμη με το ότι τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις δύο πλευρές του ορθογωνίου και την διαγώνιο που ενώνει τα μη κοινά άκρα τους είναι όμοια. Τα τρίγωνα δε αυτά είναι όμοια, τότε και μόνον όταν ο λόγος των καθέτων πλευρών τους είναι ο ίδιος (Πόρισμα 3.5.1).

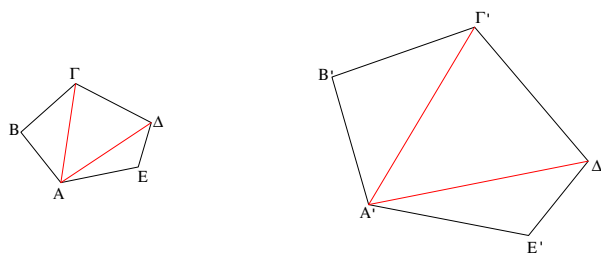
Άσκηση 3.10.3 Δείξε ότι δύο τετράπλευρα είναι όμοια τότε και μόνον, όταν έχουν τις γωνίες των πλευρών τους με μία διαγώνιο αντίστοιχα ίσες.



Σχήμα 339: Όμοια τετράπλευρα

Υπόδειξη: Αν τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$, $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι όμοια και οι γωνίες στα A , A' ίσες και οι προσκείμενες σε αυτές πλευρές ανάλογες, τότε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ είναι όμοια, άρα και οι γωνίες των τριγώνων προσκείμενες στην διαγώνιο $B\Delta$ και $B'\Delta'$ αντίστοιχα είναι ίσες. Έπεται ότι και τα τρίγωνα $\Delta\Gamma B$ και $\Delta'\Gamma'B'$ είναι όμοια και οι αντίστοιχες γωνίες τους οι προσκείμενες στις διαγωνίους τους είναι αντίστοιχα ίσες. Αντίστροφα αν οι γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οι προσκείμενες στην διαγώνιο $B\Delta$ είναι αντίστοιχα ίσες με τις προσκείμενες στην διαγώνιο $B'\Delta'$, τότε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A'B'\Delta'$ είναι όμοια και τα τρίγωνα $\Delta\Gamma B$ και $\Delta'\Gamma'B'$ είναι όμοια. Συνεπώς και οι πλευρές των τριγώνων αυτών θα είναι ανάλογες και μάλιστα με τον ίδιο λόγο, που ορίζεται από το πηλίκον $\frac{|B\Delta|}{|B'\Delta'|}$, άρα οι αντίστοιχες πλευρές των τετραπλεύρων συνολικά ανάλογες.

Άσκηση 3.10.4 Δείξε ότι δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια τότε και μόνον, όταν έχουν αντίστοιχες κορυφές A , A' έτσι ώστε οι διαγώνιοι που διέρχονται από αυτές χωρίζουν τα πολύγωνα σε αντίστοιχα τρίγωνα που είναι όμοια.

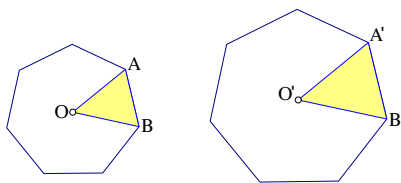


Σχήμα 340: Όμοια πολύγωνα

Υπόδειξη: Για όσους δεν είναι εξοικειωμένοι με την επαγωγική απόδειξη αρκεί να δείξουν την πρόταση για πεντάγωνα. Στην ουσία η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν της προηγούμενης άσκησης.

Άσκηση 3.10.5 Δείξε ότι δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Υπόδειξη: Όπως είδαμε στο Πόρισμα 2.11.1, οι γωνίες ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές είναι όλες ίσες με $\frac{n-2}{n}180$. Επομένως δύο κανονικά πολύγωνα με n πλευρές έχουν

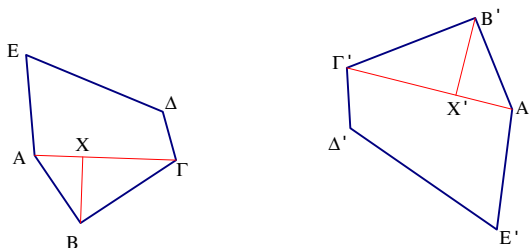


Σχήμα 341: Κανονικά πολύγωνα με ίδιο αριθμό πλευρών

αντίστοιχα ίσες γωνίες. Αν ο λόγος δύο πλευρών τους είναι κ , τότε, επειδή όλες οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, και ο λόγος δύο άλλων αντιστοίχων πλευρών στα δύο πολύγωνα θα είναι επίσης κ . Ικανοποιείται λοιπόν ο ορισμός της ομοιότητας των πολυγώνων.

Σχόλιο-1 Όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα, όμοια σχήματα είναι αυτά που έχουν το ίδιο σχήμα. Μπορεί να πει κανείς ότι δύο όμοια σχήματα είναι στην ουσία το ίδιο σχήμα, το οποίο βλέπουμε από μεγαλύτερη ή μικρότερη απόσταση. Ένας άλλος τρόπος θεώρησης είναι η αλλαγή **Κλίμακας**, δηλαδή εκεί που μετρούσαμε με μέτρα και λ.χ. ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 4, 5, σήμαινε 3 μέτρα, 4 μέτρα και 5 μέτρα, τώρα να μετράμε με άλλο μέτρο λ.χ. εκατοστά και λέγοντας: κατασκεύασε τρίγωνο με πλευρές 3,4,5 να εννοούμε μήκος 3 εκατοστά, 4 εκατοστά και 5 εκατοστά αντίστοιχα. Το πρώτο τρίγωνο βέβαια είναι 100 φορές μεγαλύτερο του δεύτερου (ως προς τα μήκη πλευρών) και θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό μικρό οικόπεδο, ενώ το δεύτερο θα μπορούσε να θεωρηθεί το σχέδιο αυτού του οικοπέδου πάνω στο χαρτί.

Η δυνατότητα που έχουμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία να σχεδιάζουμε υπό κλίμακα είναι χαρακτηριστική αυτής της γεωμετρίας και αποδεικνύεται ισοδύναμη με το αξίωμα παραλληλίας. Με άλλα λόγια, αν ισχύουν τα αξιώματα για ευθείες, γωνίες και τρίγωνα, που δεχθήκαμε στις παραγράφους 1.2-1.6 και στο επίπεδό μας βρεθούν δύο όμοια (αλλά όχι ίσα) τρίγωνα, τότε η γεωμετρία του επιπέδου μας είναι η Ευκλείδεια και από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία και μόνον παράλληλος προς αυτήν. Ισχύει και το αντίστροφο, αν αποδείξουμε ότι στο επίπεδό μας (ισχύουν τα αξιώματα των 1.2-1.6 και) δεν υπάρχουν δύο όμοια τρίγωνα, τότε από σημείο εκτός ευθείας άγονται περισσότερες από μία παράλληλες προς αυτήν και ευρισκόμεθα μέσα σε ένα μη-Ευκλείδειο επίπεδο. Σε ένα τέτοιο επίπεδο αποδεικνύεται ότι δύο τρίγωνα που έχουν αντίστοιχες ίσες γωνίες είναι ίσα (έχουν και τις πλευρές τους αντίστοιχα ίσες (1.13, 1.14)).



Σχήμα 342: Όμοια πολύγωνα

Σχόλιο-2 Σε δύο όμοια πολύγωνα $ΑΒΓ\dots$ και $Α'Β'Γ'\dots$ η ισότητα των γωνιών και η

αναλογία των πλευρών μεταφέρεται και σε σχήματα που προκύπτουν από αυτά με την ίδια διαδικασία. Λόγου χάριν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΑΓ' (σχήμα-342) είναι και αυτές ανάλογες με λόγο τον ίδιο με τον λόγο ομοιότητας των δύο πολυγώνων. Επίσης τα ύψη ΑΧ και Α'Χ' στις ΑΓ και ΑΓ' είναι και αυτά ανάλογα με τον ίδιο λόγο και σχηματίζουν αντίστοιχα ίσες γωνίες με τις πλευρές των πολυγώνων.

Άσκηση 3.10.6 Δείξε ότι ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων Π και Π' είναι

$$\frac{\epsilon(\Pi)}{\epsilon(\Pi')} = \kappa^2,$$

όπου κ ο λόγος ομοιότητος των δύο πολυγώνων.

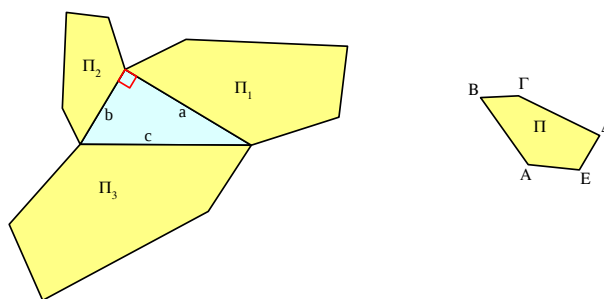
Υπόδειξη: Φέρε από μία κορυφή στο Π και την αντίστοιχή της στο Π' τις διαγώνιες και χώρισε το Π σε τρίγωνα και αντίστοιχα το Π' σε τρίγωνα όμοια αντίστοιχα προς τα προηγούμενα (Άσκηση 3.10.4). Τα εμβαδά των πολυγώνων γράφονται ως άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων αυτών $\epsilon(\Pi) = \epsilon(t_1) + \epsilon(t_2) + \dots$ και αντίστοιχα $\epsilon(\Pi') = \epsilon(t'_1) + \epsilon(t'_2) + \dots$. Τα αντίστοιχα τρίγωνα είναι όμοια άρα (Πρόταση 3.9.4) $\epsilon(t'_1) = \kappa^2 \epsilon(t_1)$, $\epsilon(t'_2) = \kappa^2 \epsilon(t_2)$, ... και το ζητούμενο προκύπτει χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις στις προηγούμενες ισότητες για τα εμβαδά:

$$\begin{aligned} \epsilon(\Pi') &= \epsilon(t'_1) + \epsilon(t'_2) + \dots \\ &= \kappa^2 \epsilon(t_1) + \kappa^2 \epsilon(t_2) + \dots \\ &= \kappa^2 \cdot (\epsilon(t_1) + \epsilon(t_2) + \dots) \\ &= \kappa^2 \epsilon(\Pi). \end{aligned}$$

Σχόλιο-3 Η προηγούμενη σχέση εμβαδών ομοίων πολυγώνων οδηγεί σε μία άλλη μορφή του Πυθαγορείου θεωρήματος στην οποία αντί για τετράγωνα στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου κατασκευάζουμε πολύγωνα όμοια προς ένα δοθέν πολύγωνο.

Θεώρημα 3.10.1 Δίδεται πολύγωνο $\Pi = AB\Gamma\Delta\dots$ και ορθογώνιο τρίγωνο. Στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου κατασκευάζονται πολύγωνα Π_1, Π_2, Π_3 όμοια του Π , έτσι ώστε οι πλευρές του ορθογωνίου a, b, c να είναι ομόλογες της πλευράς AB του Π . Τότε το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων στις κάθετες πλευρές ισούται με το εμβαδόν του πολυγώνου στην υποτείνουσα

$$\epsilon(\Pi_1) + \epsilon(\Pi_2) = \epsilon(\Pi_3).$$



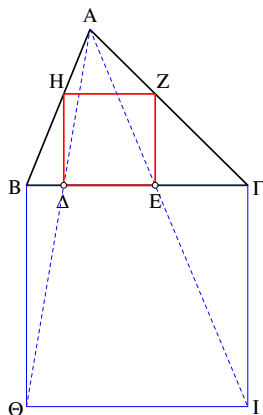
Σχήμα 343: Γενικευμένο θεώρημα του Πυθαγόρα

Απόδειξη: Έστω $|AB| = d$ το μήκος της πλευράς AB του Π . Κατά την προηγούμενη άσκηση οι λόγοι των εμβαδών θα είναι

$$\frac{\epsilon(\Pi_1)}{\epsilon(\Pi)} = \frac{a^2}{d^2}, \quad \frac{\epsilon(\Pi_2)}{\epsilon(\Pi)} = \frac{b^2}{d^2}, \quad \frac{\epsilon(\Pi_3)}{\epsilon(\Pi)} = \frac{c^2}{d^2}.$$

Ο ισχυρισμός προκύπτει άμεσα λύνοντας ως προς a^2, b^2, c^2 τις προηγούμενες και αντικαθιστώντας στο θεώρημα του Πυθαγόρα: $a^2 + b^2 = c^2$, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.10.7 Να κατασκευασθεί τετράγωνο ΔEZH εγγεγραμμένο σε τρίγωνο $AB\Gamma$ και την πλευρά του ΔE επί της $B\Gamma$.



Σχήμα 344: Τετράγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο

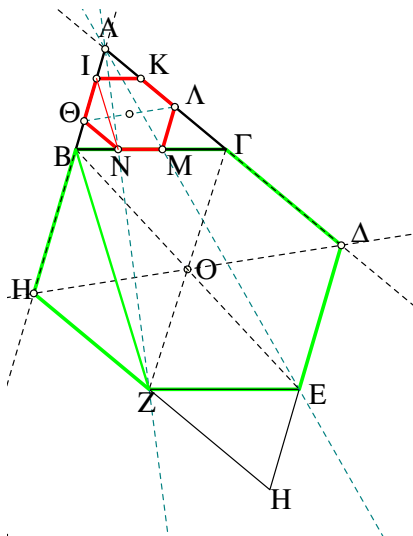
Υπόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το τετράγωνο κατασκευάσθηκε. Προεκτείνουμε τις $A\Delta$ και $A\epsilon$ έως ότου συναντήσουν τις κάθετες της $B\Gamma$ στα B και Γ αντίστοιχα στα σημεία Θ και I . Τα $(\Delta H\Delta, \Delta B\Theta)$ και $(\Delta Z\epsilon, \Delta \Gamma I)$ είναι ζεύγη ομοίων τριγώνων, συνεπώς

$$\frac{|H\Delta|}{|B\Theta|} = \frac{|AH|}{|AB|}, \quad \frac{|Z\epsilon|}{|\Gamma I|} = \frac{|AZ|}{|A\Gamma|}.$$

Λόγω της παραλληλίας των HZ και $B\Gamma$ οι λόγοι στις δεξιές πλευρές των ισοτήτων είναι ίσοι, άρα και οι λόγοι στις αριστερές πλευρές θα είναι ίσοι. Αυτό συνεπάγεται ότι $|B\Theta| = |\Gamma I|$, άρα το $B\Gamma\Theta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και συνεπώς τα τρίγωνα $\Delta\Delta\epsilon$ και $\Delta\Theta I$ είναι όμοια. Επειδή $\frac{|\Delta\epsilon|}{|\Theta I|} = \frac{|\Delta\Delta|}{|\Delta\Theta|} = \frac{|AH|}{|AB|}$, έπεται ότι $\frac{|\Delta\epsilon|}{|\Theta I|} = \frac{|H\Delta|}{|B\Theta|}$. Από αυτήν προκύπτει ότι τα ΘI και $B\Theta$ είναι ίσα, άρα το $B\Gamma\Theta$ είναι τετράγωνο. Αυτό το τετράγωνο κατασκευάζεται άμεσα και φέρνοντας τις $A\Theta$ και $A I$ ορίζουμε το $\Delta\epsilon$ επί της $B\Gamma$ και από αυτό το $\Delta\epsilon ZH$, που αποδεικνύεται τετράγωνο με παρόμοιο συλλογισμό.

Άσκηση 3.10.8 Να κατασκευασθεί ισόπλευρο εξάγωνο με τρεις πλευρές επί των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ και τρεις παράλληλες προς αυτές.

Υπόδειξη: Έστω $\Theta I\Delta M N$ το ζητούμενο εξάγωνο. Κατασκεύασε όμοιο αυτού επί της πλευράς $B\Gamma$. Προς τούτο όρισε ίσα τμήματα επί των προεκτάσεων των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα: $|BH| = |B\Gamma| = |\Gamma\Delta|$ και θεώρησε το μέσον O της $H\Delta$. Πάρε κατόπιν τα συμμετρικά E, Z



Σχήμα 345: Εξάγωνο εγγεγραμμένο σε τρίγωνο

ως προς το O των B, Γ αντίστοιχα. Το πρώτο εξάγωνο είναι εξ υποθέσεως ισόπλευρο και το δεύτερο εκ κατασκευής. Επίσης τα δύο εξάγωνα έχουν αντίστοιχες πλευρές παράλληλες. Δείχνουμε ότι είναι και ομοιόθετα. Προς τούτο, αρκεί να δείξουμε ότι τα τρία σημεία A, N και Z είναι συνευθειακά, καθώς και τα τρία σημεία A, M και E είναι επίσης συνευθειακά. Τα τρίγωνα $I\Theta N$ και BHZ είναι ισοσκελή με ίσες γωνίες στις κορυφές τους Θ και H . Άρα οι IN και BZ είναι παράλληλες και ο λόγος τους είναι

$$\frac{|IN|}{|BZ|} = \frac{|\Theta I|}{|HB|} = \frac{|IK|}{|BG|}.$$

Όμως τα AIK και $AB\Gamma$ είναι όμοια, συνεπώς

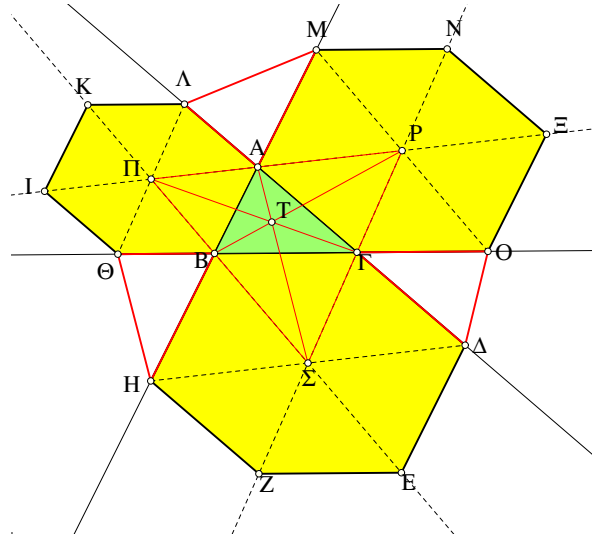
$$\frac{|IK|}{|BG|} = \frac{|AI|}{|AB|} = \kappa.$$

Από τις δύο αυτές και την ισότητα των γωνιών στα I και B προκύπτει ότι τα τρίγωνα AIN και ABZ είναι όμοια, άρα τα σημεία A, N και Z είναι συνευθειακά. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και τα σημεία A, M και E είναι συνευθειακά. Συνεπώς, τα δύο εξάγωνα, $\Theta IK\Lambda MN$ και $H\beta\Gamma\Delta EZ$ είναι ομοιόθετα ως προς A με λόγο ομοιοθεσίας κ . Το ισόπλευρο εξάγωνο $B\Gamma\Delta EZH$ κατασκευάζεται άμεσα και φέρνοντας τις AZ και AE ορίζουμε τα σημεία N και M επί της $B\Gamma$. Απο εκεί και πέρα η κατασκευή του $\Theta IK\Lambda MN$ είναι εύκολη, μέσω παραλλήλων προς τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άσκηση 3.10.9 Δείξε ότι το ισόπλευρο εξάγωνο της προηγούμενης άσκησης είναι μοναδικό, συνεπώς τα τρία εξάγωνα που προκύπτουν από την προηγούμενη κατασκευή, αλλά ξεκινώντας από διαφορετική πλευρά του τριγώνου, συμπίπτουν.

Υπόδειξη: Από την προηγούμενη άσκηση, προκύπτει ότι για κάθε εξάγωνο όπως το $\Theta IK\Lambda MN$ η κορυφή του N περιέχεται σε μία ευθεία AZ που εξαρτάται μόνο από το τρίγωνο $AB\Gamma$. Αυτή η ευθεία τέμνει την $B\Gamma$ σε ένα ακριβώς σημείο, το N , και συνεπώς ορίζεται ένα και μόνο τρίγωνο $I\Theta N$ όμοιο του BHZ με την κορυφή του N επί της $B\Gamma$. Από την μοναδικότητα του N προκύπτει αυτή του Θ , κατόπιν του I κτλ. Το δεύτερο μέρος της άσκησης είναι άμεση λογική συνέπεια του πρώτου μέρους της.

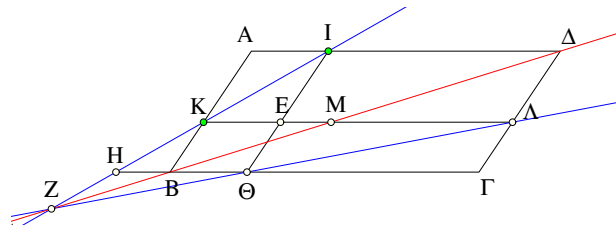
Άσκηση 3.10.10 Κατασκεύασε τα τρία παρεγγεγραμμένα ισόπλευρα εξάγωνα στις πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι οι ευθείες που ενώνουν τα κέντρα συμμετρίας Π, P και Σ αυτών των εξάγωνων διέρχονται από αντίστοιχες κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$.



Σχήμα 346: Ισόπλευρα παρεγγεγραμμένα εξάγωνα

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα ότι τα μισά δύο τέτοιων πολυγώνων, όπως λ.χ. τα τετράπλευρα $\Gamma\Delta H B$ και $\Gamma\Delta\Xi O$ είναι όμοια.

Άσκηση 3.10.11 Από σημείο E στο εσωτερικό παραλληλογράμμου, άγονται παράλληλες ΘI και $K\Lambda$ προς τις πλευρές αυτού. Δείξε ότι οι KI και $\Theta\Lambda$ τέμνονται επί μιάς διαγωνίου αυτού.



Σχήμα 347: Τέμνουσες παραλληλογράμμου

Υπόδειξη: Έστω Z το σημείο τομής της $\Theta\Lambda$ και $B\Delta$ και Z' το σημείο τομής της KI και $B\Delta$. Δείχνουμε ότι τα Δ και Δ' συμπίπτουν. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι οι λόγοι $\frac{|ZB|}{|ZM|} = \frac{|\Theta B|}{|\Lambda M|}$ και $\frac{|Z'B|}{|Z'M|} = \frac{|HB|}{|KM|}$ είναι ίσοι. Όμως $\frac{|\Theta B|}{|HB|} = \frac{|AI|}{|BH|} = \frac{|AK|}{|KB|}$ και $\frac{|KM|}{|\Lambda\Lambda|} = \frac{|KB|}{|\Lambda\Delta|} = \frac{|KB|}{|KA|}$.

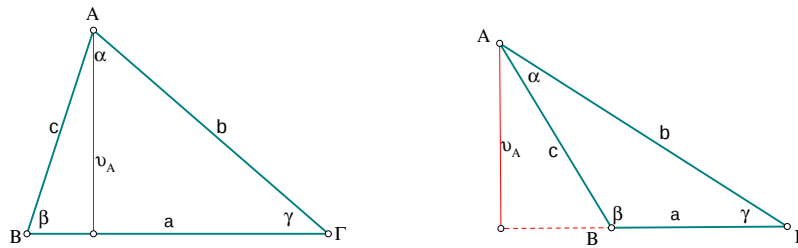
Άσκηση 3.10.12 Από τις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε παράλληλες προς δοθείσαν ευθεία ϵ , που τέμνουν τις απέναντι πλευρές του στα σημεία A', B', Γ' . Δείξε ότι το εμβαδόν του $AB\Gamma'$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του $AB\Gamma$.

Άσκηση 3.10.13 Να κατασκευασθεί τρίγωνο του οποίου δίδονται τα μήκη των τριών υψών.

3.11 Θεωρήματα ημιτόνου και συνημιτόνου

Όπως σημείωσα και προηγουμένως (Σχόλιο στην Παράγραφο 3.6) το θεώρημα του Πυθαγόρα παράγει άπειρους τύπους που συσχετίζουν μήκη, εμβαδά και γωνίες που εμφανίζονται σε ένα σχήμα. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε μερικές απλές περιπτώσεις τέτοιων τύπων. Στους τύπους που θα εξετάσουμε υπεισέρχονται και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu(\phi)$, $\sigma\upsilon\nu(\phi)$, που, προς το παρόν, έχουμε ορίσει (Παράγραφος 3.6) μόνο για οξείες γωνίες (γωνίες που εμφανίζονται σε ορθογώνια τρίγωνα). Εδώ μας χρειάζονται οι επεκτάσεις τους (που μελετώνται στον απειροστικό λογισμό [Σπ104, σελ. 255]) για γωνίες ϕ στο διάστημα $0 \leq \phi \leq 180$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{array}{ll} \eta\mu(0) = 0 & \sigma\upsilon\nu(0) = 1 \\ \eta\mu(90) = 1 & \sigma\upsilon\nu(90) = 0 \\ \eta\mu(180) = 0 & \sigma\upsilon\nu(180) = -1 \\ \eta\mu(\phi) = \eta\mu(180 - \phi) & \sigma\upsilon\nu(\phi) = -\sigma\upsilon\nu(180 - \phi) \end{array}$$



Σχήμα 348: Το ύψος εκπεφρασμένο μέσω πλευρών

Πρόταση 3.11.1 Το μήκος του ύψους $v_A = |A\Delta|$ από την κορυφή τριγώνου $AB\Gamma$ εκφράζεται μέσω των μηκών των πλευρών $b = |A\Gamma|$, $c = |AB|$:

$$v_A = b \eta\mu(\gamma) = c \eta\mu(\beta).$$

Απόδειξη: Για οξυγώνια τρίγωνα η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Δες και Πρόταση 3.6.1). Για αμβλυγώνια τρίγωνα και γωνίες τους για τις οποίες το ίχνος του ύψους ευρίσκεται εκτός της απέναντι βάσης σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο και ισχύει $v_A = c \eta\mu(180 - \beta) = c \eta\mu(\beta)$, λόγω των προηγουμένων ιδιοτήτων, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.11.2 (Θεώρημα ημιτόνων) Σε κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και αντίστοιχες απέναντι γωνίες α, β, γ , ισχύει

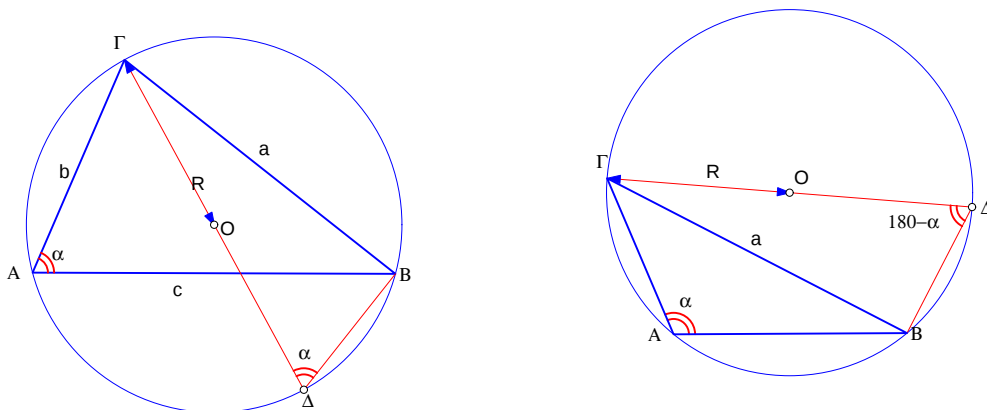
$$\frac{a}{\eta\mu(\alpha)} = \frac{b}{\eta\mu(\beta)} = \frac{c}{\eta\mu(\gamma)}.$$

Απόδειξη: Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ισότητα της προηγούμενης πρότασης διαιρώντας αυτήν κατά μέλη με το γινόμενο $\eta\mu(\beta) \eta\mu(\gamma)$. Η πρώτη ισότητα προκύπτει με ανάλογο τρόπο από την αντίστοιχη ισότητα για το ύψος από το Γ : $v_\Gamma = b \eta\mu(\alpha) = a \eta\mu(\beta)$, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.11.3 (Θεώρημα ημιτόνων) Σε κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και αντίστοιχες απέναντι γωνίες α, β, γ , ισχύει

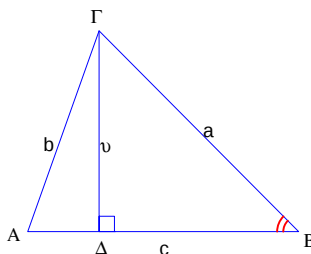
$$\frac{a}{\eta\mu(\alpha)} = \frac{b}{\eta\mu(\beta)} = \frac{c}{\eta\mu(\gamma)} = 2R,$$

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



Σχήμα 349: Θεώρημα ημιτόνων για τρίγωνα

Απόδειξη: Για την γωνία α , πάρε το αντιδιαμετρικό σημείο Δ του Γ στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$. Η γωνία $B\Delta\Gamma$ έχει $|B\Delta\Gamma| = \alpha$ ή $|B\Delta\Gamma| = 180 - \alpha$ ανάλογα με το αν είναι οξεία ή αμβλεία (Πρόταση 2.13.3). Επίσης το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο στο B , αφού η γωνία $\Delta B\Gamma$ βαίνει επί διαμέτρου του κύκλου (Πόρισμα 2.1.7). Από τις τριγωνομετρικές σχέσεις για το ορθογώνιο τρίγωνο (Πρόταση 3.6.1) προκύπτει η $|\Gamma B| = |\Gamma\Delta| \cdot \eta\mu(\alpha)$ που είναι η ζητούμενη σχέση για την γωνία α . Ανάλογα προκύπτουν και οι άλλες, ο.ε.δ.



Σχήμα 350: $v = a \eta\mu(\beta) = b \eta\mu(\alpha)$

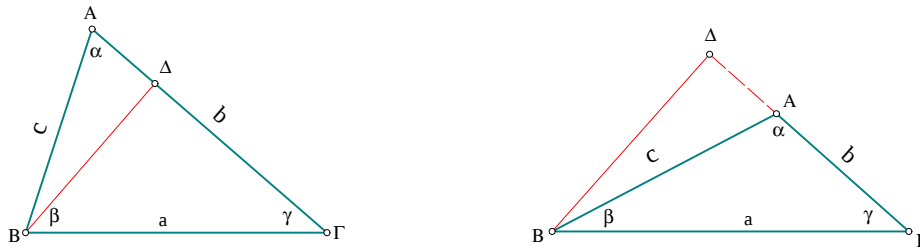
Πόρισμα 3.11.1 Σε κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c , εμβαδόν E και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου R ισχύει:

$$a \cdot b \cdot c = 4 \cdot R \cdot E \Leftrightarrow E = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}.$$

Απόδειξη: Κατά την προηγούμενη πρόταση, το γινόμενο των μηκών $a \cdot b \cdot c = a \cdot (2R \eta\mu(\beta)) \cdot c$. Όμως $v = a \cdot \eta\mu(\beta)$ είναι το ύψος του τριγώνου επί την ΑΒ μήκους $|AB| = c$. Άρα $a \cdot b \cdot c = (2E)(2R)$, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.11.4 (Θεώρημα συνημιτόνου) Σε κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και αντίστοιχες απέναντι γωνίες α, β, γ , ισχύει

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha).$$



Σχήμα 351: Θεώρημα συνημιτόνου

Απόδειξη: Υπόθεσε πρώτα ότι η γωνία α είναι οξεία. Τότε το ύψος ΒΔ περιέχεται σ' αυτήν την γωνία και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο ΑΔΒ έχουμε:

$$\begin{aligned} |\Gamma\Delta| &= |\Gamma A| - |\Delta A| \Rightarrow \\ |\Gamma\Delta|^2 &= |\Gamma A|^2 + |\Delta A|^2 - 2 \cdot |\Gamma A| \cdot |\Delta A| \Rightarrow \\ a^2 - |B\Delta|^2 &= b^2 + |\Delta A|^2 - 2 \cdot b \cdot |\Delta A| \Rightarrow \\ a^2 &= b^2 + |\Delta A|^2 + |B\Delta|^2 - 2 \cdot b \cdot |\Delta A| \Rightarrow \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot |\Delta A| \Rightarrow \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha). \end{aligned}$$

Αν η α είναι αμβλεία, τότε το ύψος ΒΔ είναι στο εξωτερικό της γωνίας α και

$$|\Gamma\Delta| = |\Gamma A| + |\Delta A|.$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη βρίσκουμε τον τύπο

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \sigma\upsilon\nu(180 - \alpha),$$

ο οποίος λόγω της $\sigma\upsilon\nu(180 - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu(\alpha)$ δίδει την εννιαία μορφή του τύπου του συνημιτόνου είτε η γωνία α είναι οξεία είτε είναι αμβλεία, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Φυσικά ισχύουν οι ανάλογοι τύποι και για τις άλλες γωνίες του τριγώνου:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2c \cdot a \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta), \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma) \end{aligned}$$

Σχόλιο-2 Ο τύπος του συνημιτόνου γενικεύει το θεώρημα του Πυθαγόρα. Πράγματι για $\alpha=90$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha) = 0$ και ο τύπος γίνεται $a^2 = b^2 + c^2$.

Άσκηση 3.11.1 Αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν τις γωνίες τους στα A και A' αντίστοιχα ίσες ή παραπληρωματικές, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι:

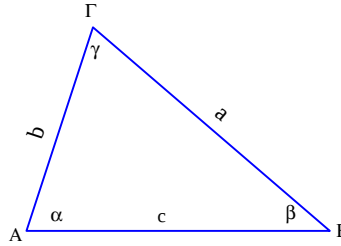
$$\frac{\epsilon(AB\Gamma)}{\epsilon(A'B'\Gamma')} = \frac{|AB||A\Gamma|}{|A'B'||A'\Gamma'|}.$$

Υπόδειξη: Εφάρμοσε τον τύπο για το εμβαδόν της Πρότασης 3.11.1 ως προς το ύψος από τα A και A' αντιστοίχως: $\epsilon(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|AB||A\Gamma|\eta\mu(\alpha)$, $\epsilon(A'B'\Gamma') = \frac{1}{2}|A'B'||A'\Gamma'|\eta\mu(\alpha')$. Όμως εξ υποθέσεως συμβαίνει να είναι ή $\alpha' = \alpha$ ή $\alpha' = 180 - \alpha$ και συνεπώς $\eta\mu(\alpha') = \eta\mu(\alpha)$ και το ζητούμενο προκύπτει διαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες ισότητες.

Πρόταση 3.11.5 Για δύο αριθμούς α και β με $0 \leq \alpha + \beta \leq 180$ ισχύουν οι τύποι

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta) &= \eta\mu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha)\eta\mu(\beta), \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) &= \sigma\upsilon\nu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta) - \eta\mu(\alpha)\eta\mu(\beta).\end{aligned}$$

Απόδειξη: Η περίπτωση για την οποία $\alpha + \beta = 0$ ή $\alpha + \beta = 180$ ανάγεται στις ισότητες της αρχής της παραγράφου. Υπόθεσε λοιπόν ότι $\alpha + \beta < 180$ και κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά αυθαίρετου μήκους $|AB| = c$ και προσκείμενες γωνίες α και β (Πρόταση 1.15.2). Γράφοντας τα ημίτονα και συνημίτονα βάσει των τύπων Πρότασης 3.11.2 και Πρότασης 3.11.4



Σχήμα 352: Τύποι για το άθροισμα γωνιών

έχουμε:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha)\eta\mu(\beta) &= \left(\frac{a}{2R}\right) \cdot \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) + \left(\frac{b}{2R}\right) \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{1}{4Rc} \cdot (a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2) \\ &= \frac{2c^2}{4Rc} = \frac{c}{2R} \\ &= \eta\mu(\gamma) = \eta\mu(180 - (\alpha + \beta)) = \eta\mu(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Οι ισότητες αυτές αποδεικνύουν τον πρώτο τύπο. Ο δεύτερος αποδεικνύεται με την βοήθεια του προηγούμενου τύπου και τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) &= \sigma\upsilon\nu(180 - \gamma) = -\sigma\upsilon\nu(\gamma) = -\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(2R\eta\mu(\gamma))^2 - (2R\eta\mu(\alpha))^2 - (2R\eta\mu(\beta))^2}{2(2R\eta\mu(\alpha))(2R\eta\mu(\beta))} = \frac{\eta\mu(\gamma)^2 - \eta\mu(\alpha)^2 - \eta\mu(\beta)^2}{2\eta\mu(\alpha)\eta\mu(\beta)}\end{aligned}$$

Στην τελευταία παράσταση αντικαθιστούμε το $\eta\mu(\gamma)$ με τον τύπο που δείξαμε ήδη

$$\eta\mu(\gamma)^2 = \eta\mu(180 - (\alpha + \beta))^2 = \eta\mu(\alpha + \beta)^2 = (\eta\mu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\beta) + \eta\mu(\beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha))^2,$$

καθώς επίσης και τα $\eta\mu(\alpha)^2, \eta\mu(\beta)^2$ με τους τύπους

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha)^2 &= \eta\mu(\alpha)^2 \cdot 1 = \eta\mu(\alpha)^2 (\sigma\upsilon\nu(\beta)^2 + \eta\mu(\beta)^2) = \eta\mu(\alpha)^2 \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 + \eta\mu(\alpha)^2 \eta\mu(\beta)^2, \\ \eta\mu(\beta)^2 &= \eta\mu(\beta)^2 \cdot 1 = \eta\mu(\beta)^2 (\sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 + \eta\mu(\alpha)^2) = \eta\mu(\beta)^2 \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 + \eta\mu(\beta)^2 \eta\mu(\alpha)^2.\end{aligned}$$

Μετά από απλές πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) &= \frac{\eta\mu(\gamma)^2 - \eta\mu(\alpha)^2 - \eta\mu(\beta)^2}{2 \eta\mu(\alpha) \eta\mu(\beta)} \\ &= \frac{2 \eta\mu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\alpha) \eta\mu(\beta) \sigma\upsilon\nu(\beta) - 2 \eta\mu(\alpha)^2 \eta\mu(\beta)^2}{2 \eta\mu(\alpha) \eta\mu(\beta)} \\ &= \sigma\upsilon\nu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\beta) - \eta\mu(\alpha) \eta\mu(\beta), \quad \text{o.ε.δ.}\end{aligned}$$

Άσκηση 3.11.2 Δείξε ότι για δύο αριθμούς α και β με $0 \leq \alpha + \beta \leq 180$ ισχύουν οι τύποι

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi(\alpha) + \varepsilon\varphi(\beta)}{1 - \varepsilon\varphi(\alpha) \varepsilon\varphi(\beta)}, \quad \sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi(\alpha) \sigma\varphi(\beta) - 1}{\sigma\varphi(\alpha) + \sigma\varphi(\beta)}.$$

Υπόδειξη: Για την πρώτη διαίρεσε την πρώτη από τις προηγούμενες με $\sigma\upsilon\nu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\beta)$. Ανάλογα προκύπτει και η δεύτερη.

Σχόλιο-3 Ανάλογους τύπους μπορούμε να πάρουμε αμέσως και για την διαφορά $\alpha - \beta$ δύο γωνιών, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα και γράφοντας την γωνία

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta.$$

Εφαρμόζοντας τους προηγούμενους τύπους βρίσκουμε τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha) &= \sigma\upsilon\nu(\beta) \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta), \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha) &= -\eta\mu(\beta) \eta\mu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $\sigma\upsilon\nu(\beta)$ και την δεύτερη με $-\eta\mu(\beta)$ και προσθέτοντας βρίσκουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\eta\mu(\beta)^2 + \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 = 1$:

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha) \eta\mu(\beta).$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με το $\eta\mu(\beta)$ και την δεύτερη με το $\sigma\upsilon\nu(\beta)$ και προσθέτοντας βρίσκουμε την

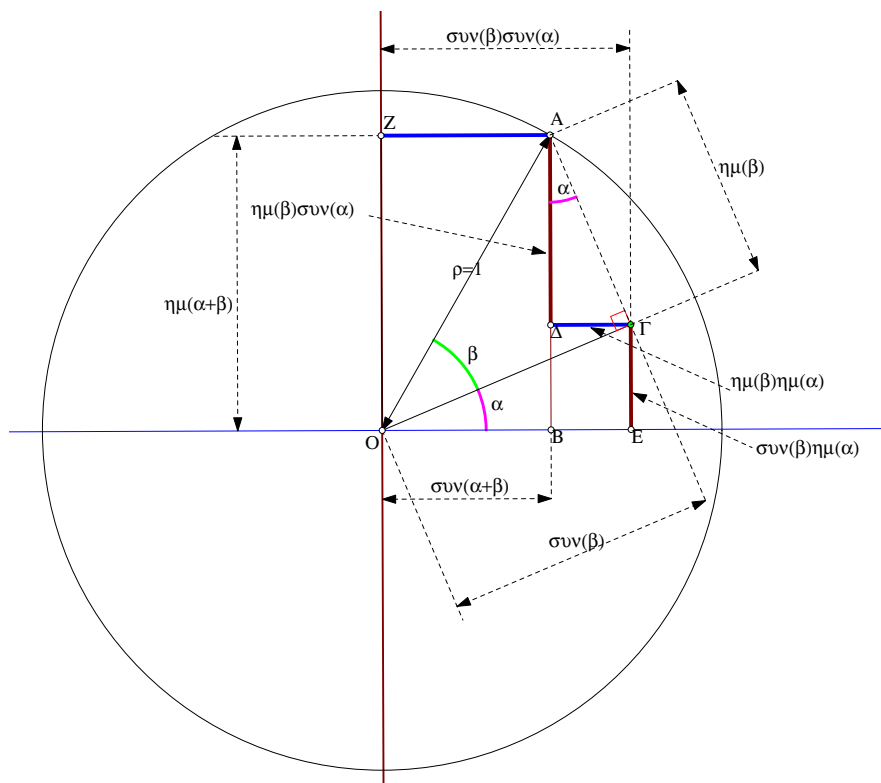
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\beta) + \eta\mu(\alpha) \eta\mu(\beta).$$

Σχόλιο-4 Οι τύποι της Πρότασης 3.11.5 εφαρμόζόμενοι για $\beta = \alpha$ δίνουν τους

$$\begin{aligned}\eta\mu(2\alpha) &= 2 \eta\mu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\alpha), \\ \sigma\upsilon\nu(2\alpha) &= \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 - \eta\mu(\alpha)^2,\end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμοι με τους τύπους που αποδείξαμε στην Άσκηση 3.6.5.

Σχόλιο-5 Η απόδειξη της Πρότασης 3.11.5 μπορεί να δοθεί και γεωμετρικά εκφράζοντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ως μήκη πλευρών ορθογωνίων τριγώνων (δες Σχόλιο-1 στην παράγραφο 3.6). Το επόμενο σχήμα δείχνει έναν τρόπο με τον οποίο αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ένα κύκλο ακτίνας 1 και σχηματίζοντας τις γωνίες α και β ως επίκεντρες και διαδοχικές $\alpha = \angle EOG$, $\beta = \angle GOA$. Στο σχήμα το $\eta\mu(\alpha + \beta) = |OZ|$. Το μήκος αυτό όμως είναι $|OZ| = |AD| + |GE|$. Το τρίγωνο $\triangle AGD$ είναι όμοιο του $\triangle OEG$ και $|AD| = |AG| \sin(\alpha)$. Όμως $|AG| = \eta\mu(\beta)$ και κάνοντας αντικαταστάσεις βρίσκουμε τον τύπο $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu(\alpha) \sin(\beta) + \eta\mu(\beta) \sin(\alpha)$. Ανάλογα, από την $|OB| = |OE| - |BE|$ προκύπτει και ο τύπος για το συνημίτονο $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \sin(\beta) - \eta\mu(\alpha) \eta\mu(\beta)$.



Σχήμα 353: Τριγωνομετρικοί τύποι αθροίσματος γωνιών

Άσκηση 3.11.3 Δείξε ότι για κάθε γωνία α ισχύει

$$\begin{aligned}\eta\mu(3\alpha) &= 3\eta\mu(\alpha) - 4\eta\mu^3(\alpha), \\ \sin(3\alpha) &= -3\sin(\alpha) + 4\sin^3(\alpha).\end{aligned}$$

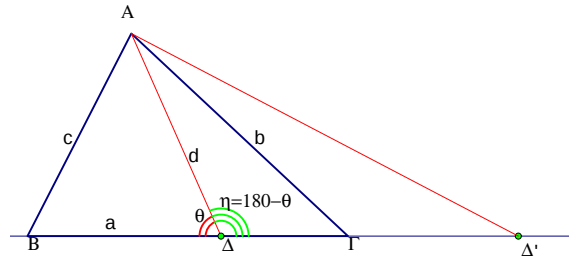
Σχόλιο-6 Οι εξισώσεις αυτές παίζουν ένα κεντρικό ρόλο σε μία σύντομη απόδειξη του ότι η τριχοτόμηση μιάς γωνίας με κανόνα και διαβήτη είναι, εν γένει, αδύνατη ([Bol82, σ. 33], [Doe65, σ. 177], [Kaz70, σ. 54]).

Άσκηση 3.11.4 Έστω E το σημείο τομής των διαγωνίων AG και BD του εγγραφίμου σε κύκλο τετραπλεύρου $ABGD$. Δείξε ότι ισχύει

$$\frac{|AE|}{|EG|} = \frac{|AB||AD|}{|GB||GD|}.$$

3.12 Stewart, διάμεσοι, διχοτόμοι, ύψη

Το θεώρημα του *Stewart* συνδέει την απόσταση ενός σημείου Δ στην βάση $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ με τα μήκη των τμημάτων $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$.



Σχήμα 354: Θεώρημα του *Stewart*

Λήμμα 3.12.1 Έστω Δ σημείο στην πλευρά $B\Gamma$ (ή την προέκτασή της) τριγώνου $AB\Gamma$ και $d = |A\Delta|$. Τότε ισχύει η σχέση

$$\frac{c^2 - d^2 - |B\Delta|^2}{b^2 - d^2 - |\Delta\Gamma|^2} = \mp \frac{|B\Delta|}{|\Delta\Gamma|},$$

όπου το πρόσημο είναι αρνητικό για σημεία Δ εσωτερικά του $B\Gamma$ και θετικό για σημεία εξωτερικά του $B\Gamma$.

Απόδειξη: Αν το Δ είναι εσωτερικό του $B\Gamma$, τότε οι γωνίες $\theta = \angle B\Delta A$ και $\eta = \angle G\Delta A$ είναι παραπληρωματικές και $\sin(\theta) = -\sin(\eta)$. Αν το Δ είναι εξωτερικό του $B\Gamma$ τότε οι γωνίες $\theta = \eta$. Λαμβάνοντας υπόψη αυτήν την παρατήρηση εφαρμόζουμε το θεώρημα των συνημιτόνων στα δύο τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$:

$$\begin{aligned} c^2 &= d^2 + |B\Delta|^2 - 2d|B\Delta|\sin(\theta) \Leftrightarrow c^2 - d^2 - |B\Delta|^2 = -2d|B\Delta|\sin(\theta), \\ b^2 &= d^2 + |\Delta\Gamma|^2 - 2d|\Delta\Gamma|\sin(\eta) \Leftrightarrow b^2 - d^2 - |\Delta\Gamma|^2 = -2d|\Delta\Gamma|\sin(\eta). \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει διαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, ο.ε.δ.

Πρόταση 3.12.1 (Τύπος του *Stewart* 1717-1785 (a)) Αν το σημείο Δ εντός της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ την χωρίζει σε τμήματα $|B\Delta| = \kappa \cdot a$, $|\Delta\Gamma| = \lambda \cdot a$, τότε ισχύει

$$d^2 = b^2\kappa + c^2\lambda - a^2\kappa \cdot \lambda.$$

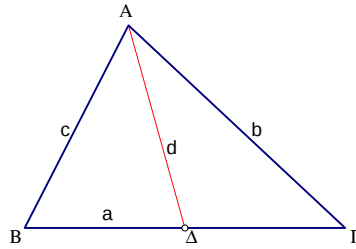
Απόδειξη: Κατ' αρχήν σημείωσε ότι αν γράψουμε τα $|B\Delta|, |\Delta\Gamma|$ με τον τρόπο που λέει η εκφώνηση, τότε $\kappa + \lambda = 1$ αφού $|B\Delta| + |\Delta\Gamma| = |B\Gamma| \Leftrightarrow \kappa a + \lambda a = a$. Η υπόθεση ότι το Δ είναι εντός του $B\Gamma$ συνεπάγεται ότι στον τύπο του προηγούμενου λήμματος πρέπει να πάρουμε το αρνητικό πρόσημο. Επίσης πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι $|B\Delta| + |\Delta\Gamma| = a$. Η σχέση του λήμματος λοιπόν γίνεται

$$\begin{aligned} (c^2 - d^2 - |B\Delta|^2)|\Delta\Gamma| + (b^2 - d^2 - |\Delta\Gamma|^2)|B\Delta| &= 0 \Leftrightarrow \\ c^2|\Delta\Gamma| + b^2|B\Delta| - d^2(|\Delta\Gamma| + |B\Delta|) - |B\Delta||\Delta\Gamma|(|\Delta\Gamma| + |B\Delta|) &= 0 \Leftrightarrow \\ c^2(a\lambda) + b^2(a\kappa) - d^2a - a^3\kappa\lambda &= 0 \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος τύπος προκύπτει διαιρώντας την τελευταία σχέση με το a , ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.12.1 Το μήκος της διαμέσου AD τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με

$$|AD|^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = 2(|AD|^2 + |BD|^2).$$



Σχήμα 355: Το μήκος της διαμέσου

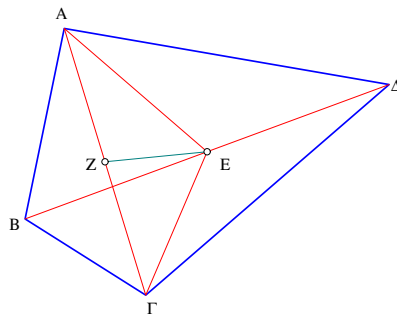
Απόδειξη: Εφαρμογή του προηγούμενου τύπου με $\kappa = \lambda = \frac{1}{2}$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.12.2 Με τους συμβολισμούς του προηγούμενου σχήματος ισχύει:

$$|AD| > \frac{1}{2}(b + c - a).$$

Απόδειξη: Συνδυασμός του προηγούμενου τύπου και της $\frac{1}{2}(b^2 + c^2) > \frac{1}{4}(b + c)^2$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.12.3 Το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών τετραπλεύρου ισοϋείται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του συν το τετραπλάσιο του τμήματος που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του.



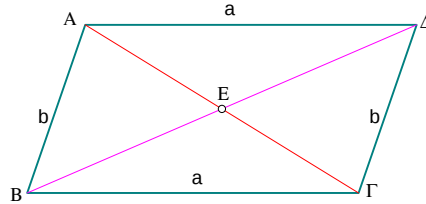
$$\text{Σχήμα 356: } |AB|^2 + |B\Gamma|^2 + |\Gamma\Delta|^2 + |\Delta A|^2 = |A\Gamma|^2 + |B\Delta|^2 + 4|EZ|^2$$

Απόδειξη: Το σχήμα, το συναντήσαμε ήδη στην Άσκηση 2.7.4. Αν $AB\Gamma\Delta$ το τετράπλευρο και Z, E τα μέσα των διαγωνίων AG και BD εφαρμόζουμε τρεις φορές το θεώρημα της διαμέσου, στα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ και $A\Gamma E$.

$$\begin{aligned} |AE|^2 &= \frac{1}{2}(|AB|^2 + |A\Delta|^2) - \frac{1}{4}|BD|^2 \\ |\Gamma E|^2 &= \frac{1}{2}(|\Gamma B|^2 + |\Gamma\Delta|^2) - \frac{1}{4}|BD|^2 \\ |ZE|^2 &= \frac{1}{2}(|AE|^2 + |\Gamma E|^2) - \frac{1}{4}|A\Gamma|^2. \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $|AE|$, $|GE|$ των δύο πρώτων τύπων στον τρίτο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 3.12.4 Το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών του παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

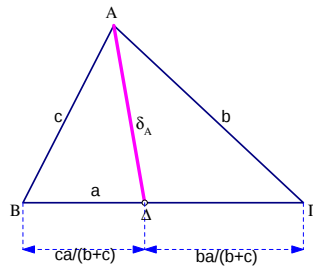


Σχήμα 357: $2(a^2 + b^2) = |AG|^2 + |BD|^2$

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα και το ότι στο παραλληλόγραμμο τα μέσα των διαγωνίων συμπίπτουν, άρα $|EZ| = 0$, ο.ε.δ.

Άσκηση 3.12.1 Δείξε ότι το μήκος δ_A της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$\delta_A^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right).$$



Σχήμα 358: Το μήκος της διχοτόμου

Υπόδειξη: Από το Πόρισμα 3.3.7 ξέρουμε ότι $\frac{|B\Delta|}{|\Delta\Gamma|} = \frac{c}{b}$. Αν πάρουμε $|B\Delta| = \kappa a$, $|\Delta\Gamma| = \lambda a$ ευρίσκουμε $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{c}{b}$ και $a = \kappa a + \lambda a \Rightarrow \kappa + \lambda = 1$. Από αυτές προκύπτει αμέσως ότι

$$\kappa = \frac{c}{b+c}, \quad \lambda = \frac{b}{b+c}.$$

Ο τύπος προκύπτει αμέσως αντικαθιστώντας αυτά τα κ , λ στον τύπο του *Stewart*.

Πρόταση 3.12.2 (Τύπος του Stewart (β)) Αν το σημείο Δ επί της προεκτάσεως της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ την χωρίζει σε τμήματα $|B\Delta| = \kappa \cdot a$, $|\Delta\Gamma| = \lambda \cdot a$, τότε ισχύει

$$d^2 = c^2 \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} - b^2 \frac{\kappa}{\lambda - \kappa} + a^2 \kappa \cdot \lambda.$$

Απόδειξη: Κατ' αρχήν σημειώσε ότι αν γράψουμε τα $|B\Delta|, |\Delta\Gamma|$ με τον τρόπο που λέει η εκφώνηση, τότε $\kappa - \lambda = \pm 1$ αφού $|B\Delta| - |\Delta\Gamma| = \pm a = a\kappa - a\lambda$. Το συν ισχύει όταν $\kappa > \lambda$ δηλαδή τα Γ και Δ είναι στην ίδια από τις δύο ημιευθείες που ορίζει το Β. Αντίστοιχα το μείον ισχύει όταν τα Δ, Γ είναι σε διαφορετικές ημιευθείες του Β. Η απόδειξη προκύπτει με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προέκυψε και η Πρόταση 3.12.1, ο.ε.δ.

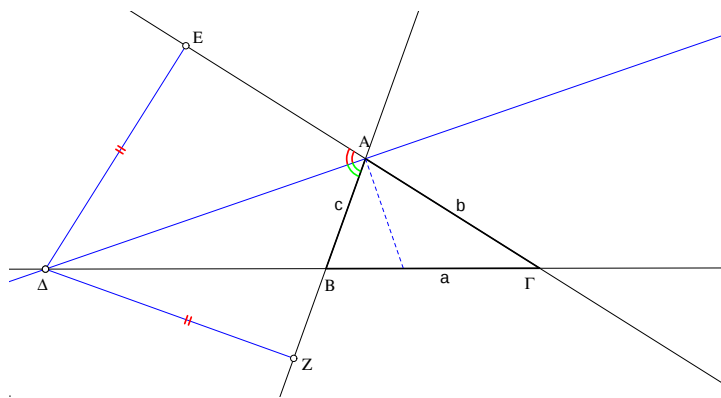
Σχόλιο Το $\lambda - \kappa$ με το οποίο διαιρούμε στον τελευταίο τύπο είναι ± 1 και επιτρέπει να δώσουμε στον τύπο αυτόν εννιαία μορφή. Διαφορετικά θα έπρεπε να γράψουμε δύο τύπους. Λαμβάνοντας υπόψη ότι και στην περίπτωση της Πρότασης 3.12.1 ισχύει $\kappa + \lambda = 1$ μπορούμε να ενωποιήσουμε τους τύπους του *Stewart* σε έναν, όπου, ανάλογα με την θέση του Δ θα πρέπει να εκλέξουμε την σωστή εκδοχή:

$$d^2 = c^2 \frac{\lambda}{\lambda \pm \kappa} \pm b^2 \frac{\kappa}{\lambda \pm \kappa} \mp a^2 \kappa \lambda.$$

Τα πάνω πρόσημα επιλέγουμε όταν το Δ είναι εντός του ΒΓ και τα κάτω όταν είναι εκτός. Έχουμε εδώ μιά περίπτωση που ο (αυτο)περιορισμός μας να θεωρούμε λόγους αποκλειστικά θετικούς δημιουργεί δυσκολίες στην περιγραφή μιάς σχέσης με εννιαίο τρόπο. Το θεώρημα *Stewart* ανήκει στο κεφάλαιο των *προσημασμένων λόγων* (Παράγραφος 5.12) και είναι πόρισμα μιάς σχέσης μεταξύ τεσσάρων σημείων μιάς ευθείας (Άσκηση 5.12.9). Το θεώρημα ωστόσο έχει πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές και έκρινα σκόπιμο να το δούμε από τώρα. Έτσι, περιοριζόμενοι στους θετικούς λόγους (μηκών), πρέπει να προσέχουμε αν το σημείο Δ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό του ΒΓ, ώστε να εφαρμόζουμε τον σωστό τύπο.

Άσκηση 3.12.2 Δείξε ότι το μήκος δ_A της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α ενός τριγώνου ΑΒΓ του οποίου οι προσκείμενες στην Α πλευρές δεν είναι ίσες, δίδεται από τον τύπο

$$\delta_A^2 = b \cdot c \cdot \left(\frac{a^2}{(b-c)^2} - 1 \right).$$

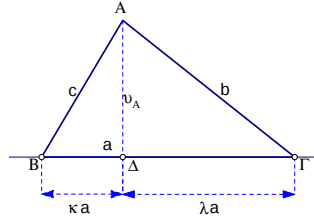


Σχήμα 359: Το μήκος της εξωτερικής διχοτόμου

Υπόδειξη: Δες πρώτα ότι $\kappa = \frac{c}{b-c}, \lambda = \frac{b}{b-c}, \lambda - \kappa = 1$, εφόσον $b > c$ και εφάρμοσε την Πρόταση 3.12.2. Η απαίτηση για μή ίσες πλευρές προσκείμενες στην γωνία Α είναι αναγκαία για την ύπαρξη του Δ , διαφορετικά η ΑΔ είναι παράλληλη της ΒΓ.

Πρόταση 3.12.3 Το τετράγωνο του μήκους του ύψους v_A της γωνίας A οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$v_A^2 = \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$



Σχήμα 360: Το μήκος του ύψους

Απόδειξη: Κατ' αρχήν υπολογίζουμε τα κ και λ που εκφράζουν τα τμήματα $|B\Delta| = \kappa \cdot a$ και $|\Delta\Gamma| = \lambda \cdot a$, στα οποία το ύψος $A\Delta$ χωρίζει την απέναντι πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Ως συνήθως η $\kappa \cdot a + \lambda \cdot a = a$ δίνει $\kappa + \lambda = 1$. Μιά δεύτερη εξίσωση παίρνουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$:

$$v_A^2 = c^2 - (\kappa a)^2 = b^2 - (\lambda a)^2 \Rightarrow \kappa - \lambda = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$

Λύνοντας τις δυο εξισώσεις ως προς κ και λ βρίσκουμε:

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c^2 - b^2}{a^2} \right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2 - b^2}{a^2} \right).$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο του *Stewart* (Πρόταση 3.12.1) αυτά τα κ και λ βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} v_A^2 &= b^2\kappa + c^2\lambda - a^2\kappa\lambda \\ &= \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{c^2 - b^2}{a^2} \right) + \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{c^2 - b^2}{a^2} \right) - \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{c^2 - b^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{c^2 - b^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

Μιά μικρή περιπέτεια στις πράξεις οδηγεί τελικά στην [Καν76, σελ. 128]

$$v_A^2 = \frac{1}{4a^2}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Η παρένθεση παραγοντοποιείται και παίρνει την μορφή που θέλουμε [Καπ96, τομ Α, σελ.39]

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Αυτό το βλέπει κανείς ευκολότερα πηγαίνοντας από τα δεξιά προς τα αριστερά:

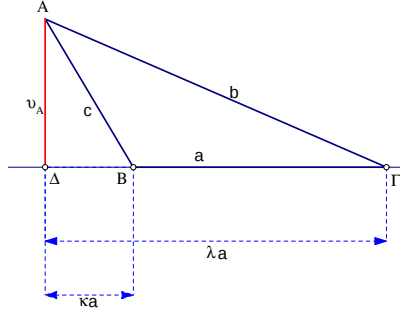
$$\begin{aligned} &(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \\ &= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\ &= (b+c)^2a^2 - a^4 - (b+c)^2(b-c)^2 + a^2(b-c)^2 \\ &= (b^2a^2 + 2bca^2 + c^2a^2) - a^4 - (b^2 - c^2)^2 + (a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) \\ &= (b^2a^2 + 2bca^2 + c^2a^2) - a^4 - (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) + (a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4, \quad \text{ο.ε.δ.} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.12.3 Δείξε ότι ο τύπος για το ύψος AD τριγώνου ισχύει και όταν το ίχνος του Δ είναι εκτός της $B\Gamma$, δηλαδή η γωνία στο B είναι αμβλεία.

Υπόδειξη: Υπολόγισε πρώτα τα κ , λ και δες ότι είναι

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2} - 1 \right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2} + 1 \right).$$

Αντικατάστησε κατόπιν αυτά τα κ , λ στην Πρόταση 3.12.2 και δες ότι προκύπτει πάλι η



$$\text{Σχήμα 361: } v_A^2 = \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

παράσταση

$$\frac{1}{4a^2}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4),$$

που παραγοντοποιείται όπως και στην Πρόταση 3.12.3.

Άσκηση 3.12.4 (Θεώρημα Steiner-Lehmus) Δείξε ότι αν σε ένα τρίγωνο οι δύο εσωτερικές διχοτόμοι είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

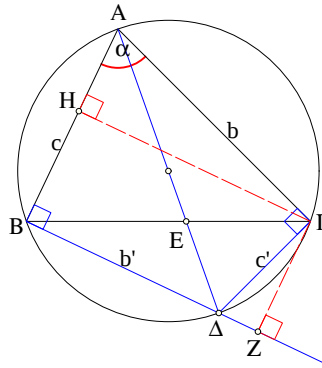
Υπόδειξη: Υπολογιστικά, εφαρμόζοντας την Άσκηση 3.12.1 (δες και παραπομπές για γεωμετρική απόδειξη στο σχόλιο-3 της Παραγράφου 1.9). Εάν δ_A, δ_B και σ είναι αντίστοιχα οι διχοτόμοι και η περίμετρος, τότε (Άσκηση 3.12.1):

$$\begin{aligned} \delta_A - \delta_B &= b \cdot c \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) - c \cdot a \cdot \left(1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} \right) \\ &= c(b-a) - cab \left(\frac{a}{(\sigma-a)^2} - \frac{b}{(\sigma-b)^2} \right) \\ &= c(b-a) - cab(a-b) \frac{\sigma^2 - ab}{(\sigma-a)^2(\sigma-b)^2} \\ &= c(b-a) \left(1 + ab \frac{\sigma^2 - ab}{(\sigma-a)^2(\sigma-b)^2} \right). \end{aligned}$$

Η παρένθεση είναι πάντα θετική, άρα για να μηδενίζεται η παράσταση θα πρέπει $(b-a) = 0$.

Άσκηση 3.12.5 Έστω Δ το αντιδιαμετρικό του A ως προς τον περίκυκλο του τριγώνου $AB\Gamma$. Βάσει του σχήματος 362 δείξε ότι

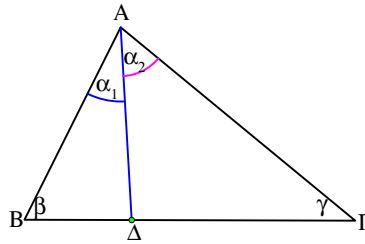
$$c = b \sin(\alpha) + c' \eta\mu(\alpha), \quad b = c \sin(\alpha) + b' \eta\mu(\alpha).$$



Σχήμα 362: Τύποι για αντιδιαμετρικό κορυφής

Άσκηση 3.12.6 Έστω ότι το σημείο Δ στην βάση $B\Gamma$ του οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ορίζει την $A\Delta$, έτσι ώστε $\alpha_1 = |BA\Delta|$, $\alpha_2 = |\Delta A\Gamma|$. Δείξε ότι

$$|A\Delta| = \frac{bc}{a} \cdot \frac{\eta\mu(\beta) \eta\mu(\alpha_1) + \eta\mu(\gamma) \eta\mu(\alpha_2)}{\eta\mu(\beta) \eta\mu(\gamma) + \eta\mu(\alpha_1) \eta\mu(\alpha_2)}.$$



Σχήμα 363: Τύπος του Stewart με γωνίες

Υπόδειξη: Από τον τύπο του ημιτόνου προκύπτει ότι

$$\frac{|A\Delta|}{\eta\mu(\beta)} = \frac{|B\Delta|}{\eta\mu(\alpha_1)} \Rightarrow |B\Delta| = |A\Delta| \frac{\eta\mu(\alpha_1)}{\eta\mu(\beta)}, \quad \frac{|A\Delta|}{\eta\mu(\gamma)} = \frac{|\Gamma\Delta|}{\eta\mu(\alpha_2)} \Rightarrow |\Gamma\Delta| = |A\Delta| \frac{\eta\mu(\alpha_2)}{\eta\mu(\gamma)}.$$

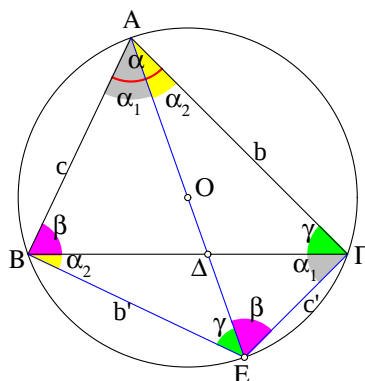
Το συμπέρασμα προκύπτει αντικαθιστώντας στον τύπο του Stewart (Πρόταση 3.12.1) και λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο του ημιτόνου για το τρίγωνο $AB\Gamma$.

Άσκηση 3.12.7 Έστω E το αντιδιαμετρικό του A ως προς το περίκεντρο O του οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ και Δ το σημείο στο οποίο η AE τέμνει την $B\Gamma$. Δείξε ότι

$$\frac{|A\Delta|}{|E\Delta|} = \varepsilon\varphi(\beta) \varepsilon\varphi(\gamma), \quad \frac{|B\Delta|}{|\Delta\Gamma|} = \frac{\eta\mu(2\beta)}{\eta\mu(2\gamma)}.$$

Υπόδειξη: Κατά την Άσκηση 3.12.6 θα ισχύει (σχήμα 364)

$$|A\Delta| = \frac{bc}{a} \cdot \frac{\eta\mu(\beta) \eta\mu(\alpha_1) + \eta\mu(\gamma) \eta\mu(\alpha_2)}{\eta\mu(\beta) \eta\mu(\gamma) + \eta\mu(\alpha_1) \eta\mu(\alpha_2)}, \quad |E\Delta| = \frac{b'c'}{a} \cdot \frac{\eta\mu(\alpha_2) \eta\mu(\gamma) + \eta\mu(\alpha_1) \eta\mu(\beta)}{\eta\mu(\alpha_1) \eta\mu(\alpha_2) + \eta\mu(\beta) \eta\mu(\gamma)}.$$



Σχήμα 364: Γινόμενο συνεφαπτομένων

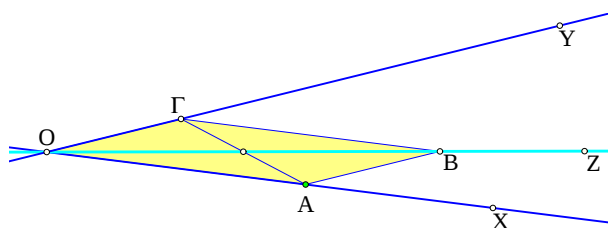
Διαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{|A\Delta|}{|E\Delta|} = \frac{bc}{b'c'} = \left(\frac{b}{c'}\right) \left(\frac{c}{b'}\right) = \varepsilon\varphi(\beta) \varepsilon\varphi(\gamma).$$

Γιά την δεύτερη χρησιμοποιούμε πάλι την προηγούμενη άσκηση που συνεπάγεται ότι

$$\frac{|B\Delta|}{|\Delta\Gamma|} = \frac{\frac{\eta\mu(\alpha_1)}{\eta\mu(\beta)}}{\frac{\eta\mu(\alpha_2)}{\eta\mu(\gamma)}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu(\gamma)}{\eta\mu(\beta)}}{\frac{\sigma\upsilon\nu(\beta)}{\eta\mu(\gamma)}} = \frac{\eta\mu(2\gamma)}{\eta\mu(2\beta)}.$$

Άσκηση 3.12.8 Από σημείο A της πλευράς OX γωνίας XOY να αχθεί ευθύγραμμο τμήμα AG έτσι ώστε το μέσον του να περιέχεται σε δοθείσα ευθεία OZ στο εσωτερικό της γωνίας XOY .



Σχήμα 365: Τμήματα διχοτομούμενα από ευθεία

Άσκηση 3.12.9 Δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος AB , δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία το άθροισμα $|XA|^2 + |XB|^2 = \kappa$ είναι σταθερό, είναι κύκλος με κέντρο στο μέσον του AB .

Άσκηση 3.12.10 Κατασκεύασε τρίγωνο του οποίου δίδεται η πλευρά $a = |BG|$ το ύψος u_A από το A και το άθροισμα $|AB|^2 + |AG|^2$.

Άσκηση 3.12.11 Κατασκεύασε τρίγωνο του οποίου δίδεται η πλευρά $a = |BG|$ η γωνία $\alpha = |\angle BAG|$ και η διαφορά $|AB|^2 - |AG|^2$.

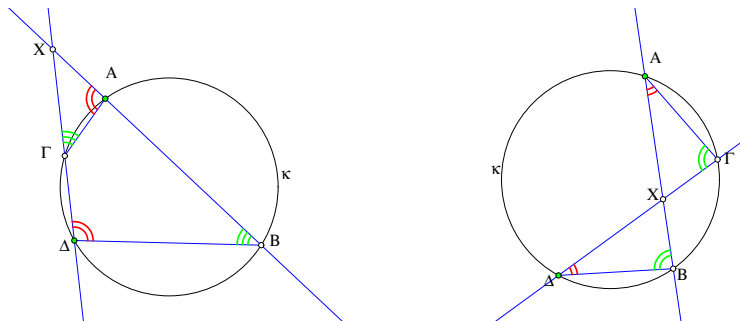
Κεφάλαιο 4

Η δύναμη του κύκλου

4.1 Δύναμη ως προς κύκλο

Μιά σημαντική ιδιότητα του κύκλου που σχετίζεται με την ομοιότητα είναι αυτή της **Δύναμης σημείου ως προς κύκλο**. Η ιδιότητα αυτή στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.1 Δοθέντος κύκλου κ και σημείου X έστω ότι ευθεία διά του X τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B . Τότε το γινόμενο $|XA||XB|$ είναι ανεξάρτητο της κατεύθυνσης της ευθείας και εξαρτάται μόνον από την θέση του σημείου ως προς τον κύκλο.



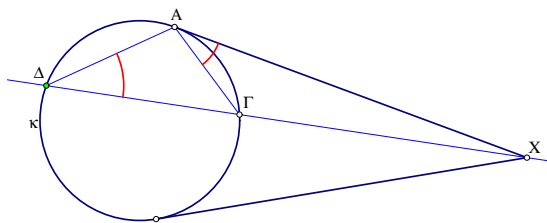
Σχήμα 366: Δύναμη σημείου ως προς κύκλο $|XA||XB|$

Απόδειξη: Θεώρησε δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το X και τέμνουν τον κύκλο κ στα σημεία (A,B) και (Γ,Δ) αντίστοιχα. Τα τρίγωνα που σχηματίζονται XAG και XDB είναι όμοια (Πόρισμα 2.14.1). Συνεπώς έχουν πλευρές ανάλογες:

$$\frac{|XA|}{|X\Gamma|} = \frac{|X\Delta|}{|XB|} \Rightarrow |XA||XB| = |X\Gamma||X\Delta|,$$

ο.ε.δ.

Τον αριθμό $p(X) = |XA||XB|$ αν το σημείο είναι εξωτερικό, $p(X) = -|XA||XB|$ αν το σημείο είναι εσωτερικό και $p(X) = 0$ αν το X είναι επί του κύκλου ονομάζουμε **Δύναμη του σημείου X ως προς τον κύκλο κ** . Στην περίπτωση που το X είναι εξωτερικό σημείο έχουμε δύο ειδικές θέσεις της ευθείας, τις εφαπτόμενες από το X . Μπορούμε να θεωρήσουμε την θέση αυτή οριακή, κατά την οποία τα A και B συμπίπτουν. Και πάλι σχηματίζονται

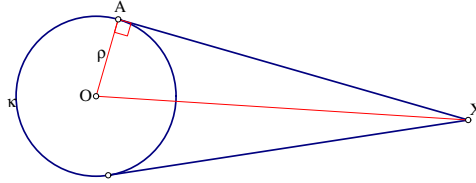


Σχήμα 367: Δύναμη και εφαπτόμενη $|XA|^2 = |X\Gamma||X\Delta|$

όμοια τρίγωνα XAG και XDA , λόγω του ότι η εγγεγραμμένη γωνία XDA είναι ίση με την GAX που σχηματίζεται από την χορδή GA και την εφαπτόμενη στο άκρο της A (Πρόταση 2.13.4). Έτσι προκύπτει ότι $\frac{|XA|}{|X\Gamma|} = \frac{|X\Delta|}{|XA|}$, που συνεπάγεται ότι $p(X) = |X\Gamma||X\Delta| = |XA|^2$. Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο πόρισμα.

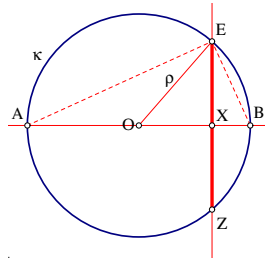
Πόρισμα 4.1.1 Για κάθε σημείο X εξωτερικό του κύκλου κ η δύναμη $p(X)$ ισούται με το τετράγωνο της εφαπτομένης του κ από το X .

Μιά τρίτη έκφραση της δύναμης $p(X)$ βρίσκουμε φέρνοντας την XO που συνδέει το σημείο X με το κέντρο O του κύκλου κ . Αν A είναι το σημείο επαφής της εφαπτόμενης XA από το X , τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο OAX έχουμε $p(X) = |XA|^2 = |XO|^2 - \rho^2$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Για σημεία X εσωτερικά του κύκλου δεν υπάρχουν εφαπτόμενες προς



Σχήμα 368: $p(X) = |XA|^2 = |XO|^2 - \rho^2$

αυτόν. Ωστόσο η προηγούμενη έκφραση, αυτή τη φορά με αντίθετο πρόσημο, δίνει πάλι την δύναμη του σημείου. Αυτό φαίνεται φέρνοντας την χορδή του κύκλου που διέρχεται από το X και είναι κάθετη στην XO . Ο ορισμός της δύναμης του X και το ορθογώνιο τρίγωνο OXE



Σχήμα 369: $p(X) = |XO|^2 - \rho^2$

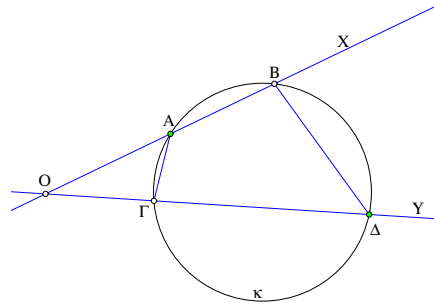
οδηγούν στην: $-p(X) = |XA||XB| = |XE|^2 = \rho^2 - |OX|^2$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι για σημεία του κύκλου $p(X) = \rho^2 - |OX|^2 = 0$ έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.1.1 Δοθέντος κύκλου $\kappa(O, \rho)$ κέντρου O και ακτίνας ρ , η δύναμη οποιουδήποτε σημείου X του επιπέδου ως προς τον κύκλο κ δίδεται από τον τύπο

$$p(X) = |OX|^2 - \rho^2.$$

Πρόταση 4.1.2 Δοθέντων δύο τεμνομένων ευθειών OX και OY τα σημεία A, B επί της OX και Γ, Δ επί της OY είναι ομοκυκλικά τότε και μόνον όταν $|OA||OB| = |O\Gamma||O\Delta|$.

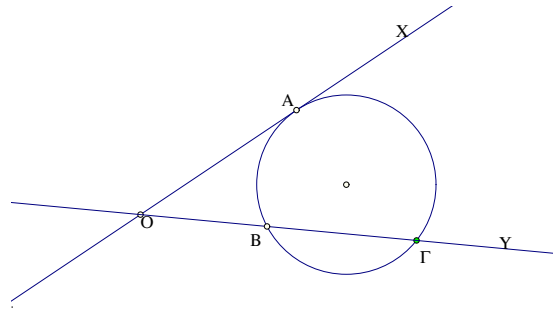
Απόδειξη: Όπως είδαμε, όταν τα A, B, Γ και Δ είναι στον ίδιο κύκλο (ομοκυκλικά) τότε ισχύει η ισότητα. Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η ισότητα και κ είναι ο κύκλος που διέρχεται από τα τρία σημεία: A, B και Γ (Πρόταση 2.1.3). Έστω Δ' το δεύτερο σημείο τομής αυτού του κύκλου με την OY . Τότε κατά το Θεώρημα 4.1.1 $|OA||OB| = |O\Gamma||O\Delta'|$. Αλλά εξ υποθέσεως έχουμε και ότι $|OA||OB| = |O\Gamma||O\Delta|$ και επομένως $|O\Delta'| = |O\Delta|$ και τα Δ και Δ' ταυτίζονται, ο.ε.δ.



Σχήμα 370: Κριτήριο ομοκυκλικότητας

Πρόταση 4.1.3 Δίδονται τρία μη συνευθειακά σημεία, A στην ευθεία OX και B, Γ στην ευθεία OY . Ο κύκλος $(AB\Gamma)$ εφάπτεται της OX στο A τότε και μόνον, όταν

$$|OA|^2 = |OB||O\Gamma|.$$

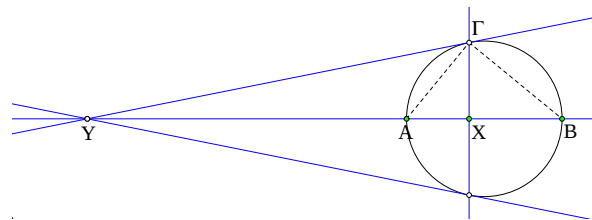
Σχήμα 371: Κύκλος $(AB\Gamma)$ εφαπτόμενος της OX στο A

Απόδειξη: Αν η OA είναι εφαπτόμενη στον $(AB\Gamma)$ στο A , τότε η σχέση ισχύει κατά το Πόρισμα 4.1.1. Αντίστροφα, αν ισχύει η σχέση και υποθέσουμε ότι η OX τέμνει τον $(AB\Gamma)$ στα σημεία A και A' , τότε, κατά την Πρόταση 4.1.2 θα ισχύει $|OA||OA'| = |OB||O\Gamma|$. Όμως εξ υποθέσεως ισχύει και $|OA|^2 = |OB||O\Gamma|$, η οποία συνδυαζόμενη με την προηγούμενη δίνει $|OA| = |OA'|$, που σημαίνει ότι τα A και A' ταυτίζονται, ο.ε.δ.

Πρόταση 4.1.4 Τα συνευθειακά σημεία A, B , και X, Y είναι αρμονικά συζυγή τότε και μόνον, όταν

$$p(Y) + p(X) = |XY|^2,$$

όπου $p(X), p(Y)$ οι δυνάμεις των σημείων ως προς τον κύκλο με διάμετρο AB .



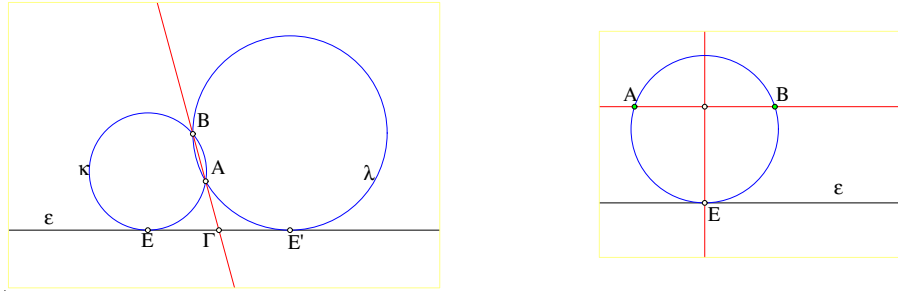
Σχήμα 372: Χαρακτηρισμός αρμονικής τετράδας

Απόδειξη: Προκύπτει από το Πόρισμα 1.17.5 και το ότι

$$p(Y) = |YA||YB| = |Y\Gamma|^2, \quad -p(X) = |XA||XB| = |X\Gamma|^2,$$

όπου $Y\Gamma$ η εφαπτόμενη του κύκλου από το Y , υποτιθέμενο εκτός του κύκλου, ο.ε.δ.

Άσκηση 4.1.1 Κατασκευάσε κύκλο κ έτσι ώστε να διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία A και B και να εφάπτεται δοθείσης ευθείας ε .



Σχήμα 373: Κύκλος διά των A, B και εφάπτομενος ευθείας

Υπόδειξη: Έστω ότι ο ζητούμενος κύκλος κατασκευάστηκε. Έστω Γ το σημείο τομής της AB με την δοθείσα ευθεία ε και E το σημείο επαφής του κύκλου με την ε . Το Γ προσδιορίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος και η δύναμή του ως προς τον κύκλο θα είναι $p(\Gamma) = |\Gamma A||\Gamma B| = |\Gamma E|^2$. Άρα το μήκος $|\Gamma E|$ και επομένως η θέση του E προσδιορίζεται επίσης από τα δεδομένα. Συνεπώς προσδιορίζεται και ένα ακόμη σημείο (E) από το οποίο θα διέρχεται ο κύκλος. Εν γένει υπάρχουν δύο λύσεις που αντιστοιχούν σε δύο θέσεις του E συμμετρικές ως προς το Γ . Σημείωσε ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση όταν τα σημεία A και B ευρίσκονται σε διαφορετικές μεριές της ε . Σημείωσε επίσης ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχει το Γ , δηλαδή η ευθεία AB είναι παράλληλη της ε , το πρόβλημα έχει μία μόνο λύση και το E προσδιορίζεται τέμνοντας την μεσοκάθετο του AB με την ε .

Άσκηση 4.1.2 Η διάμεσος AM δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον περίκυκλο του τριγώνου στο Δ . Δείξε ότι

$$|AM||A\Delta| = \frac{1}{2}(|AB|^2 + |A\Gamma|^2).$$

Άσκηση 4.1.3 Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τμήγμα του οποίου δίδεται η υποτείνουσα και η διάμεσος προς μία κάθετη πλευρά.

Άσκηση 4.1.4 Δίδονται σημεία A και B εκατέρωθεν ευθείας ε και σημείο X κινούμενο επ' αυτής. Να ευρεθεί η θέση του X για την οποία το $|XA|^2 + |XB|^2$ καθίσταται ελάχιστο.

Άσκηση 4.1.5 Η χορδή $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη της διαμέτρου AB του κύκλου κ . Δείξε ότι για κάθε σημείο X της διαμέτρου AB ισχύει $|X\Gamma|^2 + |X\Delta|^2 = |XA|^2 + |XB|^2$.

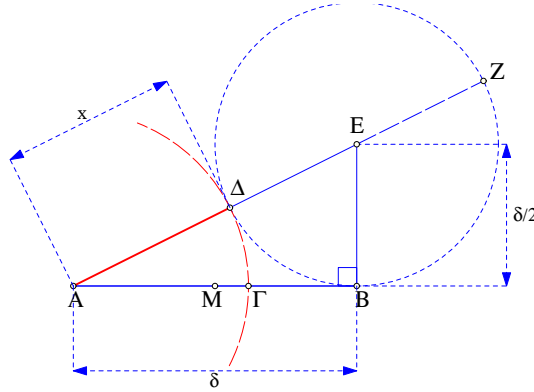
Άσκηση 4.1.6 Δίδεται σημείο X στην χορδή AB κύκλου κ . Να κατασκευασθεί χορδή $\Gamma\Delta$ παράλληλη της AB έτσι ώστε η γωνία $\Gamma X\Delta$ να είναι ορθή.

4.2 Χρυσή τομή, κανονικό πεντάγωνο

Κατασκευή 4.2.1 (Χρυσή τομή) Κατασκεύασε σημείο Γ που διαιρεί δοθέν ευθύγραμμο τμήμα AB σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή

$$\frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|} \Leftrightarrow |A\Gamma|^2 = |AB||B\Gamma|.$$

(Ο λόγος ολόκληρου προς το μεγάλο ισούται με τον λόγο του μεγάλου προς το μικρό τμήμα.)



Σχήμα 374: Χρυσή τομή

Απόδειξη: Σχημάτισε ορθογώνιο τρίγωνο ABE με $|BE| = \frac{\delta}{2}$, όπου $\delta = |AB|$. Επί της υποτείνουσας EA πάρε σημείο Δ : $|ED| = |EB|$. Ο κύκλος κ με κέντρο A και ακτίνα AD τέμνει την AB στο ζητούμενο σημείο Γ . Αυτό προκύπτει από την δύναμη του A ως προς τον κύκλο κ .

$$|AB|^2 = |A\Delta||AZ| \Leftrightarrow \delta^2 = x(x + \delta),$$

όπου $x = |A\Delta| = |A\Gamma|$. Παίρνουμε λοιπόν την εξίσωση ως προς x :

$$x^2 + x\delta - \delta^2 = 0,$$

που έχει μία λύση αρνητική και απορριπτέα και μία θετική

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\delta = (0,61803398874989484820\dots) \cdot \delta,$$

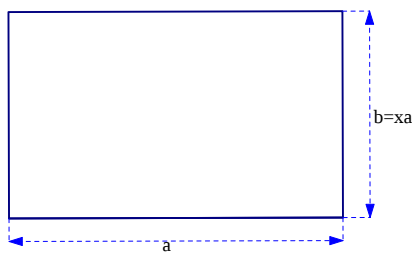
για την οποία διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη

$$\frac{\delta}{x} = \frac{x}{\delta - x} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|},$$

ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Ο θετικός αριθμός $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, που είναι ρίζα της εξίσωσης

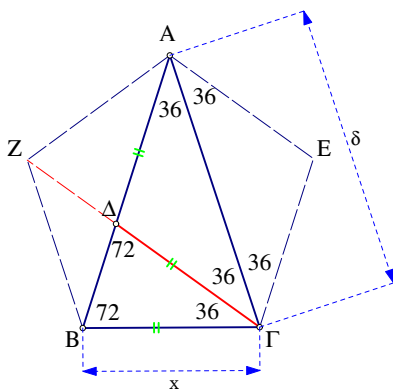
$$x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 + x$$



Σχήμα 375: Ορθογώνιο χρυσής τομής

ορίζει τον ονομαζόμενο **Λόγο της χρυσής τομής**. Αυτός θεωρείται ότι δίνει το πιο καλαίσθητο ορθογώνιο, που είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου η μικρή προς την μεγάλη πλευρά έχει λόγο ακριβώς x . Το ορθογώνιο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί και στην κατασκευή του Παρθενώνα. Μιά άλλη χρήση του είναι αυτή του ισοσκελούς με γωνία κορυφής 36 μοιρών, που οδηγεί στην κατασκευή του κανονικού πενταγώνου.

Κατασκευή 4.2.2 Να κατασκευασθεί ισοσκελές με γωνία κορυφής 36 μοιρών.



Σχήμα 376: Ισοσκελές με γωνία κορυφής 36 μοιρών

Απόδειξη: Από το ότι οι άλλες δύο γωνίες θα έχουν άθροισμα $180-36=144$, έπεται ότι οι δύο βασικές γωνίες του ισοσκελούς θα είναι 72 μοίρες, που είναι διπλάσιο του 36. Συνεπώς η διχοτόμος $\Gamma\Delta$ θα ορίζει επίσης ισοσκελές $\Gamma\Delta B$ όμοιο του $AB\Gamma$. Επίσης θα είναι $|\Delta A| = |\Delta\Gamma| = |B\Gamma|$. Από τις αναλογίες των ομοίων τριγώνων λοιπόν συμπεραίνουμε, θέτοντας $|A\Gamma| = \delta$ και $|B\Gamma| = x$:

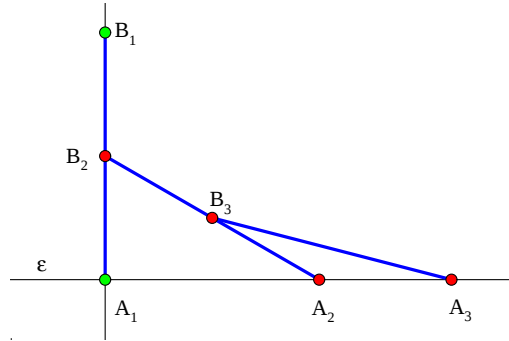
$$\frac{|B\Gamma|}{|A\Gamma|} = \frac{|B\Delta|}{|B\Gamma|} \Leftrightarrow \frac{x}{\delta} = \frac{\delta - x}{x} \Leftrightarrow x^2 + \delta x - \delta^2 = 0,$$

που σημαίνει ότι το σημείο Δ διαιρεί το AB σε μέσο και άκρο λόγο (Κατασκευή 4.2.1). Επομένως, δοθέντος του μήκους $\delta = |AB|$ το μήκος της $|B\Gamma|$ ευρίσκεται από την προηγούμενη κατασκευή και το ισοσκελές κατασκευάζεται ως τρίγωνο του οποίου είναι γνωστά τα μήκη των πλευρών, ο.ε.δ.

Άσκηση 4.2.1 Έστω $AB\Gamma$ ισοσκελές με γωνία κορυφής A μέτρου 36 μοιρών. Δείξε ότι φέρνοντας από τις κορυφές του ευθείες με κλίση 36 μοιρών προς τα σκέλη του (σχήμα-376), σχηματίζεται κανονικό πεντάγωνο.

Άσκηση 4.2.2 Κατασκεύασε κανονικό πεντάγωνο με μήκος πλευράς a .

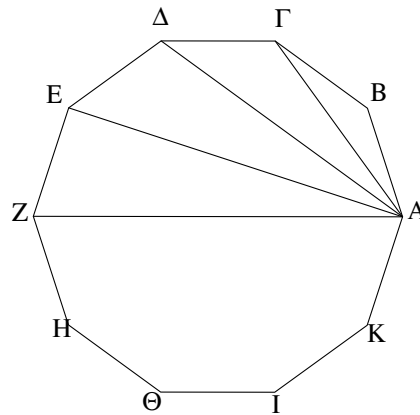
Άσκηση 4.2.3 Ξεκινώντας με ένα κάθετο στην ευθεία ϵ ευθύγραμμο τμήμα A_1B_1 κατασκεύασε δύο άλλα A_2B_2, A_3B_3 , που καθένα ακουμπά στην μέση του άλλου. Δείξε ότι τα σημεία A_1, A_2, A_3 ορίζουν τον λόγο της χρυσής τομής $\frac{|A_2A_3|}{|A_1A_2|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ([Nie11]).



Σχήμα 377: Απλή κατασκευή χρυσής τομής

Άσκηση 4.2.4 Δείξε ότι για τις διαγώνιες του κανονικού δεκαγώνου όπως στο επόμενο σχήμα ισχύουν οι τύποι ($x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$):

$$\frac{|AB|}{|AZ|} = \frac{x}{2}, \quad \frac{|AG|}{|AE|} = x, \quad \frac{|AD|}{|AZ|} = \frac{1+x}{2}.$$



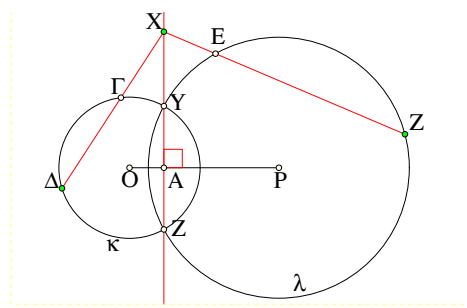
Σχήμα 378: Χρυσή τομή στο δεκάγωνο

Άσκηση 4.2.5 Δείξε ότι ένα ορθογώνιο a με πλευρές μήκους $x < y$ μπορεί να χωριστεί σε ένα τετράγωνο τ με πλευρά μήκους x και ένα ορθογώνιο σ με πλευρές μήκους $y - x, x$ έτσι ώστε το σ να είναι όμοιο του a , τότε και μόνον όταν ο λόγος $\frac{x}{y}$ είναι αυτός της χρυσής τομής.

Άσκηση 4.2.6 Υπολόγισε τα $\eta\mu(36)$, $\sigma\upsilon\nu(36)$, $\eta\mu(72)$, $\sigma\upsilon\nu(72)$ και έκφρασέ τα με την βοήθεια του λόγου x της χρυσής τομής.

4.3 Ριζικός άξονας, Ριζικό κέντρο

Ο **Ριζικός άξονας** δύο μη-ομοκεντρικών κύκλων κ και λ ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X που έχουν ίσες δυνάμεις ως προς τους κύκλους κ και λ . Η απλούστερη περίπτωση είναι αυτή που οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία A και B .



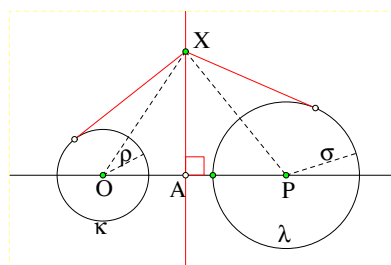
Σχήμα 379: Ριζικός άξονας τεμνομένων κύκλων

Πρόταση 4.3.1 Ο ριζικός άξονας δύο κύκλων είναι ευθεία κάθετη στην διάκεντρο.

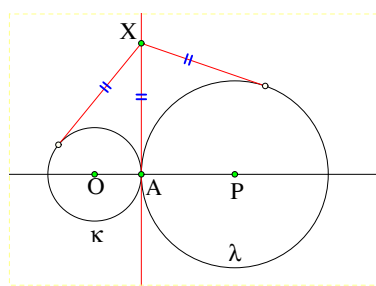
Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι οι δύο κύκλοι είναι οι $\kappa(O, \rho)$ (κέντρου O και ακτίνας ρ) και $\lambda(P, \sigma)$. Για σημείο X του επιπέδου η ισότητα των δυνάμεων ως προς τους δύο κύκλους σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} |XO|^2 - \rho^2 &= |XP|^2 - \sigma^2 \Leftrightarrow \\ |XO|^2 - |XP|^2 &= \rho^2 - \sigma^2 \Leftrightarrow \\ |OA|^2 - |AP|^2 &= \rho^2 - \sigma^2. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την προηγούμενη εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα OAX και PAX , όπου A η προβολή του X επί της διακέντρου OP . Από την ισότητα αυτή, προκύπτει ότι η θέση της προβολής A του X είναι ανεξάρτητη της θέσης του X και προσδιορίζεται πλήρως από τα OP , ρ και σ . Αντίστροφα, επειδή οι προηγούμενες ισότητες είναι ισοδύναμες, αν το X ανήκει στην ευθεία την κάθετη στην OP διά του A , τότε θα ισχύει η τελευταία, άρα και η πρώτη, δηλαδή το X θα έχει την ίδια δύναμη ως προς τους δύο κύκλους, ο.ε.δ.



(α)



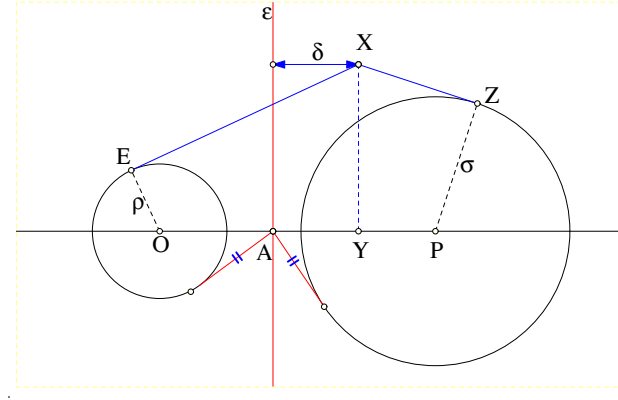
(β)

Σχήμα 380: Ριζικός άξονας (α) μη τεμνομένων, (β) εφαπτομένων κύκλων

Πρόταση 4.3.2 Η διαφορά των δυνάμεων $|p_\kappa(X) - p_\lambda(X)|$ ενός σημείου X ως προς δύο κύκλους $\kappa(O, \rho)$ και $\lambda(P, \sigma)$ δίδεται από τον τύπο

$$|p_\kappa(X) - p_\lambda(X)| = 2|OP| \cdot \delta,$$

όπου δ η απόσταση του X από τον ριζικό άξονα.



Σχήμα 381: Διαφορά δυνάμεων ως προς δύο κύκλους

Απόδειξη: Πράγματι, ισχύει

$$\begin{aligned} p_\kappa(X) - p_\lambda(X) &= (|XO|^2 - \rho^2) - (|XP|^2 - \sigma^2) \\ &= (|XO|^2 - |XP|^2) - (\rho^2 - \sigma^2) \\ &= (|OY|^2 - |PY|^2) - (\rho^2 - \sigma^2) \\ &= (|OY|^2 - |PY|^2) - ((|OA|^2 - p_\kappa(A)) - (|PA|^2 - p_\lambda(A))) \\ &= (|OY|^2 - |PY|^2) - (|OA|^2 - |PA|^2) \\ &= |OP|(|OY| - |PY|) - |OP|(|OA| - |PA|) \\ &= |OP|(|OY| - |OA| + |PA| - |PY|) = \pm 2|OP| \cdot \delta. \end{aligned}$$

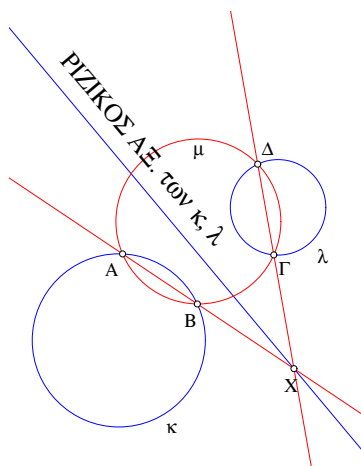
Το Y εδώ είναι η προβολή του X στην διάκεντρο και το A είναι η τομή της διακέντρου με τον ριζικό άξονα, για το οποίο ισχύει $p_\kappa(A) = p_\lambda(A)$. Το ζητούμενο προκύπτει παίρνοντας απόλυτες τιμές, ο.ε.δ.

Πόρισμα 4.3.1 Η δύναμη $p_\kappa(X)$ σημείου X του κύκλου $\lambda(P, \sigma)$ ως προς κύκλο $\kappa(O, \rho)$ ισούται με $p_\kappa(X) = \pm 2|OP|\delta$, όπου δ η απόσταση του X από τον ριζικό άξονα των δύο κύκλων.

Άσκηση 4.3.1 Ο ριζικός άξονας δύο κύκλων κ και λ που τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία A και B είναι η ευθεία AB .

Άσκηση 4.3.2 Δείξε ότι αν δύο κύκλοι εφάπτονται τότε ο ριζικός άξονάς τους συμπίπτει με την κοινή εφαπτομένη τους στο σημείο επαφής τους.

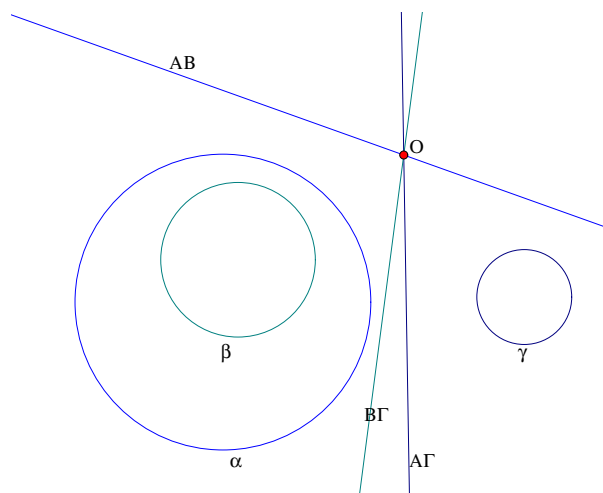
Άσκηση 4.3.3 Δίδονται δύο κύκλοι κ και λ . Τρίτος κύκλος μ τέμνει τον κ σε δύο σημεία A και B και τον λ σε δύο σημεία Γ και Δ . Δείξε ότι οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται επί του ριζικού άξονος των κ και λ .



Σχήμα 382: Κοινές χορδές τεμνόμενες επί του ριζικού άξονος

Υπόδειξη: Το σημείο τομής X των AB και AG έχει δύναμη ως προς κ και λ αντίστοιχα $|XA||XB|$, $|XΓ||XΔ|$. Τα γινόμενα αυτά όμως είναι ίσα (Πρόταση 4.1.2).

Θεώρημα 4.3.1 Οι ριζικοί άξονες τριών κύκλων, των οποίων τα κέντρα δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία, διέρχονται από κοινό σημείο.

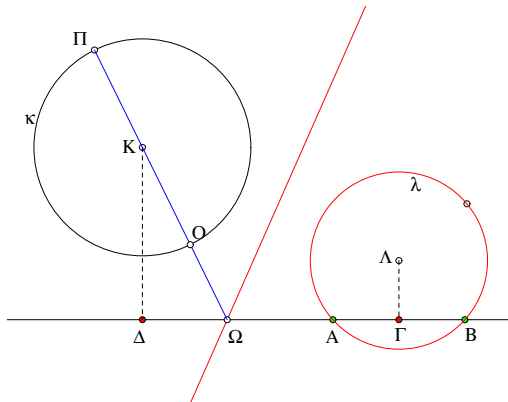


Σχήμα 383: Ριζικό κέντρο τριών κύκλων

Απόδειξη: Έστω O το σημείο τομής των ριζικών αξόνων AB και $BΓ$ των ζευγών κύκλων (α, β) και (β, γ) αντίστοιχα. Το σημείο O έχει την ίδια δύναμη ως προς τους α και β καθώς και ως προς τους β και γ , άρα και την ίδια δύναμη ως προς τους α και γ . Συνεπώς περιέχεται και στον ριζικό άξονα $ΑΓ$ του ζεύγους κύκλων (α, γ) . Άρα και ο ριζικός άξονας $ΑΓ$ αυτού του ζεύγους διέρχεται από το O . Σημείωσε ότι η απαίτηση της μη συγγραμμικότητας των τριών κέντρων εξασφαλίζει την ύπαρξη του O . Αν τα τρία κέντρα ήσαν συγγραμμικά, τότε οι ριζικοί τους άξονες ανά δύο θα ήσαν παράλληλοι, αφού είναι πάντοτε κάθετοι στην διάκεντρό τους. ο.ε.δ.

Το σημείο τομής των τριών ριζικών αξόνων, που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση, λέγεται **Ριζικό κέντρο** των τριών κύκλων.

Άσκηση 4.3.4 Δίδονται δύο σημεία A και B καθώς και κύκλος κ μη διερχόμενος δι' αυτών. Έστω δεύτερος κύκλος λ διερχόμενος διά των A, B . Δείξε ότι ο ριζικός άξονας των κ και λ διέρχεται πάντοτε από σταθερό σημείο Ω .



Σχήμα 384: Μεταβαλλόμενος ριζικός άξονας

Υπόδειξη: Παρατήρησε πρώτα ότι οι προβολές Δ και Γ των κέντρων K, Λ του κ και των μεταβλητών κύκλων λ είναι σταθερά σημεία προσδιοριζόμενα από τα δεδομένα της άσκησης. Υπολόγισε κατόπιν τις δυνάμεις $p_\kappa(\Omega), p_\lambda(\Omega)$ του Ω ως προς τους κ και λ αντίστοιχα.

$$p_\kappa(\Omega) = |\Omega O| |\Omega \Pi| = (|\Omega K| - |KO|)(|\Omega K| + |KO|) = |\Omega K|^2 - |KO|^2,$$

όπου O, Π τα σημεία τομής της ΩK με τον κ . Από το πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμοζόμενο στο $K\Delta\Omega$ έχουμε τελικά

$$p_\kappa(\Omega) = |\Omega K|^2 - |KO|^2 = |K\Delta|^2 + |\Delta\Omega|^2 - |KO|^2.$$

Επίσης η δύναμη του Ω ως προς τον λ είναι

$$p_\lambda(\Omega) = |\Omega A| |\Omega B| = (|\Omega \Gamma| + |\Gamma B|)(|\Omega \Gamma| - |\Gamma B|) = |\Omega \Gamma|^2 - |\Gamma B|^2.$$

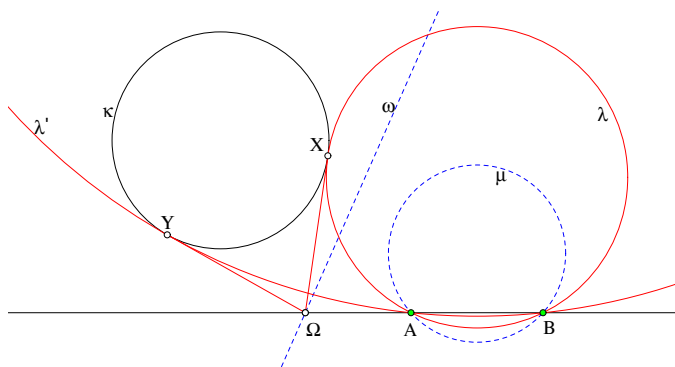
Από την ισότητα των δυνάμεων προκύπτει ότι

$$|\Omega \Delta|^2 - |\Omega \Gamma|^2 = |KO|^2 - |K\Delta|^2 - |\Gamma B|^2.$$

Το δεξί μέλος της ισότητας είναι σταθερό και ανεξάρτητο του Ω , συνεπώς η θέση του Ω θα ορίζεται μονοσήμαντα από τα δεδομένα. Η θέση του Ω ευρίσκεται λύνοντας την τελευταία εξίσωση. Προς τούτο όρισε το $x = |\Omega \Delta|$, το $y = |\Omega \Gamma|$ και θέσε $d = |KO|^2 - |K\Delta|^2 - |\Gamma B|^2$ και $e = |\Delta \Gamma|$. Τότε η εξίσωση γράφεται $x^2 - y^2 = d$ και ισχύει (αν το Ω είναι μεταξύ των Δ και Γ) $x + y = e$. Λύνοντας βρίσκουμε $(x - y)(x + y) = d \Rightarrow x - y = \frac{d}{e}$ και συνεπώς $x = \frac{1}{2}(e + \frac{d}{e})$, $y = \frac{1}{2}(e - \frac{d}{e})$. (δες και την Πρόταση 4.5.2)

Άσκηση 4.3.5 Διερεύνησε τις διάφορες περιπτώσεις που προκύπτουν γιά την θέση του Ω μεταξύ των Γ και Δ στην προηγούμενη άσκηση. Ιδιαίτερα εξέτασε την περίπτωση που τα Γ και Δ συμπίπτουν. Τι συμβαίνει τότε με τους ριζικούς άξονες των κ και λ ;

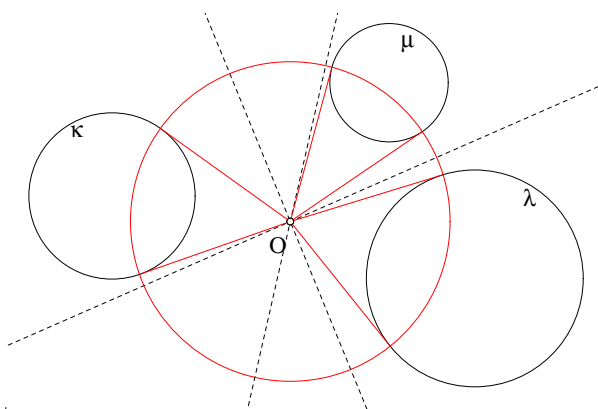
Άσκηση 4.3.6 Δίδεται κύκλος κ και δύο σημεία εκτός αυτού. Να βρεθεί δεύτερος κύκλος λ διερχόμενος διά των A, B και εφαπτόμενος του κ .



Σχήμα 385: Κύκλος εφαπτόμενος άλλου και διερχόμενος από δύο σημεία

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι ο ζητούμενος κύκλος λ κατασκευάστηκε και εφάπτεται του κ στο σημείο X . Βάσει της προηγούμενης άσκησης η κοινή εφαπτόμενη των δύο κύκλων στο X , που είναι και ο ριζικός τους άξονας (Άσκηση 4.3.2) θα διέρχεται από σταθερό σημείο Ω της AB που κατασκευάζεται από τα δεδομένα του προβλήματος. Κατασκεύασε λοιπόν το Ω και φέρε από αυτό τις εφαπτόμενες ΩX και ΩY στον κ . Υπάρχουν δύο λύσεις του προβλήματος λ, λ' που αντιστοιχούν στους κύκλους που διέρχονται από τα A, B και X ή Y αντίστοιχα (Πρόταση 2.1.3) ([Παπ81, π. 109]).

Άσκηση 4.3.7 Δοθέντων τριών κύκλων με μη συνευθειακά κέντρα να βρεθεί σημείο από το οποίο άγονται ίσες εφαπτόμενες προς αυτούς.



Σχήμα 386: Ίσες εφαπτόμενες προς τρεις κύκλους

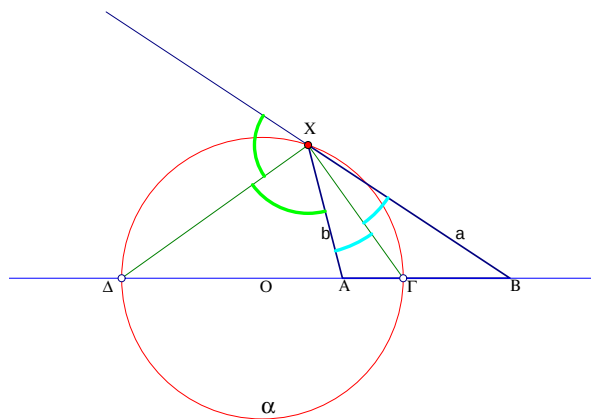
Υπόδειξη: Αν υπάρχει σημείο O από το οποίο άγονται ίσες εφαπτόμενες προς τους τρεις κύκλους, τότε το σημείο αυτό θα είναι και στους τρεις ριζικούς άξονες των κύκλων, λαμβανομένων ανά δύο. Συνεπώς θα συμπίπτει με το ριζικό κέντρο των τριών κύκλων. Για να άγονται από αυτό εφαπτόμενες προς όλους θα πρέπει το κέντρο να μην είναι στο εσωτερικό κάποιου κύκλου.

Άσκηση 4.3.8 Να κατασκευασθεί κύκλος κ διερχόμενος από δοθέντα σημεία A και B και αποτεμένων από δοθείσα ευθεία ε ευθύγραμμο τμήμα δοθέντος μήκους λ .

Άσκηση 4.3.9 Να κατασκευασθεί κύκλος κ διερχόμενος από δοθέντα σημεία A και B και τέμνων δοθέντα κύκλο λ σε αντιδιαμετρικά σημεία του.

4.4 Οι κύκλοι του Απολλώνιου

Θεώρημα 4.4.1 Δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος AB και θετικού αριθμού $\kappa \neq 1$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία ο λόγος των αποστάσεων $\frac{|XA|}{|XB|} = \kappa$ είναι κύκλος με διάμετρο επί της ευθείας AB .



Σχήμα 387: Ένας Απολλώνιος κύκλος

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι αν ένα σημείο X έχει την αναφερθήσα ιδιότητα ως προς το ευθύγραμμο τμήμα AB , τότε είναι πάνω σε έναν ορισμένο κύκλο. Πράγματι, ας θεωρήσουμε το τρίγωνο AXB και τις δύο διχοτόμους στο A , την εσωτερική $ΑΓ$ και την εξωτερική $ΑΔ$. Η τελευταία υπάρχει, δηλαδή η $XΔ$ δεν είναι παράλληλη της AB , διότι υποθέσαμε ότι $\kappa = \frac{|XA|}{|XB|} \neq 1$. Όπως αποδείξαμε στο Πόρισμα 3.3.7 και Άσκηση 3.3.3 αντίστοιχα, τα Γ, Δ είναι αρμονικά συζυγή των A και B (Παράγραφος 1.17) και διαιρούν το AB σε λόγο ίσο με τον λόγο των XA και XB , δηλαδή κ . Επομένως η θέση των σημείων αυτών καθορίζεται πλήρως από τα A, B και κ (εξισώσεις (1)-(3) Παραγράφου 1.17). Όμως η γωνία που σχηματίζουν οι $X\Gamma$ και $X\Delta$ είναι ορθή, ως μισό πεπλατυσμένης. Άρα το X βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ υπό ορθή γωνία και συνεπώς (Πόρισμα 2.1.7) είναι επί του κύκλου με διάμετρο $\Gamma\Delta$.

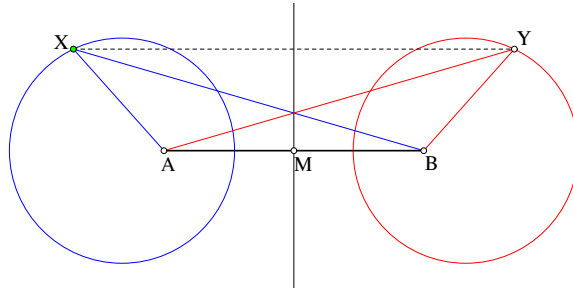
Όπως με κάθε γεωμετρικό τόπο, έτσι και εδώ πρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο. Δηλαδή ότι κάθε σημείο του κύκλου με διάμετρο $\Gamma\Delta$ είναι σημείο του τόπου. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το σημείο X είναι επί του κύκλου με διάμετρο $\Gamma\Delta$, άρα η $\Gamma X\Delta$ είναι ορθή. Φέρνουμε την XA και ευρίσκουμε επί της ευθείας AB σημείο B^* έτσι ώστε η γωνία $\Gamma X B^*$ να είναι ίση με την $\angle AX\Gamma$. Είναι λοιπόν η $X\Gamma$ εκ κατασκευής η διχοτόμος της γωνίας $\angle AXB^*$ και συνεπώς και η $X\Delta$ η εξωτερική διχοτόμος της ίδιας γωνίας. Άρα τα σημεία Γ, Δ είναι αρμονικά συζυγή ως προς A, B^* και συνεπώς (Άσκηση 1.17.2) και τα A, B^* είναι αρμονικά συζυγή ως προς Γ, Δ . Το ίδιο συμβαίνει όμως και με τα A, B , άρα τα B και B^* συμπίπτουν και λόγω της διχοτόμου (Πόρισμα 3.3.7) $\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} = \kappa$, ο.ε.δ.

Οι κύκλοι που ορίζονται από ένα ευθύγραμμο τμήμα AB για διάφορους λόγους $\kappa > 0$, μέσω της προηγούμενης πρότασης, ονομάζονται **Απολλώνιοι κύκλοι** του τμήματος AB (Απολλώνιος 262-190 π.Χ.).

Πρόταση 4.4.1 Η διάμετρος του Απολλώνιου κύκλου των σημείων A, B ως προς τον λόγο κ είναι ίση με

$$\frac{2|AB|\kappa}{|1 - \kappa^2|}.$$

Οι Απολλώνιοι κύκλοι του AB ως προς τους λόγους κ και $\frac{1}{\kappa}$ έχουν ίσες ακτίνες και κείνται συμμετρικά ως προς την μεσοκάθετο του AB .

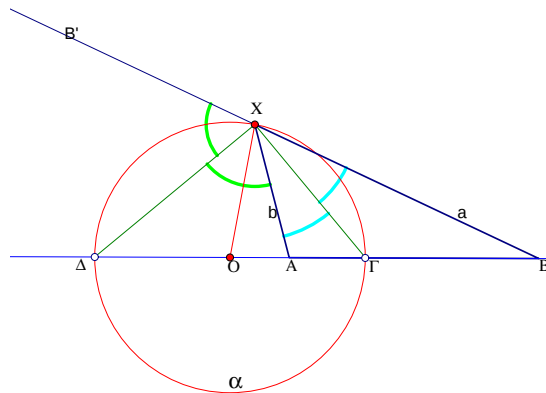


Σχήμα 388: Συμμετρία του συστήματος των Απολλώνιων κύκλων

Απόδειξη: Ο τύπος για την διάμετρο είναι αυτός του Πορίσματος 1.17.4. Αντικαθιστώντας στην παράσταση για την διάμετρο το κ με $\frac{1}{\kappa}$ βλέπουμε ότι η τιμή της δεν αλλάζει, όθεν και η ισότητα των ακτίνων. Το ότι οι κύκλοι που αντιστοιχούν στους λόγους κ και $\frac{1}{\kappa}$ κείνται συμμετρικά ως προς την μεσοκάθετο, προκύπτει από το ότι για κάθε σημείο X που ικανοποιεί την $\frac{|XA|}{|XB|} = \kappa$ το συμμετρικό του Y ως προς την μεσοκάθετο του AB θα ικανοποιεί την $\frac{|YA|}{|YB|} = \frac{1}{\kappa}$, ο.ε.δ.

Πρόταση 4.4.2 Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB και κύκλος $a(O, \rho)$ με διάμετρο $\Gamma\Delta$ επί της ευθείας AB . Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (1) Ο κύκλος a είναι ένας Απολλώνιος κύκλος του ευθυγράμμου τμήματος AB .
- (2) Γιά τυχόν σημείο X του κύκλου a οι $X\Gamma$ και $X\Delta$ είναι διχοτόμοι της γωνίας AXB .
- (3) Τα τρίγωνα OXA και OXB είναι όμοια.
- (4) Ισχύει $\rho^2 = |OA||OB|$.
- (5) Τα (A, B) και (Γ, Δ) είναι ζεύγη αρμονικών συζυγών σημείων.



Σχήμα 389: Δύο όμοια τρίγωνα: OXA και OXB

Απόδειξη: (1) $\Leftrightarrow$ (2) : Αποδείχθηκε στο Θεώρημα 4.4.1.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : Εάν οι ΧΓ, ΧΔ είναι διχοτόμοι της γωνίας ΑΧΒ, τότε

$$|ΟΧΑ| = |ΟΧΓ| - |ΑΧΓ|, \quad |ΟΒΧ| = |ΟΓΧ| - |ΓΧΒ|.$$

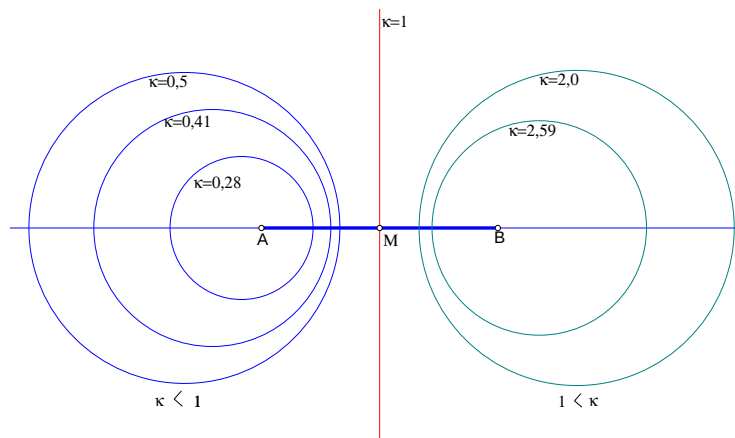
Όμως στις δύο διαφορές οι μειωτέοι είναι ίσοι και οι αφαιρετέοι είναι επίσης ίσοι, άρα οι διαφορές είναι ίσες. Τα δύο τρίγωνα, λοιπόν, έχουν την ΑΟΧ κοινή και τις γωνίες ΟΧΑ και ΟΒΧ ίσες, άρα είναι όμοια. Ο συλλογισμός αντιστρέφεται και δείχνει ότι το (3) συνεπάγεται το (2).

(3) $\Leftrightarrow$ (4) : Από την ομοιότητα των τριγώνων προκύπτει η

$$\frac{|ΟΧ|}{|ΟΒ|} = \frac{|ΟΑ|}{|ΟΧ|} \Rightarrow \rho^2 = |ΟΧ|^2 = |ΟΑ||ΟΒ|.$$

Ο συλλογισμός αντιστρέφεται και εδώ και δείχνει ότι το (4) συνεπάγεται το (3).

(4) $\Leftrightarrow$ (5) : Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.17.2, ο.ε.δ.

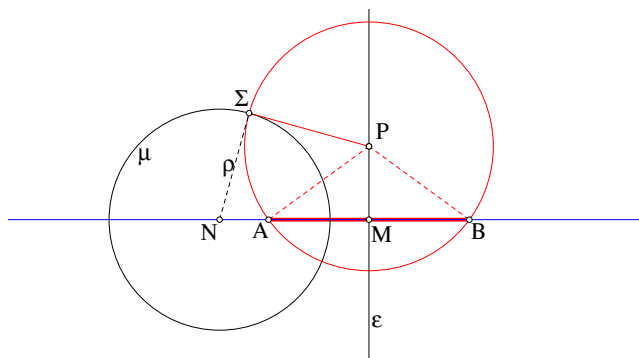


Σχήμα 390: Η δέσμη των Απολλώνιων κύκλων του ΑΒ

Σχόλιο-1 Το τελευταίο σχήμα δείχνει τους Απολλώνιους κύκλους ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ για διάφορους λόγους κ . Οι κύκλοι αυτοί αποτελούν μία **Δέσμη** (Παράγραφος 4.5) μη τεμνομένων κύκλων που χωρίζεται από την μεσοκάθετο του ΑΒ σε δύο υποσυστήματα κύκλων. Το ένα σύστημα αποτελείται από τους κύκλους για $\kappa < 1$ και έχει το Α στο εσωτερικό όλων των κύκλων του. Το άλλο υποσύστημα χαρακτηρίζεται από τους κύκλους για $\kappa > 1$ και έχει το Β στο εσωτερικό όλων των κύκλων του. Η μεσοκάθετος μπορεί να θεωρηθεί ως ένας οριακός κύκλος με πολύ μεγάλη ακτίνα που αντιστοιχεί στο λόγο αποστάσεων από τα Α, Β: $\kappa=1$. Τα σημεία Α, Β μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως (οριακοί) κύκλοι της δέσμης με μηδενική ακτίνα. Η επόμενη άσκηση φανερώνει μία κάπως αναπάντεχη ιδιότητα της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

Πρόταση 4.4.3 Για κάθε σημείο P της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ οι εφαπτόμενες $P\Sigma$ από το P προς τους Απολλώνιους κύκλους του ΑΒ έχουν όλες το ίδιο μήκος που είναι η απόσταση $|PA| = |PB|$.

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι για το τυχόν σημείο P της μεσοκαθέτου και για έναν Απολλώνιο κύκλο του ΑΒ για τυχόντα λόγο κ , το μήκος της εφαπτόμενης είναι ανεξάρτητο του κ . Ας υποθέσουμε ότι $\kappa < 1$ (η περίπτωση $\kappa > 1$ αποδεικνύεται ανάλογα). Αν Χ, Χ'



Σχήμα 391: Ιδιότητα της μεσοκαθέτου

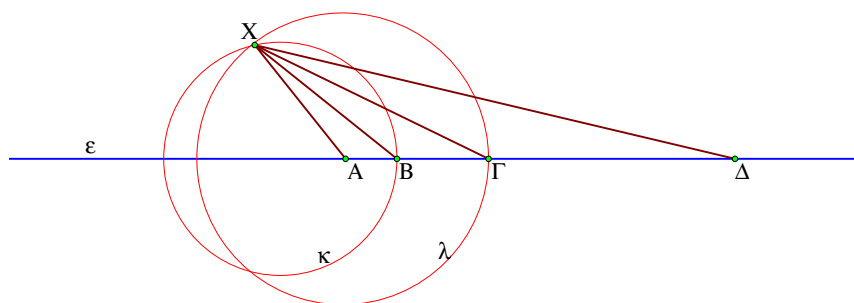
είναι τα σημεία τομής του Απολλώνιου κύκλου με την AB και N το κέντρο του, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα για τα τρίγωνα NPS και NPM έχουμε

$$t_P^2 = |PN|^2 - r^2 = |MN|^2 + h^2 - r^2,$$

όπου r η ακτίνα του κύκλου, $t_P = |P\Sigma|$ το μήκος της εφαπτομένης από το P και $h = |MP|$ η απόσταση του P από το μέσον M του AB . Από το Πρόβλημα 1.17.4 έχουμε ότι $r = \frac{d\kappa}{1-\kappa^2}$. Το $|MN| = |MA| + |AN| = \frac{d}{2} + d\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}$, σύμφωνα με την Άσκηση 1.17.3 και θέτοντας $d = |AB|$. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $|MN|^2 - r^2 = \frac{d^2}{4} \Rightarrow |t_P|^2 = \frac{d^2}{4} + h^2 = |PA|^2$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Η πρόταση δείχνει ότι όλοι οι Απολλώνιοι κύκλοι του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχουν, ανά δύο, τον ίδιο ριζικό άξονα, που ταυτίζεται με την μεσοκάθετο του ΑΒ.

Άσκηση 4.4.1 Δίδονται τρία διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB , $BΓ$, $ΓΔ$ επ' ευθείας ε . Να βρεθεί σημείο X από το οποίο τα τμήματα αυτά φαίνονται υπό ίσες γωνίες.



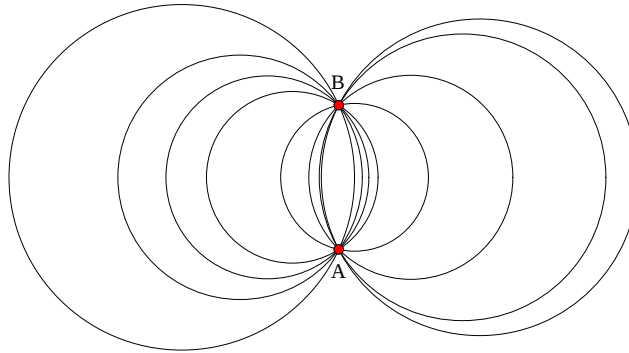
Σχήμα 392: Σημείο που βλέπει τρία τμήματα υπό ίσες γωνίες

Υπόδειξη: Αν υπάρχει τέτοιο σημείο X , θεωρώντας τα δύο πρώτα τμήματα, το X θα πρέπει να είναι στον Απολλώνιο κύκλο κ του τμήματος $ΑΓ$, ως προς λόγο $\tau = \frac{|ΑΒ|}{|ΒΓ|}$. Ανάλογα, θεωρώντας το τμήμα $ΒΔ$, το X θα πρέπει να περιέχεται στον κύκλο λ του Απολλώνιου ως προς τον λόγο $\sigma = \frac{|ΒΓ|}{|ΓΔ|}$. Συνάγεται ότι το X θα πρέπει να συμπίπτει με σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων. Το πρόβλημα μπορεί να μην επιδέχεται λύση και τούτο θα συμβαίνει όταν ακριβώς οι δύο κύκλοι κ και λ δεν τέμνονται. Έχει ενδιαφέρον η διερεύνηση του προβλήματος και η διατύπωση της συνθήκης που εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης.

4.5 Δέσμες κύκλων

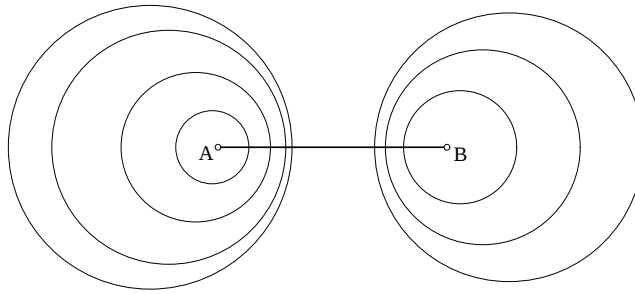
Δέσμη κύκλων ονομάζουμε μιά από τις επόμενες τρεις οικογένειες κύκλων:

(α) Την οικογένεια όλων των κύκλων που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β.



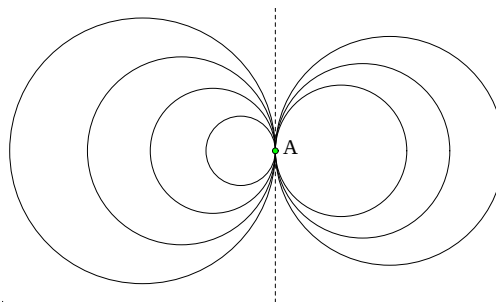
Σχήμα 393: Δέσμη τεμνομένων κύκλων

(β) Την οικογένεια όλων των κύκλων του Απολλώνιου ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



Σχήμα 394: Δέσμη μη τεμνομένων κύκλων

(γ) Την οικογένεια όλων των κύκλων που εφάπτονται σε ένα σημείο Α.



Σχήμα 395: Δέσμη εφαπτομένων κύκλων

Το επόμενο θεώρημα εκφράζει το κοινό χαρακτηριστικό των τριών αυτών ειδών δεσμών κύκλων, που ονομάζουμε αντίστοιχα **Τεμνόμενη δέσμη** ή **Ελλειπτική δέσμη**, **Μη τεμνόμενη δέσμη** ή **Υπερβολική δέσμη** και **Εφαπτόμενη δέσμη** ή **Παραβολική δέσμη**.

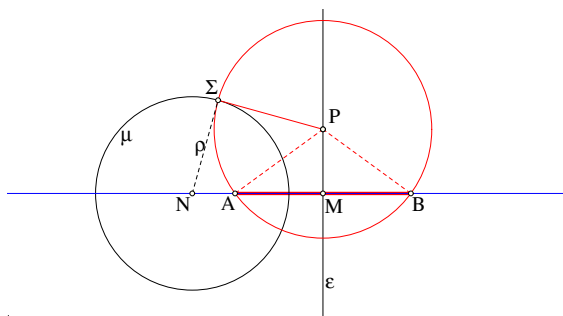
Θεώρημα 4.5.1 Όλοι οι κύκλοι μιάς δέσμης έχουν, ανά δύο, κοινό ριζικό άξονα. Για τεμνόμενες δέσμες αυτός συμπίπτει με την ευθεία που διέρχεται από τα κοινά σημεία τους. Για μη τεμνόμενες δέσμες αυτός συμπίπτει με την μεσοκάθετο του ευθυγράμμιου τμήματος AB . Για εφαπτόμενες δέσμες αυτός συμπίπτει με την κοινή εφαπτόμενη των κύκλων.

Απόδειξη: Για δέσμες τεμνομένων κύκλων το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 4.3.1, για δέσμες εφαπτομένων από την Άσκηση 4.3.2 και για δέσμες μη τεμνομένων κύκλων από την Άσκηση 4.4.3.

Ο κοινός ριζικός άξονας όλων των (ζευγών) κύκλων μιάς δέσμης λέγεται **Ριζικός άξονας της δέσμης**. Η ευθεία στην οποία ευρίσκονται τα κέντρα των κύκλων της δέσμης λέγεται **Άξονας των κέντρων** της δέσμης. Η ευθεία αυτή είναι κάθετη στον ριζικό άξονα της δέσμης. Στις τεμνόμενες δέσμες τα κοινά σημεία όλων των κύκλων της δέσμης λέγονται **Βασικά σημεία** της δέσμης. Στις μη τεμνόμενες δέσμες τα άκρα του διαστήματος που ορίζει την δέσμη λέγονται **Οριακά σημεία** της δέσμης. Το κοινό σημείο των κύκλων μιάς εφαπτόμενης δέσμης μπορεί να θεωρηθεί ταυτόχρονα ως βασικό και οριακό σημείο.

Πρόταση 4.5.1 Κάθε ζεύγος από μία ευθεία ε και ένα κύκλο $\mu(N, \rho)$ ορίζει μία ακριβώς δέσμη κύκλων που περιέχει τον κύκλο μ και έχει ριζικό άξονα την ευθεία ε .

Απόδειξη: Αν η ευθεία ε και ο κύκλος μ τέμνονται σε δύο σημεία A και B , τότε προφανώς το σύνολο των κύκλων που διέρχονται από τα A και B είναι η ζητούμενη δέσμη. Αν η ευθεία ε και ο κύκλος μ εφάπτονται στο σημείο A , τότε η δέσμη αποτελείται από όλους τους κύκλους που εφάπτονται της ε στο σημείο A . Αν ο κύκλος και η ευθεία ε δεν τέμνονται, τότε κατασκευάζεται εύκολα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB του οποίου η μεσοκάθετος συμπίπτει με την ε και ο μ είναι ένας Απολλώνιος κύκλος του AB ως προς τον κατάλληλο λόγο κ .



Σχήμα 396: Προσδιορισμός του τμήματος AB

Πράγματι, φέρνουμε κατ' αρχήν την κάθετο NM από το κέντρο του δοθέντος κύκλου στην ευθεία ε . Κατόπιν από τυχόν σημείο P της ε φέρνουμε μία εφαπτόμενη $P\Sigma$ προς τον κύκλο μ . Με κέντρο P και ακτίνα $P\Sigma$ γράφουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία NM στα σημεία A και B . Το τμήμα AB είναι το ζητούμενο (Πρόταση 4.4.3) και ο λόγος κ , ως προς τον οποίον κύκλος μ είναι Απολλώνιος του τμήματος AB , δίδεται από το πηλίκον $\kappa = \frac{|SA|}{|SB|}$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 4.5.1 Κάθε ζεύγος μη συγκεντρικών κύκλων ορίζει μία ακριβώς δέσμη κύκλων που τους περιέχει ως μέλη.

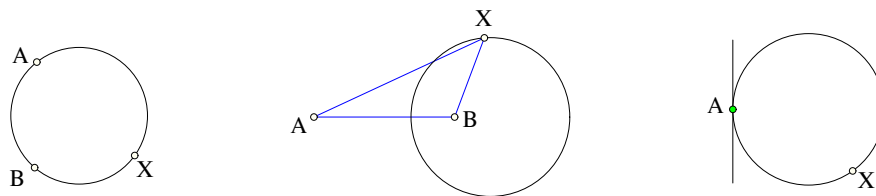
Απόδειξη: Θεωρούμε έναν από τους δύο κύκλους και τον ριζικό άξονα των δύο κύκλων και εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση, ο.ε.δ.

Την δέσμη που ορίζεται από δύο κύκλους δυνάμει του προηγούμενου πορίσματος ονομάζουμε **Δέσμη παραγόμενη από δύο κύκλους**. Συνήθως στις δέσμες προσμετράμε και τον ριζικό άξονά τους, θεωρώντας τον ως έναν κύκλο με άπειρη ακτίνα. Επίσης προσμετράμε και τα οριακά σημεία τους, θεωρώντας τα ως κύκλους μηδενικής ακτίνας (περιπτώσεις μη τεμνόμενης και εφαπτόμενης δέσμης). Το προηγούμενο πόρισμα επεκτείνεται και για ζεύγη κύκλων, εκ των οποίων ένας ή και οι δύο συμπίπτουν με σημεία. Τα σημεία αυτά είναι τότε τα οριακά σημεία της δέσμης. Τα επόμενα πορίσματα ισχύουν για αυτήν την διευρυμένη έννοια δέσμης.

Πόρισμα 4.5.2 Κάθε ζεύγος από δύο σημεία ή σημείο και κύκλο/ευθεία ορίζει μία δέσμη κύκλων που περιέχει τα δοθέντα ως μέλη.

Απόδειξη: Αν δοθούν δύο σημεία, τότε ορίζεται μία μη τεμνόμενη δέσμη που έχει οριακά σημεία τα δοθέντα. Αν δοθεί κύκλος $\kappa(O, \rho)$ και σημείο A (διαφορετικό του κέντρου του κύκλου), τότε συμβαίνουν δύο τινά: (α) το A ανήκει στον κύκλο κ και ορίζεται μία εφαπτόμενη δέσμη. (β) το A δεν ανήκει στον κύκλο και η σχέση $\rho^2 = |OA||OB|$ ορίζει επί της OA ένα δεύτερο σημείο B , έτσι ώστε ο κύκλος $\kappa(O, \rho)$ να είναι Απολλώνιος ως προς τον τμήμα AB (Πρόταση 4.4.2). Τέλος αν δοθεί μία ευθεία ε και σημείο A υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: (α) το A ανήκει στην ε και ορίζεται μία εφαπτόμενη δέσμη με ριζικό άξονα την ε και οριακό σημείο το A , (β) το A δεν ανήκει στην ε και ορίζεται το συμμετρικό του B ως προς την ε και μία μη τεμνόμενη δέσμη με οριακά σημεία A, B και ριζικό άξονα την ε , ο.ε.δ.

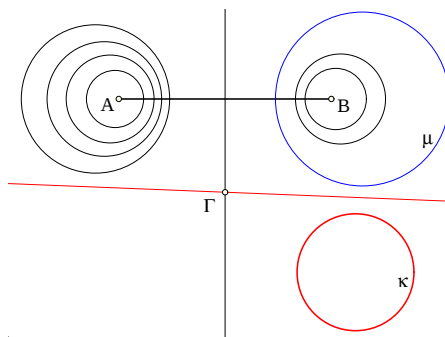
Πόρισμα 4.5.3 Δοθείσης δέσμης κύκλων, για κάθε σημείο X του επιπέδου υπάρχει ένα ακριβώς μέλος της κ που διέρχεται από αυτό.



Σχήμα 397: Ο μοναδικός κύκλος δέσμης διά του X

Απόδειξη: Στην περίπτωση της τεμνόμενης δέσμης ο κ είναι ακριβώς ο κύκλος που διέρχεται από τα δύο βασικά σημεία της δέσμης A και B καθώς και το σημείο X . Στην περίπτωση της μη τεμνόμενης δέσμης το X προσδιορίζει τον λόγο $\kappa = \frac{|XA|}{|XB|}$ και αυτό ορίζει μονοσήμαντα τον κύκλο της δέσμης. Τέλος στην εφαπτόμενη δέσμη ο κύκλος είναι ο εφαπτόμενος του ριζικού άξονα στο A και διερχόμενος από το X , ο.ε.δ.

Πρόταση 4.5.2 Δοθείσης δέσμης κύκλων και κύκλου κ που δεν ανήκει στην δέσμη και δεν έχει το κέντρο του στον άξονα της δέσμης, οι ριζικοί άξονες των ζευγών κύκλων (κ, μ) , όπου μ κύκλος της δέσμης, διέρχονται όλοι από σταθερό σημείο Γ του ριζικού άξονα της δέσμης.

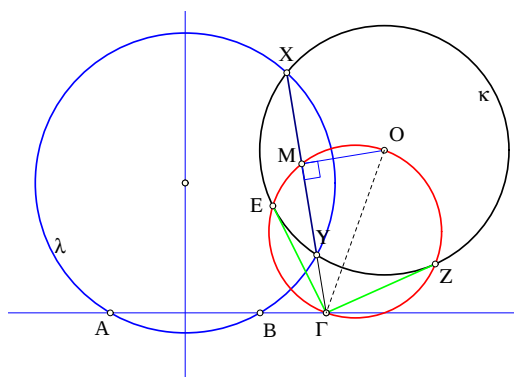


Σχήμα 398: Ριζικοί άξονες με κύκλους της δέσμης

Απόδειξη: Έστω Γ το σημείο τομής του ριζικού άξονα της δέσμης και του ριζικού άξονα του κ με ένα μέλος μ της δέσμης. Επειδή κάθε σημείο του ριζικού άξονα της δέσμης έχει την ίδια δύναμη προς όλα τα μέλη της δέσμης, εάν το Γ έχει δύναμη δ ως προς τον κ και μ , θα έχει την ίδια δύναμη δ και ως προς κάθε άλλο κύκλο μ' της δέσμης, άρα θα περιέχεται και στον ριζικό άξονα του κ και του μ' . Η απαίτηση από τον κ να μην έχει το κέντρο του στον άξονα της δέσμης εξασφαλίζει την ύπαρξη του σημείου Γ , ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η τελευταία πρόταση, στην περίπτωση μίας τεμνόμενης δέσμης, δίνει μία άλλη άποψη για την Άσκηση 4.3.4 και γενικεύει το συμπέρασμά της για όλα τα είδη δεσμών.

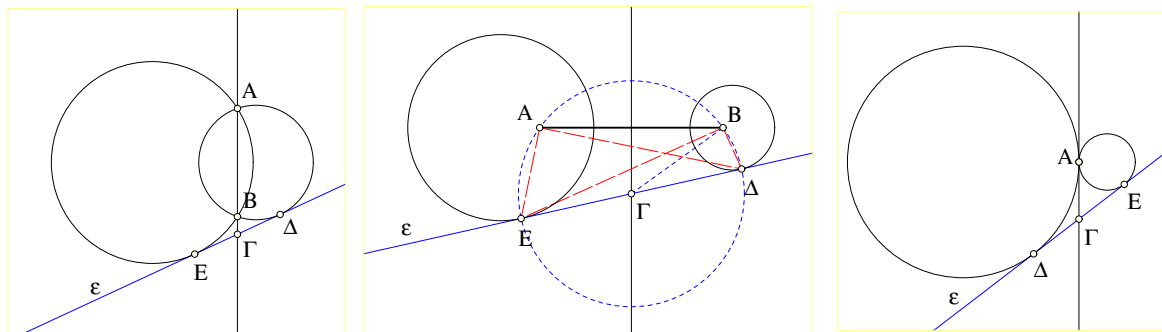
Άσκηση 4.5.1 Δοθείσης δέσμης κύκλων Δ και κύκλου $\kappa(O, \rho)$ που δεν ανήκει στην δέσμη και δεν έχει το κέντρο του στον άξονα της δέσμης, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M των χορδών XY που αποτελούν οι κύκλοι λ της δέσμης από τον κύκλο κ .

Σχήμα 399: Τόπος του μέσου M μεταβλητής χορδής

Υπόδειξη: Όλες οι ευθείες XY διέρχονται από σταθερό σημείο Γ του ριζικού άξονα της δέσμης (Πρόταση 4.5.2). Το σημείο M βλέπει το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα $O\Gamma$ υπό ορθή γωνία. Άρα ο τόπος είναι το τόξο EOZ του κύκλου με διάμετρο $O\Gamma$ που περιέχεται μέσα στον κύκλο κ .

Άσκηση 4.5.2 Δείξε ότι η μοναδική δέσμη που έχει κύκλο ελάχιστης διαμέτρου $\delta > 0$ είναι η τεμνόμενη δέσμη. Πως συνδέεται αυτό το δ με τα βασικά σημεία A, B της δέσμης;

Άσκηση 4.5.3 Δοθείσης δέσμης κύκλων Δ και ευθείας ε , να βρεθούν οι κύκλοι της δέσμης που εφάπτονται της ε .

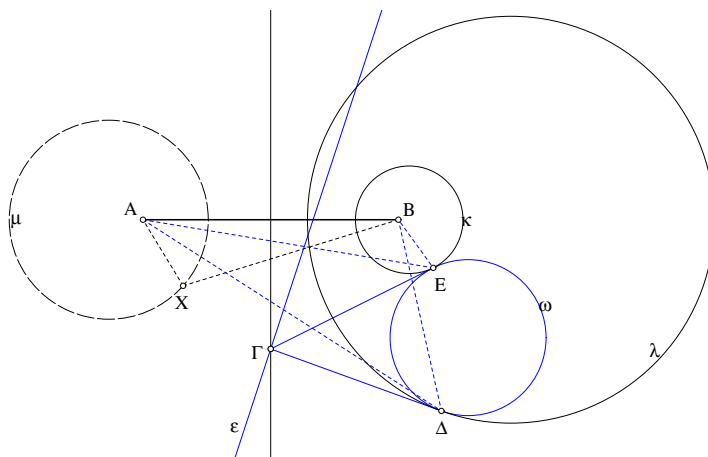


Σχήμα 400: Μέλη δέσμης εφαπτόμενα ευθείας

Υπόδειξη: Έστω Γ το σημείο τομής της ε με τον ριζικό άξονα της δέσμης. Στην τεμνόμενη δέσμη εκτός των A, B υπολογίζεται η θέση του σημείου επαφής Δ του ζητούμενου κύκλου από την $|\Gamma\Delta|^2 = |\Gamma A||\Gamma B|$. Στην μη τεμνόμενη δέσμη η θέση του σημείου επαφής υπολογίζεται άμεσα $|\Gamma\Delta| = |\Gamma A| = |\Gamma B|$. Στην εφαπτόμενη δέσμη αντίστοιχα $|\Gamma\Delta| = |\Gamma A|$. Υπάρχουν δύο λύσεις εν γένει. Εξέτασε τις ειδικές περιπτώσεις, κατά τις οποίες η ε είναι παράλληλη του ριζικού άξονα της δέσμης ή διέρχεται από τα βασικά της σημεία.

Άσκηση 4.5.4 Δοθείσης δέσμης κύκλων Δ και κύκλου ω που δεν ανήκει στην δέσμη, να βρεθούν οι κύκλοι της δέσμης που εφάπτονται του ω .

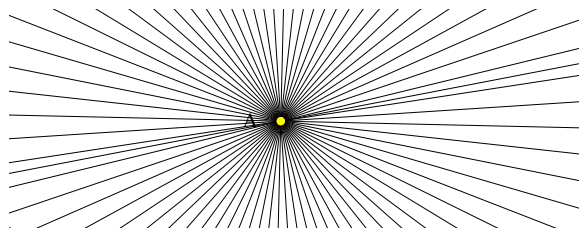
Υπόδειξη: Εάν κ είναι ο ζητούμενος κύκλος, η κοινή εφαπτόμενη $E\Gamma$ του κ και του ω θα διέρχεται από το σημείο Γ απ' όπου διέρχονται όλοι οι ριζικοί άξονες των ζευγών κύκλων που αποτελούνται από τον κ και ένα οποιοδήποτε μέλος μ της δέσμης (Πρόταση 4.5.2). Κατασκεύασε λοιπόν ένα τυχόν μέλος μ της δέσμης και βρες το σημείο τομή Γ του ριζικού

Σχήμα 401: Μέλη δέσμης εφαπτόμενα κύκλου ω

άξονα των ω και μ με τον ριζικό άξονα της δέσμης. Από το Γ φέρε τις εφαπτόμενες στον ω και όρισε τα σημεία επαφής Δ και E . Οι ζητούμενοι κύκλοι είναι οι κύκλοι της δέσμης που διέρχονται από τα σημεία Δ και E . Δύο λύσεις εν γένει.

Σχόλιο-2 Εκτός από τις δέσμες που γνωρίσαμε, υπάρχουν και τρία είδη ακόμη που δεχόμαστε ως μη συμβατικές δέσμες κύκλων. Στην πρώτη εξ αυτών δεν πρόκειται καν για

κύκλους αλλά για ευθείες, και συγκεκριμένα όλες τις ευθείες που διέρχονται από ένα συγκεκριμένο σημείο A . Θεωρούμε εδώ ότι πρόκειται για μία τεμνόμενη δέσμη, που αποτελείται από πολύ μεγάλους κύκλους που διέρχονται από δύο βασικά σημεία A και B . Το B όμως είναι μακριά στο άπειρο. Το σχήμα 402 θα μπορούσε να είναι και τμήμα μιάς γνήσιας δέσμης

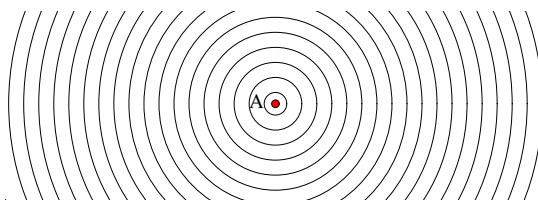


Σχήμα 402: Δέσμη κύκλων!

τεμνομένων κύκλων, της οποίας όμως το άλλο βασικό σημείο είναι πολύ μακριά, έτσι ώστε, οι κύκλοι να είναι πολύ μεγάλοι και δύσκολα να διακρίνονται από ευθείες.

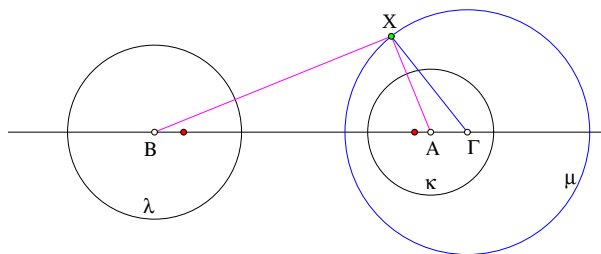
Και η δεύτερη μη συμβατική δέσμη αποτελείται από ευθείες και μάλιστα όλες που είναι παράλληλες προς μία συγκεκριμένη ευθεία ϵ . Θεωρούμε εδώ ότι πρόκειται για μία εφαπτόμενη δέσμη κύκλων με βασικό σημείο A , το οποίο όμως είναι πολύ μακριά στο άπειρο.

Η τρίτη μη συμβατική δέσμη κύκλων αποτελείται από όλους τους συγκεντρικούς κύκλους με κέντρο ένα συγκεκριμένο σημείο A .



Σχήμα 403: Δέσμη κύκλων συγκεντρικών

Θεωρούμε εδώ ότι πρόκειται για μία μη τεμνόμενη δέσμη με οριακά σημεία A και B . Το B όμως είναι και αυτό μακριά στο άπειρο. Το πρόβλημα με αυτές τις τρεις δέσμες είναι ότι δεν ορίζεται, όπως στις άλλες, ριζικός άξονας. Η χρησιμότητά τους έγκειται στο ότι από αυτές προκύπτουν όλες οι δέσμες μέσω μιάς διαδικασίας, της αντιστροφής, που θα εξετάσουμε παρακάτω (Παράγραφος 4.8).



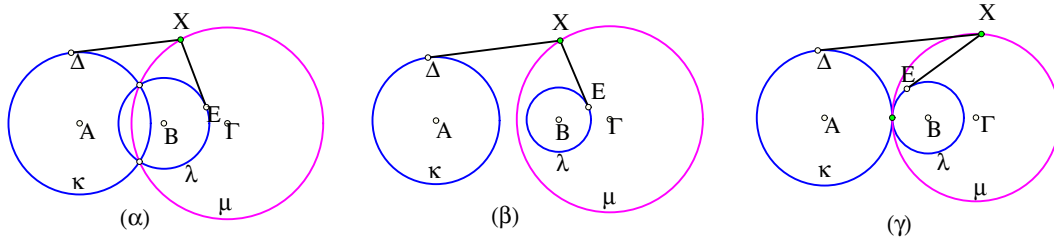
Σχήμα 404: Τόπος σημείων με σταθερό λόγο δυνάμεων

Πρόταση 4.5.3 Δοθέντων κύκλων $\kappa(A, \alpha)$ και $\lambda(B, \beta)$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία ο λόγος των δυνάμεων προς τους δύο κύκλους είναι σταθερός είναι κύκλος μ που ανήκει στην δέσμη που ορίζεται από τους κ και λ .

Απόδειξη: ([McI91, σ.178]) Έστω X σημείο του τόπου. Θεωρούμε τον κύκλο $\mu(\Gamma, \gamma)$ της δέσμης Δ , που παράγεται από τους κύκλους κ και λ και διέρχεται από το X (Πόρισμα 4.5.3). Αν δ συμβολίζει την απόσταση του X από τον κοινό ριζικό άξονα των τριών κύκλων, τότε οι δυνάμεις του X ως προς τους κ και λ θα είναι (Πόρισμα 4.3.1)

$$p_{\kappa}(X) = \pm 2|A\Gamma|\delta, \quad p_{\lambda}(X) = \pm 2|B\Gamma|\delta \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{\kappa}(X)}{p_{\lambda}(X)} = \pm \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|}.$$

Αυτό δείχνει ότι το X περιέχεται στον μ και ταυτόχρονα ότι κάθε σημείο του μ περιέχεται στον τόπο. Άρα ο τόπος ταυτίζεται με τον κύκλο μ , ο.ε.δ.



Σχήμα 405: Τόπος σημείων με σταθερό λόγο εφαπτομένων

Πόρισμα 4.5.4 Δοθέντων κύκλων $\kappa(A, a)$ και $\lambda(B, b)$, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία ο λόγος των μηκών των εφαπτομένων προς τους δύο κύκλους κ και λ είναι σταθερός είναι κύκλος μ που ανήκει στην δέσμη που ορίζεται από τους κ και λ .

Το πόρισμα, στην περίπτωση της μη τεμνόμενης και εφαπτόμενης δέσμης (σχήμα 405 (β) και (γ)), έχει ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις. Στην περίπτωση μη τεμνόμενων κύκλων κ και λ , το πόρισμα γενικεύει το Θεώρημα 4.4.1 του Απολλωνίου, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η ειδική περίπτωση κατά την οποία οι δύο κύκλοι κ και λ έχουν μηδενική ακτίνα και ταυτίζονται με τα οριακά σημεία της δέσμης. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν επίσης οι περιπτώσεις στις οποίες ο ένας μόνον εκ των δύο κύκλων ταυτίζεται με ένα οριακό σημείο της δέσμης.

Πόρισμα 4.5.5 Δοθέντος κύκλου $\kappa(O, \rho)$ και σημείου A , διαφορετικού από το κέντρο O του κύκλου, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία ο λόγος των μηκών είναι σταθερός

$$\frac{|XB|}{|XA|} = \sigma,$$

όπου XB η εφαπτόμενη προς τον κ από το X , είναι κύκλος λ που ανήκει στην δέσμη που παράγεται από τον κ και το σημείο A .

Πόρισμα 4.5.6 Δοθέντος κύκλου $\kappa(O, \rho)$ και σημείου T , τρία σημεία A, B και Γ έχουν τον ίδιο λόγο μηκών εφαπτομένων προς απόσταση από το T

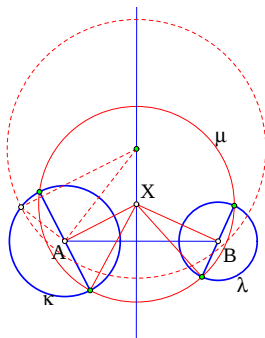
$$\frac{|AX|}{|AT|} = \frac{|BY|}{|BT|} = \frac{|GZ|}{|GT|}$$

τότε και μόνον, όταν ο περιγεγραμμένος κύκλος λ του τριγώνου $AB\Gamma$ ανήκει στην δέσμη που παράγεται από τον κύκλο κ και το σημείο T .

Υπόδειξη: ([McI91, σ.178]) Η δύναμη του Β ως προς κ συμπίπτει με το $|B\Delta|^2$ και είναι (Πόρισμα 4.3.1) ίση με $2|OP||BB^*|$, όπου B^* η προβολή του Β στον ριζικό άξονα των δύο κύκλων που είναι η κοινή τους εφαπτόμενη στο Α. Ανάλογα η δύναμη του Γ ως προς κ συμπίπτει με το $|\Gamma\Delta|^2 = 2|OP||\Gamma\Gamma^*|$. Συνάγεται ότι $\frac{|B\Delta|^2}{|\Gamma\Delta|^2} = \frac{|BB^*|}{|\Gamma\Gamma^*|} = \frac{|EB|}{|E\Gamma|}$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΕΒΑ και ΕΑΓ συνάγεται ότι $\frac{|BE|}{|EA|} = \frac{|BA|}{|AG|} = \frac{|EA|}{|GE|}$ και από αυτήν $|BE| = \frac{|BA|}{|AG|}|EA|$, $|GE| = \frac{|AG|}{|AB|}|EA|$. Προκύπτει ότι $\frac{|EB|}{|E\Gamma|} = \frac{|BA|^2}{|\Gamma A|^2}$ και από αυτήν $\frac{|B\Delta|}{|\Delta\Gamma|} = \frac{|AB|}{|AG|}$, που δείχνει ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της ΒΑΓ.

Άσκηση 4.5.7 Δείξε ότι για δύο κύκλους εξωτερικούς αλλήλων τα μέσα των κοινών εφαπτομένων τους είναι επί του ριζικού άξονος των δύο κύκλων.

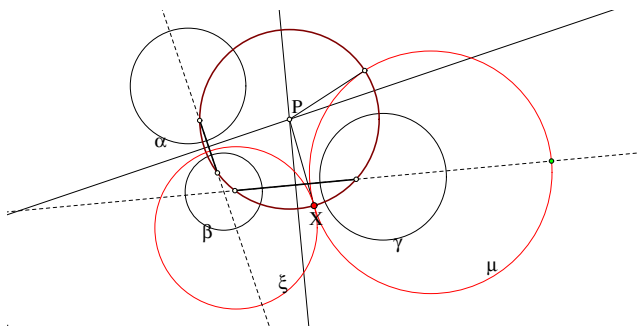
Άσκηση 4.5.8 Δοθέντων κύκλων $\kappa(A,a)$ και $\lambda(B,b)$, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων X των κύκλων που τέμνουν τους Α και Β κατά διάμετρό τους είναι μία ευθεία ε κάθετη στη διάκεντρο ΑΒ.



Σχήμα 409: Κύκλοι τέμνοντες δύο άλλους κατά διάμετρο

Υπόδειξη: Υπολόγισε το $|XA|^2 - |XB|^2$ (Άσκηση 3.4.7).

Άσκηση 4.5.9 Δοθέντων τριών κύκλων κ, λ, μ να κατασκευασθεί κύκλος ν που τέμνει καθένα από τους τρεις κατά μία διάμετρό του.

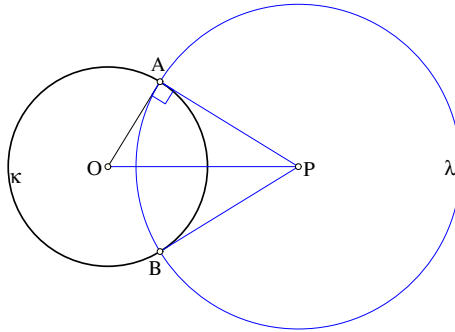


Σχήμα 410: Τα σημεία επαφής Χ μελών ξ, μ δύο δεσμών κύκλων

Άσκηση 4.5.10 Δοθέντων τριών κύκλων α, β και γ εκτός αλλήλων, θεώρησε δύο εφαπτόμενους κύκλους ξ, μ των δεσμών που παράγονται από τους α, β και β, γ αντίστοιχα. Δείξε ότι τα σημεία επαφής X των ξ, μ περιέχονται στον κύκλο που διέρχεται από τα οριακά σημεία των δύο δεσμών και έχει κέντρο το ριζικό κέντρο P των α, β και γ .

4.6 Ορθογώνιοι κύκλοι και δέσμες

Ορθογώνιοι κύκλοι σχηματίζονται με την βοήθεια εφαπτομένων κύκλων από δοθέν σημείο. Οι εφαπτόμενες PA, PB, κύκλου $\kappa(O, \rho)$ από σημείο P είναι ίσες, άρα ορίζεται κύκλος $\lambda(P, \rho')$,



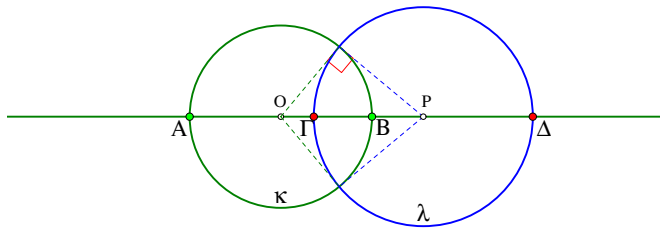
Σχήμα 411: Ορθογώνιοι κύκλοι

που έχει αυτές τις εφαπτόμενες ως ακτίνες. Στο σημείο τομής A των δύο κύκλων η γωνία μεταξύ των ακτίνων τους είναι ορθή. Αυτή είναι μία αμοιβαία σχέση. Και ο κύκλος κ μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει με τον ίδιο τρόπο, από τις εφαπτόμενες του λ από το O. Δύο τεμνόμενοι κύκλοι, των οποίων οι ακτίνες στα σημεία τομής είναι ορθογώνιες λέγονται **Ορθογώνιοι κύκλοι**. Εξ ορισμού, λοιπόν, τούτο είναι ισοδύναμο με το ότι: σε ένα σημείο τομής τους, η ακτίνα του ενός είναι εφαπτόμενη του άλλου. Από αυτήν την χαρακτηριστική ιδιότητα συνάγονται και τα επόμενα δύο πορίσματα.

Πόρισμα 4.6.1 Δύο κύκλοι $\kappa(O, \rho)$ και $\lambda(P, \sigma)$ είναι ορθογώνιοι τότε και μόνον, όταν

$$|OP|^2 = \rho^2 + \sigma^2.$$

Πόρισμα 4.6.2 Δύο κύκλοι $\kappa(O, \rho)$ και $\lambda(P, \sigma)$ είναι ορθογώνιοι τότε και μόνον, όταν τα αντιδιαμετρικά σημεία A, B του ενός και Γ, Δ του άλλου επί της διακέντρου OP αποτελούν αρμονική τετράδα.



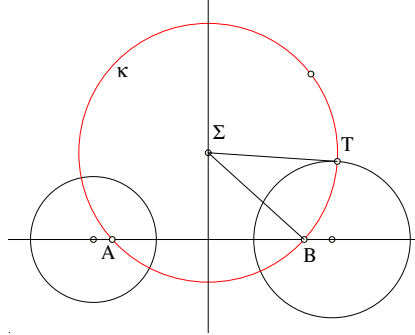
Σχήμα 412: Αρμονική τετράδα $(AB\Gamma\Delta) = -1$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την χαρακτηριστική ιδιότητα μιάς αρμονικής τετράδας σημείων (Πρόταση 1.17.2), ο.ε.δ.

Άσκηση 4.6.1 Κατασκεύασε κύκλο λ ορθογώνιο προς δοθέντα $\kappa(O, \rho)$ και έχοντα κέντρο δοθέν σημείο P, εξωτερικό του κ .

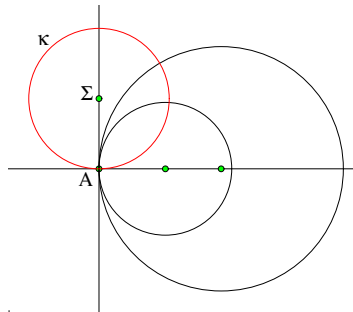
Πρόταση 4.6.2 Το σύνολο των κύκλων που είναι ταυτόχρονα ορθογώνιοι προς όλους τους κύκλους μιάς τεμνόμενης, μη-τεμνόμενης, εφαπτόμενης δέσμης Δ είναι αντίστοιχα μιά μη-τεμνόμενη, τεμνόμενη, εφαπτόμενη δέσμη Δ' .

Απόδειξη: Στην περίπτωση που ο κύκλος $\kappa(\Sigma, \rho)$ είναι ορθογώνιος προς τους κύκλους τεμνόμενης δέσμης με βασικά σημεία τα A, B (σχήμα 414), από το τυχόν σημείο του X διέρχεται



Σχήμα 415: Ορθογώνιος προς μη τεμνόμενη δέσμη

έναν ορθογώνιο κύκλο λ της δέσμης και ισχύει $|\Sigma X|^2 = |\Sigma A||\Sigma B|$. Κατά την Πρόταση 4.4.2 αυτό ισοδυναμεί με το ότι ο κ είναι Απολλώνιος ως προς το AB , συνεπώς όλοι οι ορθογώνιοι κύκλοι της τεμνόμενης στα A, B δέσμης ανήκουν στην μη τεμνόμενη δέσμη που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα AB . Στην περίπτωση που ο κύκλος $\kappa(\Sigma, \rho)$ είναι ορθογώνιος προς κύκλους της μη τεμνόμενης δέσμης που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα AB (σχήμα 415), η εφαπτόμενη $|\Sigma T|$ προς μέλος της δέσμης ισούται με τις $|\Sigma A| = |\Sigma B|$ (Πρόταση 4.4.3). Άρα ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία A, B και συνεπώς περιέχεται στην δέσμη με αυτά τα οριακά σημεία. Στην περίπτωση που ο $\kappa(\Sigma, \rho)$ είναι ορθογώνιος σε κύκλους



Σχήμα 416: Ορθογώνιος προς εφαπτόμενη δέσμη

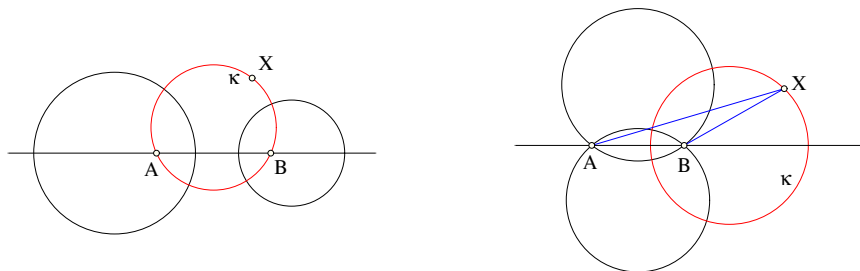
εφαπτόμενης δέσμης με κοινό σημείο στο A , η ακτίνα του ΣA θα είναι εφαπτόμενη σε όλους τους κύκλους και συνεπώς ο κ θα είναι εφαπτόμενος στο A του άξονα των κέντρων της δέσμης, ο.ε.δ.

Η δέσμη Δ' που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση λέγεται **Ορθογώνια δέσμη** της Δ .

Πόρισμα 4.6.4 Κάθε δέσμη κύκλων μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο των κύκλων που είναι ορθογώνιοι σε δύο σταθερούς κύκλους α και β .

Άσκηση 4.6.3 Να κατασκευασθούν τα οριακά σημεία A και B μιάς μη τεμνόμενης δέσμης Δ , της οποίας δίδονται δύο κύκλοι α και β .

Υπόδειξη: Κατασκεύασε τον ριζικό άξονα ε των α και β . Από τυχόν σημείο P του ε (που έχει αυτήν την δυνατότητα) φέρε εφαπτόμενη PY προς τον κύκλο α . Τα σημεία τομής της διακέντρου των α και β με τον κύκλο $\kappa(P, |PY|)$ είναι τα ζητούμενα οριακά σημεία της δέσμης.

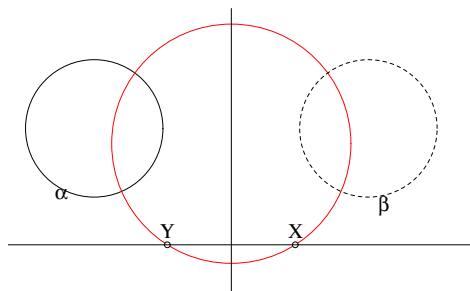


Σχήμα 417: Κατασκευή ορθογώνιου κύκλου διερχόμενου από σημείο

Άσκηση 4.6.4 Να κατασκευασθεί κύκλος κ ορθογώνιος προς δύο δοθέντες α και β και διερχόμενος από σημείο X .

Υπόδειξη: Εάν οι δοθέντες δεν τέμνονται (σχήμα 417), προσδιόρισε πρώτα τα βασικά σημεία A, B της δέσμης που παράγουν (προηγούμενη άσκηση). Ο ζητούμενος είναι ο διερχόμενος από τα τρία σημεία X, A και B . Εάν οι δοθέντες τέμνονται στα σημεία A και B , τότε ο ζητούμενος ανήκει στην μη τεμνόμενη δέσμη με οριακά σημεία A και B . Συνεπώς είναι ο Απολλώνιος κύκλος του AB με λόγο $\lambda = \frac{|XA|}{|XB|}$.

Άσκηση 4.6.5 Να κατασκευασθεί κύκλος κ ορθογώνιος προς δοθέντα κύκλο α και διερχόμενος από δύο σημεία X και Y .



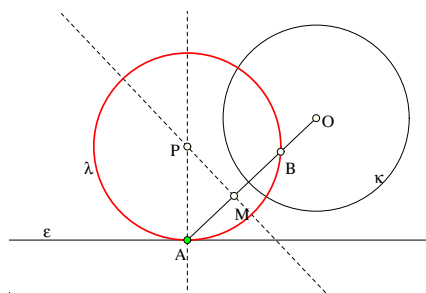
Σχήμα 418: Κατασκευή ορθογώνιου κύκλου διερχομένου από δύο σημεία

Υπόδειξη: Θεώρησε τον συμμετρικό β του κύκλου α ως προς την μεσοκάθετο του τμήματος XY . Αν ο ζητούμενος είναι ορθογώνιος στον α θα είναι και στον β . Επομένως ταυτίζεται με τον κύκλο που είναι ταυτόχρονα ορθογώνιος στους α και β και διέρχεται από ένα εκ των δύο σημείων λ.χ. το X (Άσκηση 4.6.4).

Άσκηση 4.6.6 Να κατασκευασθεί κύκλος $\kappa(O, \rho)$ ταυτόχρονα ορθογώνιος προς τρεις δοθέντες κύκλους α, β και γ .

Υπόδειξη: Άσκηση της οποίας η λύση ταυτίζεται με αυτήν της Άσκησης 4.3.7.

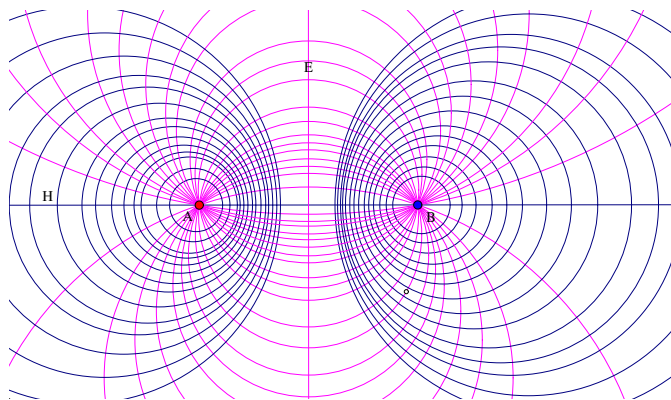
Άσκηση 4.6.7 Να κατασκευασθεί κύκλος λ εφαπτόμενος δοθείσης ευθείας ε σε δοθέν σημείο της A και ταυτόχρονα ορθογώνιος προς δοθέντα κύκλο $\kappa(O, \rho)$.



Σχήμα 419: λ ορθογώνιος προς κ και εφαπτόμενος της ε

Υπόδειξη: Έστω λ ο ζητούμενος και B το άλλο σημείο τομής του με την OA . Λόγω της ορθογωνιότητας των δύο κύκλων θα ισχύει $|OA||OB| = \rho^2$. Άρα το B κατασκευάζεται από τα δεδομένα και το κέντρο P του λ προσδιορίζεται ως σημείο τομής της καθέτου στην ε στο A και της μεσοκαθέτου του AB .

Άσκηση 4.6.8 Δείξε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων λ , που διέρχονται από σταθερό σημείο B και τέμνουν σταθερό κύκλο $\kappa(A, \rho)$ σε σημεία αντιδιαμετρικά ως προς τον λ , είναι ένας κύκλος.

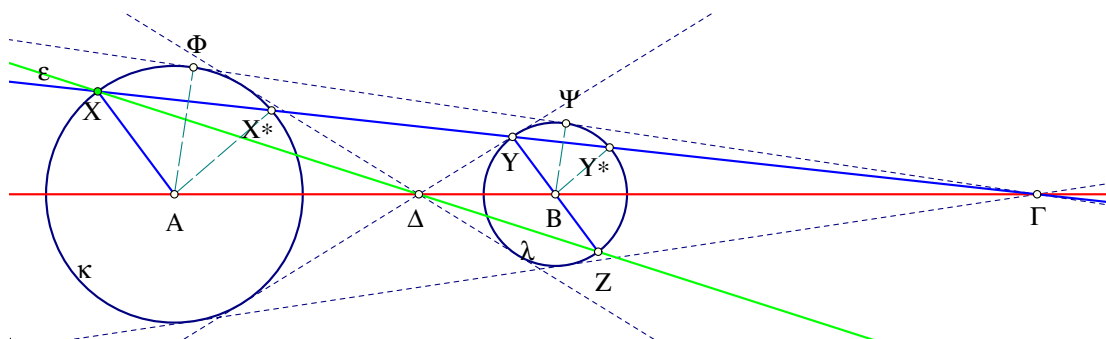


Σχήμα 420: Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Σχόλιο Δέσμες κύκλων έχουν εφαρμογές σε πολλά πεδία. Το σχήμα 420 δείχνει το Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από δύο αγωγούς ηλεκτρικού ρεύματος A και B . Η εικόνα δείχνει ακριβέστερα μία επίπεδη τομή του πεδίου, όπου το φύλλο του χαρτιού ταυτίζεται με το κάθετο στους αγωγούς επίπεδο. Το πεδίο αποτελείται από δύο ορθογώνιες δέσμες κύκλων. Η τεμνόμενη E , με βασικά σημεία τα A και B , παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο. Ένα ηλεκτρόνιο, που θα αφαιρεί στην επίδραση του πεδίου, θα κινηθεί κατά μήκος ενός κύκλου της δέσμης E . Η μη τεμνόμενη δέσμη H παριστάνει το μαγνητικό πεδίο. Μία μαγνητική πυξίδα, που θα αφαιρεί στην επίδραση του πεδίου, θα προσανατολισθεί και θα πάρει θέση εφαπτόμενη ενός κύκλου της δέσμης H .

4.7 Κέντρα ομοιότητας δύο κύκλων

Θεώρημα 4.7.1 Δοθέντων δύο μη ομόκεντρων και μη ίσων κύκλων $\kappa(A, \alpha)$ και $\lambda(B, \beta)$ υπάρχουν δύο σημεία Γ και Δ με την ιδιότητα, κάθε ευθεία διερχόμενη από ένα εξ αυτών και τέμνουσα τους δύο κύκλους να ορίζει επ' αυτών σημεία προς τα οποία οι ακτίνες τους είναι ανά ζεύγη παράλληλες. Και αντίστροφα, κάθε ζεύγος παράλληλων ακτίνων AX και BY ορίζει ευθεία XY διερχόμενη δι' ενός εκ των Γ, Δ .



Σχήμα 421: Κέντρα ομοιότητας (Γ, Δ) δύο κύκλων

Απόδειξη: Θεώρησε τα σημεία Γ και Δ , εξωτερικό και εσωτερικό αντίστοιχα του ευθυγράμμου τμήματος AB τα οποία το διαιρούν σε τμήματα λόγου α/b :

$$\frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} = \frac{|\Delta A|}{|\Delta B|} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Έστω τώρα τοιχούσα ευθεία ϵ τέμνουσα τον ένα κύκλο $A(\alpha)$ στο X . Από το B φέρε παράλληλο προς την AX τέμνουσα τον κύκλο $B(\beta)$ στα αντιδιαμετρικά του σημεία Y και Z . Τα τρίγωνα ΓAX και ΓBY είναι όμοια διότι έχουν εκ κατασκευής τις γωνίες τους ίσες. Άρα

$$\frac{|AX|}{|BY|} = \frac{\alpha}{|\Gamma B|} = \frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow |BY| = \beta,$$

που σημαίνει ότι το Y είναι σημείο του κύκλου. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η ευθεία ΔX τέμνει τον κύκλο $B(\beta)$ σε σημεία, ένα εκ των οποίων ορίζει ακτίνα BZ παράλληλη της AX .

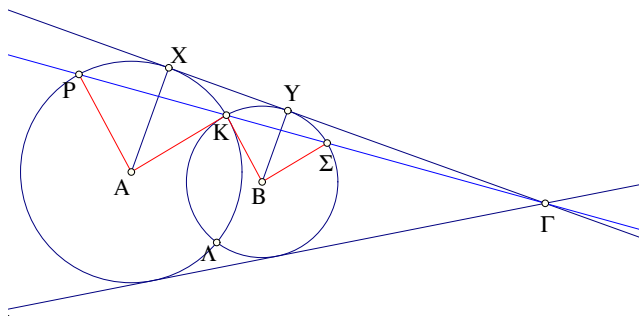
Αντίστροφα, αν οι ακτίνες AX και BY (BZ) είναι παράλληλες τότε τα τρίγωνα XAG και YBG (XAD και ZBD) είναι όμοια και συνεπώς τα σημεία X, Y και Γ (X, Z και Δ) είναι συνευθειακά, ο.ε.δ.

Πόρισμα 4.7.1 Η ευθεία που ενώνει τα σημεία επαφής μίας κοινής εφαπτομένης δύο μη ίσων κύκλων (εάν υπάρχει) διέρχεται από ένα εκ των κέντρων ομοιότητάς τους.

Απόδειξη: Οι ακτίνες $A\Phi$ και $B\Psi$ στα σημεία επαφής μίας κοινής εφαπτομένης είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ίδια ευθεία, άρα, κατά το προηγούμενο θεώρημα η $\Phi\Psi$ θα διέρχεται από ένα εκ των κέντρων ομοιότητας, ο.ε.δ.

Τα σημεία Γ και Δ που ορίζονται από το προηγούμενο θεώρημα ονομάζονται **Κέντρα Ομοιότητας** των δύο κύκλων $A(\alpha)$ και $B(\beta)$ και είναι αρμονικά συζυγή (Παράγραφος 1.17) ως προς τα κέντρα A και B των κύκλων. Το Γ (εξωτερικό του AB) λέγεται **Εξωτερικό**

κέντρο ομοιότητας και το Δ (εσωτερικό του AB) **Εσωτερικό κέντρο** ομοιότητας. Κάθε ευθεία, που διέρχεται από ένα κέντρο ομοιότητας και τέμνει καθένα από τους κύκλους σε δύο σημεία, ορίζει δύο ζεύγη σημείων (X,Y) , (X^*,Y^*) προς τα οποία οι αντίστοιχες ακτίνες είναι παράλληλες και λέγονται **Ομόλογα σημεία**, ενώ τα ζεύγη σημείων (X,Y^*) , (X^*,Y) λέγονται **Αντιομόλογα σημεία** των δύο κύκλων ([Joh60, σ. 19]). Στα επόμενα αυτής της παραγράφου υποθέτουμε, όπως και στο θεώρημα, ότι οι κύκλοι $\kappa(A,\alpha)$ και $\lambda(B,\beta)$ είναι μη ομόκεντροι και μη ίσοι.

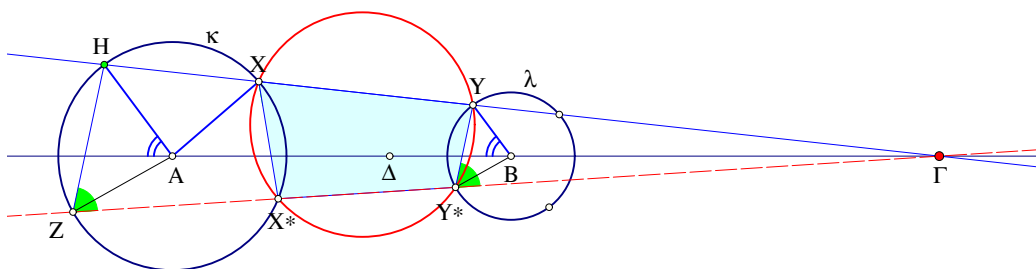


Σχήμα 422: Συμπίπτοντα αντιομόλογα σημεία

Στην περίπτωση που η ϵ είναι μία κοινή εφαπτόμενη των δύο κύκλων τα X και X^* , καθώς και τα Y και Y^* ταυτίζονται και έχουμε ένα μόνο ζεύγος σημείων (X,Y) που είναι ταυτόχρονα ομόλογα και αντιομόλογα. Τέλος, στην περίπτωση δύο κύκλων που τέμνονται στα σημεία K και Λ οι ευθείες ΓK και $\Gamma \Lambda$ τέμνουν τους δύο κύκλους σε τρία σημεία λ.χ. η ΓK στα P , K και Σ και έχουμε τα ομόλογα σημεία (P,K) , (K,Σ) και τα αντιομόλογα (K,K) και (P,Σ) , στο πρώτο εκ των οποίων τα δύο σημεία ταυτίζονται.

Τα ομόλογα σημεία χαρακτηρίζονται από την παραλληλία των ακτίνων προς αυτά. Επίσης μία ευθεία που διέρχεται από δύο ομόλογα σημεία τέμνει τους κύκλους σε δύο ακόμη σημεία αντίστοιχα, τα οποία είναι επίσης ομόλογα. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και με τα αντιομόλογα, όπου όμως οι τέμνουσες ευθείες αντικαθίστανται με κύκλους.

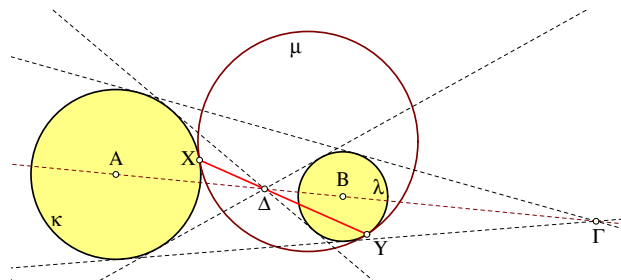
Πρόταση 4.7.1 Για κάθε ζεύγος αντιομολόγων σημείων X, Y , δύο κύκλων $\kappa(A,\alpha)$ και $\lambda(B,\beta)$ και κάθε κύκλο μ διερχόμενο δι' αυτών, τα δεύτερα σημεία τομής X^*, Y^* του μ με τους κ και λ είναι επίσης αντιομόλογα σημεία και οι ευθείες XY και X^*Y^* διέρχονται από το ίδιο κέντρο ομοιότητας.



Σχήμα 423: Κύκλος δι' αντιομολόγων ξανατέμνει σε αντιομόλογα

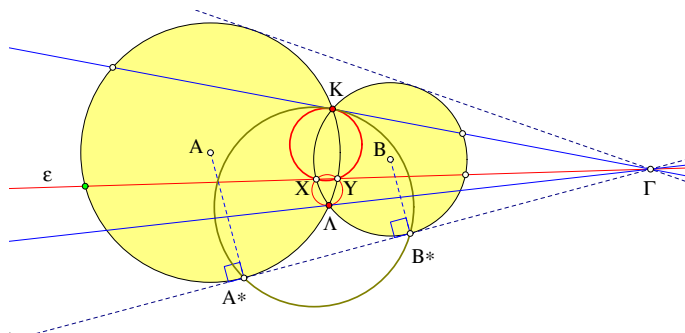
Απόδειξη: Έστω ότι H και Z είναι τα δεύτερα σημεία τομής αντίστοιχα των XY και X^*Y^* με τον κ . Λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $XY Y^* X^*$, η εξωτερική του γωνία στο Y^*

λ. Το είδος του Z καθορίζεται από τον τρόπο που ο μ εφάπτεται των κ και λ (εξωτερικά-εσωτερικά). Το γινόμενο $|ZX||ZY|$ είναι ανεξάρτητο του μ και εξαρτάται μόνο από το μέγεθος και την σχετική θέση των κ και λ .



Σχήμα 427: Το $|DX||DY|$ ανεξάρτητο της θέσης του εφαπτόμενου μ

Πόρισμα 4.7.3 Έστω ότι οι κύκλοι $\kappa(A, \alpha)$ και $\lambda(B, \beta)$ τέμνονται στα σημεία K και Λ και έστω ότι X και Y είναι αντισυμμόλογα σημεία επί ευθείας ε διερχόμενης διά του εξωτερικού κέντρου ομοιότητάς τους Γ . Τότε ο κύκλος (KXY) εφάπτεται της ΓK και ο (ΛXY) της $\Gamma \Lambda$. Ειδικά ο κύκλος (KA^*B^*) , όπου A^*, B^* τα σημεία επαφής μιάς κοινής εφαπτομένης διά του Γ εφάπτεται της ευθείας ΓK .



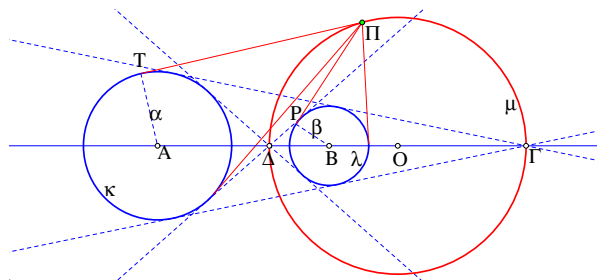
Σχήμα 428: Αντισυμμόλογα σημεία σε τεμνόμενους κύκλους

Απόδειξη: Στην περίπτωση τεμνόμενων κύκλων $A(\alpha)$ και $B(\beta)$ η σταθερά $|GX||GY|$ ισούται με $|GK|^2$ και το συμπέρασμα προκύπτει από την Πρόταση 4.1.3, ο.ε.δ.

Κύκλος ομοιότητας δύο κύκλων $\kappa(A, \alpha)$ και $\lambda(B, \beta)$ ονομάζεται ο κύκλος μ με διάμετρο την $\Gamma\Delta$, όπου Γ και Δ τα κέντρα ομοιότητας των δύο κύκλων.

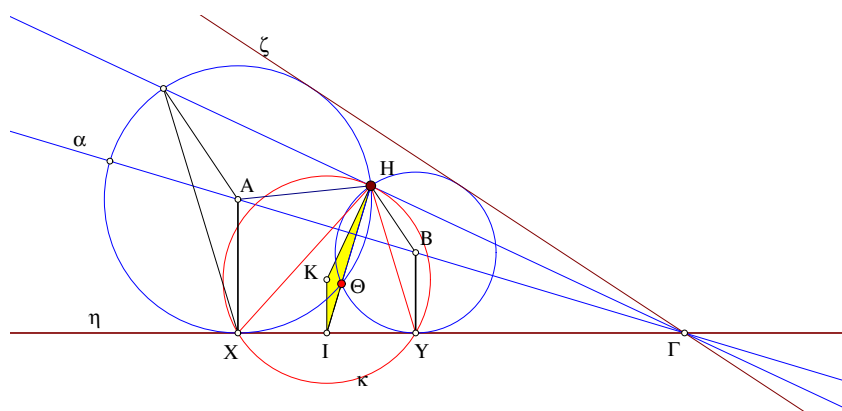
Άσκηση 4.7.2 Δείξε ότι για κάθε σημείο X του κύκλου ομοιότητας ο λόγος των δυνάμεων προς τους $\kappa(A, \alpha)$ και $\lambda(B, \beta)$ είναι ίσος με τον λόγο των τετραγώνων των ακτίνων τους. Συμπεράνε ότι ο κύκλος ομοιότητας μ των κ και λ ανήκει στην δέσμη που παράγεται από τους δύο αυτούς κύκλους.

Υπόδειξη: Τα σημεία Π για τα οποία ο λόγος των δυνάμεων ως προς τους κ και λ είναι $\frac{p_{\kappa}(\Pi)}{p_{\lambda}(\Pi)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ είναι σημεία ενός κύκλου της δέσμης των κ και λ (Πρόταση 4.5.3). Την ιδιότητα αυτή έχουν και τα Γ και Δ .



Σχήμα 429: Κύκλος ομοιότητας μ των $\kappa(A, \alpha)$ και $\lambda(B, \beta)$

Άσκηση 4.7.3 Δίδεται ευθεία η και σημείο H εκτός αυτής καθώς και σημείο A κινούμενο επί ευθείας a . Να βρεθούν οι θέσεις του A επί της ευθείας a , για τις οποίες $|AH| = |AX|$, όπου X η προβολή του A επί της η .



Σχήμα 430: Σημεία A, B με $|AH| = |AX|$, $|BH| = |BY|$

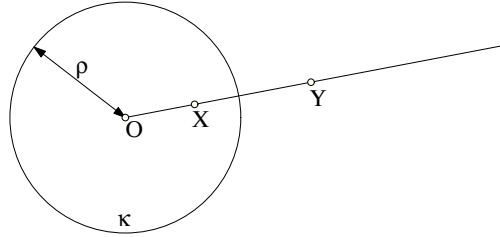
Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι δύο σημεία Α και Β ικανοποιούν τις απαιτήσεις $|AH| = |AX|, |BH| = |BY|$, όπου Χ, Υ οι προβολές τους στην η. Τότε οι κύκλοι $A(|AX|), B(|BY|)$ είναι εφαπτόμενοι της η και διέρχονται από το Η, συνεπώς και το συμμετρικό του Θ ως προς α. Επίσης το σημείο τομής Γ των α και η είναι κέντρο ομοιότητας των δύο κύκλων και ο κύκλος (ΗΧΥ) εφάπτεται της ΓΗ στο Η (Πόρισμα 4.7.3). Η ιδιότητα αυτή οδηγεί στην κατασκευή του κύκλου (ΗΧΥ) και μέσω αυτού στην κατασκευή των Α και Β. Για την κατασκευή του κύκλου $\kappa=(\text{ΗΧΥ})$ θεώρησε το σημείο Ι στο οποίο η ΗΘ τέμνει την η. Λόγω της επαφής των κύκλων με την η έχουμε

$$|I\Theta||IH| = |IX|^2 = |IY|^2,$$

που σημαίνει ότι το I , που ευρίσκεται άμεσα από τα δεδομένα, είναι το μέσον του XY . Το κέντρο K του κύκλου κ ευρίσκεται ως τομή των καθέτων KI και KH στις ευθείες η και $H\Gamma$ αντίστοιχα. Η μοναδικότητα του κύκλου κ δείχνει επίσης ότι υπάρχουν δύο λύσεις όταν ο κ τέμνει την η . Αυτό συμβαίνει τότε και μόνον, όταν το H είναι εντός της γωνίας που σχηματίζεται από την η και την συμμετρική της ζ ως προς α . Όταν το H είναι εκτός αυτής της γωνίας δεν έχουμε λύση. Τέλος έχουμε μία ακριβώς λύση τότε και μόνον, όταν ο κύκλος κ εφάπτεται της η , που ισοδυναμεί με το να περιέχεται το σημείο H στην ευθεία ζ . Τούτο πάλι είναι ισοδύναμο με την καθετότητα των ευθειών AH και $H\Gamma$.

4.8 Αντιστροφή

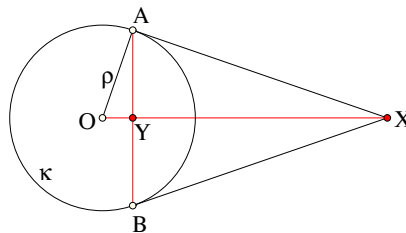
Δοθέντος κύκλου $\kappa(O, \rho)$ η **Αντιστροφή** ως προς κ , είναι μιά αντιστοίχιση σημείων του εσωτερικού και του εξωτερικού του κύκλου. Σε κάθε σημείο X , διαφορετικό του κέντρου O , αντιστοιχούμε ένα σημείο Y επί της ημιευθείας OX , έτσι ώστε $|OX||OY| = \rho^2$. Ο



Σχήμα 432: Αντίστροφα σημεία X και Y

ορισμός καθορίζει μία αμοιβαία σχέση. Το X είναι αντίστροφο του Y , τότε και μόνον, όταν το Y είναι αντίστροφο του X . Λέμε λοιπόν συχνά για δύο τέτοια σημεία ότι είναι **Αντίστροφα σημεία** ως προς τον κύκλο κ . Τα σημεία του κύκλου κ διακρίνονται ως εκείνα που ταυτίζονται με το αντίστροφό τους. Τα χαρακτηρίζουμε ως τα **Σταθερά σημεία της αντιστροφής**. Ο κύκλος κ λέγεται **Κύκλος αντιστροφής**, το κέντρο του λέγεται **Κέντρο της αντιστροφής** και το ρ^2 λέγεται **Δύναμη της αντιστροφής**.

Κατασκευή 4.8.1 Δοθέντος κύκλου $\kappa(O, \rho)$, να κατασκευασθεί το αντίστροφο Y δοθέντος σημείου X ως προς κ .



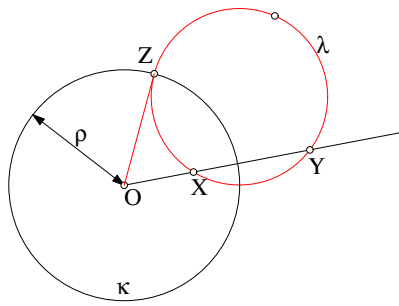
Σχήμα 433: Κατασκευή αντιστρόφων X και Y

Απόδειξη: Αν το X είναι εξωτερικό του κ , τότε η τομή Y της χορδής AB των επαφών των εφαπτομένων από το X και της OX είναι το ζητούμενο σημείο, αφού, λόγω του ορθογωνίου τριγώνου OAX , θα ισχύει (Πρόταση 3.5.4)

$$\rho^2 = |OX||OY|.$$

Η ίδια σχέση δείχνει ότι και το X είναι αντίστροφο του Y . Άρα για εσωτερικά του κύκλου σημείου κάνουμε την αντιστροφή διαδικασία: υψώνουμε την κάθετο AB στην OY και φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κ στις τομές της A, B με τον κύκλο. Το X είναι το σημείο τομής αυτών των εφαπτομένων, ο.ε.δ.

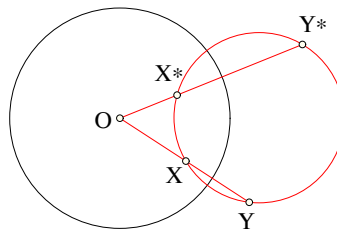
Πρόταση 4.8.1 Κάθε κύκλος λ , που διέρχεται από δύο αντίστροφα σημεία X και Y ως προς κύκλο $\kappa(O, \rho)$, είναι ορθογώνιος στον κ .



Σχήμα 434: Ορθογώνιος κύκλος λ στον κ

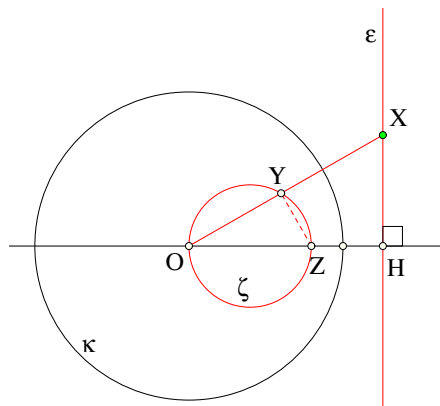
Απόδειξη: Πράγματι, αν X και Y είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον κ και Z είναι σημείο τομής του κύκλου λ που διέρχεται από τα X, Y , τότε, κατά τον ορισμό της αντιστροφής, θα ισχύει $|OZ|^2 = \rho^2 = |OX||OY|$ που δείχνει ότι η OZ είναι εφαπτόμενη του κύκλου (Πρόταση 4.1.3) λ, ο.ε.δ.

Πρόταση 4.8.2 Δύο διαφορετικά ζεύγη αντιστρόφων σημείων (X,Y) και (X^*,Y^*) ως προς κύκλο $\kappa(O,\rho)$ ορίζουν τέσσερα ομοκυκλικά σημεία.



Σχήμα 435: Ζεύγη αντιστρόφων σημείων

Απόδειξη: Προφανώς, αφού η σχέση που τα συνδέει $\rho^2 = |OX||OY| = |OX^*||OY^*|$, σημαίνει ότι τα X, Y, X^* και Y^* είναι ομοκυκλικά (Πρόταση 4.1.2), ο.ε.δ.

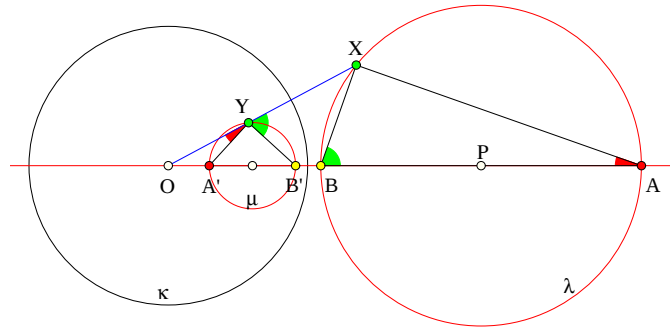


Σχήμα 436: Αντίστροφα ευθείας, κύκλου διά του O

Πρόταση 4.8.3 Αν σημείο X μεταβάλλεται επί ευθείας ε , τότε το αντίστροφό του Y ως προς κύκλο $\kappa(O, \rho)$ περιέχεται σε κύκλο ζ διερχόμενο από το κέντρο O του κ . Αν σημείο Y μεταβάλλεται επί κύκλου ζ διερχομένου δια του O , τότε το αντίστροφό του X ως προς κ , περιέχεται σε ευθεία ε .

Απόδειξη: Έστω H η προβολή του O επί της ευθείας ε και Z το αντίστροφο του H ως προς κ . Τα (X, Y) και (H, Z) είναι ομοκυκλικά σημεία (Πρόταση 4.8.2). Συνεπώς, στο τετράπλευρο $ZHXY$ η γωνία στο Y θα είναι ορθή, ως παραπληρωματική της γωνίας στο H , που είναι ορθή. Συνεπώς το Y θα είναι επί του κύκλου ζ με διάμετρο OZ . Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει με τον ίδιο συλλογισμό. Αν το Y είναι επί κύκλου ζ με διάμετρο OZ , έστω ε η ευθεία η κάθετη της OZ στο H , που είναι το αντίστροφο του Z ως προς κ . Για τυχόν σημείο Y του ζ , έστω X η τομή της ε με την OY . Το τετράπλευρο $XHZY$ είναι εκ κατασκευής εγγράψιμο, διότι έχει ορθές γωνίες στις κορυφές H και Y . Συνεπώς θα ισχύει $|OY||OX| = |OZ||OH| = \rho^2$, άρα το X θα είναι αντίστροφο του Y , ο.ε.δ.

Πρόταση 4.8.4 Αν σημείο X μεταβάλλεται επί κύκλου λ , τότε το αντίστροφό του Y ως προς κύκλο $\kappa(O, \rho)$ περιέχεται σε κύκλο μ .



Σχήμα 437: Αντίστροφο κύκλου

Απόδειξη: Έστω AB η διάμετρος του κύκλου λ επί της OP , όπου P το κέντρο του λ . Αν A' , B' είναι αντίστοιχα τα αντίστροφα ως προς κ των A και B , δείχνουμε ότι και το αντίστροφο Y του τυχόντος σημείου X του κύκλου λ περιέχεται στον κύκλο μ με διάμετρο $A'B'$. Πράγματι, τα τετράπλευρα $BB'YX$ και $AA'YX$ είναι εγγράψιμα (Πρόταση 4.8.2), άρα σχηματίζονται ίσες γωνίες:

$$|\angle ABX| = |\angle B'YX|, \quad |\angle BAX| = |\angle A'YO|.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η γωνία $A'YB'$ είναι ορθή, άρα το Y είναι στον κύκλο με διάμετρο $A'B'$, ο.ε.δ.

Για το συμπέρασμα της Πρότασης 4.8.3 χρησιμοποιούμε συχνά την διατύπωση:

Το αντίστροφο ευθείας ως προς κύκλο είναι κύκλος διά του κέντρου αντιστροφής και το αντίστροφο κύκλου διά του κέντρου αντιστροφής είναι ευθεία.

Παρόμοια για το συμπέρασμα της Πρότασης 4.8.4 χρησιμοποιούμε την διατύπωση:

Το αντίστροφο κύκλου μη διερχόμενου διά του κέντρου αντιστροφής είναι κύκλος.

Σημείωσε την αμοιβαιότητα των αντιστροφών κύκλων. Στο σχήμα 437 ο μ είναι αντίστροφος του λ , αλλά και ο λ είναι αντίστροφος του μ . Η επόμενη πρόταση υπογραμμίζει την περίπτωση κατά την οποία ο λ και ο μ συμπίπτουν, δηλαδή ο κύκλος συμπίπτει με τον αντίστροφό του.

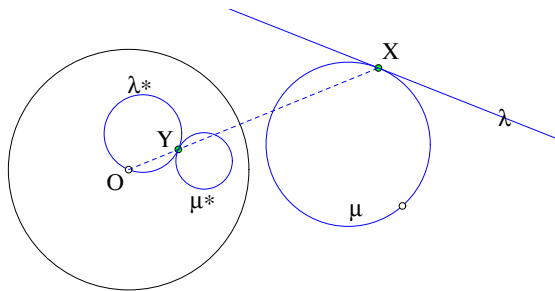
Πόρισμα 4.8.1 Τα αντίστροφα Y των σημείων X ενός κύκλου λ είναι πάλι σημεία του λ τότε και μόνον, όταν ο κύκλος λ είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής $\kappa(O, \rho)$.

Απόδειξη: Αν ο ίδιος κύκλος λ περιέχει το X και το αντίστροφό του Y , τότε είναι ορθογώνιος στον κύκλο αντιστροφής (Πρόταση 4.8.1). Αν πάλι ο λ είναι ορθογώνιος στον κ , τότε για κάθε ευθεία ε διά του O που τέμνει τον λ στα X και Y , θα έχουμε ότι το γινόμενο $|OX||OY|$, θα ισούται με $|OZ|^2 = \rho^2$, όπου OZ η εφαπτόμενη του λ από το O , ο.ε.δ.

Γιά το συμπέρασμα της Πρότασης 4.8.1 χρησιμοποιούμε συχνά την διατύπωση:

Οι κύκλοι που είναι αναλλοίωτοι ως προς την αντιστροφή, είναι ακριβώς οι ορθογώνιοι προς τον κύκλο αντιστροφής.

Πρόταση 4.8.5 Έστω ότι το σημείο Y είναι το αντίστροφο του σημείου X ως προς τον κύκλο $\kappa(O, \rho)$. Αν ο κύκλος ή ευθεία λ εφάπτεται του κύκλου μ στο X , τότε το αντίστροφο λ^* του λ και το αντίστροφο μ^* του μ εφάπτονται στο Y .



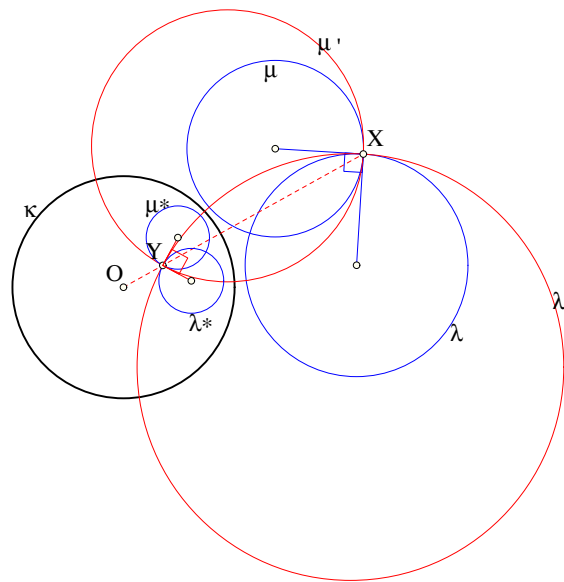
Σχήμα 438: Εφαπτόμενα έχουν αντίστροφα επίσης εφαπτόμενα

Απόδειξη: Τα λ και μ εφάπτονται στο X όταν ακριβώς έχουν ένα κοινό σημείο. Όταν συμβαίνει αυτό τότε και τα λ^* και μ^* θα έχουν το Y ως κοινό σημείο. Αν είχαν και άλλο κοινό σημείο Z , τότε τα αντίστροφα των λ^* και μ^* που είναι τα λ και μ αντίστοιχα θα είχαν, εκτός του X , και το αντίστροφο Ω του Z κοινό, όπερ άτοπον. Άρα τα λ^* και μ^* έχουν το Y ως μοναδικό κοινό σημείο, άρα εφάπτονται σε αυτό το σημείο, ο.ε.δ.

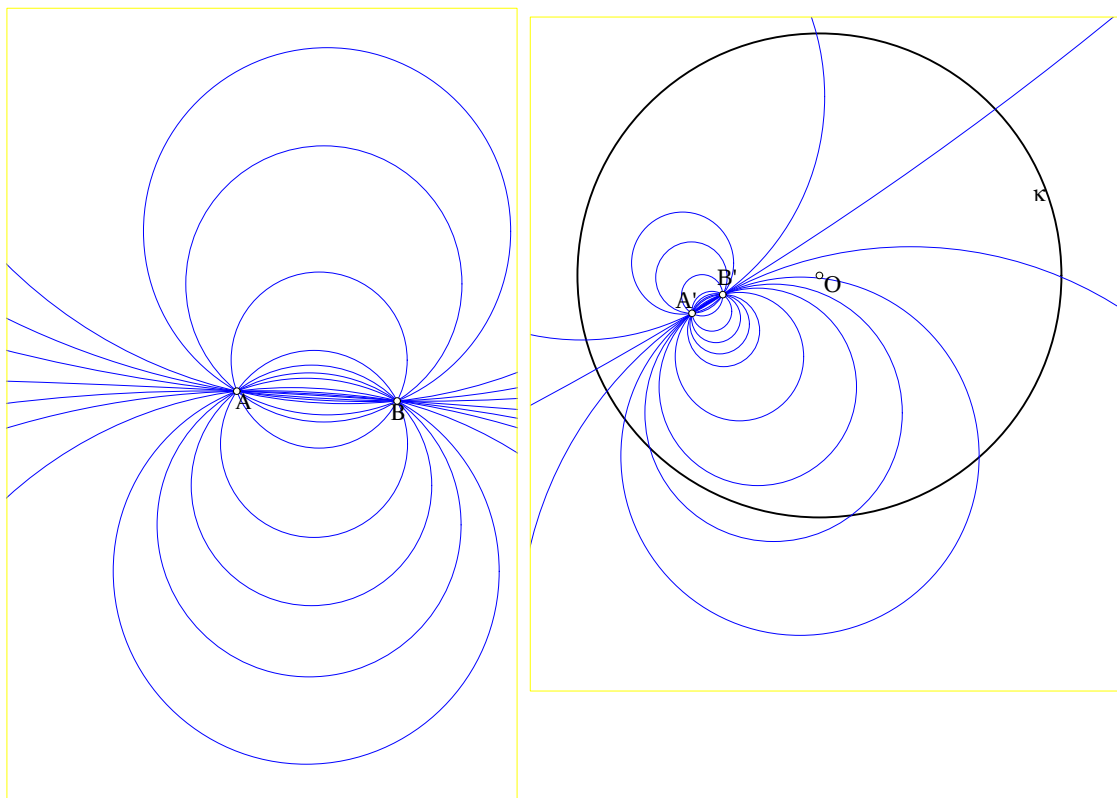
Πρόταση 4.8.6 Έστω ότι το σημείο Y είναι το αντίστροφο του σημείου X ως προς τον κύκλο $\kappa(O, \rho)$. Αν οι κύκλοι λ και μ διέρχονται από το X και είναι ορθογώνιοι, τότε οι αντίστροφοί τους λ^* , μ^* διέρχονται από το Y και είναι ορθογώνιοι.

Απόδειξη: Θεώρησε τον κύκλο μ' εφαπτόμενο του μ στο X και ορθογώνιο στον κ (Άσκηση 4.6.7). Θεώρησε και τον κύκλο λ' εφαπτόμενο του λ στο X και ορθογώνιο στον κ . Επειδή οι λ , μ εφάπτονται των λ' , μ' αντίστοιχα στο X , οι αντίστροφοι λ^* , μ^* θα εφάπτονται στο Y των αντιστρόφων των λ' και μ' αντίστοιχα. Όμως, λόγω της ορθογωνιότητας προς τον κ , ο αντίστροφος του λ' είναι ο λ^* και ανάλογα ο αντίστροφος του μ' είναι ο μ^* . Άρα οι εφαπτόμενες των λ^* και μ^* στο Y θα συμπίπτουν αντίστοιχα με τις εφαπτόμενες των λ' και μ' στο Y . Οι τελευταίες όμως σχηματίζουν στο Y την ίδια γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των λ' , μ' στο X , που εξ υποθέσεως σχηματίζουν ορθή γωνία. Άρα και οι εφαπτόμενες των λ^* και μ^* στο Y θα σχηματίζουν ορθή γωνία, ο.ε.δ.

Θεώρημα 4.8.1 Γιά δοθείσα δέσμη κύκλων Δ και κύκλο $\kappa(O, \rho)$, τα αντίστροφα των κύκλων λ της δέσμης ως προς τον κ αποτελούν άλλη δέσμη Δ' .



Σχήμα 439: Τα αντίστροφα ορθογωνίων κύκλων είναι ορθογώνιοι κύκλοι



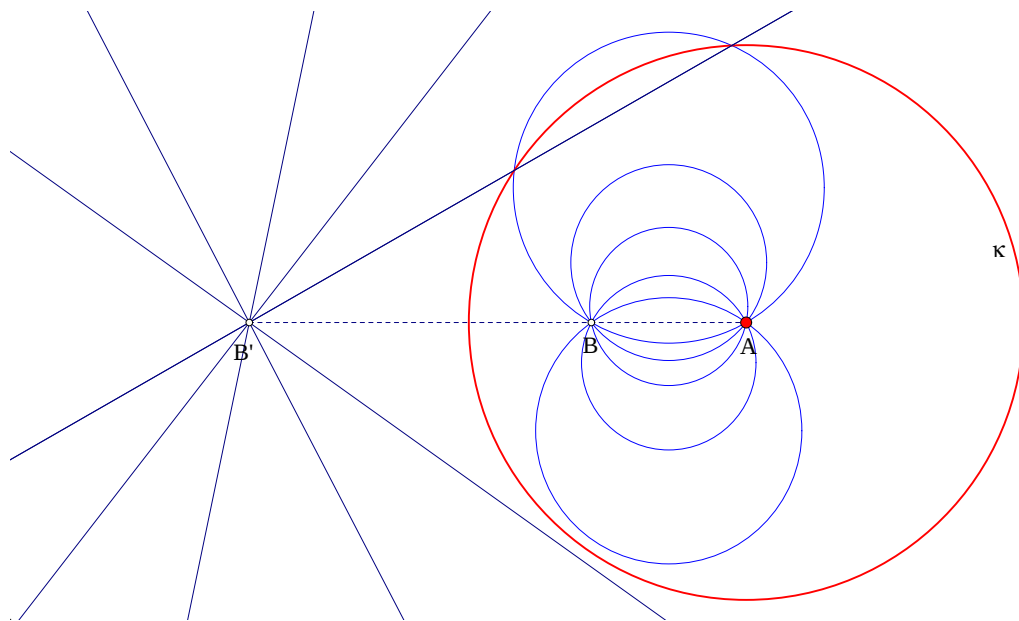
Σχήμα 440: Η δέσμη Δ' των αντιστρόφων κύκλων της δέσμης Δ

Απόδειξη: Έστω ότι η δέσμη Δ αποτελείται από όλους τους κύκλους που είναι ορθογώνιοι σε δύο σταθερούς κύκλους μ και ν (Πόρισμα 4.6.4). Έστω επίσης μ' και ν' τα αντίστροφα των κύκλων μ και ν ως προς κ . Κατά την Πρόταση 4.8.6, κάθε κύκλος λ ορθογώνιος στους μ και ν θα έχει αντίστροφο λ' ορθογώνιο στους μ' και ν' , άρα θα ανήκει στην δέσμη Δ' των

κύκλων που είναι ορθογώνιοι στους μ' και ν' . Παρόμοια, κάθε κύκλος λ' ορθογώνιος στους μ' και ν' θα έχει αντίστροφο λ που είναι ορθογώνιος στους μ και ν , άρα θα ανήκει στην Δ και θα έχει αντίστροφο ακριβώς τον λ' , ο.ε.δ.

Την δέσμη Δ' που εξασφαλίζεται από το θεώρημα ονομάζουμε **Αντίστροφη δέσμη** της Δ ως προς τον κύκλο κ . Στο προηγούμενο θεώρημα, η αντιστροφή ως προς κ , όχι μόνο στέλνει την δέσμη Δ σε μία δέσμη Δ' αλλά διατηρεί και την ποιότητα της δέσμης. Δηλαδή αν η δέσμη Δ είναι τεμνόμενη, τότε και η Δ' είναι τεμνόμενη, αν μη τεμνόμενη και η Δ' μη τεμνόμενη κτλ. Αυτά ωστόσο με μία μικρή παραχώρηση. Θα πρέπει να δεχθούμε ότι, ανάλογα με την σχετική θέση της Δ και του κύκλου αντιστροφής κ , η Δ' μπορεί να είναι μη συμβατική (Σχόλιο-2 4.5.4). Οι επόμενες προτάσεις δείχνουν για ποιές θέσεις του κ μπορεί να συμβεί κάτι τέτοιο.

Πρόταση 4.8.7 Έστω Δ τεμνόμενη δέσμη και $\kappa(A, \rho)$ κύκλος με κέντρο ένα από τα βασικά σημεία A και B της δέσμης. Τότε η αντίστροφη Δ' της Δ ως προς κ είναι η μη συμβατική δέσμη των ευθειών που διέρχονται από το αντίστροφο B' του B ως προς κ .

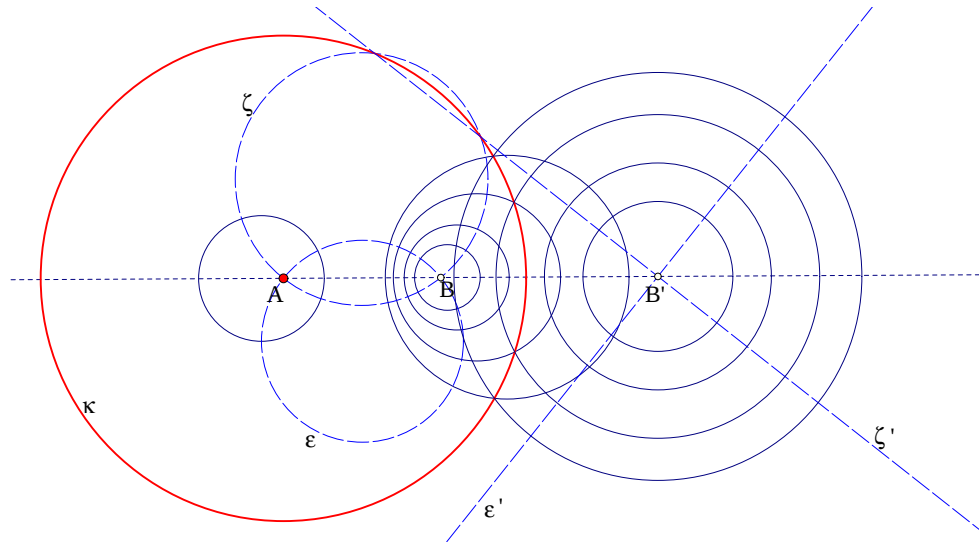


Σχήμα 441: Ειδική αντιστροφή τεμνόμενης δέσμης

Απόδειξη: Συνέπεια της Πρότασης 4.8.3. Αφού όλοι οι κύκλοι της Δ διέρχονται από το A τα αντίστροφά τους θα είναι ευθείες. Αφού διέρχονται και από το B , τα αντίστροφά τους θα διέρχονται από το αντίστροφο B' του B ως προς κ , ο.ε.δ.

Πρόταση 4.8.8 Έστω Δ μη τεμνόμενη δέσμη και $\kappa(A, \rho)$ κύκλος με κέντρο ένα από τα οριακά σημεία A και B της δέσμης. Τότε η αντίστροφη Δ' της Δ ως προς κ είναι η μη συμβατική δέσμη των συγκεντρικών κύκλων με κέντρο στο αντίστροφο B' του B ως προς κ .

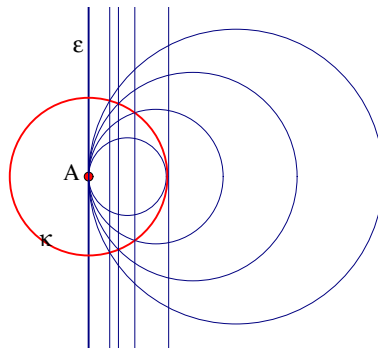
Απόδειξη: Συνέπεια της Πρότασης 4.8.3 που εφαρμόζουμε σε δύο κύκλους ϵ και ζ , διερχόμενους από τα A και B , που ανήκουν στην ορθογώνια δέσμη της Δ . Τα αντίστροφα ϵ' και ζ' αυτών των κύκλων είναι ευθείες διερχόμενες από το B' . Επίσης επειδή οι ϵ , ζ είναι



Σχήμα 442: Ειδική αντιστροφή μη τεμνόμενης δέσμης

ορθογώνιοι προς κάθε κύκλο λ της Δ , τα αντίστροφά τους, που είναι οι ευθείες ϵ' και ζ' θα είναι ορθογώνια προς το αντίστροφο λ' του λ (Πρόταση 4.8.6). Άρα το λ' θα είναι κύκλος με κέντρο το B' , ο.ε.δ.

Πρόταση 4.8.9 Έστω Δ εφαπτόμενη δέσμη και $\kappa(A, \rho)$ κύκλος με κέντρο το βασικό σημείο A της δέσμης. Τότε η αντιστροφή Δ' της Δ ως προς κ είναι η μη συμβατική δέσμη των ευθειών που είναι παράλληλες προς τον ριζικό άξονα ϵ της Δ .

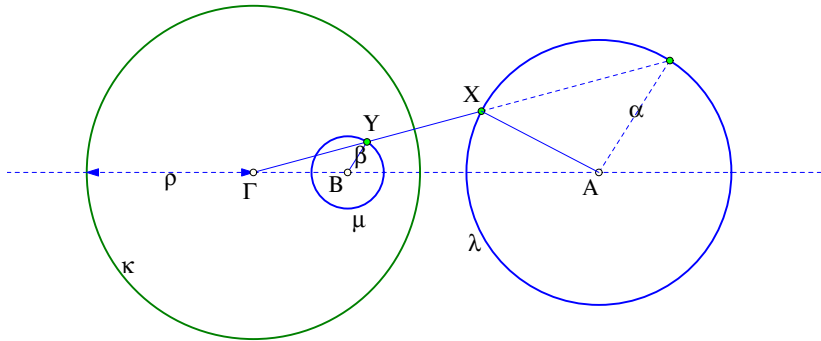


Σχήμα 443: Ειδική αντιστροφή εφαπτόμενης δέσμης

Απόδειξη: Συνέπεια της Πρότασης 4.8.3. Αφού όλοι οι κύκλοι της Δ διέρχονται από το A τα αντίστροφά τους θα είναι ευθείες. Το αντίστροφο του ριζικού άξονα ϵ είναι ο εαυτός του. Κάθε κύκλος λ της δέσμης έχει με τον άξονα μοναδικό κοινό σημείο το A . Συνεπώς το αντίστροφο λ' του λ , που είναι ευθεία, δεν θα έχει κανένα κοινό σημείο με τον ϵ , άρα θα είναι παράλληλο αυτού, ο.ε.δ.

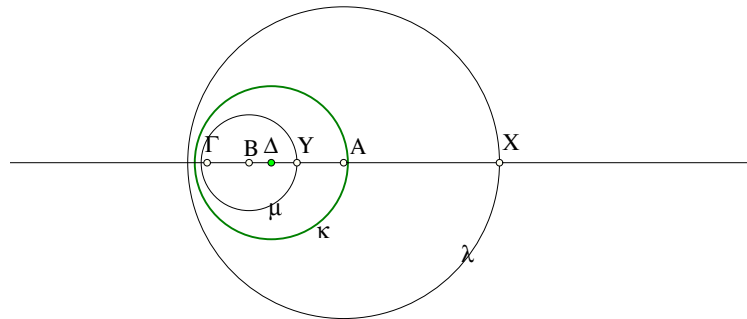
Θεώρημα 4.8.2 Δοθέντων δύο μη ίσων κύκλων $\lambda(A, a)$ και $\mu(B, \beta)$, υπάρχει μία αντιστροφή ως προς κύκλο κ η οποία εναλλάσσει τους δύο δοθέντες κύκλους. Δηλαδή το αντίστροφο του λ ως προς κ είναι το μ και τούμπαλιν.

Απόδειξη: Προκύπτει από την Πρόταση 4.7.4. Η πρόταση αυτή συνεπάγεται ότι, στην περίπτωση που οι λ και μ είναι εξωτερικοί αλλήλων ή εφάπτονται εξωτερικά, το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας Γ των δύο κύκλων έχει την επιθυμητή ιδιότητα του κέντρου αντιστροφής. Συγκεκριμένα, σε αυτήν την περίπτωση το γινόμενο των αποστάσεων $|\Gamma X||\Gamma Y|$ δύο αντιστοίχων σημείων από το Γ είναι σταθερός θετικός αριθμός ίσος με $|\Gamma A||\Gamma B| - \alpha\beta$. Σε αυτήν την περίπτωση ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας Γ και ακτίνα $\rho = \sqrt{|\Gamma A||\Gamma B| - \alpha\beta}$.



Σχήμα 444: Κύκλος αντιστροφής δύο εξωτερικών αλλήλων κύκλων λ και μ

Στην περίπτωση που ο κύκλος $\mu(B, \beta)$ είναι εσωτερικός του $\lambda(A, \alpha)$ ή εφάπτεται εσωτερικά ο ζητούμενος έχει κέντρο το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας Δ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\alpha\beta - |\Delta A||\Delta B|}$.

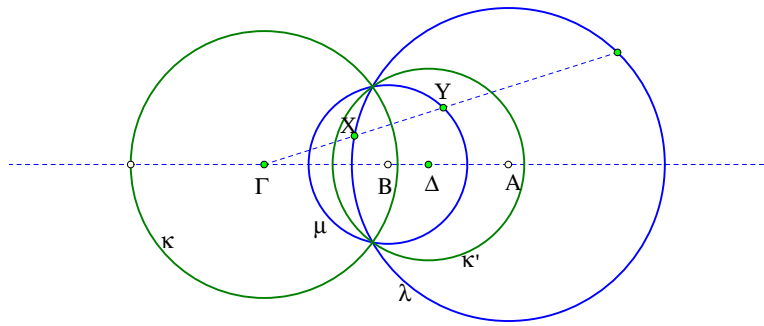


Σχήμα 445: Κύκλος αντιστροφής όταν ο λ περιέχει τον μ

Τέλος, στην περίπτωση τεμνομένων σε δύο σημεία κύκλων λ και μ υπάρχουν δύο κύκλοι $\kappa(\Gamma, \rho)$ και $\kappa'(\Delta, \rho')$ με ακτίνες $\rho = \sqrt{|\Gamma A||\Gamma B| - \alpha\beta}$, $\rho' = \sqrt{\alpha\beta - |\Delta A||\Delta B|}$ και κέντρα τα κέντρα ομοιότητας Γ (εξωτερικό) και Δ (εσωτερικό) των κύκλων λ και μ .
ο.ε.δ.

Άσκηση 4.8.1 Δείξε ότι στην περίπτωση δύο τεμνομένων κύκλων λ και μ , οι δύο κύκλοι αντιστροφής που εξασφαλίζει το Θεώρημα 4.8.2 είναι ορθογώνιοι και διέρχονται από τα σημεία τομής των λ και μ .

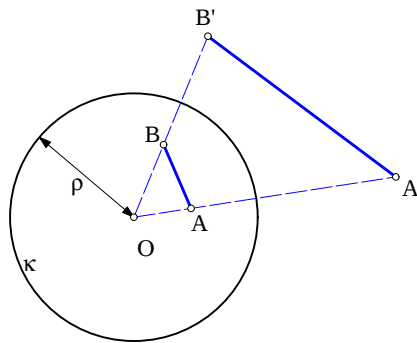
Άσκηση 4.8.2 Δείξε ότι στην περίπτωση δύο τεμνομένων κύκλων λ και μ , κάθε κύκλος ν ταυτόχρονα εφαπτόμενος των λ και μ είναι ορθογώνιος προς έναν εκ των δύο κύκλων αντιστροφής των λ και μ .



Σχήμα 446: Κύκλοι αντιστροφής δύο τεμνομένων κύκλων κ και λ

Άσκηση 4.8.3 Δείξε ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB' , που έχει άκρα τα αντίστροφα των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος AB , ως προς κύκλο $\kappa(O, \rho)$ ισούται με

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{\rho^2}{|OA||OB|}.$$

Σχήμα 447: Μήκη των AB και αντιστρόφου του $A'B'$

Υπόδειξη: Τα τρίγωνα OAB και $OB'A'$ είναι όμοια αφού

$$\rho^2 = |OA||OA'| = |OB||OB'| \Rightarrow \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}.$$

Συνεπώς θα ισχύει

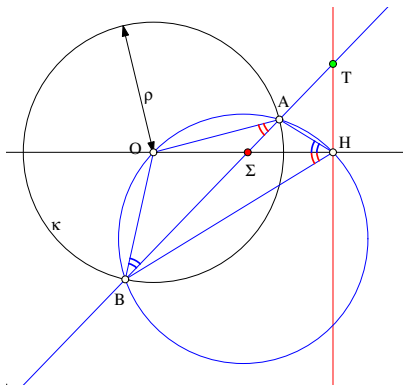
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OB'|}{|OA|} = \frac{\frac{\rho^2}{|OB|}}{|OA|} = \frac{\rho^2}{|OA||OB|}.$$

Άσκηση 4.8.4 Δείξε ότι σε μία ευθεία ε τα σημεία Γ, Δ είναι αρμονικά συζυγή των A, B τότε και μόνον, όταν τα Γ, Δ είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον κύκλο με διάμετρο AB , και ισοδύναμα, όταν τα A, B είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο με διάμετρο $\Gamma\Delta$.

Άσκηση 4.8.5 Από σημείο Δ κύκλου κ άγονται τρεις χορδές $\Delta A, \Delta B$ και $\Delta \Gamma$ καθώς και μία παράλληλος ε της εφαπτομένης στο Δ που τέμνει τις χορδές στα A^*, B^* και Γ^* αντιστοίχως. Δείξε ότι $|\Delta A||\Delta A^*| = |\Delta B||\Delta B^*| = |\Delta \Gamma||\Delta \Gamma^*|$.

4.9 Πολική και Πόλος

Πρόταση 4.9.1 Δοθέντος κύκλου κ και σημείου Σ , θεωρούμε όλες τις ευθείες τις διερχόμενες διά του Σ και τέμνουσες τον κύκλο σε σημεία A, B . Ορίζουμε σε κάθε τέτοια ευθεία το αρμονικό συζυγές T του Σ ως προς τα A και B . Τότε ο γεωμετρικός τόπος του T είναι ευθεία κάθετη στην $O\Sigma$, όπου O το κέντρο του κύκλου κ .



Σχήμα 448: Πολική σημείου Σ ως προς κύκλο

Απόδειξη: Θεωρούμε τον κύκλο (OAB) που διέρχεται από το κέντρο του κ και τα σημεία τομής A, B της ΣT με τον κ . Έστω H το σημείο τομής του κύκλου με την $O\Sigma$. Το τετράπλευρο $BOAH$ είναι εγγράψιμο και το τρίγωνο AOB ισοσκελές, συνεπώς οι γωνίες

$$|\angle OAB| = |\angle OHB|, |\angle OBA| = |\angle OHA| \Rightarrow |\angle OHB| = |\angle OHA|,$$

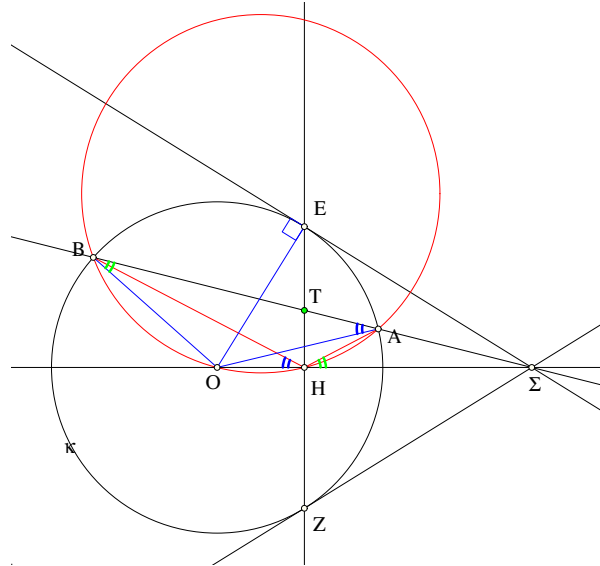
δηλαδή η ΣH είναι διχοτόμος της γωνίας στο H του τριγώνου BHA . Επειδή εξ υποθέσεως η (A, B, T, Σ) είναι αρμονική τετράδα, το σημείο T θα είναι το σημείο τομής της AB με την εξωτερική διχοτόμο της AHB , άρα η TH θα είναι κάθετη στην OH . Λόγω του ότι το Σ είναι στον ριζικό άξονα των δύο κύκλων, που είναι η AB , η δύναμη του Σ ως προς τους δύο κύκλους θα είναι η ίδια

$$|\Sigma O| |\Sigma H| = \rho^2 - |\Sigma|^2,$$

όπου ρ η ακτίνα του κύκλου κ . Συνάγεται ότι η θέση του H στην $O\Sigma$ είναι σταθερή, συνεπώς όλα τα σημεία του τόπου προβάλλονται στο H και ο τόπος περιέχεται στην ευθεία την κάθετη στην $O\Sigma$ στο H . Αντίστροφα, κάθε σημείο T αυτής της ευθείας ορίζει αντίστοιχα A, B και τα (A, B, T, Σ) αποτελούν αρμονική τετράδα. Η απόδειξη προκύπτει αντιστρέφοντας τα προηγούμενα επιχειρήματα. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AOBH$ συνάγεται πάλι ότι η OH είναι διχοτόμος της γωνίας AHB και συνεπώς, λόγω της καθετότητας της HT προς την OH , η HT είναι εξωτερική διχοτόμος της AHB και συνεπώς η (A, B, T, Σ) είναι αρμονική τετράδα, ο.ε.δ.

Στην προηγούμενη απόδειξη υποθέσαμε σιωπηρά ότι το Σ είναι στο εσωτερικό του κύκλου κ και διάφορο του κέντρου του. Με μικρές αλλαγές ισχύει η ίδια απόδειξη και για σημεία Σ στο εξωτερικό του κ . Η ευθεία HT ονομάζεται **Πολική του σημείου Σ** ως προς τον κύκλο κ . Στην περίπτωση που το Σ είναι εξωτερικό ισχύει και η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.9.2 Για κάθε κύκλο κ και σημείο Σ στο εξωτερικό του, η πολική του Σ ως προς τον κύκλο, ταυτίζεται με την ευθεία που συνδέει τα σημεία επαφής E, Z των εφαπτομένων του κ από το Σ .



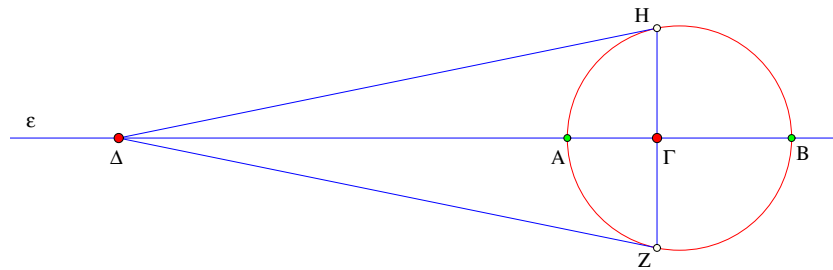
Σχήμα 449: Πολική σημείου εξωτερικού του κύκλου

Απόδειξη: Όπως είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη, η πολική του Σ είναι κάθετη στην OS στο σημείο H , που ικανοποιεί $|SO||SH| = |OS|^2 - \rho^2 = |SE|^2$, όπου SE η εφαπτόμενη από το Σ . Αυτή όμως η ισότητα χαρακτηρίζει ακριβώς την προβολή του σημείου επαφής E πάνω στην OS , ο.ε.δ.

Πόρισμα 4.9.1 Οι αποστάσεις $|OS|, |OH|$ των σημείων Σ και H στο οποίο η πολική του Σ ως προς τον κύκλο $\kappa(O, \rho)$ τέμνει την OS ικανοποιούν την εξίσωση

$$x \cdot y = \rho^2.$$

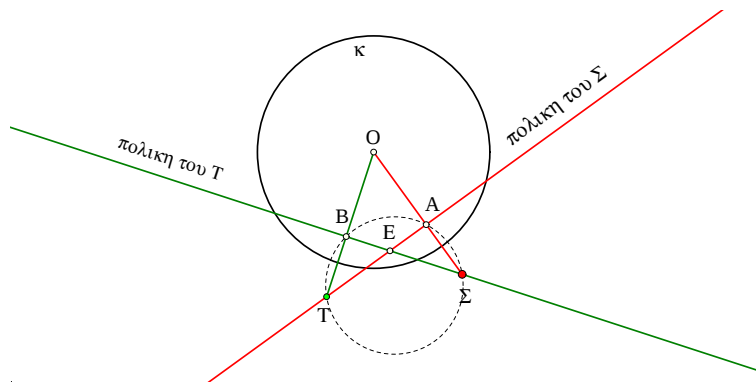
Πόρισμα 4.9.2 Η πολική ευθεία ε του σημείου Σ ως προς κύκλο $\kappa(O, \rho)$ συμπίπτει με την κάθετο στην OS στο σημείο H που είναι το αντίστροφο του Σ ως προς κ .

Σχήμα 450: Γ, Δ αρμονικά συζυγή ως προς A, B

Πόρισμα 4.9.3 Σε μία ευθεία ε , τα σημεία Γ, Δ είναι αρμονικά συζυγή των A, B τότε και μόνον, όταν ο κύκλος με διάμετρο AB έχει το ένα εξ αυτών στο εσωτερικό (Γ), το άλλο (Δ) στο εξωτερικό του AB και το εσωτερικό συμπίπτει με το σημείο τομής της ε και της χορδής ZH των εφαπτόμενων από το εξωτερικό σημείο.

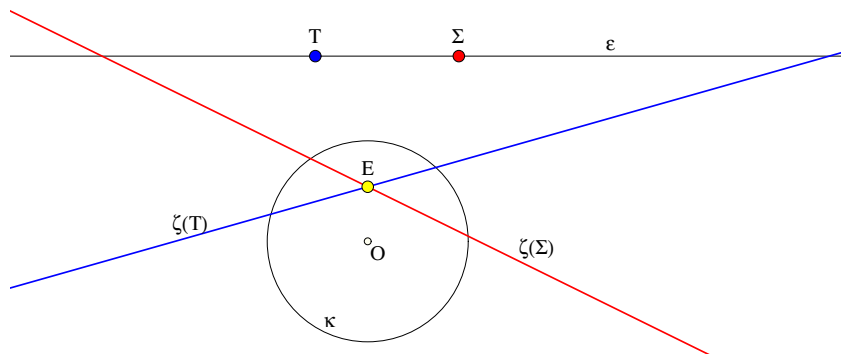
Από την τελευταία πρόταση (δες και Πρόταση 4.1.4) προκύπτει και η επέκταση της έννοιας της πολικής για σημεία Σ επί του κύκλου κ . Όταν το Σ κινείται πλησιάζοντας εκ των έξω την περιφέρεια του κύκλου, τότε οι δύο εφαπτόμενες ΣE και ΣZ τείνουν να συμπίσουν σε μία οριακή θέση, που είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο αντίστοιχο σημείο του κύκλου, προς το οποίο τείνει να συμπίσει το Σ . Θεωρούμε λοιπόν ότι στα σημεία Σ του κύκλου η πολική του Σ ως προς τον κύκλο ταυτίζεται με την εφαπτόμενη του κ στο Σ .

Πόρισμα 4.9.4 Αν η πολική του Σ ως προς τον κύκλο $\kappa(O, \rho)$ διέρχεται από το T , τότε και η πολική του T ως προς τον κ διέρχεται από το Σ .



Σχήμα 451: Συμμετρία των πολικών

Απόδειξη: Η πολική ϵ του Σ ως προς κ είναι η κάθετη στην $O\Sigma$ στο σημείο A που είναι αντίστροφο του Σ ως προς κ (Πόρισμα 4.9.2). Φέρνουμε λοιπόν την κάθετο ΣB στην TO . Σχηματίζεται το τετράπλευρο $\Sigma A B T$ που είναι εγγράψιμο σε κύκλο, διότι τα A και B βλέπουν την ΣT υπο ορθή γωνία. Τότε $|OB||OT| = |OA||OS| = \rho^2$, που σημαίνει ότι και το B είναι αντίστροφο του T ως προς κ , άρα η $B\Sigma$ είναι η πολική του T , ο.ε.δ.



Σχήμα 452: Πολική από δύο σημεία

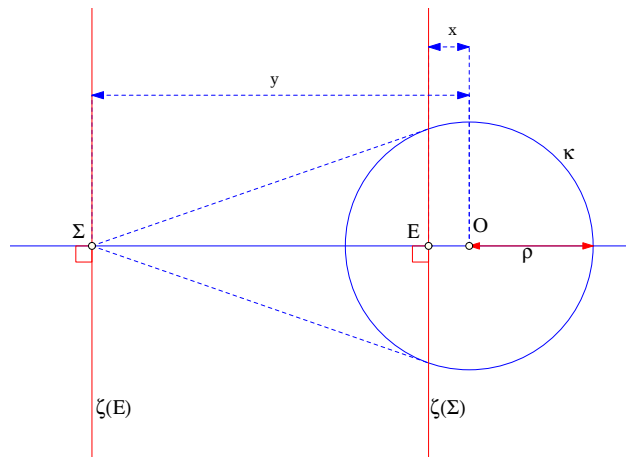
Πόρισμα 4.9.5 Αν οι πολικές των σημείων Σ και T ως προς κύκλο κ τέμνονται στο σημείο E τότε η ευθεία ΣT συμπίπτει με την πολική του E ως προς κ .

Απόδειξη: Κατά το προηγούμενο πόρισμα, αφού η πολική του Σ διέρχεται από το E και η πολική ϵ του E θα διέρχεται από το Σ . Παρόμοια, αφού η πολική του T διέρχεται από το E και η πολική ϵ του E θα διέρχεται από το T , ο.ε.δ.

Πόρισμα 4.9.6 Δοθέντος κύκλου κ και ευθείας ε , για κάθε σημείο Σ της ε η πολική $\zeta(\Sigma)$ διέρχεται από σταθερό σημείο E .

Απόδειξη: Κατά το προηγούμενο πόρισμα, για δύο σημεία Σ, Γ της ε , οι πολικές $\zeta(\Sigma)$ και $\zeta(\Gamma)$ θα τέμνονται σε σημείο E , έτσι ώστε η ε να συμπίπτει με την πολική του E . Τότε (Πόρισμα 4.9.4), και για κάθε άλλο σημείο X της ε η πολική $\zeta(X)$ θα διέρχεται από το E , ο.ε.δ.

Δοθέντος του κύκλου κ , το προηγούμενο πόρισμα ορίζει για κάθε ευθεία ε , που δεν διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου, το σημείο E που ονομάζεται **Πόλος της ευθείας** ε ως προς τον κύκλο κ . Η αντιστοίχιση του πόλου E στην ευθεία ε είναι η αντίστροφη της αντιστοίχισης της πολικής ε του σημείου E . Δημιουργείται έτσι μία ενδιαφέρουσα συσχέτιση σημείων και ευθειών, που αριθμητικά περιγράφεται από την σχέση, που αναφέρθηκε προηγουμένως, $xy = \rho^2$.



Σχήμα 453: Σχέση των πολικών των Σ και E $xy = \rho^2$

Η συσχέτιση αυτή πόλου-πολικής επεκτείνεται και για ευθείες που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου, αντιστοιχώντας σε κάθε ευθεία ε διά του O το σημείο στο άπειρο της καθέτου ζ της ε στο O . Επίσης η πολική του κέντρου O θεωρούμε ότι συμπίπτει με την ευθεία στο άπειρο.

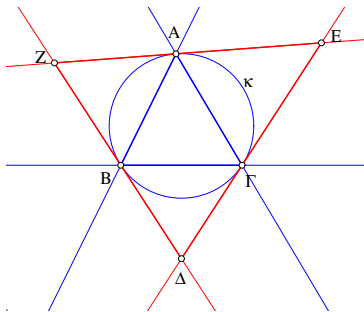
Άσκηση 4.9.1 Δείξε ότι αν ο πόλος E , ως προς κύκλο κ , της ευθείας ε περιέχεται στην ευθεία ζ , τότε και ο πόλος Z της ευθείας ζ , ως προς τον κ , περιέχεται στην ε .

Υπόδειξη: Αν ο πόλος E της ε περιέχεται στην ζ και Z ο πόλος της ζ , τότε το E περιέχεται στην πολική ζ του Z (Πόρισμα 4.9.4), άρα και η πολική του E , που είναι η ε , θα περιέχει το Z .

Άσκηση 4.9.2 Δείξε ότι οι πόλοι, ως προς κύκλο κ , των ευθειών που διέρχονται από σταθερό σημείο Σ , περιέχονται στην πολική $\zeta(\Sigma)$ του Σ ως προς τον κ .

Άσκηση 4.9.3 Δείξε ότι οι πόλοι των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του κ είναι οι κορυφές του τριγώνου ΔEZ , του οποίου οι πλευρές εφάπτονται του κ στις κορυφές του $AB\Gamma$.

Το τρίγωνο ΔEZ της προηγούμενης άσκησης ονομάζεται **Εφαπτομενικό τρίγωνο** του $AB\Gamma$.



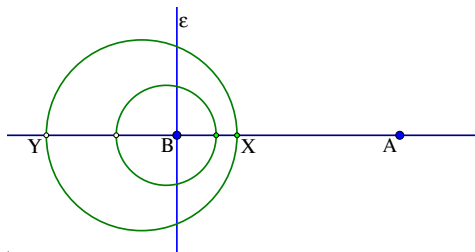
Σχήμα 454: Το εφαπτομενικό τρίγωνο ΔΕΖ του ΑΒΓ

Άσκηση 4.9.4 Δείξε ότι για κάθε πολύγωνο Π εγγεγραμμένο σε κύκλο κ , οι πόλοι των πλευρών του Π είναι κορυφές του πολυγώνου Π' , που είναι περιγεγραμμένο του κύκλου κ και οι πλευρές του εφάπτονται του κ στις κορυφές του Π .

Άσκηση 4.9.5 Δείξε ότι για κάθε κανονικό πολύγωνο Π εγγεγραμμένο σε κύκλο κ , οι πόλοι των πλευρών του Π είναι κορυφές του κανονικού πολυγώνου Π' , που είναι περιγεγραμμένο του κύκλου κ και οι πλευρές του εφάπτονται του κ στις κορυφές του Π .

Άσκηση 4.9.6 Δείξε ότι οι πολικές ως προς κύκλο κ τριών συνευθειακών σημείων είναι ευθείες διερχόμενες διά του ίδιου σημείου. Επίσης οι πόλοι ως προς κύκλο κ τριών ευθειών, που συντρέχουν σε ένα σημείο, είναι τρία συνευθειακά σημεία.

Άσκηση 4.9.7 Δοθείσης ευθείας ε και σημείου A εκτός αυτής κατασκεύασε κύκλο κ έτσι ώστε η πολική του A ως προς τον κ να είναι η ε . Δείξε ότι όλοι οι κύκλοι που λύνουν αυτό το πρόβλημα αποτελούν μιά μη τεμνόμενη δέσμη.

Σχήμα 455: Κύκλοι ως προς τους οποίους η ε είναι πολική του A

Υπόδειξη: Έστω B η προβολή του A στην ε . Για κάθε σημείο X στο εσωτερικό του AB και το αρμονικό συζυγές του Y ως προς A, B , ο κύκλος κ με διάμετρο XY έχει την απαιτούμενη ιδιότητα. Οι κύκλοι όπως ο κ ταυτίζονται με τους κύκλους της μη τεμνόμενης δέσμης με βασικά (οριακά) σημεία τα A και B .

Άσκηση 4.9.8 Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ κατασκεύασε τους κύκλους $\kappa(A, \rho)$, $\lambda(B, \sigma)$, $\mu(\Gamma, \tau)$ που είναι ορθογώνιοι αντίστοιχα στους κύκλους ν_A, ν_B, ν_Γ που έχουν αντίστοιχα διαμέτρους τις πλευρές του τριγώνου $B\Gamma$, ΓA και AB . Δείξε ότι οι κύκλοι κ , λ , μ έχουν ως ριζικούς άξονες τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι και οι κύκλοι ν_A, ν_B, ν_Γ έχουν τις ίδιες ευθείες ως ριζικούς άξονες. Τέλος δείξε ότι η πολική του ορθοκέντρου H του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τον κ είναι η ευθεία $B\Gamma$ και αντίστοιχες ιδιότητες για τους λ και μ .

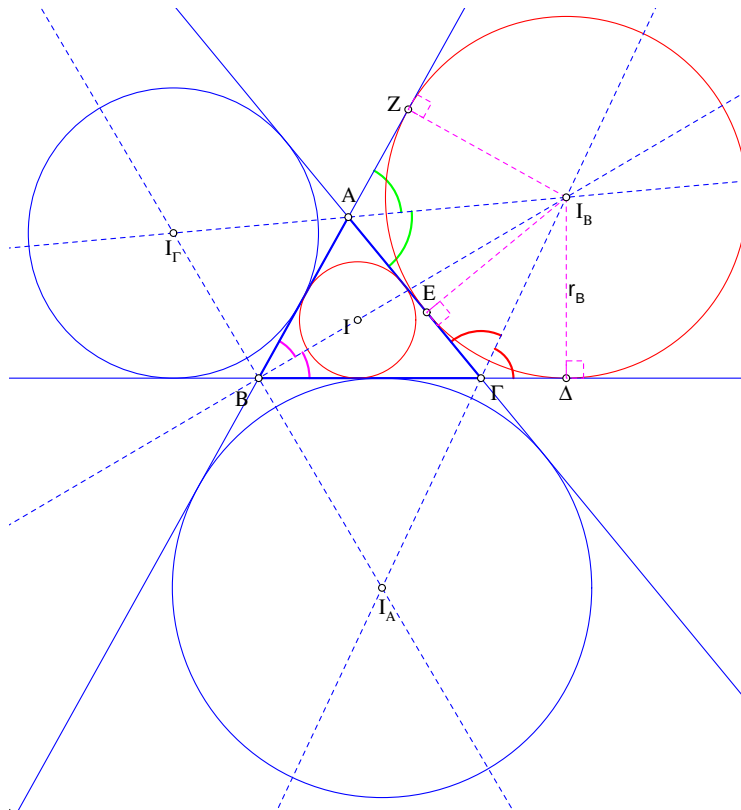
Κεφάλαιο 5

Από τα κλασικά θεωρήματα

5.1 Παρεγγεγραμμένοι και έκκεντρα

Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι του τριγώνου $AB\Gamma$ λέγονται οι κύκλοι που είναι εκτός του τριγώνου και εφάπτονται των πλευρών του. Τα κέντρα τους λέγονται **Έκκεντρα του τριγώνου** ή **Παράκεντρα του τριγώνου**. Η ύπαρξή των κύκλων αυτών στηρίζεται στην επόμενη πρόταση που είναι ανάλογη αυτής για την ύπαρξη του εγγεγραμμένου κύκλου (Πρόταση 2.2.3).

Πρόταση 5.1.1 *Η εσωτερική διχοτόμος μιάς γωνίας του τριγώνου και οι εξωτερικές διχοτόμοι των δύο άλλων γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.*



Σχήμα 456: Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η εσωτερική διχοτόμος στο B και οι εξωτερικές στα A και Γ τέμνονται στο ίδιο σημείο που συμβολίζουμε με I_B . Ανάλογα θα ισχύουν και για τις άλλες γωνίες και θα ορίζονται τα σημεία I_A και I_Γ . Η απόδειξη μεταφέρεται αυτολεξί από την προηγούμενη πρόταση. Έστω I_B το σημείο τομής δύο εκ των τριών διχοτόμων του τριγώνου και συγκεκριμένα των εξωτερικών διχοτόμων των γωνιών A και Γ . Θα δείξουμε ότι και η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας B διέρχεται από το I_B . Πράγματι, κατά την Πρόταση 1.15.12, οι αποστάσεις του I_B από τις πλευρές της γωνίας A είναι ίσες $|I_B Z| = |I_B E|$. Παρόμοια και οι αποστάσεις του I_B από τις πλευρές της γωνίας Γ είναι ίσες $|I_B E| = |I_B \Delta|$. Συνεπώς οι τρεις αποστάσεις θα είναι ίσες μεταξύ τους $|I_B Z| = |I_B E| = |I_B \Delta|$, άρα θα είναι ακτίνες του κύκλου με κέντρο I_B και ακτίνα $r_B = |I_B \Delta|$. Η ισότητα των αποστάσεων $|I_B Z| = |I_B \Delta|$ από τις πλευρές τις γωνίας B δείχνουν ότι το I_B ευρίσκεται και επί της διχοτόμου της γωνίας B (Πρόταση 1.15.12). Η καθετότητα των πλευρών στα άκρα των

ακτίνων αυτών του κύκλου δείχνει (2.2.2) ότι ο κύκλος εφαπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου, ο.ε.δ.

Άσκηση 5.1.1 Έστω ότι I, I_A, I_B, I_Γ είναι το έγκεντρο και τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου $AB\Gamma$. Δείξε ότι

1. Κάθε μία από τις τριάδες (A, I, I_A) , (B, I, I_B) , (Γ, I, I_Γ) αποτελείται από συνευθειακά σημεία.
2. Οι ευθείες που ορίζονται από κάθε μία τριάδα από τις προηγούμενες είναι ύψη του τριγώνου $I_AI_BI_\Gamma$.
3. Το I είναι το ορθόκεντρο του προηγούμενου τριγώνου.

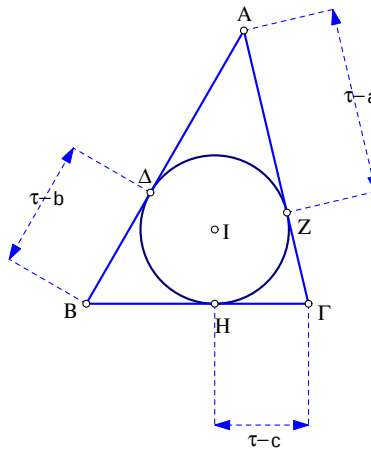
Πρόταση 5.1.2 Το μήκος της εφαπτόμενης $B\Delta$ από την κορυφή B προς τον αντίστοιχο παρεγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο I_B είναι ίσο με την ημιπερίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$

$$|B\Delta| = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Απόδειξη: Εδώ, ως συνήθως, με a, b και c συμβολίζουμε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου. Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από την ισότητα των εφαπτομένων από το B : $|BZ| = |B\Delta|$, καθώς και από τα A και Γ : $|AZ| = |AE|$, $|GE| = |G\Delta|$. Η περίμετρος γράφεται λοιπόν

$$\begin{aligned} a + b + c &= (|B\Gamma| + |GE|) + (|AE| + |BA|) \\ &= (|B\Gamma| + |G\Delta|) + (|BA| + |AZ|) \\ &= 2(|B\Gamma| + |G\Delta|), \end{aligned}$$

ο.ε.δ.



Σχήμα 457: Οι εφαπτόμενες του εγγεγραμμένου

Πρόταση 5.1.3 Η εφαπτόμενη $A\Delta$ από την κορυφή τριγώνου $AB\Gamma$ προς τον εγγεγραμμένο κύκλο του έχει μήκος

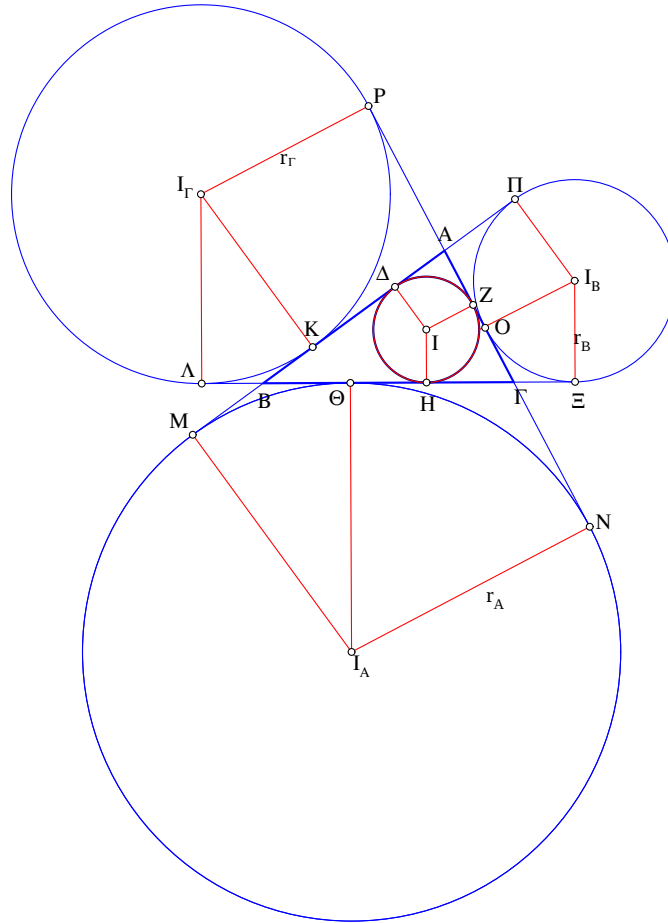
$$|A\Delta| = \tau - a,$$

όπου $\tau = \frac{1}{2}(a + b + c)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Απόδειξη: Όπως και η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, έτσι και αυτή εδώ στηρίζεται στην ισότητα των εφαπτομένων από ένα σημείο προς κύκλο: $|AD| = |AZ|$, $|BD| = |BH|$, $|GH| = |GZ|$. Αρκεί να γράψουμε λοιπόν την περίμετρο

$$a + b + c = 2\tau = 2(|AD| + |BH| + |GH|) = 2(|AD| + a),$$

από την οποία προκύπτει αμέσως το ζητούμενο, ο.ε.δ.



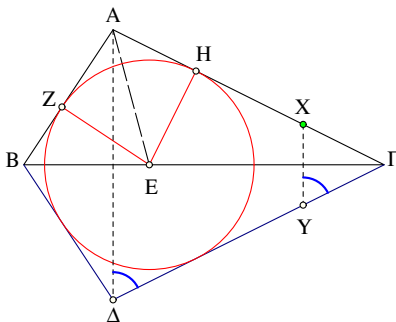
Σχήμα 458: Τμήματα επί των πλευρών

Πρόταση 5.1.4 Ο επόμενος πίνακας δίνει τα κέντρα του εγγεγραμμένου και των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου $AB\Gamma$ καθώς και τις αντίστοιχες προβολές τους στις πλευρές AB , $B\Gamma$ και ΓA (Σχήμα: 458).

	AB	$B\Gamma$	ΓA
I	Δ	H	Z
I_A	M	Θ	N
I_B	Π	Ξ	O
I_Γ	K	Λ	P

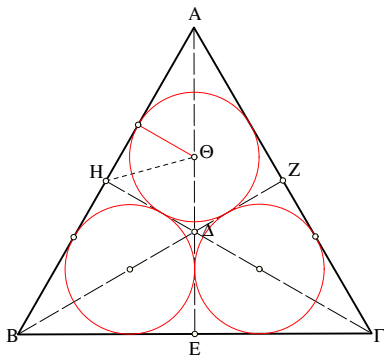
Υπόδειξη: Έστω Δ το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου $I(r)$ με την πλευρά AB . Το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta I$ κατασκευάζεται διότι ξέρουμε την κάθετο $I\Delta$ μήκους r και την γωνία $|\Delta AI| = \frac{\alpha}{2}$. Προέκτεινε την $A\Delta$ κατά a μέχρι το E . Το E είναι σημείο επαφής της AB με τον παρεγγεγραμμένο κύκλο $I_A(r_A)$ (Άσκηση (2) 5.1.2). Επομένως και αυτός κατασκευάζεται φέρνοντας κάθετο στην AB στο E και ευρίσκοντας το σημείο τομής της I_A με την AI . Φέρε κατόπιν την κοινή εφαπτόμενη $B\Gamma$ των δύο κύκλων (Κατασκευή 2.4.10). Το $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 5.1.6 Έστω Δ το συμμετρικό της κορυφής A τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την πλευρά $B\Gamma$. Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι συμμετρικό ως προς $B\Gamma$. Το σημείο τομής E της διχοτόμου της γωνίας A με την $B\Gamma$ ορίζει το κέντρο κύκλου κ που εφάπτεται και των τεσσάρων πλευρών του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$.



Σχήμα 460: Κύκλος εγγεγραμμένος σε τετράπλευρο

Υπόδειξη: Εφάρμοσε την Άσκηση 1.16.4 και δείξε την συμμετρία του $AB\Delta\Gamma$. Το E ισαπέχει από τις κάθετες πλευρές ($|EZ| = |EH|$). Ο κύκλος με κέντρο E και ακτίνα EZ εφάπτεται των πλευρών AB και AG , που είναι κάθετες στα άκρα των ακτίνων EZ και EH αυτού του κύκλου. Κατά την συμμετρία ως προς $B\Gamma$ ο κύκλος πάει στον εαυτό του (Πόρισμα 2.1.4) και το τετράπλευρο επίσης. Τα σημεία επαφής κύκλου και τετραπλεύρου πάνε πάλι σε σημεία επαφής.



Σχήμα 461: Κύκλοι αλληλοεφαπτόμενοι

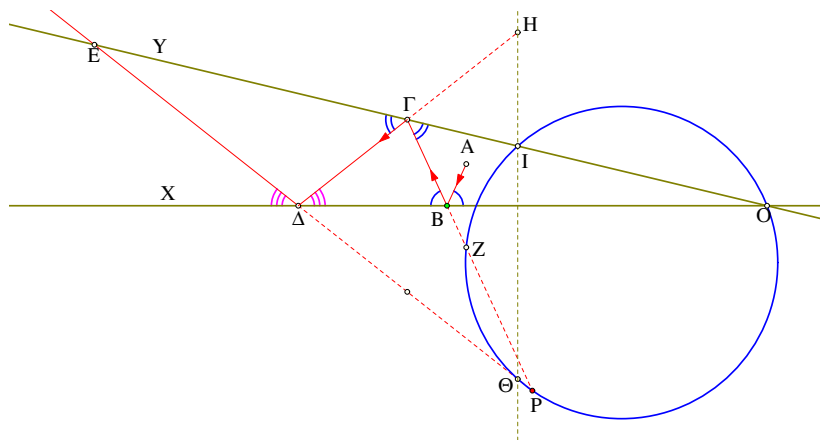
Άσκηση 5.1.7 Δείξε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφονται τρεις κύκλοι, έκαστος εφαπτόμενος των δύο άλλων εξωτερικά και ταυτόχρονα εφαπτόμενος δύο πλευρών του τριγώνου.

Υπόδειξη: Έστω Δ το κέντρο βάρους του τριγώνου και E, Z, H τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA και AB αντίστοιχα. Τα τετράπλευρα $AH\Delta Z$, $Z\Delta E\Gamma$, $E\Delta H B$ είναι συμμετρικά ως προς τις αντίστοιχες διαμέτρους AE , ΓH και BZ . Εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση και κατασκεύασε τρεις κύκλους εγγεγραμμένους στα τρία αυτά τετράπλευρα αντίστοιχα. Τα τετράπλευρα είναι συμμετρικά ως προς τις κοινές πλευρές τους, άρα οι κύκλοι είναι ίσοι και εφάπτονται όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Σχόλιο-1 Η τελευταία άσκηση είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος του Malfatti (1731-1807) που ζητά να γίνει η ίδια κατασκευή αλλά σε οποιοδήποτε τρίγωνο. Η λύση του γενικότερου προβλήματος είναι αρκετά περίπλοκη ([Doe65, σ. 147], [Coo16, σ. 174]).

Άσκηση 5.1.8 Δίδεται γωνία XOY και σημείο A στο εσωτερικό της. Θεωρούμε τις ευθείες ως κάτοπτρα, το A ως σημειακή πηγή φωτός και την AB ακτίνα φωτός με B μεταβαλλόμενο στην OX . Η ακτίνα AB ανακλάται στην $B\Gamma$, αυτή στην $\Gamma\Delta$, αυτή στην ΔE κ.ο.κ. Δείξε ότι:

- (1) όλες οι ευθείες $B\Gamma$ διέρχονται από σταθερό σημείο Z ,
- (2) όλες οι ευθείες $\Gamma\Delta$ διέρχονται από σταθερό σημείο H ,
- (3) όλες οι ευθείες ΔE διέρχονται από σταθερό σημείο Θ ,
- (4) το σημείο τομής P των ευθειών $B\Gamma$ και ΔE ανήκει στον κύκλο $(OZ\Theta)$,
- (5) ο κύκλος αυτός διέρχεται από το σημείο τομής I της OY με την $H\Theta$.



Σχήμα 462: Ανακλώμενες ευθείες

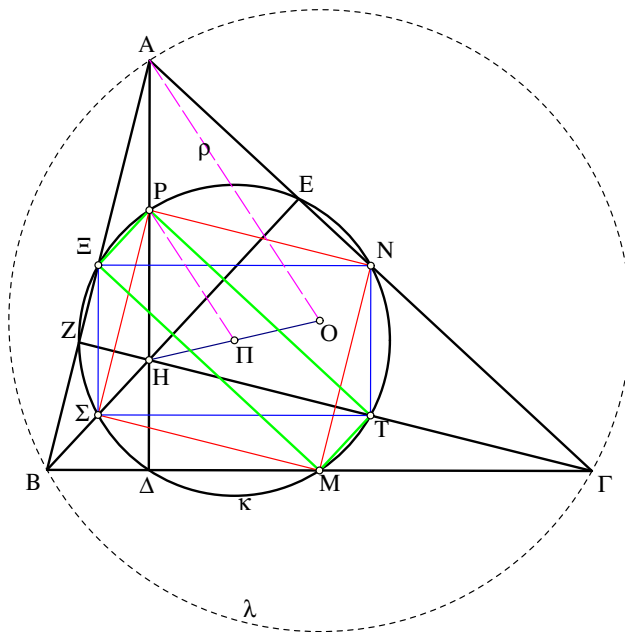
Υπόδειξη: Το Z είναι το συμμετρικό του A ως προς OX . Το H είναι το συμμετρικό του Z ως προς OY . Το Θ είναι το συμμετρικό του H ως προς OX . Η γωνία $\Theta P Z$ είναι διπλάσια της σταθερής γωνίας XOY . Η γωνία $ZI\Theta$ είναι και αυτή διπλάσια της XOY .

Άσκηση 5.1.9 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδονται οι ακτίνες του εγγεγραμμένου r , παρεγγεγραμμένου r_A και η διαφορά των πλευρών $|b - c|$.

Σχόλιο-2 Η παράγραφος αυτή δίνει μία γεύση της ούτως ονομαζόμενης **Γεωμετρίας του τριγώνου**, στην οποία εξετάζονται διάφορα στοιχεία του τριγώνου και οι μεταξύ τους σχέσεις ([Κα96], [Lal52], [Gal13]).

5.2 Κύκλος του *Euler*

Ο κύκλος του *Euler* (1707 – 1783) είναι αυτός που περνά από τα τρία μέσα των πλευρών τριγώνου. Η ιδιαιτερότητά του είναι ότι περνά και από άλλα έξι αξιοσημείωτα σημεία του τριγώνου, γι' αυτό συχνά ονομάζεται **Κύκλος των εννέα σημείων** του τριγώνου.



Σχήμα 463: Ο κύκλος κ του *Euler*

Πρόταση 5.2.1 Ο κύκλος κ που διέρχεται από τα μέσα M, N, Ξ των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ έχει τις εξής ιδιότητες

1. Ο κύκλος κ διέρχεται και από τα ίχνη Δ, E, Z των υψών του τριγώνου.
2. Ο κύκλος κ διέρχεται και από τα μέσα P, Σ, T των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τις κορυφές με το ορθόκεντρο H του τριγώνου.
3. Το κέντρο Π του κύκλου κ είναι το μέσον του τμήματος που ενώνει το ορθόκεντρο H με το περίκεντρο O του τριγώνου.
4. Η ακτίνα ΠP του κύκλου κ είναι το μισό της ακτίνας $\rho = |OA|$ του περιγεγραμμένου κύκλου λ του τριγώνου.

Απόδειξη: Η απόδειξη στηρίζεται στην ύπαρξη τριών ορθογωνίων παραλληλογράμμων που έχουν ανά δύο κοινή διαγώνιο. Τα παραλληλόγραμμα είναι τα $\Sigma T N \Xi$, $\Sigma M N P$ και $P \Xi M T$. Πρώτα ας δούμε ότι σχηματίζονται αυτά τα ορθογώνια. Δείχνω ότι το $\Sigma T N \Xi$ είναι ορθογώνιο. Η απόδειξη για τα $\Sigma M N P$ και $P \Xi M T$ είναι παρόμοια.

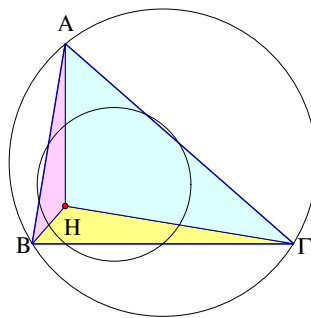
Στο $\Sigma T N \Xi$, λοιπόν, η $\Sigma \Xi$ ενώνει τα μέσα πλευρών του τριγώνου BHA άρα είναι παράλληλη και το μισό της HA . Παρόμοια η TN ενώνει τα μέσα πλευρών του τριγώνου $AH\Gamma$, άρα είναι παράλληλη και το μισό της HA . Συνεπώς οι $\Sigma \Xi$ και TN ως παράλληλες και ίσες ορίζουν

παράλληλογράμμο $\Sigma\Gamma\Xi$. Ότι αυτό είναι ορθογώνιο προκύπτει από το ότι και η $\Sigma\Gamma$ ενώνει μέσα πλευρών του τριγώνου $HB\Gamma$, άρα είναι παράλληλη και το μισό της $B\Gamma$. Αφού τα $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι κάθετα μεταξύ τους το ίδιο θα συμβαίνει και με τα παράλληλα αυτών $\Xi\Sigma$ και $\Sigma\Gamma$.

Τα τρία ορθογώνια έχουν ανά δύο μία κοινή διαγώνιο που είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου τους. Αυτό συνεπάγεται ότι οι τρεις περιγεγραμμένοι κύκλοι αυτών των ορθογωνίων συμπίπτουν. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη των δύο πρώτων ισχυρισμών της πρότασης.

Γιά την απόδειξη των υπόλοιπων δύο ισχυρισμών της πρότασης, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στο τρίγωνο HOA το τμήμα PP ενώνει τα μέσα πλευρών του τριγώνου HOA άρα είναι παράλληλο και το μισό του OA . Όμως το OA είναι ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου λ και το PP είναι ακτίνα του κύκλου χ , ο.ε.δ.

Άσκηση 5.2.1 Να βρεθούν τα κέντρα ομοιότητας του περιγεγραμμένου και του κύκλου του Euler του τριγώνου.



Σχήμα 464: Κοινός κύκλος του Euler

Άσκηση 5.2.2 Δείξε ότι γιά κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθόκεντρο H , οι κύκλοι του Euler των τριγώνων $AB\Gamma$, ABH , $B\Gamma H$, ΓAH συμπίπτουν. Συμπεράνε ότι τα τέσσερα αυτά τρίγωνα έχουν περιγεγραμμένους κύκλους με ίσες ακτίνες.

Άσκηση 5.2.3 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται η θέση της κορυφής A , η θέση του ορθοκέντρου H και η θέση του κέντρου Π του κύκλου του Euler.

Άσκηση 5.2.4 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται η θέση της κορυφής A , η θέση της προβολής Δ του A στην απέναντι πλευρά $B\Gamma$ και η θέση του κέντρου Π του κύκλου του Euler.

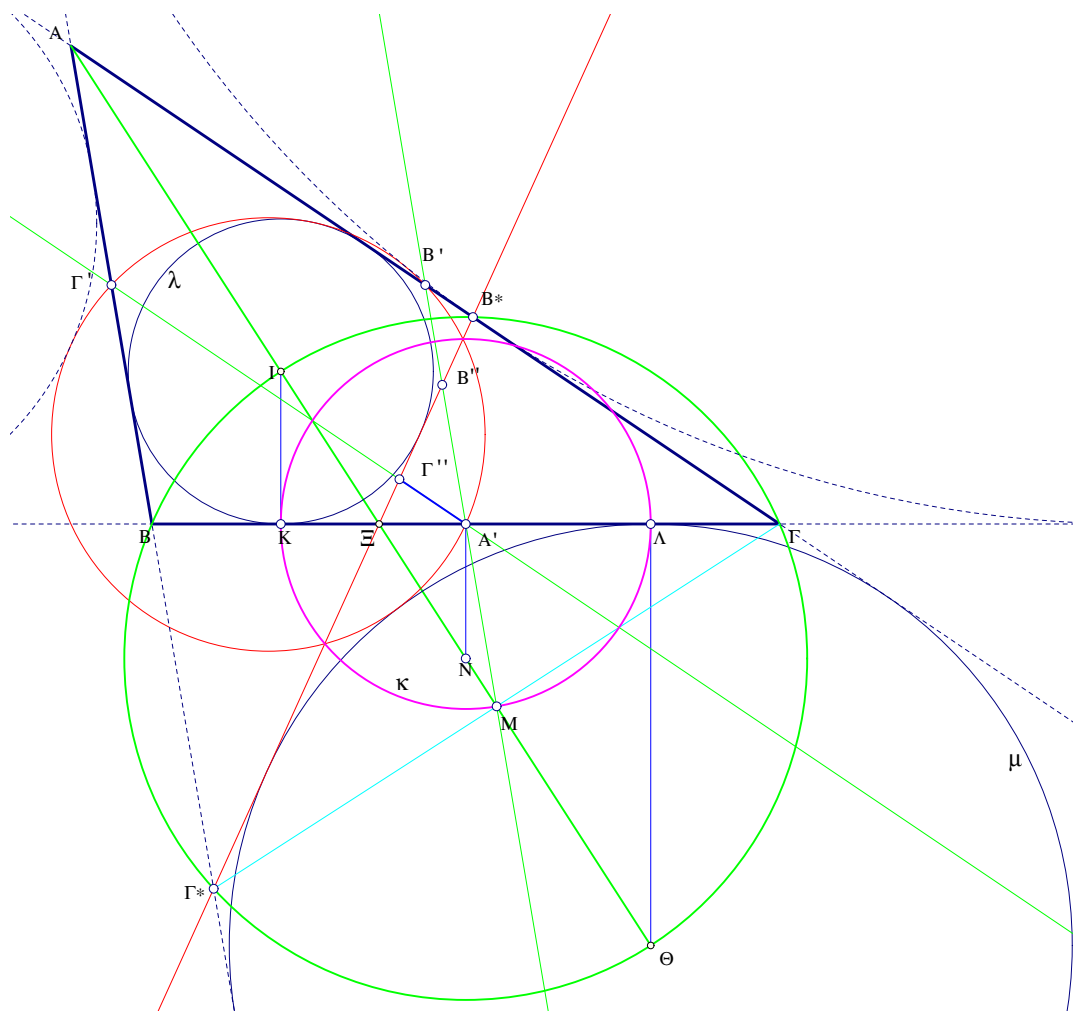
Άσκηση 5.2.5 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδονται τα μήκη $a = |B\Gamma|$, $b + c = |A\Gamma| + |AB|$ και η ακτίνα r του εγγεγραμμένου κύκλου.

Υπόδειξη: Τόσο σε αυτήν όσο και στην επόμενη να γίνει χρήση της Πρότασης 5.1.4.

Άσκηση 5.2.6 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδονται τα μήκη $a = |B\Gamma|$, $b - c = |A\Gamma| - |AB|$ και η ακτίνα r του εγγεγραμμένου κύκλου.

5.3 Θεώρημα του *Feuerbach*

Θεώρημα 5.3.1 (*Feuerbach (1800-1834)*) Σε κάθε τρίγωνο ο κύκλος του *Euler* εφάπτεται του εγγεγραμμένου καθώς και των τριών παρεγγεγραμμένων κύκλων του.



Σχήμα 465: Θεώρημα του Feuerbach

Απόδειξη: Στην απόδειξη αυτή ([Aud02, σ. 110], [CG67, σ. 117], [Joh60, σ. 190], μιά δεύτερη απόδειξη δίδεται στην Άσκηση 5.7.5) τον ρόλο κλειδί παίζει ο κύκλος με διάμετρο ΚΛ, όπου Κ, Λ οι προβολές του εγκέντρου Ι και του εκκέντρου Θ της γωνίας Α του τριγώνου. Θεωρούμε επίσης την συμμετρική Γ*Β* της βάσης ΒΓ ως προς την διχοτόμο ΑΙ. Το τετράπλευρο ΒΒ*ΓΓ*, είναι εκ κατασκευής συμμετρικό ως προς την διχοτόμο ΙΘ και τα Β, Β*, Γ, Γ* βλέπουν το ΙΘ υπό ορθή γωνία, άρα περιέχονται στον κύκλο με διάμετρο ΙΘ. Τα μήκη των ΒΚ, ΚΛ, ΛΓ έχουν υπολογισθεί στην Πρόταση 5.1.4 και είναι

$$|BK| = \tau - b, \quad |KL| = |b - c|, \quad |LG| = \tau - b.$$

Αν Α'Β' και Γ' είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου και Μ το μέσον της ΓΓ*, τότε η Α'Β', ως παράλληλη προς την βάση ΑΓ* του ΑΓ*Γ διέρχεται από το μέσον Μ της ΓΓ*. Αυτό δείχνει ότι ο κύκλος κ με διάμετρο ΚΛ έχει ακτίνα

$$|AM'| = \frac{|b - c|}{2}.$$

Ένα τελευταίο χρήσιμο στοιχείο είναι το τετράπλευρο $\Gamma\Gamma''B''B'$, που σχηματίζεται από τις τομές B'' , Γ'' της Γ^*B^* αντίστοιχα με τις $A'B'$ και $A\Gamma'$. Το τετράπλευρο αυτό είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Τούτο φαίνεται αμέσως από την ισότητα των γωνιών

$$\gamma = |A'\Gamma'B'| = |\Gamma^*B''A'| = |B\Gamma^*\Gamma''|.$$

Συνάγεται λοιπόν ότι τα γινόμενα

$$|A'\Gamma''||A'\Gamma'| = |A'B''||A'B'|.$$

Το πρώτο από αυτά τα γινόμενα υπολογίζεται εύκολα, διότι $|A'\Gamma'| = \frac{b}{2}$ και το $A'\Gamma''$ υπολογίζεται από τα όμοια τρίγωνα $\Xi A'\Gamma''$ και $\Xi \Gamma B^*$. Εδώ χρειάζεται ένας μικρός λογαριασμός που συνοψίζεται στις ισότητες:

$$\frac{|\Xi B|}{|\Xi \Gamma|} = \frac{c}{b} \Rightarrow |\Xi B| = \frac{ac}{b+c}, \quad |\Xi \Gamma| = \frac{ab}{b+c} \Rightarrow \frac{|\Xi A'|}{|\Xi \Gamma|} = \frac{b-c}{2b}.$$

Αυτός συνεπάγεται την

$$|A'\Gamma''||A'\Gamma'| = |A'B''||A'B'| = \frac{(b-c)^2}{4},$$

που σημαίνει ότι τα (Γ', Γ'') και (B', B'') είναι ζεύγη αντιστρόφων σημείων ως προς τον κύκλο αντιστροφής κ με διάμετρο KL , ο οποίος, σημειωτέον, είναι ορθογώνιος προς τον εγγεγραμμένο κύκλο λ του τριγώνου. Μετά από αυτήν την προετοιμασία λοιπόν θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο κ . Σε αυτήν το αντίστροφο του εγγεγραμμένου είναι ο εαυτός του (Πόρισμα 4.8.1) και το αντίστροφο της ευθείας $B''\Gamma''$ είναι ο κύκλος που περνάει από τα σημεία B' , Γ' και A' , δηλαδή ο κύκλος του Euler (Πρόταση 4.8.3). Επειδή η ευθεία $B''\Gamma''$ εφάπτεται του εγγεγραμμένου, έπεται ότι και ο κύκλος του Euler θα εφάπτεται του εγγεγραμμένου (Πρόταση 4.8.5).

Το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται και στον παρεγγεγραμμένο κύκλο μ με κέντρο Θ . Και αυτός είναι ορθογώνιος προς τον κ και έχει την $B''\Gamma''$ εφαπτόμενη. Άρα το αντίστροφο αυτού του κύκλου είναι ο εαυτός του και το αντίστροφο της ευθείας $B''\Gamma''$, που είναι ο κύκλος του Euler θα εφάπτεται σε αυτόν.

Τα όσα είπαμε αποδεικνύουν λοιπόν ότι ο κύκλος του Euler εφάπτεται ταυτόχρονα του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου της γωνίας A . Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι ο κύκλος Euler εφάπτεται και των παρεγγεγραμμένων των άλλων γωνιών, ο.ε.δ.

Το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου και του κύκλου του Euler λέγεται **Σημείο του Feuerbach** του τριγώνου.

Άσκηση 5.3.1 Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίδεται η θέση του εγκέντρου (I) , η θέση του σημείου του Feuerbach (F_e) , καθώς και η θέση του μέσου A' της πλευράς $B\Gamma$.

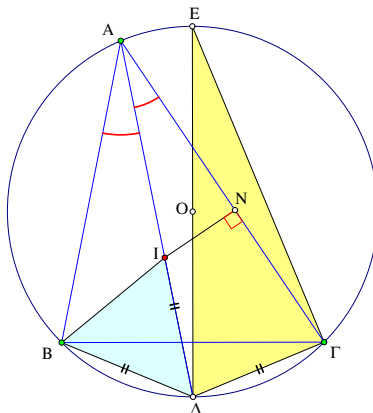
Άσκηση 5.3.2 Ναδειχθεί ότι ο κύκλος του Euler ταυτίζεται με τον εγγεγραμμένο τότε και μόνον, όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 5.3.3 Να μελετηθεί το σχήμα του Feuerbach στην περίπτωση του ισοσκελούς και του ισοπλεύρου τριγώνου.

5.4 Θεώρημα του Euler

Θεώρημα 5.4.1 (Θεώρημα του Euler) Σε κάθε τρίγωνο η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του, η ακτίνα r του εγγεγραμμένου κύκλου του και η απόσταση OI των κέντρων αυτών των κύκλων συνδέονται μέσω του τύπου

$$|OI|^2 = R(R - 2r).$$



Σχήμα 466: Θεώρημα του Euler

Απόδειξη: Ο τύπος θυμίζει την δύναμη $p(I) = |OI|^2 - R^2$ του εγκέντρου I (κέντρου του εγγεγραμμένου κύκλου) ως προς τον περιγεγραμμένο, ιδιαίτερα αν τον γράψουμε $|OI|^2 - R^2 = -2rR$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η δύναμη του εγκέντρου I ως προς τον περιγεγραμμένο είναι $-2rR$. Δύο είναι οι βασικές παρατηρήσεις που οδηγούν στην απόδειξη. Πρώτα ότι η προέκταση της διχοτόμου AI διέρχεται από το μέσον Δ του τόξου $B\Gamma$ (Άσκηση 2.13.1) και τα ευθύγραμμα τμήματα ΔB , ΔI , $\Delta \Gamma$ είναι ίσα. Τα ΔB και $\Delta \Gamma$ είναι βέβαια ίσα αφού το Δ είναι το μέσον του τόξου $B\Gamma$. Το τρίγωνο $B\Delta I$ είναι όμως ισοσκελές διότι η γωνία του στο B είναι άθροισμα $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και το ίδιο συμβαίνει με την γωνία του στο I , ως εξωτερική του τριγώνου BIA . Η δύναμη του I λοιπόν είναι $|AI||I\Delta| = |AI||\Delta\Gamma|$. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι τα ορθογώνια τρίγωνα AIN και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια. Εδώ N είναι η προβολή του I στην AF , άρα το μήκος της $|IN| = r$. Το E είναι το αντιδιαμετρικό του Δ . Προφανώς τα τρίγωνα είναι όμοια διότι έχουν τις οξείες γωνίες στα A και E ίσες. Τότε οι πλευρές τους είναι ανάλογες:

$$\frac{|AI|}{|IN|} = \frac{|E\Delta|}{|\Delta\Gamma|} \Rightarrow |AI||\Delta\Gamma| = |IN||E\Delta|,$$

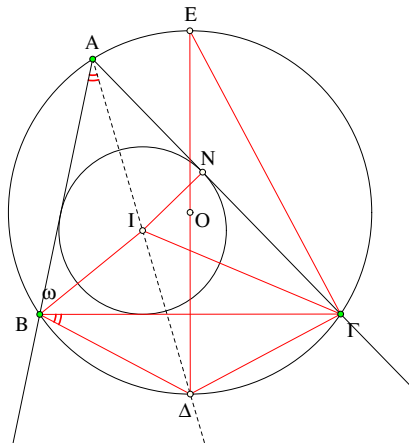
που, με όσα είπαμε, μεταφράζεται στο αποδεικτέο:

$$-p(I) = |AI||I\Delta| = |AI||\Delta\Gamma| = |IN||E\Delta| = r(2R), \quad \text{o.ε.δ.}$$

Θεώρημα 5.4.2 Εάν για δύο κύκλους $\kappa(I, r)$ και $\lambda(O, R)$ ισχύει η σχέση $|OI|^2 = R(R - 2r)$, τότε για κάθε σημείο A του λ υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο στον λ και περιγεγραμμένο του κ .

Απόδειξη: Κατ' αρχήν ο κ είναι εντός του κύκλου λ . Αυτό φαίνεται παίρνοντας σημείο X του κ και υπολογίζοντας την διαφορά

$$|XO|^2 < (|XI| + |IO|)^2 < |XI|^2 + |IO|^2 = r^2 + R^2 - 2Rr = (R - r)^2,$$



Σχήμα 467: Τρίγωνα με τον ίδιο περίκυκλο και εγγεγραμμένο

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ισχύουσα ισότητα. Φέρνουμε λοιπόν από τυχόν σημείο A του λ τις εφαπτόμενες στον κ , οι οποίες έστω ότι τέμνουν ξανά τον λ στα B και Γ . Αρκεί να δείξουμε ότι η $B\Gamma$ εφαπτεται του κ . Προς τούτο φέρουμε την διχοτόμο της $BA\Gamma$ που τέμνει τον κύκλο λ στο μέσον Δ του τόξου $B\Gamma$. Έστω πάλι E το αντιδιαμετρικό του Δ και N η προβολή του I στην AG . Τα ορθογώνια τρίγωνα AIN και $E\Delta\Gamma$ έχουν τις οξείες γωνίες στα A και E ίσες άρα είναι όμοια. Συνεπώς

$$\frac{|AI|}{|IN|} = \frac{|E\Delta|}{|\Delta\Gamma|} \Rightarrow |AI||\Delta\Gamma| = |IN||E\Delta| = r(2R),$$

Όμως εξ υποθέσεως και η δύναμη του I ως προς λ είναι $-p(I) = |AI||I\Delta| = R^2 - |OI|^2 = 2Rr$. Άρα

$$|AI||I\Delta| = |AI||\Delta\Gamma| \Rightarrow |I\Delta| = |\Delta\Gamma|.$$

Σχηματίζονται λοιπόν δύο ισοσκελή τρίγωνα, το $B\Delta I$ και $\Delta I\Gamma$. Έστω $\omega = |IBA|$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι $\Delta B\Gamma$ και ΔAB είναι ίσες με $\alpha/2$, όπου $\alpha = |BA\Gamma|$ έχουμε

$$|BI\Delta| = \omega + \frac{\alpha}{2} = |IB\Delta| = |IB\Gamma| + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |IB\Gamma| = \omega.$$

Αυτό σημαίνει ότι η BI είναι διχοτόμος της γωνίας $AB\Gamma$, ο.ε.δ.

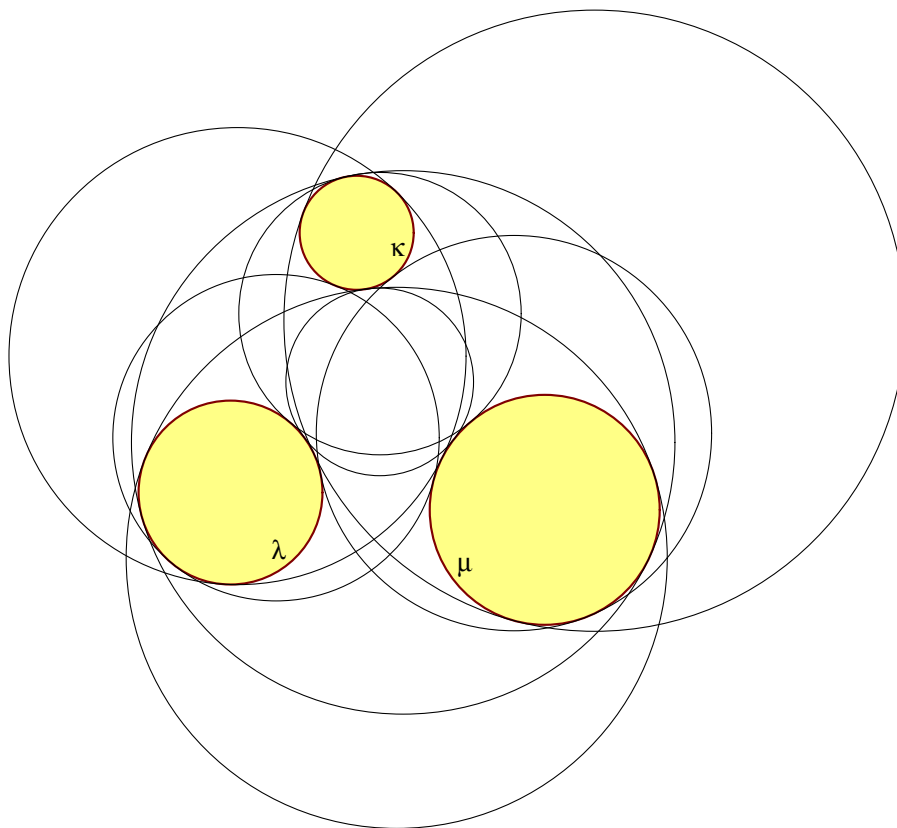
Άσκηση 5.4.1 Δείξε ότι σε κάθε τρίγωνο η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου και η ακτίνα r του εγγεγραμμένου ικανοποιούν την ανισότητα $R \geq 2r$, και η ισότητα ισχύει τότε ακριβώς, όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 5.4.2 Κατασκεύασε τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίδεται η θέση της κορυφής A , η θέση του εγκέντρου I και η θέση του περικέντρου O .

Άσκηση 5.4.3 Εάν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ τα ύψη του δείξε ότι ισχύει $|AH||HA'| = |BH||HB'| = |GH||GH'|$.

5.5 Εφαπτόμενοι κύκλοι του Απολλώνιου

Το πρόβλημα των εφαπτομένων κύκλων του Απολλώνιου συνίσταται στην εύρεση των κύκλων που εφάπτονται ταυτόχρονα σε τρεις δοθέντες κύκλους. Η επόμενη εικόνα δείχνει τους οκτώ κύκλους που λύνουν το πρόβλημα, στην περίπτωση που οι δοθέντες κύκλοι κ , λ , και μ είναι εξωτερικοί αλλήλων. Ο Απολλώνιος στο σύγγραμμά του “έπαφαι”, που χάθηκε,

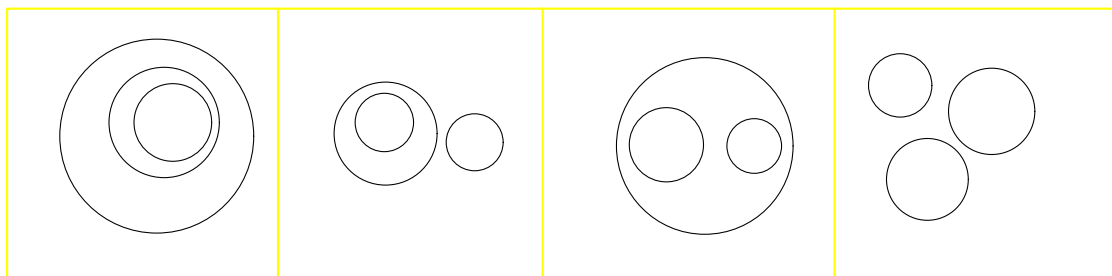


Σχήμα 468: Κύκλοι εφαπτόμενοι τριών δοθέντων

έθεσε γενικότερα το πρόβλημα της εύρεσης κύκλων που εφάπτονται τριών “πραγμάτων”. Τα “πράγματα” μπορεί να είναι κύκλοι, ευθείες και σημεία. Οι ζητούμενοι κύκλοι λοιπόν μπορεί να εφάπτονται σε δοθέντες κύκλους και/ή ευθείες και/ή να διέρχονται από δεδομένα σημεία. Προκύπτουν έτσι 10 κύριες κατηγορίες του προβλήματος όπου τα “πράγματα” είναι:

κύκλοι	ευθείες	σημεία
3	0	0
2	1	0
1	2	0
0	3	0
2	0	1
1	1	1
0	2	1
1	0	2
0	1	2
0	0	3

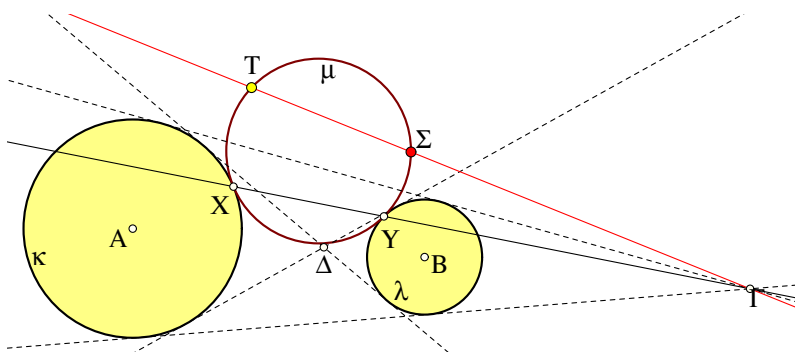
Μερικά από τα προβλήματα αυτά έχουμε ήδη λύσει: Το τελευταίο λ.χ. της κατασκευής κύκλου διά τριών σημείων (Πρόταση 2.1.3), το τέταρτο, της κατασκευής κύκλου εφαπτόμενου σε τρεις ευθείες (που σχηματίζουν τρίγωνο Πρόταση 2.2.3, Πρόταση 5.1.1), το έβδομο (Άσκηση 4.3.6) και το έννατο (Άσκηση 4.1.1). Σε κάθε κατηγορία υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις και τα επιμέρους προβλήματα έχουν επισήρει την προσοχή πολλών Μαθηματικών ανά τους αιώνες. Η πρώτη κατηγορία εμφανίζει τις περισσότερες ειδικές περιπτώσεις ανάλογα με την θέση των κύκλων. Έτσι, λ.χ. για μη τεμνόμενους κύκλους έχουμε σχηματικά τις επόμενες τέσσερις δυνατότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες δεν επιδέχονται λύση. Στην



Σχήμα 469: Δυνατές θέσεις τριών μη τεμνομένων κύκλων

παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την πέμπτη και την πρώτη κατηγορία, στην περίπτωση που τα “πράγματα” είναι εξωτερικά αλλήλων.

Κατασκευή 5.5.1 Να κατασκευασθεί κύκλος μ ταυτόχρονα εφαπτόμενος δύο δοθέντων κύκλων $\kappa(A, a)$, $\lambda(B, b)$, εξωτερικών αλλήλων, και διερχόμενος διά σημείου Σ επίσης εξωτερικού των δύο κύκλων.

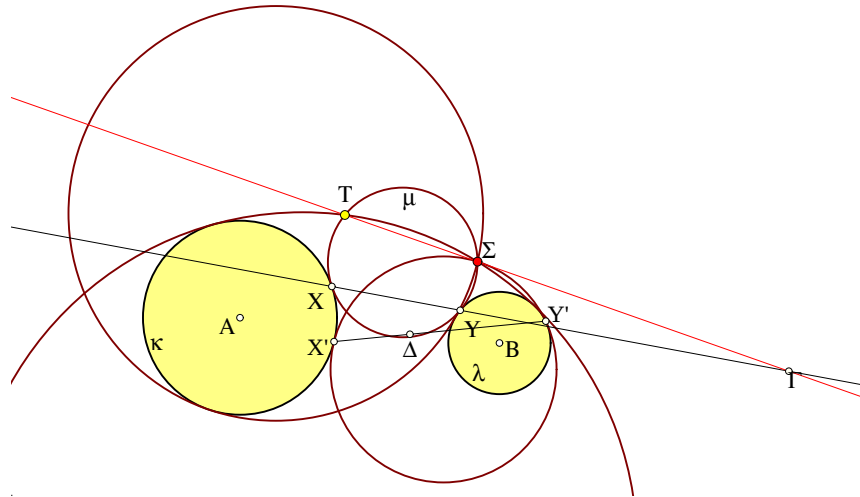


Σχήμα 470: μ εφαπτόμενος των κ , λ και διερχόμενος από το Σ

Κατασκευή: Ας υποθέσουμε ότι ο ζητούμενος κύκλος μ εφάπτεται εξωτερικά των κ και λ αντίστοιχα στα σημεία X και Y . Κατά το Πόρισμα 4.7.2, η ευθεία XY θα διέρχεται από το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας Γ των δύο δοθέντων κύκλων και το γινόμενο $\xi = |\Gamma X||\Gamma Y|$ θα είναι σταθερό, ανεξάρτητο του μ και προσδιοριζόμενο από τα δεδομένα. Συνεπώς, εάν T το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας $\Gamma\Sigma$ με τον μ , τότε και το γινόμενο

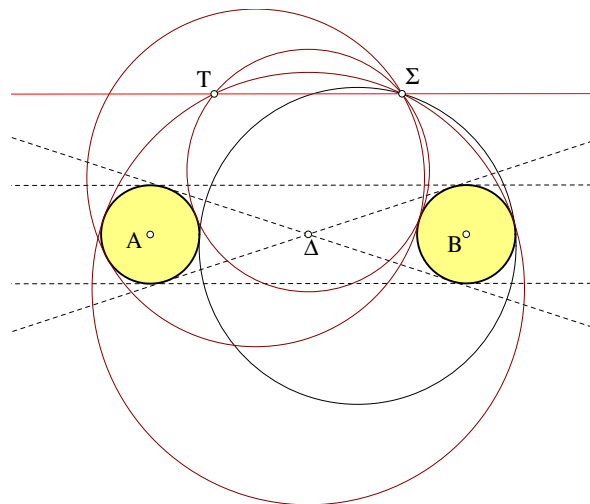
$$|\Gamma\Sigma||\Gamma T| = |\Gamma X||\Gamma Y| = \xi,$$

θα προσδιορίζεται από τα δεδομένα, άρα και η θέση του T θα προσδιορίζεται από τα δεδομένα. Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στο γνωστό, της εύρεσης κύκλου μ , διερχόμενου από δύο σημεία Σ , T και ταυτόχρονα εφαπτόμενου ενός εκ των δύο κύκλων λ.χ. του $\kappa(A, \alpha)$, που έχει ήδη λυθεί (Άσκηση 4.3.6) και έχει εν γένει δύο λύσεις. Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε δύο λύσεις για κύκλο μ που εφάπτεται ενός εξωτερικά και του άλλου εσωτερικά. Αυτή την φορά η ευθεία XY διέρχεται από το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας Δ των κ και λ . Συνολικά λοιπόν παίρνουμε τέσσερις κύκλους μ που ικανοποιούν της απαιτήσεις της κατασκευής, ο.ε.κ.



Σχήμα 471: Κύκλοι εφαπτόμενοι των κ , λ και διερχόμενοι από το Σ

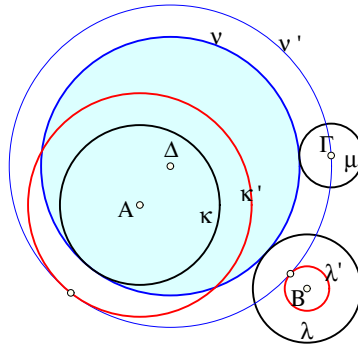
Το σχήμα 471 δείχνει τους τέσσερις κύκλους λύσεις του προβλήματος. Για δύο από αυτούς διακρίνονται και οι χορδές των σημείων επαφής XY και $X'Y'$, που διέρχονται αντίστοιχα από τα κέντρα ομοιότητας Γ και Δ των δοθέντων κύκλων. Το σχήμα 472 δείχνει τις λύσεις του



Σχήμα 472: Κύκλοι εφαπτόμενοι των κ , λ και διερχόμενοι από το Σ (II)

προβλήματος στην περίπτωση που οι ακτίνες των κ και λ είναι ίσες. Στην περίπτωση αυτή το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας Γ είναι στο άπειρο και το δεύτερο σημείο T , που είναι το κλειδί της λύσης, είναι το συμμετρικό του δοθέντος Σ ως προς την μεσοκάθετο του AB .

Κατασκευή 5.5.2 Να κατασκευασθεί κύκλος ν ταυτόχρονα εφαπτόμενος τριών δοθέντων κύκλων $\kappa(A, \alpha)$, $\lambda(B, \beta)$ και $\mu(\Gamma, \gamma)$ εξωτερικών αλλήλων.



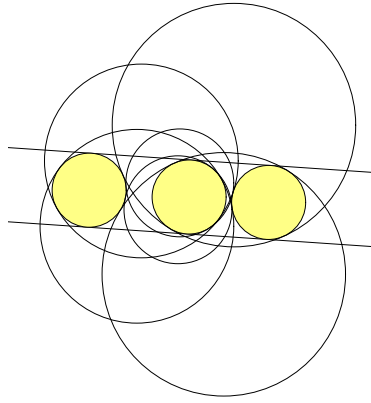
Σχήμα 473: Κύκλος ν με $(-++)$ είδος επαφής με τους κ, λ, μ

Κατασκευή: Υποθέτουμε εδώ την γενική περίπτωση, κατά την οποία οι ακτίνες των κύκλων είναι διαφορετικές ανά δύο και συγκεκριμένα $\alpha > \beta > \gamma$. Τις ειδικές περιπτώσεις θα συζητήσουμε αργότερα. Για την θέση του ζητούμενου κύκλου ν υπάρχουν οκτώ περιπτώσεις που μπορούν να περιγραφούν με ένα σύμβολο (**), από τρεις θέσεις. Στην κάθε θέση βάζουμε $+$ ή $-$ ανάλογα με το αν ο ν έχει τον δοθέντα κύκλο στο εξωτερικό του ή εσωτερικό του. Έτσι το $(+++)$ σημαίνει ότι ο ν έχει όλους στο εξωτερικό του, το $(---)$ ότι έχει όλους στο εσωτερικό του, το $(-++)$ ότι έχει τον κ στο εσωτερικό και τους λ και μ στο εξωτερικό όπως στο σχήμα 473. Σε κάθε περίπτωση από τις οκτώ ανάγουμε το πρόβλημα σε αυτό της προηγούμενης κατασκευής με το εξής τέχνασμα:

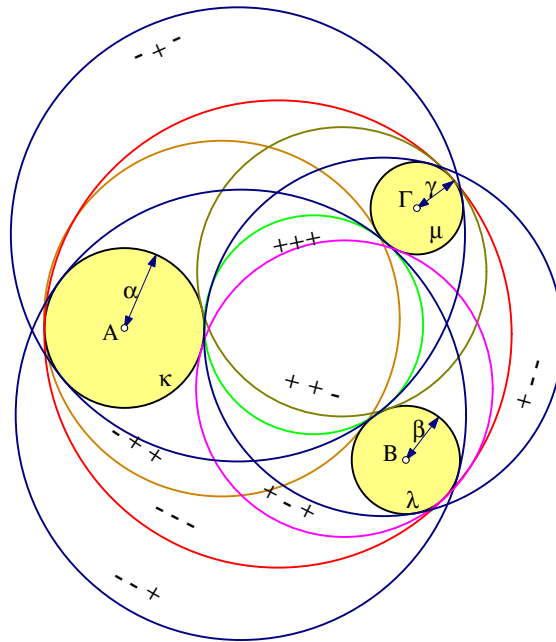
- (1) Αντικαθιστούμε τον μικρότερο κύκλο (μ) με το κέντρο του Γ .
- (2) Αντικαθιστούμε κάθε έναν από τους άλλους δύο κύκλους κ, λ με έναν του ιδίου κέντρου αλλά ακτίνα αντίστοιχα $\alpha \pm \gamma$ και $\beta \pm \gamma$.
- (3) Προκύπτουν τότε δύο νέοι κύκλοι κ', λ' και αντί του ν ευρίσκουμε τον συγκεντρικό του ν' , που διέρχεται από το Γ και εφάπτεται των κ' και λ' .

Τα σωστά πρόσημα στο (2) προκύπτουν από αυτήν την απαίτηση. Έτσι, στο πρόβλημα του σχήματος 473 αναζητάμε τον ν' που διέρχεται από το Γ και εφάπτεται των $\kappa'(A, \alpha + \gamma)$ και $\lambda'(B, \beta - \gamma)$, δηλαδή τους έχει αντίστοιχα στο εσωτερικό του και το εξωτερικό του. Κατά την προηγούμενη κατασκευή υπάρχει ένας ακριβώς τέτοιος κύκλος $\nu'(\Delta, \rho)$, που κατασκευάζεται από τα δεδομένα. Ο ζητούμενος ν θα έχει το ίδιο κέντρο Δ με τον κατασκευασθέντα και ακτίνα $\rho - \alpha$. Λύνοντας λοιπόν το πρόβλημα για κάθε μία από τις οκτώ περιπτώσεις παίρνουμε και την γενική λύση του προβλήματος.

Στις περιπτώσεις που δύο κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα, η λύση απλουστεύεται κάπως καθώς το αρχικό πρόβλημα ανάγεται σε απλούστερες της κατασκευής 5.5.1. Έτσι λ.χ. στην περίπτωση $\alpha > \beta = \gamma$ η προηγούμενη διαδικασία, στην περίπτωση $(-++)$, ανάγεται στην εύρεση κύκλου ν' που εφάπτεται του $\kappa'(A, \alpha + \gamma)$ και διέρχεται από τα δύο σημεία B και Γ (Άσκηση 4.3.6). Ένα άλλο παράδειγμα είναι αυτό που και οι τρεις κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα και τα κέντρα τους είναι συνευθειακά. Τότε οι λύσεις περιλαμβάνουν δύο ευθείες συμμετρικά κείμενες ως προς την διάκεντρο. Επίσης οι υπόλοιπες λύσεις αποτελούνται από τρία ζεύγη κύκλων συμμετρικά κείμενων ως προς την διάκεντρο των τριών κύκλων. Η εργασία λοιπόν μειώνεται στο μισό (σχήμα 474), ο.ε.κ.



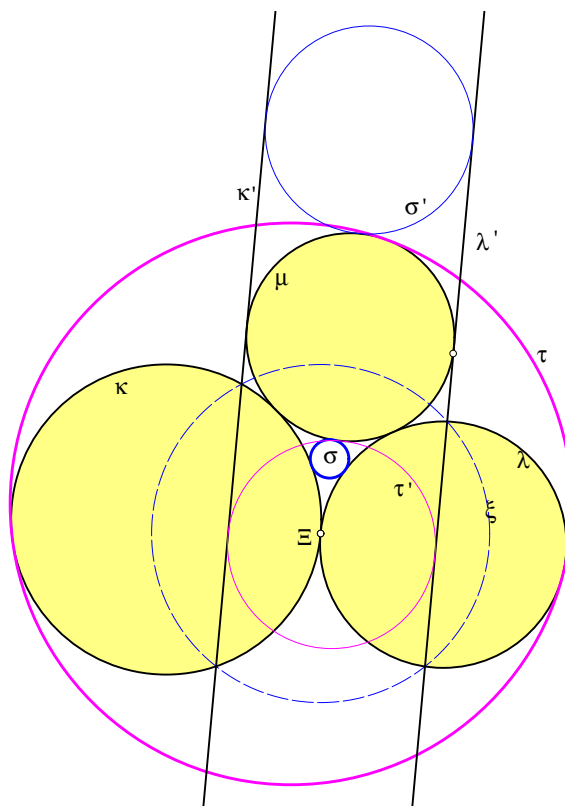
Σχήμα 474: Κύκλοι εφαπτόμενοι τριών ίσων με κοινή διάκεντρο



Σχήμα 475: Οι εφαπτόμενοι των κ, λ, μ και το είδος τους

Σχόλιο-1 Το σχήμα 475 δείχνει τις οκτώ λύσεις για τρεις κύκλους εκτός αλλήλων και με ακτίνες $\alpha > \beta > \gamma$. Σημειώνεται πάνω τους και το είδος τους, όπως αυτό περιγράφεται στην προηγούμενη απόδειξη. Σημειώνω ότι η λεπτομερής λύση του προβλήματος του Απολλώνιου για όλες τις δυνατές κατηγορίες και όλες τις δυνατές υποπεριπτώσεις τους είναι, αν και όχι δύσκολη, εν τούτοις επίπονη (μιά καταλογογράφηση των περιπτώσεων περιέχεται στα [Mui95, σ. 135], [AB83, σ. 97]).

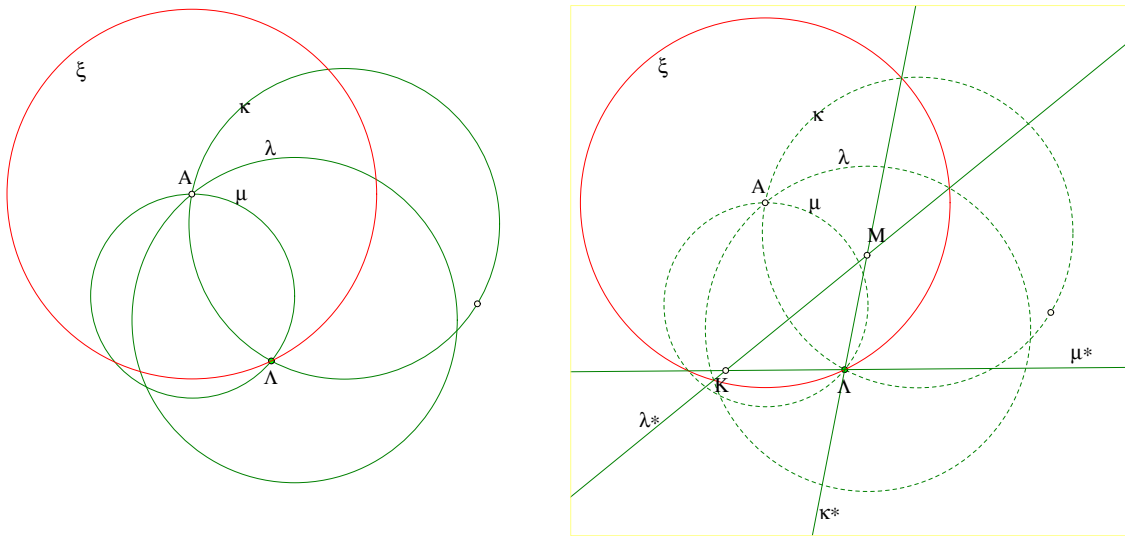
Σχόλιο-2 Η λύση στην τελευταία κατασκευή οφείλεται στον Viete (1540-1603). Υπάρχουν και διάφοροι άλλοι τρόποι λύσης του προβλήματος γεωμετρικοί αλλά και υπολογιστικοί ([Cox68, σ. 5], [GR04, σ. 15]). Σε ορισμένα ειδικά προβλήματα βοηθά ιδιαίτερα η αντιστροφή. Μέσω αυτής το πρόβλημα μετασχηματίζεται σε ένα απλούστερο και αφού βρεθεί η λύση, μέσω της ίδιας αντιστροφής ορίζεται η λύση του αρχικού προβλήματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι δύο λεγόμενοι *Κύκλοι του Soddy* τριών εφαπτομένων εξωτερικά κύκλων. Πρόκει-

Σχήμα 476: Οι κύκλοι σ, τ του Soddy των κ, λ και μ

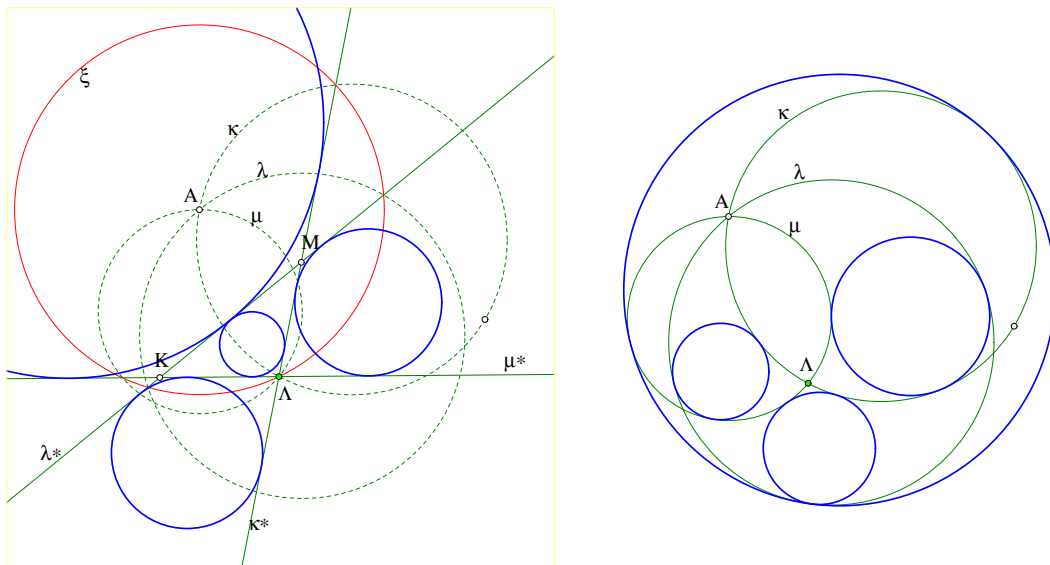
ται εδώ για τις λύσεις του Απολλωνίου προβλήματος που περιορίζονται σε δύο μόνο. Τον εσωτερικό (σ) και εξωτερικό (τ) κύκλο του Soddy των τριών εφαπτομένων κύκλων κ , λ και μ (σχήμα 476). Το πρόβλημα της κατασκευής των σ και τ ανάγεται σε ένα απλούστερο ([Der07, σ. 191]) μέσω αντιστροφής ως προς ένα κατάλληλο κύκλο $\xi(\Xi, \rho)$. Το κέντρο αυτού του κύκλου λαμβάνεται σε ένα (από τα τρία) σημεία επαφής των δοθέντων κύκλων, λ.χ. το σημείο επαφής των κ και λ . Η ακτίνα ρ του ξ λαμβάνεται έτσι ώστε αυτός να είναι ορθογώνιος προς τον τρίτο από τους δοθέντες κύκλους (μ). Τα αντίστροφα λ' και μ' των κύκλων κ και λ ως προς ξ είναι τότε δύο παράλληλες ευθείες εφαπτόμενες του μ (Πρόταση 4.8.3), ενώ ο μ είναι αντίστροφος του εαυτού του (Πόρισμα 4.8.1). Τα αντίστροφα σ' και τ' των ζητούμενων κύκλων πρέπει τότε να είναι κύκλοι εφαπτόμενοι των δύο παράλληλων ευθειών και του μ (Πρόταση 4.8.5), άρα ίσοι προς αυτόν και εφαπτόμενοι αυτού. Οι σ' και τ' λοιπόν κατασκευάζονται αμέσως και τα αντίστροφά τους ως προς ξ είναι οι ζητούμενοι κύκλοι σ και τ . Μιά παρόμοια μέθοδος εφαρμόζεται και στην επόμενη ειδική περίπτωση του προβλήματος του Απολλωνίου.

Κατασκευή 5.5.3 Να κατασκευασθεί κύκλος ν ταυτόχρονα εφαπτόμενος τριών δοθέντων κύκλων κ , λ και μ , που διέρχονται από κοινό σημείο A χωρίς να εφάπτονται σε αυτό.

Κατασκευή: Έστω Λ ένα άλλο σημείο τομής δύο εκ των τριών κύκλων, λ.χ. των κ και μ . Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο $\xi(A, |A\Lambda|)$. Τα αντίστροφα των κύκλων κ , λ και μ είναι τρεις ευθείες κ^* , λ^* και μ^* (Πρόταση 4.8.3), οι δύο εκ των οποίων διέρχονται από το σημείο Λ . Σχηματίζεται λοιπόν τρίγωνο $K\Lambda M$ και τα αντίστροφα ν^* των λύσεων του αρχικού προβλήματος θα είναι κύκλοι εφαπτόμενοι των πλευρών του τριγώνου (Πρόταση 4.8.5), άρα θα συμπίπτουν με τους τέσσερις κύκλους που εφάπτονται των πλευρών του τριγώνου $K\Lambda M$

Σχήμα 477: Αντιστροφή ως προς κύκλο με κέντρο A

(εγγεγραμμένο και τρεις παρεγγεγραμμένους). Συνεπώς οι λύσεις του αρχικού προβλήματος θα είναι τα αντίστροφα ν των ν^* ως προς την ίδια αντιστροφή. Υπάρχουν λοιπόν σε αυτήν την περίπτωση τέσσερις λύσεις.

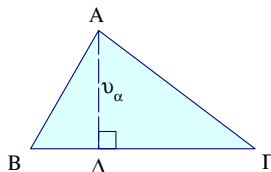
Σχήμα 478: Οι κύκλοι που εφάπτονται των κ , λ και μ

Το σχήμα 478, στο αριστερό μέρος του, δείχνει τους τέσσερις κύκλους που εφάπτονται των πλευρών του τριγώνου KLM . Το δεξί μέρος του δείχνει τα αντίστροφα αυτών των τεσσάρων κύκλων, που είναι και οι λύσεις του αρχικού προβλήματος, ο.ε.κ.

Άσκηση 5.5.1 Δείξε ότι στην περίπτωση που δύο κύκλοι κ και λ εφάπτονται στο σημείο A και ευθεία ε διέρχεται από το A χωρίς να εφάπτεται των δύο κύκλων, υπάρχουν δύο ακριβώς κύκλοι ταυτόχρονα εφαπτόμενοι των κ , λ και ε .

5.6 Ο Τύπος του Ήρωνα

Το θεώρημα (ή **τύπος**) του Ήρωνα (περίπου 10-75 μ.Χ.) εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει των μηκών των πλευρών του. Με την βοήθεια μιάς άσκησης παραγοντοποίησης μπορεί να προκύψει ως εφαρμογή του τύπου του *Stewart* (Πρόταση 3.12.1). Παρακάτω δίνω αυτήν την απόδειξη, καθώς και την πολύ κομψότερη που αποδίδεται [Dan55, σ. 160] στον ίδιο τον Ήρωνα.



$$\text{Σχήμα 479: } v_A^2 = \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

Θεώρημα 5.6.1 (Τύπος του Ήρωνα) Έστω $\tau = \frac{1}{2}(a+b+c)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε το εμβαδόν του E ισούται με

$$E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον τύπο για το ύψος $v_A^2 = \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ (Πρόταση 3.12.3), ο οποίος ισχύει ακόμη και για αμβλυγώνιο τρίγωνο, αρκεί να πάρουμε το ύψος από την αμβλεία γωνία του (υποθέτοντάς την στο A) ώστε το Δ να πέσει εντός του $B\Gamma$. Τότε οι παράγοντες που εμφανίζονται στην προηγούμενη πρόταση γράφονται

$$\begin{aligned} (a+b+c) &= 2\tau \\ (b+c-a) &= (b+c+a-2a) = 2(\tau-a) \\ (c+a-b) &= (c+a+b-2b) = 2(\tau-b) \\ (a+b-c) &= (a+b+c-2c) = 2(\tau-c) \end{aligned}$$

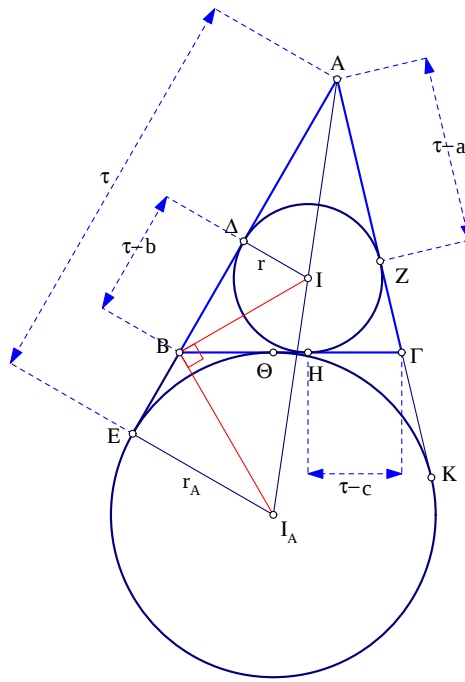
Ο τύπος του Ήρωνα προκύπτει από τον γνωστό τύπο του εμβαδού $E = \frac{1}{2}v_A \cdot a$, ο.ε.δ.

Η δεύτερη απόδειξη του τύπου του Ήρωνα περνά μέσα από τον υπολογισμό των ακτίνων του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου (Παράγραφος 5.1).

Πρόταση 5.6.1 Η ακτίνα r του εγγεγραμμένου και r_A του παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ δίδεται αντίστοιχα από τους τύπους

$$r^2 = \frac{(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}{\tau} \quad r_A^2 = \frac{\tau(\tau-b)(\tau-c)}{\tau-a}.$$

Απόδειξη: Το σχήμα είναι γνώριμο. Το συναντήσαμε στην Παράγραφο 5.1. Απεικονίζονται δύο κύκλοι, ο εγγεγραμμένος $I(r)$ και ο παρεγγεγραμμένος $I_A(r_A)$. Η απόδειξη χρησιμοποιεί τις σχέσεις της προαναφερθείσας παραγράφου και την ομοιότητα δύο ζευγών τριγώνων. Το

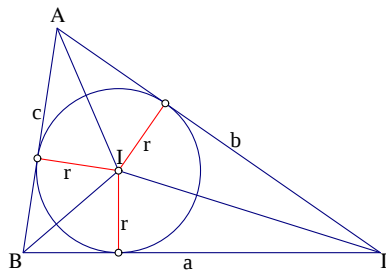
Σχήμα 480: r, r_A συναρτήσει των πλευρών

πρώτο ζεύγος είναι των τριγώνων $(\Delta I, AEI_A)$. Το δεύτερο ζεύγος είναι το $(\Delta IB, EB I_A)$. Και τα δύο ζεύγη αποτελούνται από ορθογώνια και έχουμε:

$$\frac{|\Delta I|}{|EI_A|} = \frac{|A\Delta|}{|AE|} \Leftrightarrow \frac{r}{r_A} = \frac{\tau - a}{\tau},$$

$$\frac{|\Delta I|}{|\Delta B|} = \frac{|EB|}{|EI_A|} \Leftrightarrow \frac{r}{\tau - b} = \frac{\tau - c}{r_A}.$$

Λύνοντας την δεύτερη ως προς r_A και αντικαθιστώντας στον πρώτο τύπο βρίσκουμε τον τύπο για το r^2 . Τετραγωνίζοντας τον πρώτο τύπο και αντικαθιστώντας με το r^2 που βρήκαμε αποδεικνύουμε και τον δεύτερο τύπο, ο.ε.δ.



Σχήμα 481: Η απόδειξη του Ήρωνα

Πρόταση 5.6.2 Αν r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε το εμβαδόν του ισούται με

$$\epsilon(AB\Gamma) = \tau r.$$

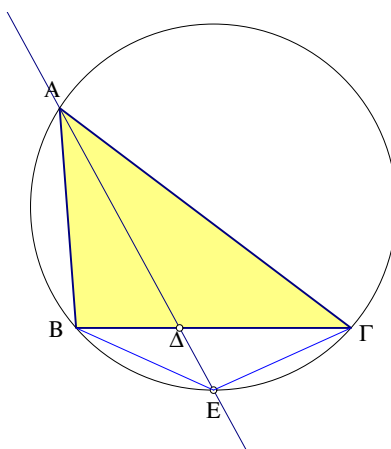
Απόδειξη: Διά του σχήματος. Αν I το έγκεντρο, τότε φέρνοντας τις AI , BI και GI χωρίζουμε το τρίγωνο σε τρία άλλα που έχουν το ίδιο ύψος r και βάσεις τις πλευρές του τριγώνου. Έτσι το εμβαδόν υπολογίζεται

$$\epsilon(AB\Gamma) = \epsilon(ABI) + \epsilon(BGI) + \epsilon(GAI) = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \tau r,$$

ο.ε.δ.

Η δεύτερη απόδειξη του τύπου του Ήρωνα προκύπτει αντικαθιστώντας στον τελευταίο τύπο για το εμβαδόν την ακτίνα r μέσω του τύπου της Πρότασης 5.6.1.

Άσκηση 5.6.1 Δείξε ότι, ευθεία $A\Delta$ διερχόμενη από την κορυφή τριγώνου $AB\Gamma$ και τέμνουσα την απέναντι πλευρά στο Δ και τον περίκυκλο στο E είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$ τότε και μόνον, όταν ισχύει $|E\Delta||EA| = |EB|^2 = |E\Gamma|^2$.



Σχήμα 482: Σχέση με διχοτόμο

Υπόδειξη: Το E είναι το μέσον του τόξου $B\Gamma$ και τα τρίγωνα ABE και $B\Delta E$ είναι όμοια.

Άσκηση 5.6.2 Να κατασκευασθεί τρίγωνο από τα στοιχεία του $\alpha = |BA\Gamma|$, $a = |B\Gamma|$ και $\delta_A = |A\Delta|$, όπου $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A .

Υπόδειξη: Από τα δύο πρώτα στοιχεία κατασκευάζεται ο περίκυκλος του ζητούμενου $AB\Gamma$ και προσδιορίζεται η θέση των B, Γ σε αυτόν. Χρησιμοποιώντας το σχήμα 482, το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης και θέτοντας $x = |EA|$ έχουμε

$$x(x - \delta_A) = |BE|^2,$$

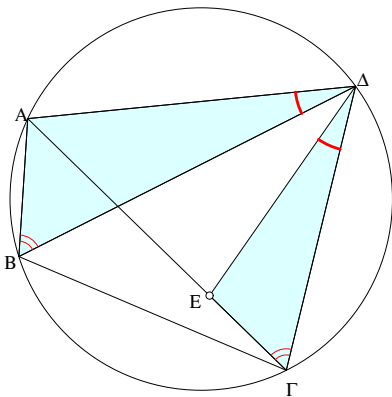
από την οποία προσδιορίζεται το $|EA|$. Με κέντρο E και ακτίνα $|EA|$ γράφουμε κύκλο που τέμνει τον προηγούμενως κατασκευασθέντα περίκυκλο στο A .

Άσκηση 5.6.3 Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου δίδεται το μήκος της υποτείνουσας και το μήκος της διχοτόμου μίας οξείας γωνίας του.

5.7 Θεωρήματα Πτολεμαίου και *Brahmagupta*

Θεώρημα 5.7.1 (θεώρημα του Πτολεμαίου (85-165 μ.Χ.)) Για κάθε κυρτό εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ το γινόμενο των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του:

$$|A\Gamma||B\Delta| = |AB||\Gamma\Delta| + |B\Gamma||\Delta A|.$$



Σχήμα 483: Θεώρημα του Πτολεμαίου

Απόδειξη: Φέρε την ΔE έτσι ώστε η γωνία που σχηματίζεται $|E\Delta\Gamma| = |A\Delta B|$. Τότε τα τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια ως έχοντα ίσες γωνίες στο Δ και στα B, Γ αντίστοιχα. Από την ομοιότητα αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{|AB|}{|E\Gamma|} = \frac{|B\Delta|}{|\Delta\Gamma|} \Leftrightarrow |AB||\Delta\Gamma| = |B\Delta||E\Gamma|.$$

Επίσης τα τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι όμοια ως έχοντα ίσες γωνίες στο Δ και στα A και B αντίστοιχα. Από την ομοιότητα αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|} = \frac{|A\Delta|}{|B\Delta|} \Leftrightarrow |A\Delta||B\Gamma| = |B\Delta||A\Gamma|.$$

Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο

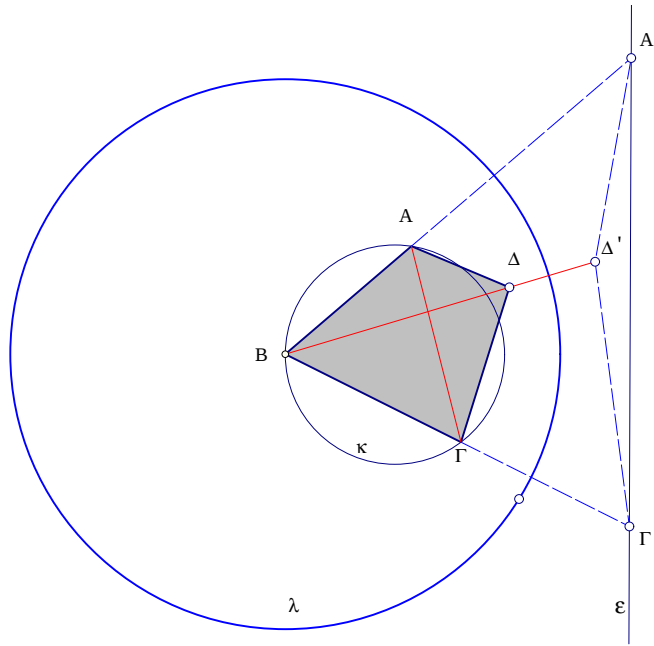
$$|AB||\Delta\Gamma| + |A\Delta||B\Gamma| = |B\Delta||E\Gamma| + |B\Delta||A\Gamma| = |B\Delta|(|E\Gamma| + |A\Gamma|) = |B\Delta||A\Gamma|,$$

(Απόδειξη οφειλόμενη στον Πτολεμαίο [Dan55, σ. 173].) ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.7.2 Για κάθε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει η ανισότητα

$$|AB||\Gamma\Delta| + |B\Gamma||\Delta A| \geq |A\Gamma||B\Delta|.$$

Η ισότητα ισχύει τότε και μόνον, όταν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



Σχήμα 484: Ανισότητα του Πτολεμαίου

Απόδειξη: Η απόδειξη αυτού, του γενικότερου του προηγούμενου θεωρήματος, μπορεί να γίνει με μία εφαρμογή της αντιστροφής ([Cou80, σ.128], [Ped90, σ.111]). Με κέντρο μία κορυφή του τετραπλεύρου, έστω την B, γράφουμε κύκλο $\lambda(B, \rho)$, που περικλείει όλο το τετράπλευρο στο εσωτερικό του. Θεωρούμε κατόπιν τον κύκλο κ που διέρχεται από το B και τις δύο γειτονικές κορυφές A και Γ. Θεωρούμε επίσης το αντίστροφο του κ ως προς τον λ , που είναι μία ευθεία ε (Πρόταση 4.8.3). Τα αντίστροφα των A, Γ και Δ είναι τα σημεία A', Γ' και Δ'. Εκ των οποίων τα δύο πρώτα είναι στην ευθεία ε , ενώ το τρίτο Δ' είναι τότε και μόνο τότε στην ευθεία ε , όταν το Δ είναι επί του κύκλου κ , δηλαδή το ABΓΔ είναι εγγράψιμο. Ισχύει λοιπόν η τριγωνική ανισότητα

$$|A'\Delta'| + |\Delta'\Gamma'| \geq |A'\Gamma'|,$$

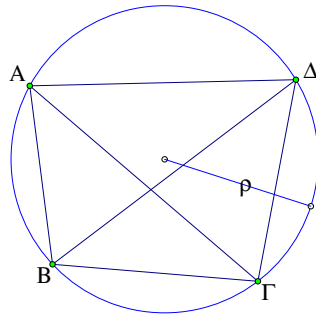
όπου η ισότητα ισχύει τότε ακριβώς, όταν το ABΓΔ είναι εγγράψιμο. Η τελευταία ανισότητα όμως, βάσει της Άσκησης 4.8.3 είναι ισοδύναμη με την

$$|A\Delta| \cdot \frac{\rho^2}{|BA||B\Delta|} + |\Delta\Gamma| \cdot \frac{\rho^2}{|B\Delta||B\Gamma|} \geq |A\Gamma| \cdot \frac{\rho^2}{|BA||B\Gamma|},$$

η οποία απλοποιείται στην προς απόδειξη ανισότητα, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.7.3 Για κάθε κυρτό εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο ABΓΔ ο λόγος των διαγωνίων του ισούται με

$$\frac{|A\Gamma|}{|B\Delta|} = \frac{|AB||\Delta A| + |B\Gamma||\Gamma\Delta|}{|AB||B\Gamma| + |\Gamma\Delta||\Delta A|}.$$



Σχήμα 485: Λόγος μηκών διαγωνίων εγγεγραμμένου

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει εφαρμόζοντας τον τύπο του Πορίσματος 3.11.1 στα τέσσερα τρίγωνα που δημιουργούνται από τις διαγώνιες.

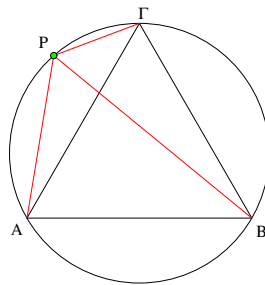
$$\begin{aligned}\epsilon(AB\Gamma) &= \frac{|AB||B\Gamma||\Gamma A|}{4\rho}, \\ \epsilon(A\Gamma\Delta) &= \frac{|A\Gamma||\Gamma\Delta||\Delta A|}{4\rho}, \\ \epsilon(AB\Delta) &= \frac{|AB||B\Delta||\Delta A|}{4\rho}, \\ \epsilon(B\Gamma\Delta) &= \frac{|B\Gamma||\Gamma\Delta||\Delta B|}{4\rho}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους τύπους στην προφανή ισότητα

$$\epsilon(AB\Gamma) + \epsilon(A\Gamma\Delta) = \epsilon(AB\Delta) + \epsilon(B\Gamma\Delta)$$

και απλοποιώντας, παίρνουμε το ζητούμενο, ο.ε.δ.

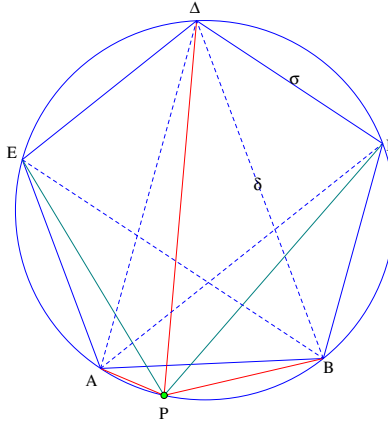
Σχόλιο-2 Και αυτή η πρόταση εκφράζει μιά χαρακτηριστική ιδιότητα του εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραπλεύρου, δηλαδή και αντίστροφα αποδεικνύεται ότι, αν ισχύει η σχέση της πρότασης, τότε το τετράπλευρο εγγράφεται σε κύκλο ([Καν76, σελ. 189]).



Σχήμα 486: Ιδιότητα ισοπλεύρου

Άσκηση 5.7.1 Δείξε ότι για κάθε σημείο P του περιγεγραμμένου κύκλου του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ το μεγαλύτερο από τα ευθύγραμμα τμήματα PA , PB και $P\Gamma$ είναι άθροισμα των δύο άλλων.

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι το PB είναι το μεγαλύτερο τμήμα από τα τρία και εφάρμοσε το θεώρημα του Πτολεμαίου στο τετράπλευρο $AB\Gamma P$: $|A\Gamma||PB| = |P\Gamma||AB| + |PA||B\Gamma|$, που λόγω της ισότητας των πλευρών απλοποιείται και δίδει τον ζητούμενο τύπο.



Σχήμα 487: Ιδιότητα κανονικού πενταγώνου

Άσκηση 5.7.2 Δείξε ότι για κάθε σημείο P του τόξου AB του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ ισχύει

$$|PA| + |PB| + |P\Delta| = |P\Gamma| + |PE|.$$

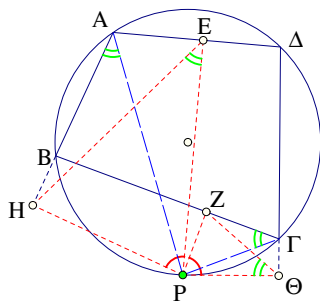
Υπόδειξη: Έστω σ και δ τα μήκη πλευράς και διαγωνίου του πενταγώνου. Εφάρμοσε το θεώρημα του Πτολεμαίου στα τρία τετράπλευρα $APB\Delta$, $PE\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma E$:

$$\begin{aligned}\sigma|P\Delta| &= \delta|PA| + \delta|PB| \Rightarrow |PA| + |PB| = \frac{\sigma}{\delta}|P\Delta|, \\ \delta|P\Delta| &= \sigma|PE| + \sigma|P\Gamma| \Rightarrow |PE| + |P\Gamma| = \frac{\delta}{\sigma}|P\Delta|, \\ \delta^2 &= \sigma\delta + \sigma^2 \Rightarrow \frac{\delta}{\sigma} = 1 + \frac{\sigma}{\delta}.\end{aligned}$$

Το ζητούμενο προκύπτει συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες εξισώσεις [Eve63, σ. 42].

Άσκηση 5.7.3 Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κ . Δείξε ότι για τυχόν σημείο P του κ το γινόμενο των αποστάσεών του από τις δύο απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου ισούται με αυτό των δύο άλλων απέναντι πλευρών ($|PE||PZ| = |PH||P\Theta|$).

Υπόδειξη: Τα τρίγωνα PEH και $P\Theta Z$ είναι όμοια, διότι έχουν τις γωνίες EPH και ΘPZ ίσες και τις PEH και $P\Theta Z$ επίσης ίσες. Συνεπώς έχουν ανάλογες πλευρές: $\frac{|PE|}{|PH|} = \frac{|P\Theta|}{|PZ|}$.

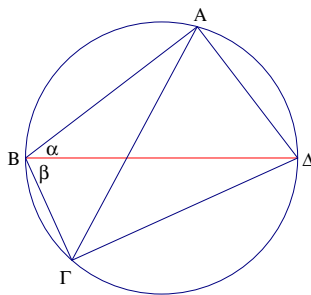


Σχήμα 488: Ιδιότητα εγγεγραμμένου τετραπλεύρου

Άσκηση 5.7.4 Δείξε τον τύπο του ημιτόνου για το άθροισμα οξείων γωνιών α και β

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\beta) + \eta\mu(\beta) \sigma\upsilon\nu(\alpha),$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Πτολεμαίου.



Σχήμα 489: Το ημίτονο του αθροίσματος γωνιών

Υπόδειξη: Σχημάτισε τις γωνίες α και β εκατέρωθεν μιάς διαμέτρου $B\Delta$ του κύκλου κ με αυθαίρετη ακτίνα ρ . Οι δεύτερες πλευρές τους τέμνουν τον κύκλο σε σημεία A και Γ σχηματίζοντας το εγγεγραμμένο κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Από τον τύπο του ημιτόνου έχουμε

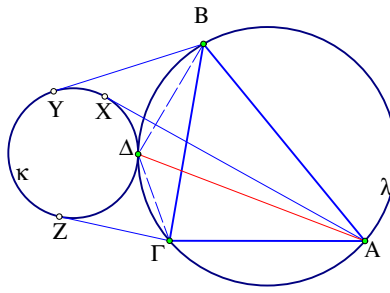
$$\frac{|A\Gamma|}{\eta\mu(\alpha + \beta)} = |B\Delta| \Rightarrow |A\Gamma||B\Delta| = |B\Delta|^2 \eta\mu(\alpha + \beta).$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |B\Gamma||A\Delta| &= (|B\Delta| \sigma\upsilon\nu(\beta))(|B\Delta| \eta\mu(\alpha)) = |B\Delta|^2 \eta\mu(\alpha) \sigma\upsilon\nu(\beta) \\ |AB||\Gamma\Delta| &= (|B\Delta| \sigma\upsilon\nu(\alpha))(|B\Delta| \eta\mu(\beta)) = |B\Delta|^2 \sigma\upsilon\nu(\alpha) \eta\mu(\beta). \end{aligned}$$

Από το θεώρημα του Πτολεμαίου (Παράγραφος 5.7) $|A\Gamma||B\Delta| = |AB||\Gamma\Delta| + |B\Gamma||A\Delta|$ προκύπτει το ζητούμενο.

Πρόταση 5.7.1 Από τις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ άγονται εφαπτόμενες AX , BY , ΓZ προς κύκλο κ . Εάν ένα από τα γινόμενα $|AX||B\Gamma|$, $|BY||\Gamma A|$, $|\Gamma Z||AB|$ ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων τότε ο κύκλος κ εφάπτεται του περικύκλου λ του $AB\Gamma$.



Σχήμα 490: Κριτήριο εφαπτομενικότητας

Απόδειξη: ([Lac93, σ. 206]) Ας υποθέσουμε ότι ισχύει

$$|AX||B\Gamma| = |BY||\Gamma A| + |\Gamma Z||AB|.$$

Όρισε επί του τόξου BΓ το σημείο Δ, έτσι ώστε

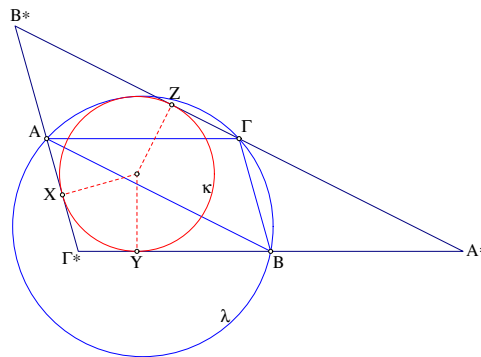
$$\frac{|\Delta\Gamma|}{|\Delta B|} = \frac{|\Gamma Z|}{|BY|} \Rightarrow \frac{|BY|}{|B\Delta|} = \frac{|\Gamma Z|}{|\Gamma\Delta|} = \xi.$$

Από την υποτιθέμενη σχέση και το θεώρημα του Πτολεμαίου προκύπτει τότε ότι

$$\begin{aligned} |AX||B\Gamma| &= \xi|B\Delta||\Gamma A| + \xi|\Gamma\Delta||AB| = \xi(|B\Delta||\Gamma A| + |\Gamma\Delta||AB|) \\ &= \xi \cdot |B\Gamma||A\Delta| \Rightarrow \frac{|AX|}{|A\Delta|} = \frac{|BY|}{|B\Delta|} = \frac{|\Gamma Z|}{|\Gamma\Delta|}. \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα προκύπτει από το Πόρισμα 4.5.6, κατά το οποίο, όταν ισχύουν οι τελευταίες σχέσεις, τότε ο λ ανήκει στην δέσμη που περιέχει τον κύκλο κ και το οριακό σημείο Δ. Επειδή το Δ ανήκει στον λ, η δέσμη είναι εφαπτόμενη και οι δύο κύκλοι εφάπτονται στο Δ, ο.ε.δ.

Άσκηση 5.7.5 (Θεώρημα του Feuerbach) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, δείξε ότι ο κύκλος του Euler ενός τριγώνου εφάπτεται του εγγεγραμμένου καθώς και των παρεγγεγραμμένων κύκλων του.



Σχήμα 491: Feuerbach μέσω δεσμών και Πτολεμαίου

Υπόδειξη: Πρόκειται εδώ για μία απόδειξη του θεωρήματος του Feuerbach (5.3.1), που φανερώνει, νομίζω, κάπως καλύτερα την δομή του. Έστω $A^*B^*\Gamma^*$ το τρίγωνο, $AB\Gamma$ το τρίγωνο των μέσων των πλευρών του, κ ο εγγεγραμμένος του $A^*B^*\Gamma^*$ και λ ο κύκλος του Euler του $A^*B^*\Gamma^*$, που συμπίπτει με τον περιγεγραμμένο του $AB\Gamma$. Εάν X , Y και Z είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου με τις πλευρές του $A^*B^*\Gamma^*$, τότε ισχύει (Πρόταση 5.1.4)

$$|AX| = \frac{1}{2}|c - b|, \quad |BY| = \frac{1}{2}|a - c|, \quad |\Gamma Z| = \frac{1}{2}|b - a|,$$

όπου $a = |B^*\Gamma^*|$, $b = |\Gamma^*A^*|$, $c = |A^*B^*|$ τα μήκη των πλευρών του $A^*B^*\Gamma^*$. Προκύπτει

$$|AX||B\Gamma| = \frac{1}{4}|c - b|a, \quad |BY||\Gamma A| = \frac{1}{4}|a - c|b, \quad |\Gamma Z||AB| = \frac{1}{4}|b - a|c.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την διάταξη των μηκών των πλευρών, ώστε να απαλλαγούμε από τις απόλυτες τιμές, λ.χ. όπως στο σχήμα 491, στο οποίο $a < b < c$, διαπιστώνουμε ότι

$$|BY||\Gamma A| = |AX||B\Gamma| + |\Gamma Z||AB| \quad \Leftrightarrow \quad (c - a)b = (c - b)a + (b - a)c.$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.7.1 βλέπουμε ότι ο κύκλος λ του Euler του $A^*B^*\Gamma^*$, εφάπτεται του εγγεγραμμένου κ του $A^*B^*\Gamma^*$. Ανάλογη είναι η απόδειξη και για τους παρεγγεγραμμένους κύκλους του $A^*B^*\Gamma^*$.

Θεώρημα 5.7.4 (Θεώρημα του Brahmagupta 598-668) Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, εγγράψιμο σε κύκλο, με μήκη διαδοχικών πλευρών $a = |AB|$, $b = |B\Gamma|$, $c = |\Gamma\Delta|$, $d = |\Delta A|$ και περίμετρο $2\tau = a + b + c + d$. Τότε το εμβαδόν του δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon(AB\Gamma\Delta) = \sqrt{(\tau - a)(\tau - b)(\tau - c)(\tau - d)}.$$

Απόδειξη: Κατά την Άσκηση 3.6.11, το εμβαδόν τετραπλεύρου δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2},$$

όπου $x = |A\Gamma|$, $y = |B\Delta|$ τα μήκη των διαγωνίων, τα οποία ικανοποιούν επίσης (Θεώρημα 5.7.1) την

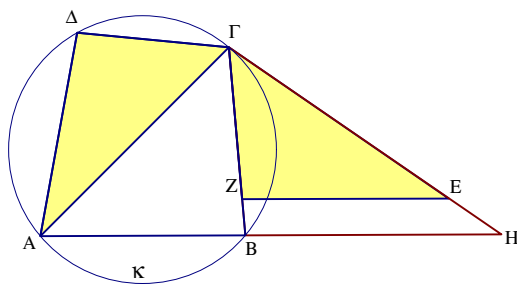
$$xy = ac + bd.$$

Αντικαθιστώντας το xy στην προτελευταία ισότητα και παραγοντοποιώντας βρίσκουμε τον ζητούμενο τύπο, ο.ε.δ.

Σχόλιο-3 Σημείωσε ότι βάζοντας $a = 0$ στον προηγούμενο τύπο, παίρνουμε τον τύπο του Ήρωνα για το εμβαδόν τριγώνου (Θεώρημα 5.6.1).

Άσκηση 5.7.6 Να κατασκευασθεί τετράπλευρο του οποίου δίδονται τα μήκη των τεσσάρων πλευρών καθώς και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του.

Άσκηση 5.7.7 Να κατασκευασθεί τετράπλευρο του οποίου δίδονται τα μέτρα δύο απέναντι γωνιών του, τα μήκη των διαγωνίων του και το μέτρο της γωνίας τους.



Σχήμα 492: Κατασκευή εγγράψιμου τετραπλεύρου

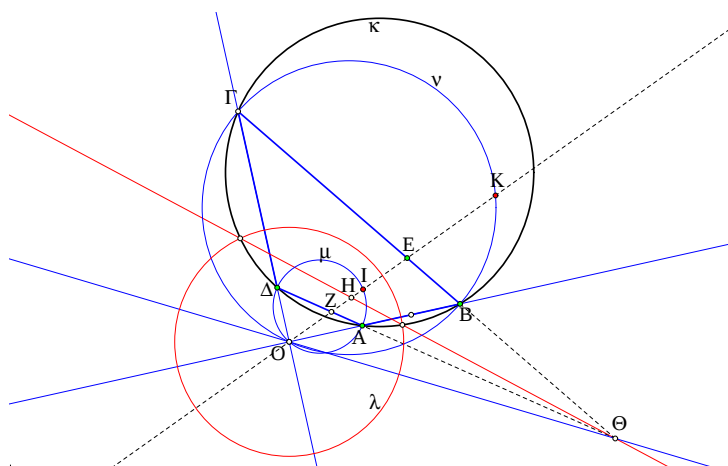
Άσκηση 5.7.8 Να κατασκευασθεί τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο του οποίου δίδονται τα μήκη των τεσσάρων πλευρών.

Υπόδειξη: Έστω ότι κατασκευάσθηκε το ζητούμενο τετράπλευρο. Στην πλευρά BΓ κατασκεύασε τρίγωνο ΓΖΕ ίσο του ΓΔΑ και προέκτεινε την ΓΕ μέχρι την τομή της Η με την ΑΒ. Το μήκος $|BH|$ καθώς και ο λόγος $\lambda = \frac{|GA|}{|GH|}$ προσδιορίζονται από τα δεδομένα μέσω των ομοίων τριγώνων ΓΖΕ και ΓΒΗ:

$$\frac{|BH|}{|ZE|} = \frac{|GZ|}{|GB|} \Rightarrow |BH| = |ZE| \frac{|GZ|}{|GB|} = |A\Delta| \frac{|G\Delta|}{|GB|}, \quad \lambda = \frac{|GA|}{|GH|} = \frac{|GE|}{|GH|} = \frac{|GZ|}{|GB|}.$$

Κατόπιν το Γ προσδιορίζεται ως τομή του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα $|B\Gamma|$ και του Απολλώνιου κύκλου του τμήματος ΑΗ ως προς τον λόγο λ. Από τα Α, Β και Γ προσδιορίζεται ο περιγεγραμμένος κύκλος κ του τετραπλεύρου και κατόπιν η κορυφή Δ επ' αυτού.

Άσκηση 5.7.9 Να εγγραφεί σε δοθέντα κύκλο κ τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται κάθετα σε γνωστό σημείο Ο και η πλευρά ΒΓ διέρχεται από γνωστό σημείο Ε.

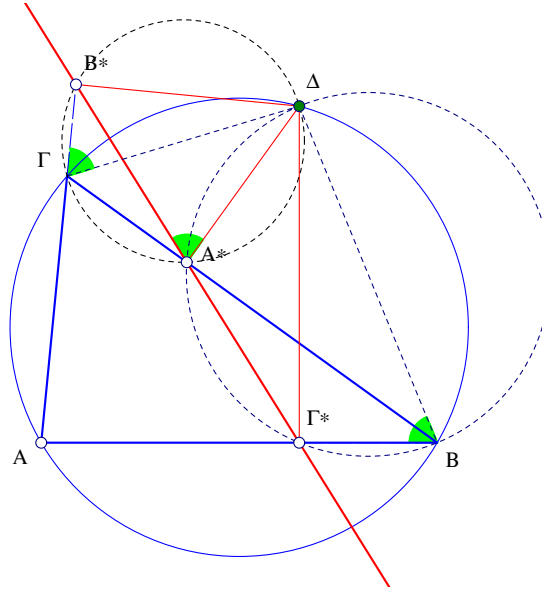


Σχήμα 493: Κατασκευή εγγράψιμου τετραπλεύρου

Υπόδειξη: Τα Α, Β και Γ, Δ είναι ζεύγη αντιστρόφων σημείων ως προς τον κύκλο λ με κέντρο Ο και ορθογώνιο στον κ. Το αντίστροφο Ι του σημείου Ε, ως προς λ, κατασκευάζεται και ο κύκλος με διάμετρο ΔΑ (το κέντρο του) προσδιορίζεται από τα δεδομένα, ως τομή της μεσοκαθέτου του ΟΙ και του κύκλου της Άσκησης 4.6.8.

5.8 Η ευθεία του *Simson*

Η ευθεία του *Simson* (1687 – 1768) ανακαλύφθηκε στην πραγματικότητα από τον *Wallace* (1768 – 1843) ([Joh16, σ. 61]), γι' αυτό και συχνά αναφέρεται ως ευθεία των *Wallace – Simson*. Αφορά σε μία ιδιότητα των σημείων του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τις προβολές του στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



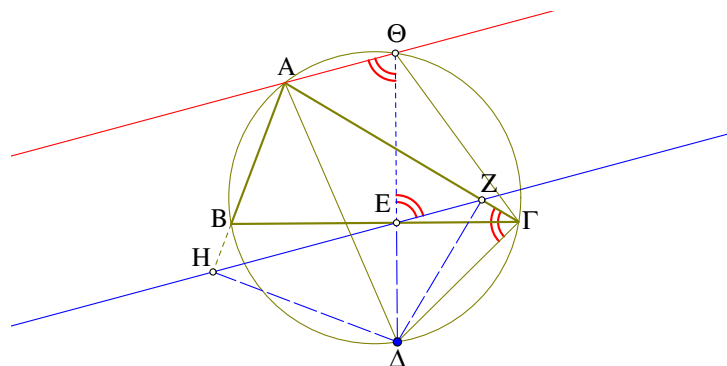
Σχήμα 494: Η ευθεία *Wallace – Simson*

Πρόταση 5.8.1 *Γιά κάθε σημείο Δ του περικύκλου τριγώνου $AB\Gamma$ οι προβολές του A^* , B^* , Γ^* στις πλευρές του τριγώνου περιέχονται σε μία ευθεία.*

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι να χρησιμοποιήσουμε τρία από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα που δημιουργούνται από το Δ : Το $AB\Delta\Gamma$ και δύο από τα $\Delta A^*\Gamma B^*$, $\Delta B\Gamma^*A^*$, $\Delta B^*A\Gamma^*$, ανάλογα με την θέση του Δ στα τόξα $B\Gamma$, ΓA και AB . Στην περίπτωση που το Δ είναι στο τόξο $B\Gamma$ χρησιμοποιούμε τα $\Delta B^*A\Gamma^*$ και $\Delta A^*\Gamma B^*$. Με την βοήθειά τους δείχνουμε ότι οι γωνίες $B^*A^*\Delta$ και $\Delta A^*\Gamma^*$ είναι παραπληρωματικές, άρα τα τρία σημεία A^* , B^* και Γ^* είναι σε ευθεία. Το $AB\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο εξ ορισμού. Τα άλλα δύο διότι το μεν $\Delta A^*\Gamma B^*$ έχει δύο απέναντι γωνίες ορθές (στα A^* , B^*), το δε $\Delta B\Gamma^*A^*$ διότι δύο διαδοχικές κορυφές του (A^*, Γ^*) βλέπουν μία πλευρά του (ΔB) υπό ορθή γωνία. Από το εγγράψιμο $\Delta A^*\Gamma B^*$ προκύπτει ότι η ΔA^*B^* είναι ίση με την $\Delta\Gamma B^*$. Από το εγγράψιμο $\Delta B\Gamma^*A^*$ προκύπτει ότι η $\Delta A^*\Gamma^*$ είναι παραπληρωματική της $\Delta B\Gamma^*$. Τέλος από το εγγράψιμο $AB\Delta\Gamma$ προκύπτει ότι η $\Delta B\Gamma^*$ είναι ίση με την $\Delta\Gamma B^*$. Ανάλογη είναι η απόδειξη και στις άλλες περιπτώσεις, όπου το Δ είναι στα τόξα ΓA και AB , ο.ε.δ.

Άσκηση 5.8.1 Έστω Δ σημείο του περικύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ και E η προβολή του επί της $B\Gamma$. Έστω επίσης Θ το δεύτερο σημείο τομής της ΔE με τον περικύκλο. Δείξε ότι η ευθεία $A\Theta$ είναι παράλληλη της ευθείας του *Simson* του σημείου Δ .

Υπόδειξη: Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma\Theta$ είναι εγγράψιμο, άρα $|A\Theta\Delta| = |A\Gamma\Delta|$. Το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$, όπου Z η προβολή του Δ στην $A\Gamma$, είναι επίσης εγγράψιμο, άρα $|Z\Gamma\Delta| = |\Theta E Z|$. Συνεπώς οι ευθείες $A\Theta$ και EZ σχηματίζουν με την ΘE εντός και εναλλάξ ίσες γωνίες.

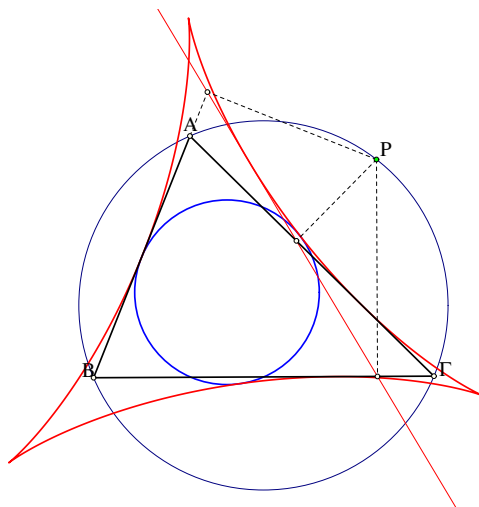


Σχήμα 495: Η κατεύθυνση της ευθείας Simson

Άσκηση 5.8.2 Να βρεθεί σημείο Δ του περικύκλου τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου η αντίστοιχη ευθεία του *Simson* να έχει δοθείσα κατεύθυνση.

Υπόδειξη: Βάσει της προηγούμενης άσκησης (σχήμα 495) φέρε από το A παράλληλο προς την δοθείσα κατεύθυνση που τέμνει τον περικύκλο στο σημείο Θ . Από το Θ φέρε κάθετο στην $B\Gamma$ που τέμνει τον περικύκλο στο Δ . Το Δ είναι το ζητούμενο σημείο.

Άσκηση 5.8.3 Να βρεθούν οι θέσεις της ευθείας του *Simson* για ειδικά σημεία του περικύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$, όπως: (α) οι κορυφές του τριγώνου, (β) οι τομές των υψών με τον περικύκλο, (γ) οι τομές των διχοτόμων με τον περικύκλο, (δ) τα αντιδιαμετρικά σημεία των προηγούμενων.

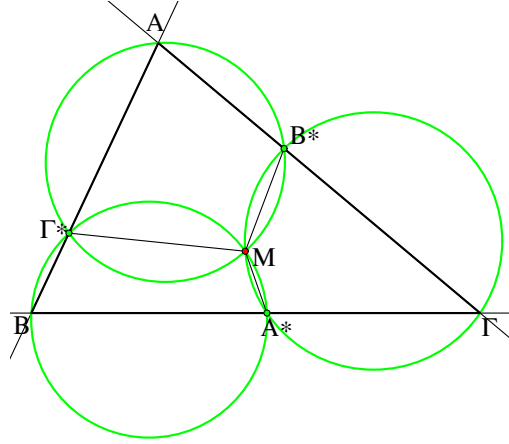


Σχήμα 496: Δελτοειδές, περιβάλλουσα των ευθειών Simson

Σχόλιο Είναι αξιοσημείωτο πως από απλά φαινόμενα οδηγούμεθα, σχετικά γρήγορα, σε πύο πολύπλοκες δομές. Μιά τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται με το **Δελτοειδές** που είναι μία καμπύλη στενά συνδεδεμένη με τις ευθείες Simson (σχήμα 496). Η καμπύλη αυτή χαρακτηρίζεται από το ότι έχει ως εφαπτόμενές της όλες τις ευθείες Simson ενός τριγώνου (τις αντίστοιχες ευθείες για όλα τα σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου). Ο κύκλος του Euler είναι επίσης εφαπτόμενος αυτής της καμπύλης [Doe65, σ. 226], [Ste71, σ. 641 (II)].

5.9 Σημεία του Miquel

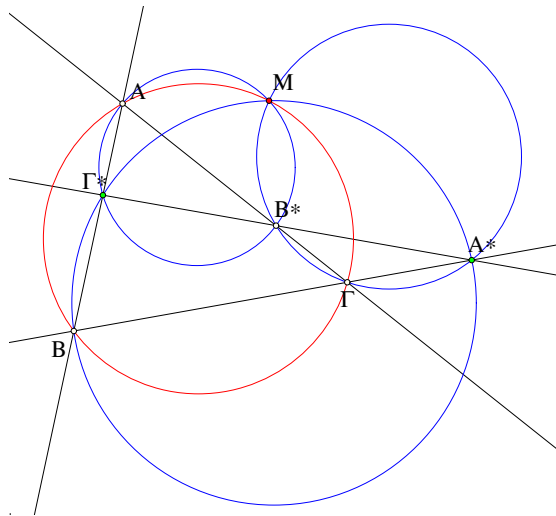
Πρόταση 5.9.1 (Σημεία του Miquel) Γιά οποιαδήποτε σημεία B^*, A^*, Γ^* αντίστοιχα στις πλευρές $AB, B\Gamma$ και ΓA του τριγώνου $AB\Gamma$ ή τις προεκτάσεις αυτών οι τρεις κύκλοι $(AB^*\Gamma^*)$, $(B\Gamma^*A^*)$, (ΓA^*B^*) τέμνονται σε ένα σημείο M . Miquel



Σχήμα 497: Σημείο Miquel του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς A^*, B^*, Γ^*

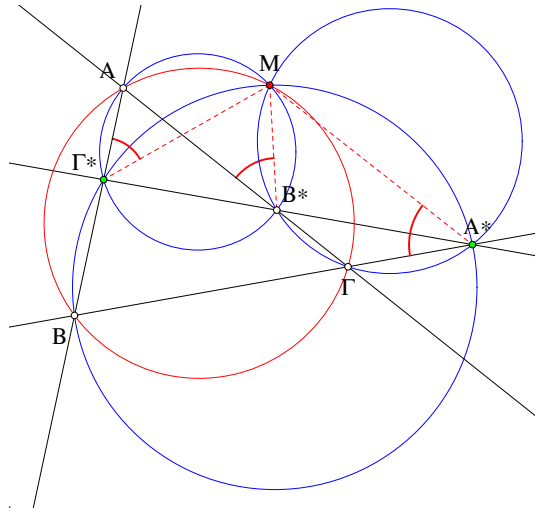
Απόδειξη: Έστω M το σημείο τομής των δύο πρώτων κύκλων $(AB^*\Gamma^*)$ και $(B\Gamma^*A^*)$ που είναι διαφορετικό του Γ^* . Τα τετράπλευρα που σχηματίζονται: $AB^*M\Gamma^*$ και $BA^*M\Gamma^*$, είναι εγγράψιμα και οι γωνίες τους στο M είναι αντίστοιχα $180-\alpha$ και $180-\beta$. Άρα η γωνία A^*MB^* θα είναι $360 - ((180 - \alpha) + (180 - \beta)) = \alpha + \beta$, δηλαδή παραπληρωματική της γ . Άρα και το τετράπλευρο ΓA^*MB^* θα είναι εγγράψιμο (Πρόταση 2.14.1), ο.ε.δ.

Πρόταση 5.9.2 Τέσσερις ευθείες σε γενική θέση (δηλαδή, που ανά τρεις σχηματίζουν τμήγωνα) σχηματίζουν τέσσερα τμήγωνα, των οποίων οι περιγεγραμμένοι κύκλοι διέρχονται από κοινό σημείο M (Σημείο Miquel των τεσσάρων ευθειών).



Σχήμα 498: Σημείο Miquel 4 ευθειών σε γενική θέση

Απόδειξη: Για την απόδειξη εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση, η οποία ισχύει και για σημεία A^*, B^*, Γ^* που περιέχονται σε μία ευθεία (είναι συνευθειακά). Για την απόδειξη λοιπόν, ξεχωρίζουμε τρεις από τις τέσσερις ευθείες. Έστω τις $AB, BG, \Gamma A$ και θεωρούμε ότι η τέταρτη τέμνει τις πλευρές (ή/και προεκτάσεις τους) του τριγώνου $AB\Gamma$ στα A^*, B^*, Γ^* επί των $B\Gamma, \Gamma A$ και AB αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.9.1 συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι $(AB^*\Gamma^*), (B\Gamma^*A^*), (\Gamma A^*B^*)$ διέρχονται από κοινό σημείο M . Ξεχωρίζουμε τώρα τρεις άλλες ευθείες, λ.χ. τις $\Gamma A^*, A^*B^*$ και $B^*\Gamma$ και θεωρούμε πάλι ότι η τέταρτη τέμνει τις πλευρές του τριγώνου ΓA^*B^* στα σημεία B, Γ^* και A . Και πάλι από την Πρόταση 5.9.1 συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι $(\Gamma AB), (B^*A\Gamma^*), (A^*\Gamma^*B)$ διέρχονται από κοινό σημείο M' . Επειδή οι κύκλοι $(AB^*\Gamma^*)$ και $(A^*\Gamma^*B)$ περιέχονται και στις δύο τριάδες κύκλων τα M και M' θα συμπίπτουν, ο.ε.δ.



Σχήμα 499: Ισότητα γωνιών μέσω πρότασης του Miquel

Άσκηση 5.9.1 Συμπλήρωσε το προηγούμενο σχήμα (499) φέρνοντας τις $MA^*, MB^*, M\Gamma^*$ από το σημείο του Miquel των τεσσάρων ευθειών και δείξε ότι οι γωνίες

$$|\angle M\Gamma^*A| = |\angle MB^*A| = |\angle MA^*\Gamma|.$$

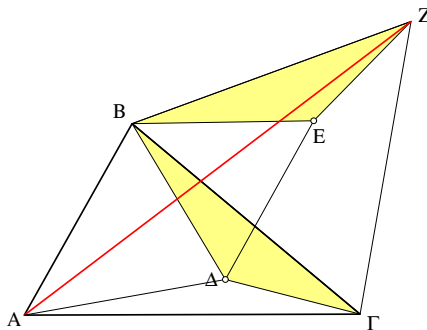
Πως συνδέεται αυτό το συμπέρασμα με τις ευθείες *Simson* του τριγώνου $AB\Gamma$;

Υπόδειξη: Η ισότητα των γωνιών προκύπτει εύκολα από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $MB^*\Gamma^*A, MB^*\Gamma A^*$. Η ιδιότητα αυτή δείχνει ότι κάθε ευθεία που τέμνει τις πλευρές τριγώνου στα σημεία A^*, B^*, Γ^* ορίζει σημείο M στον περικύκλο έτσι ώστε οι παραπάνω γωνίες να είναι ίσες. Και αντίστροφα, αν από σημείο M του περικύκλου φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα $M\Gamma^*$ και MB^* που σχηματίζουν ίσες γωνίες $\angle M\Gamma^*A$ και $\angle MB^*A$, τότε η ευθεία Γ^*B^* θα τέμνει την τρίτη πλευρά σε σημείο A^* , έτσι ώστε και η γωνία $\angle MA^*\Gamma$ να είναι ίση με τις άλλες. Αυτό συνεπάγεται ότι αν από σημείο M του περικύκλου αχθούν ευθύγραμμα τμήματα $MA^*, MB^*, M\Gamma^*$ έτσι ώστε οι γωνίες $\angle M\Gamma^*A, \angle MB^*A$ και $\angle MA^*\Gamma$ να είναι ίσες, τότε τα A^*, B^* και Γ^* είναι επ' ευθείας. Οι ευθείες του *Simson* προκύπτουν λοιπόν ως ειδική περίπτωση της προηγούμενης κατασκευής.

Άσκηση 5.9.2 Δείξε ότι το σημείο τομής των κύκλων $(A^*B^*\Gamma), (B^*\Gamma^*A), (\Gamma^*A^*B)$, όπου A^*, B^* και Γ^* τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A$ και AB , είναι το ορθόκέντρο του τριγώνου $A^*B^*\Gamma^*$.

5.10 Θεωρήματα των *Fermat* και *Fagnano*

Τα δύο θεωρήματα του Fermat και του Fagnano αφορούν σε προβλήματα ελαχιστοποίησης συνδεδεμένα με ένα τρίγωνο. Το πρώτο αναζητά ένα σημείο που ελαχιστοποιεί ένα άθροισμα αποστάσεων και το δεύτερο αναζητά ένα τρίγωνο ελάχιστης περιμέτρου εγγεγραμμένο σε δοθέν τρίγωνο.



Σχήμα 500: Τρίγωνο και ισόπλευρο στην πλευρά του

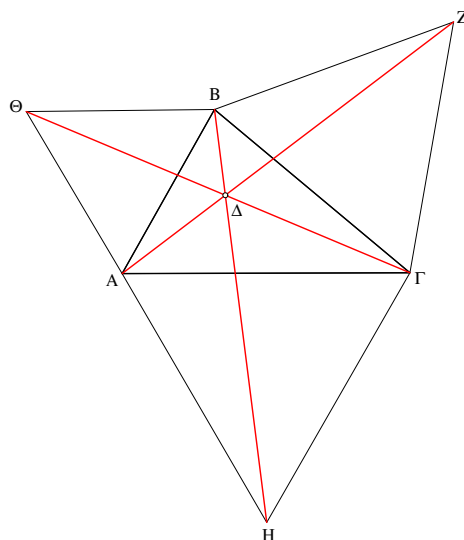
Πρόταση 5.10.1 *Γιά κάθε σημείο Δ το άθροισμα των αποστάσεων $\delta = |\Delta A| + |\Delta B| + |\Delta \Gamma|$ από τις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$, είναι μεγαλύτερο του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος AZ που ενώνει την κορυφή A με την κορυφή ισοπλεύρου τριγώνου $B\Gamma Z$ εκτός του $AB\Gamma$.*

Απόδειξη: Συνδέουμε το τυχόν σημείο Δ με τις κορυφές του τριγώνου και κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα $B\Gamma Z$ και $B\Delta E$. Λόγω των ισοπλεύρων τριγώνων, τα τρίγωνα $B\Delta \Gamma$ και BEZ είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο). Έτσι, το άθροισμα των αποστάσεων $\delta = |\Delta A| + |\Delta B| + |\Delta \Gamma|$ που μας ενδιαφέρει μετασχηματίζεται στην ίσου μήκους τεθλασμένη $\delta = |A\Delta| + |\Delta E| + |EZ|$, η οποία γίνεται ελάχιστη όταν τα E και Δ είναι επί της AZ , ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.10.1 *Γιά κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες μικρότερες των 120 μοιρών ισχύουν τα εξής:*

- (1) Τα ευθύγραμμα τμήματα AZ , BH και $\Gamma\Theta$ που ενώνουν τις κορυφές του τριγώνου με τις κορυφές των ισοπλεύρων που κατασκευάζονται στις πλευρές του είναι ίσα και σχηματίζουν ανά δύο γωνίες 60 μοιρών.
- (2) Τα AZ , BH και $\Gamma\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο Δ .
- (3) Το Δ ελαχιστοποιεί το άθροισμα δ των αποστάσεων από τις κορυφές του τριγώνου. Η ελάχιστη αυτή τιμή του δ είναι το κοινό μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων AZ , BH και $\Gamma\Theta$.

Απόδειξη: Στο (1): Θεωρούμε ότι το Δ είναι το σημείο τομής των AZ και BH . Τα AZ και BH είναι ίσα διότι τα τρίγωνα $\Delta \Gamma Z$ και $\Delta \Gamma H$ είναι ίσα: $|\Delta \Gamma| = |\Delta \Gamma|$, $|\Delta \Gamma Z| = |\Delta \Gamma H|$ λόγω των ισοπλεύρων $B\Gamma Z$ και $A\Gamma H$. Επίσης οι γωνίες $|\Delta \Gamma H| = |\Delta \Gamma Z|$, αφού κάθε μία είναι άθροισμα της γωνίας στο Γ και μιάς 60 μοιρών. Παρόμοια δείχνουμε ότι και τα AZ και $\Gamma\Theta$ είναι ίσα, άρα τα τρία ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Η γωνία $B\Delta Z$ είναι 60 μοιρών. Αυτό προκύπτει από το ότι το τετράπλευρο $B\Delta \Gamma Z$ είναι εγγράψιμο. Τούτο πάλι διότι από την ισότητα των τριγώνων $B\Gamma H$ και $A\Gamma Z$ έπεται ότι οι γωνίες $\Delta B \Gamma$ και $\Delta Z \Gamma$ είναι ίσες.

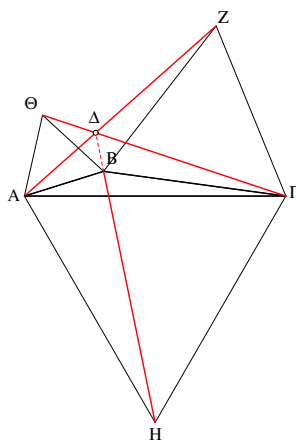


Σχήμα 501: Το σημείο του Fermat

Άρα τα Β και Ζ βλέπουν το ΔΓ υπό ίσες γωνίες και συνεπώς το ΒΔΓΖ είναι εγγράψιμο. Η ΒΔΖ τότε είναι ίση με ΒΓΖ, που είναι 60 μοιρών. Λόγω του εγγραψίμου ΒΔΓΖ, η γωνία ΒΔΓ θα είναι 120 μοιρών, άρα η ΓΔΖ επίσης 60 μοιρών. Επίσης, η ΗΔΓ, ως εξωτερική και απέναντι της ΒΖΓ, θα είναι επίσης 60 μοιρών και η ΑΔΗ, ως κατά κορυφή της ΒΔΖ θα είναι και αυτή 60 μοιρών. Συνάγεται ότι το ΑΔΒΘ έχει τις απέναντι γωνίες στα Θ και Δ παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράψιμο. Τότε όμως η ΘΔΒ θα είναι ίση με την ΘΑΒ άρα και αυτή 60 μοιρών και τέλος η ΘΔΑ επίσης 60 μοιρών.

Το (2) είναι συνέπεια της προηγούμενης ισότητας των γωνιών. Στο Δ, που ορίσαμε ως τομή των ΒΗ και ΑΖ, δείξαμε ότι όλες οι γωνίες που σχηματίζονται είναι 60 μοιρών, άρα τα Θ, Δ και Γ θα είναι συνευθειακά.

Το (3) είναι συνέπεια της προηγούμενης πρότασης. Αν υπάρχει το Δ, τότε θα πρέπει να είναι επί της ΑΖ, παρόμοια και επί της ΒΗ αλλά και ΓΘ, άρα θα είναι στην τομή τους. Η

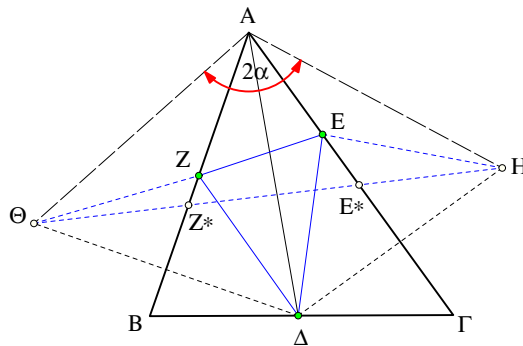


Σχήμα 502: Τρίγωνο με μία γωνία μεγαλύτερη των 120 μοιρών

συνθήκη για τις γωνίες του τριγώνου, κατά την οποία αυτές είναι μικρότερες των 120 μοιρών,

εξασφαλίζει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα BH και AZ τέμνονται. Πράγματι, η ύπαρξη του Δ αποδεικνύεται και χωρίς τον περιορισμό αυτό. Εύκολα όμως βλέπουμε ότι στην περίπτωση που η γωνία $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερη των 120 μοιρών, το Δ είναι εξωτερικό σημείο της BH , ενώ το ελάχιστο του δ συμβαίνει όταν το Δ συμπίπτει με την κορυφή B , ο.ε.δ.

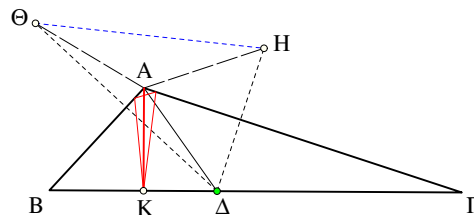
Θεώρημα 5.10.2 (Θεώρημα του Fagnano 1715-1797) Το ορθικό τρίγωνο οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχει την ελάχιστη περίμετρο μεταξύ όλων των τριγώνων που εγγράφονται στο $AB\Gamma$.



Σχήμα 503: Μεταβαλλόμενο ισοσκελές τρίγωνο

Απόδειξη: Ας δούμε πρώτα για ένα τρίγωνο ΔEZ εγγεγραμμένο στο $AB\Gamma$, πως μεταβάλλεται η περίμετρος όταν μετατοπίζουμε το Δ στην $B\Gamma$. Αν Θ και H είναι τα συμμετρικά του Δ αντίστοιχα ως προς τις πλευρές AB και AG , τότε η περίμετρος του τριγώνου $\delta = |\Delta Z| + |ZE| + |E\Delta| = |\Theta Z| + |ZE| + |EH|$. Το μήκος όμως της τεθλασμένης $\Theta ZE H$ γίνεται ελάχιστο όταν τα Z και E είναι επί της ΘH . Άρα μπορούμε να μικρύνουμε την περίμετρο του ΔEZ αντικαθιστώντας τα Z, E με τα σημεία τομής Z^* και E^* της ΘH με τις AB και AG . Επιπλέον η περίμετρος του $\Delta Z^* E^*$ ισούται με το μήκος του ΘH .

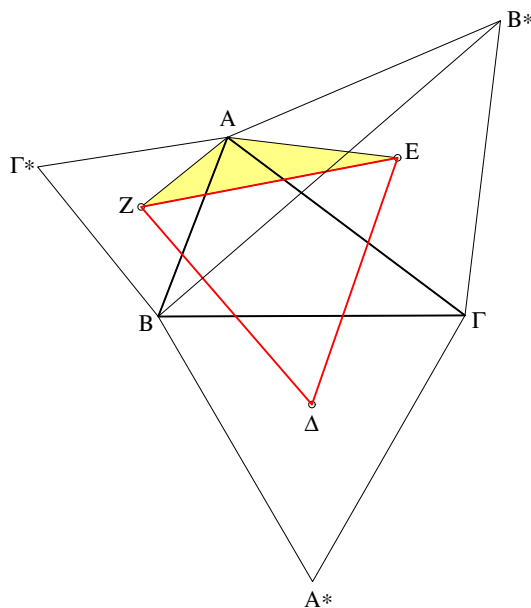
Εξετάζουμε τώρα για ποιά θέση του Δ το μήκος της ΘH γίνεται ελάχιστο. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ισοσκελές $A\Theta H$ έχει γωνία στην κορυφή πάντοτε ίση με 2α , όπου $\alpha = |\angle B\Gamma A|$. Άρα το μήκος της βάσης του $A\Theta H$ θα γίνεται ελάχιστο όταν το μήκος των σκελών του γίνει ελάχιστο. Αυτό όμως συμβαίνει όταν το $A\Delta$ συμπίπτει με το ύψος από το A . Το Δ λοιπόν, αν υπάρχει τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου, θα πρέπει να συμπίπτει με το ίχνος του ύψους από το A . Ανάλογη ιδιότητα όμως μπορούμε να δείξουμε για κάθε κορυφή του ΔEZ , όθεν και η αλήθεια του θεωρήματος.



Σχήμα 504: Μη ύπαρξη γνήσιου τριγώνου ελαχίστης περιμέτρου

Το ότι η γωνία στο A πρέπει να είναι οξεία χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε ότι η $\Theta\mathcal{H}$ θα τέμνει τις πλευρές AB και AG . Στην περίπτωση που η γωνία στο A είναι αμβλεία, βλέπουμε εύκολα ότι το ελαχίστης περιμέτρου τρίγωνο εκφυλίζεται στο διπλάσιο του ύψους AK από το A , ο.ε.δ.

Πρόταση 5.10.2 (Θεώρημα του Ναπολέοντος) *Εάν στις πλευρές τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάσουμε ισόπλευρα τρίγωνα εξωτερικά αυτού, τότε τα κέντρα τους είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.*



Σχήμα 505: Θεώρημα του Ναπολέοντος

Υπόδειξη: Το τρίγωνο ΔEZ έχει κορυφές τα κέντρα των ισοπλεύρων τριγώνων, δηλαδή τα περίκεντρα αυτών. Η ακτίνα του περικύκλου του ισοπλεύρου ισούται με $1/\sqrt{3}$ της πλευράς του. Αυτό συνεπάγεται ότι τα τρίγωνα AZE και ABB^* είναι όμοια. Πράγματι ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{|AB|}{|AZ|} = \frac{|AB^*|}{|AE|} = \sqrt{3}, \quad |ZAE| = |BAB^*| = |BAG| + 60,$$

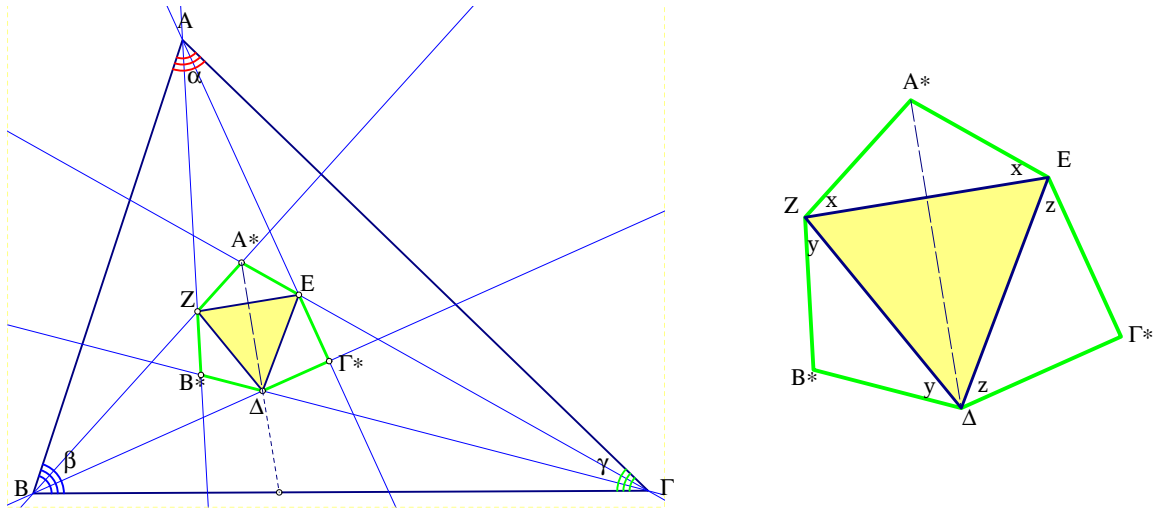
που δείχνει ότι τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες υπ' αυτών γωνίες ίσες. Ανάλογες σχέσεις θα ισχύουν και για τις άλλες πλευρές του τριγώνου $E\Delta Z$. Όμως, κατά το Θεώρημα 5.10.1, οι BB^* , $\Gamma\Gamma^*$, AA^* είναι ίσες, άρα και οι ZE , $E\Delta$, ΔZ , των οποίων τα μήκη έχουν λόγο $1/\sqrt{3}$ προς τις προηγούμενες θα είναι ίσες, ο.ε.δ.

Άσκηση 5.10.1 Δείξε ότι και στην περίπτωση που τα ισόπλευρα κατασκευάζονται στις πλευρές του $AB\Gamma$ και προς την ίδια μεριά με το $AB\Gamma$ το τρίγωνο των κέντρων τους είναι πάλι ισόπλευρο.

Άσκηση 5.10.2 Δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$, τα σημεία A^* , B^* και Γ^* ορίζονται ως οι τομές των διχοτόμων του $AB\Gamma$ με τον περίκυκλο αυτού. Δείξε ότι το τρίγωνο $A^*B^*\Gamma^*$ έχει τις διχοτόμους του $AB\Gamma$ ως ύψη. Επίσης κατασκεύασε το $AB\Gamma$ όταν δίδονται τα σημεία A^* , B^* και Γ^* .

5.11 Θεώρημα του Morley

Θεώρημα 5.11.1 (Θεώρημα του Morley 1860-1937) Οι διαδοχικές τριχοτόμοι των γωνιών τριγώνου τέμνονται σε σημεία που σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.



Σχήμα 506: Θεώρημα του Morley

Απόδειξη: ([Nτε91]) Οι τριχοτόμοι είναι αυτές που χωρίζουν τις γωνίες του τριγώνου σε τρία ίσα μέρη (σχήμα 506). Το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο. Η εικόνα δεξιά περιέχει μεγέθυνση του κρίσιμου μέρους του σχήματος. Αν μπορούσαμε να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΕΑ*Ζ, ΖΒ*Δ και ΔΓ*Ε είναι ισοσκελή, τότε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε εύκολα όλες τις γωνίες που εμφανίζονται στο σχήμα και έτσι να δούμε ότι το ΔΕΖ είναι ισόπλευρο. Αυτό όμως παρουσιάζει δυσκολίες και έτσι πάμε ανάποδα. Ξεκινάμε από ένα ισόπλευρο ΔΕΖ και κατασκευάζουμε τα τρία ισοσκελή με τις γωνίες που πρέπει. Κατόπιν προεκτείνοντας τις πλευρές του εξαγώνου ΔΓ*ΕΑ*ΖΒ* βρίσκουμε τις κορυφές Α, Β και Γ και δείχνουμε ότι το ΑΒΓ έχει τις σωστές γωνίες α, β και γ. Πριν ξεκινήσουμε λοιπόν αυτήν την αντίστροφη κατασκευή, ας δούμε ποιές πρέπει να είναι οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων.

Οι γωνίες ΒΑ*Γ, ΓΒ*Α, και ΑΓ*Β υπολογίζονται εύκολα ότι είναι αντίστοιχα

$$|BA^*Γ| = 180 - \frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}\gamma = 60 + \frac{2}{3}\alpha, \quad |ΓΒ^*Α| = 60 + \frac{2}{3}\beta, \quad |ΑΓ^*Β| = 60 + \frac{2}{3}\gamma. \quad (1)$$

Υποθέτοντας, όπως είπαμε, ότι τα Α*ΖΕ, Β*ΔΖ και Γ*ΕΔ είναι ισοσκελή, προκύπτει από τις προηγούμενες ότι οι γωνίες στις βάσεις τους είναι

$$x = 60 - \frac{\alpha}{3}, \quad y = 60 - \frac{\beta}{3}, \quad z = 60 - \frac{\gamma}{3}. \quad (2)$$

Δοθέντων λοιπόν των γωνιών α, β και γ, ξεκινάμε με ένα αυθαίρετο ισόπλευρο ΔΕΖ και κατασκευάζουμε το εξάπλευρο ΔΓ*ΕΑ*ΖΒ* με τις παραπάνω γωνίες. Ορίζουμε τα Α, Β και Γ αντίστοιχα ως τομές των ζευγών ευθειών (Β*Ζ, Γ*Ε), (Γ*Δ, Α*Ζ) και (Α*Ε, Β*Δ) και δείχνουμε ότι οι γωνίες του ΑΒΓ είναι αντίστοιχα οι α, β και γ, καθώς και ότι οι πλευρές του εξαγώνου είναι τριχοτόμοι αυτών των γωνιών.

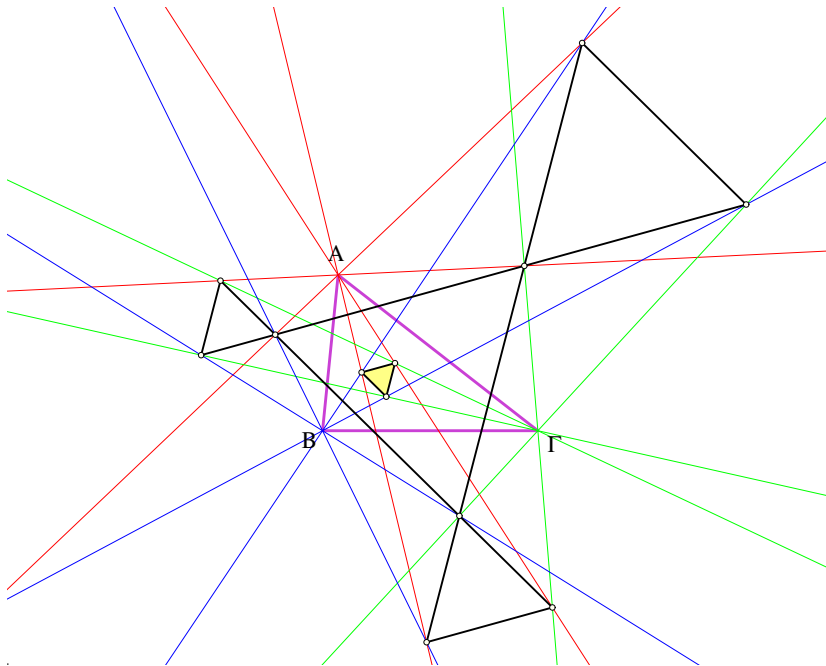
Πράγματι, η $A^*\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας στο A^* και η γωνία στο Δ είναι ίση με

$$|B\Delta\Gamma| = |B^*\Delta\Gamma^*| = 60 + y + z = 60 + (60 - \frac{\beta}{3}) + (60 - \frac{\gamma}{3}) = 120 + \frac{\alpha}{3}.$$

Άρα, κατά την (1)

$$|B\Delta\Gamma| = 120 + \frac{\alpha}{3} = 90 + \frac{60 + \frac{2}{3}\alpha}{2} = 90 + \frac{|BA^*\Gamma|}{2}. \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι το Δ είναι σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου $A^*B\Gamma$ (Άσκηση 2.2.1). Ανάλογα προκύπτει ότι και η BZ είναι διχοτόμος της γωνίας στο B του τριγώνου $B\Gamma^*A$, συνεπώς ότι οι $B\Delta$ και BZ είναι τριχοτόμοι της γωνίας $\Gamma B A$. Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει επίσης ότι η γωνία στο B είναι ακριβώς β και ανάλογα οι γωνίες στα A και Γ είναι αντίστοιχα α και γ . Συνεπώς το $AB\Gamma$ που κατασκευάσαμε έχει τις ίδιες γωνίες α, β, γ με το δοθέν, άρα είναι όμοιο αυτού. Επειδή το τρίγωνο που κατασκευάσαμε ικανοποιεί το θεώρημα και η ομοιότητα διατηρεί τις γωνίες και τους λόγους μηκών, και το αρχικό τρίγωνο θα ικανοποιεί το θεώρημα, ο.ε.δ.



Σχήμα 507: Ισόπλευρα από εσωτερικές/εξωτερικές τριχοτόμους

Σχόλιο Ανάλογα συμπεράσματα με αυτό του προηγούμενου θεωρήματος ισχύουν και για σημεία τομής των τριχοτόμων των εξωτερικών γωνιών του τριγώνου καθώς και τομές εσωτερικών με εξωτερικές τριχοτόμους. Προκύπτουν συνολικά πέντε ισόπλευρα τρίγωνα ([sH94, σ. 103]).

5.12 Προσημασμένος λόγος και απόσταση

Ο **Προσημασμένος Λόγος** είναι μία ελαφρά παραλλαγή του απλού (θετικού) λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων της ίδιας ευθείας, στην οποία, εκτός των μηκών των τμημάτων συνυπολογίζουμε και τον προσανατολισμό τους.

$$\frac{XA}{XB} = \pm \frac{|XA|}{|XB|}$$

Αυτός ταυτίζεται με τον συνηθισμένο λόγο των αποστάσεων $\frac{|XA|}{|XB|}$ όταν τα XA και XB είναι ομόρροπα, ενώ για αντίρροπα XA και XB ισούται με $-\frac{|XA|}{|XB|}$. Εξ ορισμού, λοιπόν, ο προσημασμένος και ο λόγος των αποστάσεων συνδέονται μέσω του τύπου (προσοχή στην διαφορετική σημασία του συμβόλου της απόλυτης τιμής στις δύο πλευρές της ισότητας):

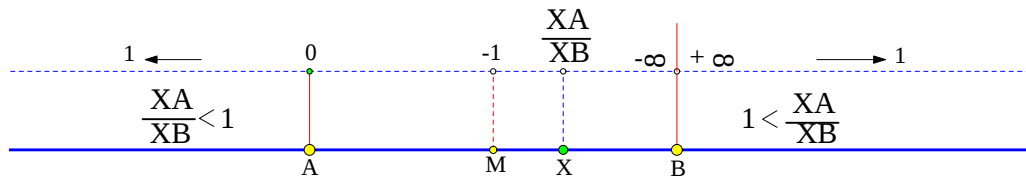
$$\left| \frac{XA}{XB} \right| = \frac{|XA|}{|XB|}.$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει την διαφορά του προσημασμένου από τον συνήθη (θετικό) λόγο.

Πρόταση 5.12.1 Δοθέντων δύο διαφορετικών σημείων A και B ευθείας ϵ , η θέση ενός τρίτου σημείου X της ευθείας αυτής καθορίζεται πλήρως από τον προσημασμένο λόγο

$$\lambda = \frac{XA}{XB}.$$

Απόδειξη: Η πρόταση είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.17.1, κατά το οποίο, δοθέντος $\lambda > 0$, υπάρχουν δύο ακριβώς σημεία X, X' στην ευθεία AB με (συνήθη) λόγο αποστάσεων $\frac{|XA|}{|XB|} = \lambda$, το ένα εξ αυτών εσωτερικό του AB και το άλλο εξωτερικό. Συνεπώς, αν λάβουμε υπόψη και το πρόσημο, η αντιστοίχιση γίνεται μονοσήμαντη. Τα εσωτερικά του AB σημεία X έχουν προσημασμένο λόγο $\frac{XA}{XB}$ αρνητικό και τα εξωτερικά του AB έχουν λόγο θετικό, ο.ε.δ.



Σχήμα 508: Προσημασμένος λόγος

Σχόλιο-1 Παρόλο που ορίζω εδώ τον προσημασμένο λόγο, δεν τον χρησιμοποιώ παρά στις τελευταίες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου, που διαπραγματεύονται θέματα, συνήθως ευρισκόμενα εκτός της ύλης των σχολικών εγχειριδίων.

Σχόλιο-2 Το σχήμα-508 δείχνει πως μεταβάλλεται ο προσημασμένος λόγος σε συνάρτηση με την θέση του X . Όταν το X είναι πολύ μακριά από τα A και B , τότε τα XA και XB είναι σχεδόν ίσα και ο λόγος πλησιάζει την τιμή 1, παραμένοντας πάντως < 1 όταν το X είναι μακριά και από την μεριά του A ενώ είναι > 1 για X μακριά και από την μεριά του B . Καθώς το X πλησιάζει το A από το εξωτερικό του AB ο λόγος, είναι θετικός και τείνει στο

0. Για $X=A$ ο λόγος γίνεται 0 και κατόπιν μειώνεται συνεχώς, τείνοντας προς το $-\infty$ καθώς το X πλησιάζει το B . Στο μέσον M του AB ο λόγος είναι -1 . Στο B η τιμή του λόγου δεν ορίζεται, ως συνήθως συμβαίνει με κλάσματα για τα οποία ο παρονομαστής μηδενίζεται. Για X πολύ κοντά στο B και εξωτερικά του AB ο προσημασμένος λόγος είναι πολύ μεγάλος θετικός αριθμός και καθώς το X απομακρύνεται από το AB γίνεται ολοένα μικρότερος, παραμένοντας > 1 , και τείνοντας προς το 1 , καθώς το X απομακρύνεται στο άπειρο.

Πόρισμα 5.12.1 *Επί της ευθείας ε , τα σημεία X και X' είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα A και B τότε και μόνον, όταν για τους προσημασμένους λόγους ισχύει*

$$\frac{XA}{XB} = -\frac{X'A}{X'B}.$$

Ο προσημασμένος λόγος είναι συμβατός με την **Προσημασμένη απόσταση** δύο σημείων πάνω σε μία ευθεία $\varepsilon=AB$. Για τον ορισμό της προσημασμένης απόστασης χρειαζόμαστε την έννοια της **Τετμημένης** πάνω στην ευθεία ε . Η τελευταία είναι ένας απλός μηχανισμός που σε κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχίζει έναν θετικό ή αρνητικό αριθμό. Έτσι αν το X έχει τετμημένη x και το Y έχει τετμημένη y (συνήα το γράφουμε $X(x)$ για το σημείο X και την τετμημένη του x), τότε η προσημασμένη απόσταση ορίζεται ως η διαφορά

$$XY = y - x.$$

Προφανώς ισχύει

$$YX = x - y = -XY.$$

Ο μηχανισμός ορισμού ενός συστήματος τετμημένων πάνω στην ε στηρίζεται στην επιλογή δύο διαφορετικών σταθερών, αλλά κατά τα άλλα αυθαίρετων σημείων A και B της ε . Το A το λέμε **Αρχή** των τετμημένων και την ημιευθεία με αρχή το A και περιέχουσα το B , την λέμε **Θετικό ημιάξονα**, ενώ την αντικείμενη ημιευθεία, που δεν περιέχει το B , την ονομάζουμε **Αρνητικό ημιάξονα**. Για κάθε σημείο X της ε ορίζουμε τότε ως τετμημένη του X τον αριθμό $x = |AX|$, όταν το X είναι στον θετικό ημιάξονα και τον αριθμό $x = -|AX|$ όταν το X είναι στον αρνητικό ημιάξονα. Η τετμημένη του A είναι το μηδέν και η τετμημένη του B είναι η απόσταση $|AB|$.

Πόρισμα 5.12.2 *Γιά κάθε σύστημα τετμημένων που ορίζεται από τα σημεία A, B της ευθείας ε και τρία οποιαδήποτε σημεία $X(x), Y(y)$ και $Z(z)$ επ' αυτής ισχύει*

$$x = AX, \quad XY = AY - AX, \quad XZ = XY + YZ.$$

Πρόταση 5.12.2 *Η προσημασμένη απόσταση XY δύο σημείων δεν εξαρτάται από το ειδικό σύστημα τετμημένων μέσω του οποίου ορίζεται.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το ένα σύστημα ορίζεται από τα δύο σημεία A και B της ε και το άλλο από τα A' και B' . Έστω ότι το ίδιο σημείο X έχει ως προς το ένα σύστημα τετμημένη x και ως προς το δεύτερο x' . Έστω και α' η τετμημένη του A' ως προς το πρώτο σύστημα (με αρχή το A). Τότε, βάσει των ορισμών και του πορίσματος

$$x' = A'X = x - \alpha', \quad y' = A'Y = y - \alpha' \quad \Rightarrow \quad XY = y' - x' = (y - \alpha') - (x - \alpha') = y - x,$$

ο.ε.δ.

Άσκηση 5.12.1 Δείξε ότι για τρία οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ επ' ευθείας ε και τις προσημασμένες αποστάσεις τους ισχύει

$$AB + B\Gamma + \Gamma A = 0.$$

Με την βοήθεια ενός συστήματος τετμημένων πάνω στην ευθεία ε ο προσημασμένος λόγος γράφεται ως πηλίκον θετικών ή αρνητικών αριθμών

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{y-x}{z-x},$$

όπου x, y, z είναι αντίστοιχα οι τετμημένες των σημείων X, Y και Z .

Η προσημασμένη απόσταση και ο προσημασμένος λόγος απλοποιεί σημαντικά τους τύπους της Παραγράφου 1.17, που χρησιμοποιεί αποκλειστικά θετικούς λόγους, και εξαλείφει την περιπτώσιολογία και διάκριση που γίνεται εκεί μεταξύ σημείων εντός και εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB . Το ίδιο συμβαίνει και με τους τύπους του Stewart (Παράγραφος 3.12). Οι επόμενες ασκήσεις ξεκινούν με την αντικατάσταση των τύπων (1), (2) και (3) της Παραγράφου 1.17 με έναν εννιαίο και προχωρούν σταδιακά στην αντικατάσταση και των άλλων τύπων αυτής της παραγράφου. Ως σύστημα τετμημένων θεωρούμε αυτό που ορίζεται από τα σημεία A και B της ευθείας ε . Με $d = |AB|$ συμβολίζουμε την απόσταση των A, B .

Άσκηση 5.12.2 Δείξε ότι ο προσημασμένος λόγος $t = \frac{XA}{XB}$ δίδεται από τον τύπο

$$t = \frac{x}{x-d} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t}{t-1}d,$$

όπου x η τετμημένη του σημείου X της ευθείας ε .

Άσκηση 5.12.3 Δείξε ότι τα σημεία $X(x)$ και $X'(x')$ είναι αρμονικά συζυγή των A και B τότε και μόνον, όταν ισχύει

$$2xx' = d(x + x').$$

Άσκηση 5.12.4 Δείξε ότι η τετμημένη ν του μέσου N του ευθυγράμμου τμήματος XX' που ορίζεται από το $X(x)$ και το αρμονικό συζυγές του $X'(x')$ του X ως προς A, B ισούται με

$$\nu = \frac{t^2}{t^2 - 1}d,$$

όπου t ο προσημασμένος λόγος $t = \frac{XA}{XB}$.

Ανάλογες είναι οι απλοποιήσεις και η εννιαία μορφή που επιτυγχάνουμε για τον τύπο του Stewart. Οι επόμενες ασκήσεις δίνουν τους αντίστοιχους εννιαίους τύπους, όταν οι λόγοι (θετικοί) που χρησιμοποιούνται στην (Παράγραφο 3.12) αντικατασταθούν από τους προσημασμένους και τα μήκη από τα προσημασμένα μήκη.

Άσκηση 5.12.5 Δείξε ότι για σημείο Δ επί της ευθείας $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ με $d = |A\Delta|$ ισχύει

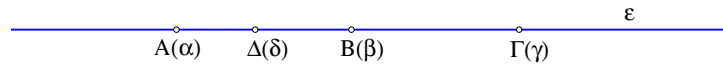
$$\frac{c^2 - d^2 - \Delta B^2}{b^2 - d^2 - \Delta \Gamma^2} = \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}.$$

Άσκηση 5.12.6 Δείξε ότι για σημείο Δ επί της ευθείας $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, με $d = |A\Delta|$ και $B\Delta = \kappa B\Gamma$ και $\Delta\Gamma = \lambda B\Gamma$ ισχύει

$$d^2 = \kappa \cdot b^2 + \lambda \cdot c^2 - \kappa\lambda \cdot a^2.$$

Άσκηση 5.12.7 Δείξε ότι για τέσσερις πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η ταυτότητα

$$(\alpha - \delta)^2(\gamma - \beta) + (\beta - \delta)^2(\alpha - \gamma) + (\gamma - \delta)^2(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma) = 0.$$

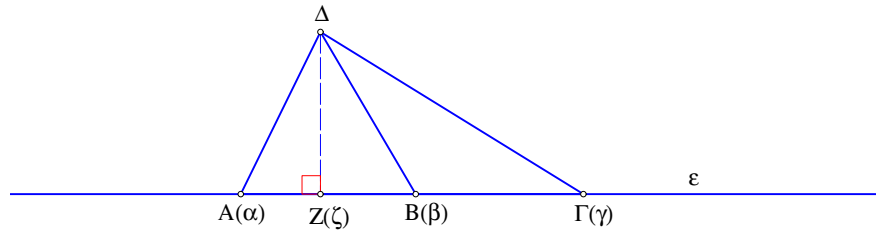


Σχήμα 509: Τέσσερα σημεία και οι τετμημένες τους

Άσκηση 5.12.8 Δείξε ότι για τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ επ' ευθείας ε και τις προσημασμένες αποστάσεις τους ισχύει η ταυτότητα

$$\Delta A^2 \cdot B\Gamma + \Delta B^2 \cdot \Gamma A + \Delta \Gamma^2 \cdot AB + AB \cdot B\Gamma \cdot \Gamma A = 0.$$

Υπόδειξη: Θεώρησε ένα οποιοδήποτε σύστημα τετμημένων στην ευθεία ε (δεν παίζει ρόλο ποιό ακριβώς) και γράψε τις προσημασμένες αποστάσεις με την βοήθεια των τετμημένων των σημείων $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $\Gamma(\gamma)$ και $\Delta(\delta)$: $AB = (\beta - \alpha)$, $B\Gamma = (\gamma - \beta)$, ... κτλ. Η απόδειξη προκύπτει από την ταυτότητα της προηγούμενης άσκησης.



Σχήμα 510: Τύπος του Stewart

Άσκηση 5.12.9 (Τύπος του Stewart) Δείξε ότι η προηγούμενη εξίσωση ισχύει και όταν τα A, B, Γ είναι στην ίδια ευθεία ε και το σημείο Δ είναι εκτός αυτής.

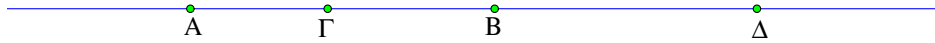
Υπόδειξη: Πρόβαλλε το Δ στο σημείο Z της ε και εφάρμοσε το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\begin{aligned} & \Delta A^2 \cdot B\Gamma + \Delta B^2 \cdot \Gamma A + \Delta \Gamma^2 \cdot AB + AB \cdot B\Gamma \cdot \Gamma A \\ &= (\Delta Z^2 + ZA^2) \cdot B\Gamma + (\Delta Z^2 + ZB^2) \cdot \Gamma A + (\Delta Z^2 + Z\Gamma^2) \cdot AB + AB \cdot B\Gamma \cdot \Gamma A \\ &= [ZA^2 \cdot B\Gamma + ZB^2 \cdot \Gamma A + Z\Gamma^2 \cdot AB + AB \cdot B\Gamma \cdot \Gamma A] + [\Delta Z^2 \cdot (B\Gamma + \Gamma A + AB)] \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Η πρώτη αγγύλη μηδενίζεται λόγω της Άσκησης 5.12.8 και η δεύτερη λόγω της Άσκησης 5.12.1.

5.13 Διπλός λόγος, Αρμονικές δέσμες

Μιά περιέργη, εκ πρώτης όψεως, κατασκευή, που αποδεικνύεται πλούσια σε εφαρμογές είναι αυτή του διπλού λόγου τεσσάρων σημείων μιάς ευθείας. Για τον ορισμό της σταθεροποιούμε δύο εκ των τεσσάρων σημείων και παίρνουμε τον προσημασμένο λόγο (Παράγραφος 5.12.1) των δύο άλλων ως προς αυτά. **Διπλό λόγο** τεσσάρων σημείων A, B, Γ και Δ της ίδιας



$$\text{Σχήμα 511: Διπλός λόγος } (AB\Gamma\Delta) = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} : \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

ευθείας ε ονομάζουμε το πηλίκον του λόγου $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ διά του λόγου $\frac{\Delta A}{\Delta B}$. Συχνά το πηλίκον αυτό το γράφουμε ως $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} : \frac{\Delta A}{\Delta B}$ και το συμβολίζουμε με το $(AB\Gamma\Delta)$.

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} : \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\left(\frac{\Gamma A}{\Gamma B}\right)}{\left(\frac{\Delta A}{\Delta B}\right)}.$$

Μιά ειδική, αλλά σημαντική, περίπτωση διπλού λόγου είναι αυτή που προκύπτει από δύο σημεία (A, B) και δύο άλλα (Γ, Δ) αρμονικά συζυγή ως προς τα πρώτα. Αυτό εξ ορισμού σημαίνει ότι οι προσημασμένοι λόγοι είναι οι ίδιοι, εκτός του προσήμου,

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \lambda, \quad \frac{\Delta A}{\Delta B} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma A}{\Gamma B} : \frac{\Delta A}{\Delta B} = -1.$$

Σχόλιο Ο διπλός λόγος ανάγεται στον συνήθη προσημασμένο λόγο, αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Δ τείνει στο άπειρο. Τότε το $\frac{\Delta A}{\Delta B}$ τείνει στο 1 και θεωρούμε ότι στο όριο ο διπλός λόγος ταυτίζεται με τον απλό προσημασμένο λόγο $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}$.

Πρόταση 5.13.1 Δοθέντων τεσσάρων σημείων A, B, Γ και $\Delta \in \varepsilon$ ευθείας ε και σημείου O εκτός αυτής, ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων εκφράζεται, εκτός προσήμου, μέσω των γωνιών των ευθειών που ενώνουν το O με τα σημεία.

Απόδειξη: Πρόβαλε τα Γ και Δ επί των ευθειών OA και OB στα σημεία Γ_1, Γ_2 και Δ_1, Δ_2 αντίστοιχα. Ισχύουν, λόγω των ομοίων τριγώνων $A\Gamma\Gamma_1, A\Delta\Delta_1$ και $B\Gamma\Gamma_2, B\Delta\Delta_2$:

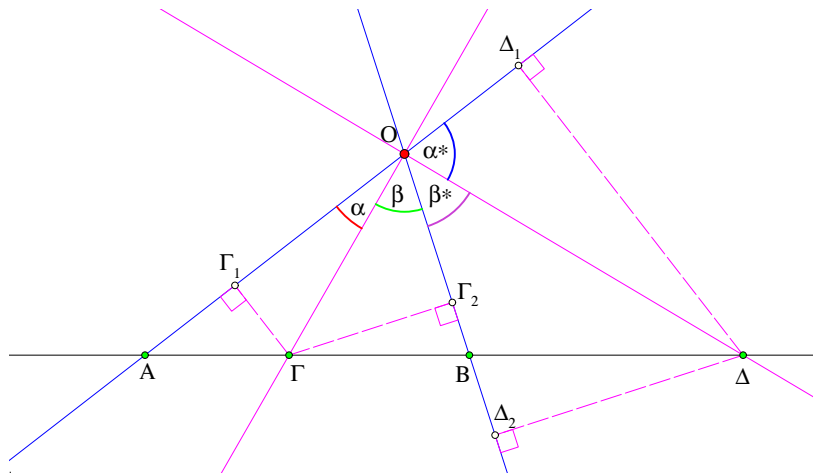
$$\frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} : \frac{|\Delta A|}{|\Delta B|} = \frac{|\Gamma A|}{|\Delta A|} \cdot \frac{|\Delta B|}{|\Gamma B|} = \frac{|\Gamma\Gamma_1|}{|\Delta\Delta_1|} \cdot \frac{|\Delta\Delta_2|}{|\Gamma\Gamma_2|} = \frac{|O\Gamma| \eta\mu(\alpha)}{|O\Delta| \eta\mu(\alpha^*)} \cdot \frac{|O\Delta| \eta\mu(\beta^*)}{|O\Gamma| \eta\mu(\beta)},$$

το οποίο απλοποιείται στο

$$\frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} : \frac{|\Delta A|}{|\Delta B|} = \frac{\eta\mu(\alpha)}{\eta\mu(\alpha^*)} : \frac{\eta\mu(\beta)}{\eta\mu(\beta^*)},$$

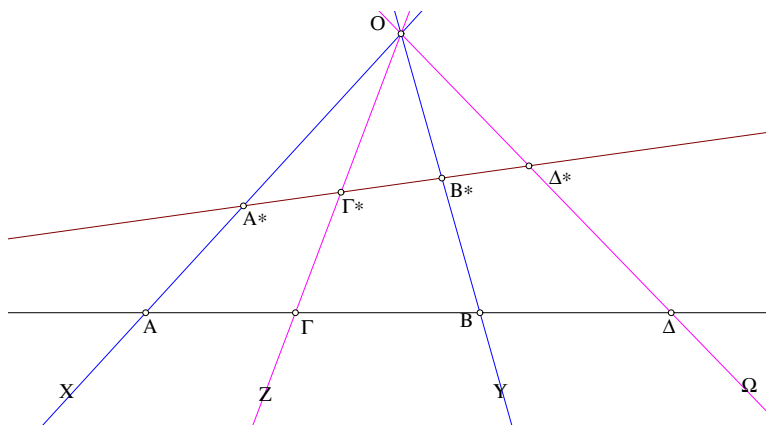
το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό, ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.13.1 Δοθέντων τεσσάρων ευθειών διερχόμενων δια του ιδίου σημείου O ο διπλός λόγος των τεσσάρων σημείων που ορίζουν επί ευθείας ε που την τέμνουν είναι ανεξάρτητος της ευθείας.



Σχήμα 512: Διπλός λόγος $(AB\Gamma\Delta) = \frac{\eta\mu(\alpha)}{\eta\mu(\alpha^*)} : \frac{\eta\mu(\beta)}{\eta\mu(\beta^*)}$.

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης, κατά την οποία, ο διπλός λόγος, εκτός προσήμου, εκφράζεται μέσω των γωνιών που σχηματίζουν οι τέσσερις ευθείες μεταξύ τους και συνεπώς είναι ανεξάρτητος της ειδικής ευθείας ε που τις τέμνει. Και το πρόσημο του διπλού λόγου εξαρτάται και αυτό από την θέση των ευθειών και όχι την ειδική ευθεία που τις τέμνει. Στο προηγούμενο σχήμα λ.χ. και για τις δύο ευθείες το πρόσημο είναι αρνητικό. Θα ήταν θετικό αν το Γ ήταν και αυτό, όπως και το Δ εκτός του AB , οπότε και το Γ^* θα



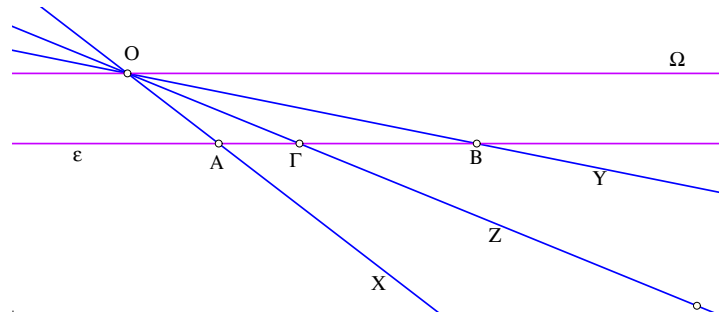
Σχήμα 513: Διπλός λόγος τεσσάρων ευθειών που συντρέχουν σε σημείο

ήταν εκτός του A^*B^* και τα πρόσημα θα συνέπιπταν πάλι, ο.ε.δ.

Το προηγούμενο θεώρημα επιτρέπει να ορίσουμε για κάθε τετράδα ευθειών που συντρέχουν έναν αριθμό, τον διπλό λόγο που οι τέσσερις ευθείες ορίζουν πάνω σε μία τέμνουσα αυτές ευθεία. Σύμφωνα με το θεώρημα ο διπλός αυτός λόγος δεν εξαρτάται από την ειδική ευθεία και συνεπώς ορίζει κάποιο χαρακτηριστικό των τεσσάρων ευθειών. Τον αριθμό αυτό ονομάζουμε **Διπλό λόγο των τεσσάρων ευθειών** που συντρέχουν στο ίδιο σημείο, ή διπλό λόγο της δέσμης των τεσσάρων ευθειών. Μιά δέσμη τεσσάρων ευθειών της οποίας ο διπλός λόγος είναι -1 λέγεται **Αρμονική δέσμη τεσσάρων ευθειών**. Συχνά μία δέσμη τεσσάρων ευθειών $OX, OY, OZ, O\Omega$ συμβολίζεται με $O(X,Y,Z,\Omega)$.

Πόρισμα 5.13.1 Ο διπλός λόγος τεσσάρων ευθειών $OX, OY, OZ, O\Omega$ ισούται με τον

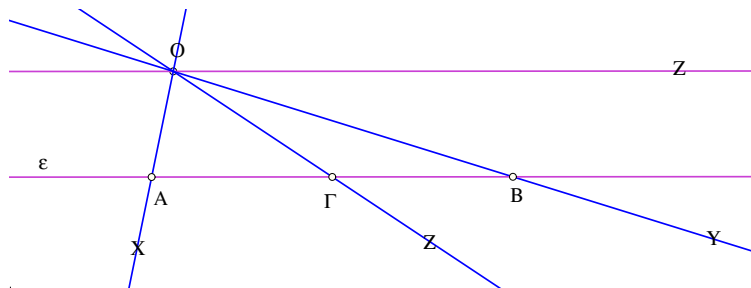
προσημασμένο λόγο $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ των τριών σημείων A, B και Γ , που αποτεμνουν οι τρεις πρώτες επί ευθείας ε παράλληλου προς την τέταρτη $O\Omega$.



Σχήμα 514: Διπλός λόγος τεσσάρων ευθειών σε παράλληλο της $O\Omega$

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από το σχόλιο που έγινε παραπάνω, κατά το οποίο ο διπλός λόγος ανάγεται στον προσημασμένο απλό λόγο $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ στην περίπτωση που το τέταρτο σημείο Δ τείνει στο άπειρο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 5.13.2 Μία δέσμη τεσσάρων ευθειών $O(X, Y, Z, \Omega)$ είναι αρμονική τότε και μόνο, όταν μία παράλληλος ε προς την τέταρτη $O\Omega$ τέμνει τις άλλες σε τρία σημεία (A, B, Γ) εκ των οποίων το ένα (Γ) είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος (AB) που ορίζεται από τα άλλα δύο.



Σχήμα 515: Αρμονική δέσμη $O(X, Y, Z, \Omega)$ και τέμνουσα ε παράλληλος της OZ

Οι επόμενες δύο προτάσεις περιγράφουν τα δύο κύρια παραδείγματα αρμονικών δεσμών. Η πρώτη είναι ειδική περίπτωση της δεύτερης και τις δύο δε τις έχουμε συναντήσει σε άλλη μορφή στην Πρόταση 3.8.5.

Πρόταση 5.13.2 Σε κάθε τρίγωνο OAB οι δύο πλευρές OA, OB και οι διχοτόμοι OG, OD της γωνίας στο O αποτελούν αρμονική δέσμη.

Απόδειξη: Όπως είδαμε στο Πόρισμα 3.3.7 και την Άσκηση 3.3.3 στο τρίγωνο OAB με διχοτόμους OG και OD , ισχύει

$$\frac{|\Gamma A|}{|\Gamma B|} = \frac{|\Delta A|}{|\Delta B|} = \frac{|OA|}{|OB|} \Rightarrow \frac{\Gamma A}{\Gamma B} : \frac{\Delta A}{\Delta B} = -1,$$

ο.ε.δ.

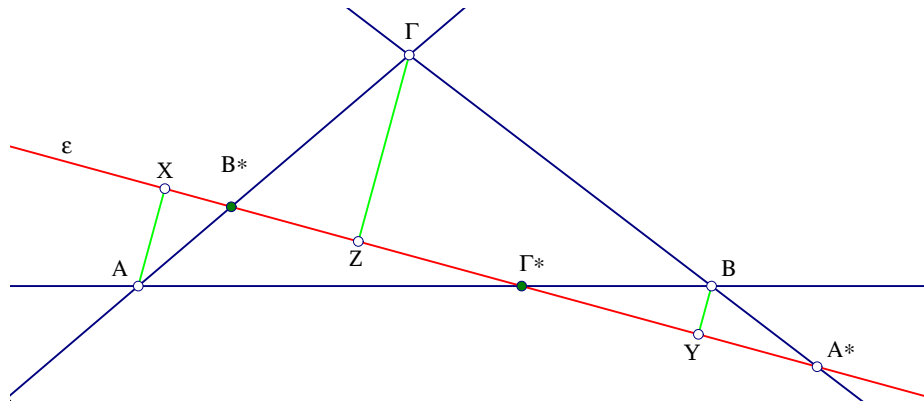
5.14 Θεωρήματα του Μενελάου και του Ceva

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τα δύο κύρια εργαλεία ανίχνευσης της σύμπτωσης τριών σημείων σε μία ευθεία ή/και τριών ευθειών σε ένα σημείο. Και στις δύο περιπτώσεις τα κριτήρια βασίζονται στον Προσημασμένο Λόγο (Παράγραφος 5.12.1).

Θεώρημα 5.14.1 (Θεώρημα του Μενελάου 70-140) *Αν τρία σημεία A^* , B^* , Γ^* επί των πλευρών αντίστοιχα $B\Gamma$, ΓA , AB τριγώνου $AB\Gamma$ περιέχονται σε μία ευθεία ε και δεν συμπίπτουν με κορυφές του τριγώνου, τότε για τους προσημασμένους λόγους ισχύει η σχέση*

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} \cdot \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = 1.$$

Αντίστροφα, αν ισχύει η προηγούμενη σχέση, τότε τα σημεία A^ , B^* , Γ^* περιέχονται σε ευθεία.*



Σχήμα 519: Θεώρημα του Μενελάου

Απόδειξη: Κατ' αρχήν να παρατηρήσουμε ότι κάθε ευθεία που δεν διέρχεται από κορυφές του τριγώνου τέμνει ή δύο πλευρές του τριγώνου στο εσωτερικό τους ή καμία στο εσωτερικό της (Αξίωμα 1.6.3). Επομένως από τους τρεις προσημασμένους λόγους που συμμετέχουν στην παραπάνω σχέση ή δύο είναι αρνητικοί ή όλοι είναι θετικοί, όθεν και το θετικό πρόσημο. Τώρα στην απόδειξη, προσέχοντας ώστε να παίρνουμε τα σωστά πρόσημα. Πρόβαλε τις κορυφές A, B, Γ του τριγώνου στην ευθεία ε , στα σημεία X, Y και Z αντίστοιχα. Προκύπτουν ζεύγη ομοίων ορθογωνίων τριγώνων: $(A^*BY, A^*\Gamma Z)$, $(B^*\Gamma Z, B^*AX)$, (Γ^*AX, Γ^*BY) . Οι αναλογίες των πλευρών των ομοίων τριγώνων δίδουν:

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} = \frac{|BY|}{|\Gamma Z|}, \quad \frac{B^*\Gamma}{B^*A} = -\frac{|\Gamma Z|}{|AX|}, \quad \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = -\frac{|AX|}{|BY|}.$$

Η ζητούμενη σχέση προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις τρεις προηγούμενες κατά μέλη και απλοποιώντας. Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η ισότητα και ότι η ευθεία A^*B^* τέμνει την AB στο Γ' . Τότε κατά το αποδειχθέν μέρος του θεωρήματος θα ισχύει

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} \cdot \frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = 1.$$

Εξ υποθέσεως όμως ισχύει και η

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} \cdot \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = 1.$$

Εκ των δύο προκύπτει αμέσως η

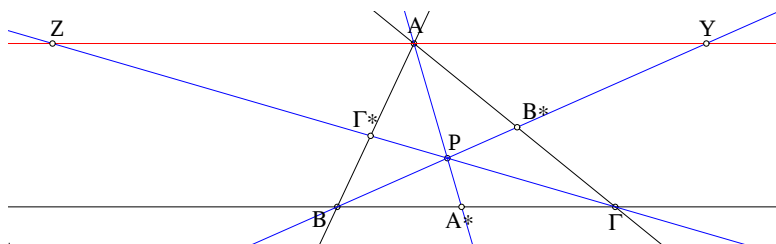
$$\frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B},$$

που δείχνει ότι το Γ' ταυτίζεται με το Γ^* (Πρόταση 5.12.1), ο.ε.δ.

Θεώρημα 5.14.2 (Θεώρημα του Ceva 1648-1734) Αν τρία σημεία A^* , B^* , Γ^* επί των πλευρών αντίστοιχα $B\Gamma$, ΓA , AB τριγώνου $AB\Gamma$ και διαφορετικά των κορυφών, ορίζουν ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$, διερχόμενες διά του ίδιου σημείου P , τότε για τους προσημασμένους λόγους ισχύει:

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} \cdot \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = -1.$$

Αντίστροφα, εάν ισχύει η προηγούμενη σχέση, τότε οι τρεις ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 520: Θεώρημα του Ceva

Απόδειξη: Και εδώ να παρατηρήσουμε πρώτα ότι για κάθε σημείο P του επιπέδου, μη κειμένου επί των πλευρών του τριγώνου, οι τομές A^* , B^* , Γ^* των AP , BP , ΓP με τις απέναντι πλευρές ή περιέχονται όλες στο εσωτερικό των πλευρών ή μία μόνον εξ αυτών περιέχεται στο εσωτερικό και οι άλλες στο εξωτερικό, όθεν και το πρόσημο -1 . Τώρα, για την απόδειξη, προσέχοντας πάλι τα σωστά πρόσημα, φέρε παράλληλη από μία κορυφή, λ.χ. την A . Σχηματίζονται ζεύγη ομοίων τριγώνων: $(PB\Gamma, PYZ)$, $(B^*B\Gamma, B^*YA)$ και $(\Gamma^*B\Gamma, \Gamma^*AZ)$. Από τις αναλογίες πλευρών αυτών των ομοίων τριγώνων έχουμε τις ισότητες:

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} = -\frac{|AY|}{|AZ|}, \quad \frac{B^*\Gamma}{B^*A} = -\frac{|B\Gamma|}{|AY|}, \quad \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = -\frac{|AZ|}{|B\Gamma|}.$$

Η ζητούμενη σχέση προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις προηγούμενες κατά μέλη και απλοποιώντας.

Γιά το αντίστροφο ας υποθέσουμε ότι οι δύο ευθείες AA^* , BB^* τέμνονται στο σημείο P και έστω Γ' το σημείο τομής της ΓP με την AB . Τότε κατά το αποδειχθέν μέρος του θεωρήματος θα ισχύει

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} \cdot \frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = -1.$$

Εξ υποθέσεως όμως ισχύει και η

$$\frac{A^*B}{A^*\Gamma} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} \cdot \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = -1.$$

Εκ των δύο προκύπτει αμέσως η

$$\frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B},$$

που δείχνει ότι το Γ' ταυτίζεται με το Γ^* (Πρόταση 5.12.1), ο.ε.δ.

Πόρισμα 5.14.1 Δίδεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τρία σημεία A^* , B^* και Γ^* επί των πλευρών αυτού και διαφορετικά των κορυφών του. Τότε η σχέση των λόγων μηκών:

$$\frac{|A^*B|}{|A^*\Gamma|} \cdot \frac{|B^*\Gamma|}{|B^*A|} \cdot \frac{|\Gamma^*A|}{|\Gamma^*B|} = 1$$

συνεπάγεται μία ακριβώς εκ των δύο προτάσεων:

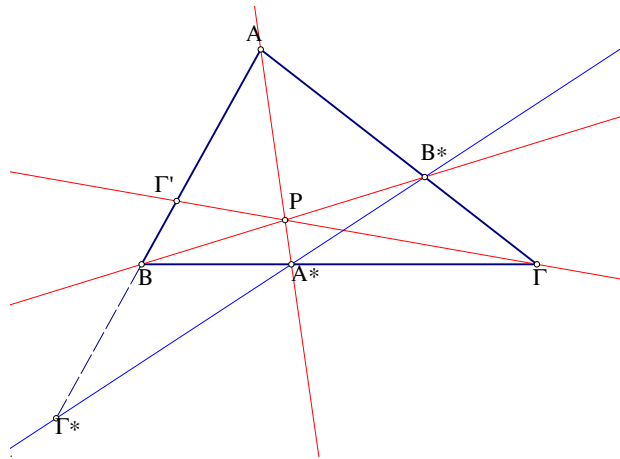
α) τα A^*, B^* και Γ^* είναι επ' ευθείας,

β) οι ευθείες AA^* , BB^* , $\Gamma\Gamma^*$ διέρχονται από κοινό σημείο.

Επίσης, αν Γ' είναι το αρμονικό συζυγές του Γ^* ως προς A, B , τότε,

α') όταν συμβαίνει το (α), οι ευθείες AA^* , BB^* , $\Gamma\Gamma'$ διέρχονται από κοινό σημείο.

β') όταν συμβαίνει το (β), τα A^* , B^* , Γ' περιέχονται στην ίδια ευθεία.



Σχήμα 521: Συσχετισμός θεωρημάτων Μενέλαου και Ceva

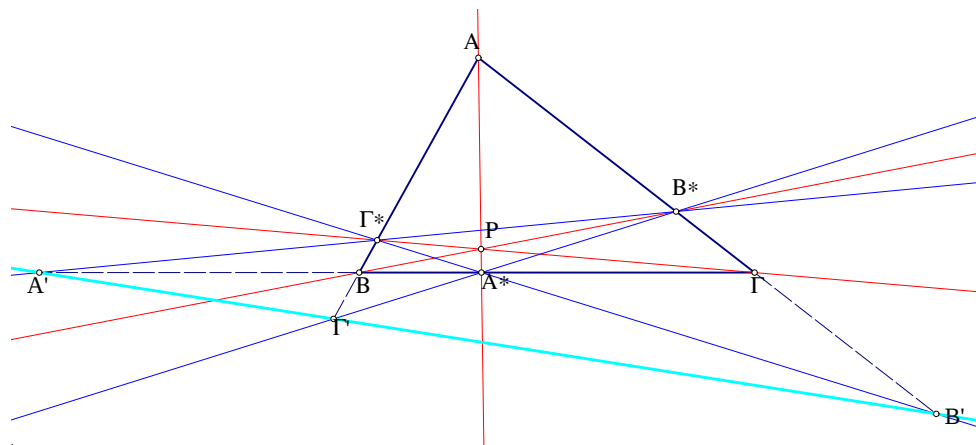
Απόδειξη: Η απόδειξη έπεται άμεσα από τα προηγούμενα θεωρήματα. Εάν το τριπλό γινόμενο λόγων μηκών ισούται με 1 τότε το αντίστοιχο γινόμενο προσημασμένων λόγων θα ισούται με 1 ή -1. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε το (α). Λόγω της σχέσης μεταξύ των αρμονικών συζυγών Γ^* και Γ' ως προς A, B

$$\frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = -\frac{\Gamma'A}{\Gamma'B},$$

θα ισχύει τότε και το (α'). Ανάλογα και στην δεύτερη περίπτωση ισχύουν τα (β) και (β').

Σημείωσε ότι ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και για τα αρμονικά συζυγή A' του A^* ως προς B, Γ και B' του B^* ως προς A και Γ , ο.ε.δ.

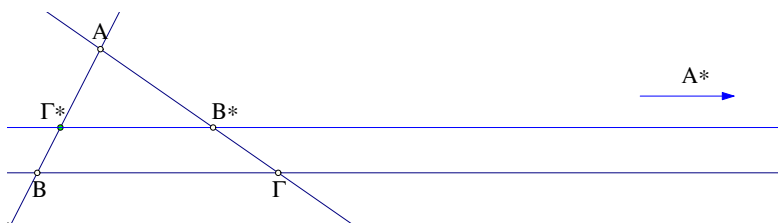
Σχόλιο-1 Το τελευταίο πόρισμα φανερώνει ότι οι δύο ιδιότητες πάνε μαζί. Για να τις δούμε σαν ενότητα και να συμπεριλάβουμε την συμμετρία που εμπεριέχεται στη σχέση που εκφράζουν, πρέπει μαζί με τα τρία σημεία A^* , B^* και Γ^* επί των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ να θεωρήσουμε και τα τρία αρμονικά συζυγή τους A' , B' και Γ' ως προς τα άκρα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA και AB αντίστοιχα. Προκύπτει τότε το επόμενο ενδιαφέρον σχήμα, στο οποίο όλες οι συμπτώσεις, εκτός αυτής των A', B' και Γ' επί μιάς ευθείας, είναι συνέπειες των προηγούμενων προτάσεων. Η ευθεία που περιέχει τα A', B' και Γ' λέγεται **Τριγραμμική πολική** του P ως προς το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το σημείο P λέγεται **Τριγραμμικός πόλος** της ευθείας $A'B'$ ως προς το τρίγωνο $AB\Gamma$. Οι δύο αυτές έννοιες έχουν σημαντική θέση



Σχήμα 522: Συσχετισμός θεωρημάτων Μενέλαου και Ceva II

στην ούτως ονομαζόμενη *Γεωμετρία του τριγώνου* ([Cou80, σ.244]). Το ότι τα A' , B' , Γ' είναι συνευθειακά θα το δούμε σε επόμενη παράγραφο (Πόρισμα 5.16.1).

Σχόλιο-2 Εφαρμόζοντας αυστηρά τους ορισμούς μας μπορούμε να βρούμε το αρμονικό συζυγές Γ' ως προς A, B για κάθε σημείο Γ^* της ευθείας AB , εκτός των δύο ειδικών σημείων B και M , όπου M το μέσον του AB . Όπως για το $A^*=A'$, έτσι δεχόμαστε και ότι $B^*=B'$. Αυτά είναι τα μόνα σημεία που ταυτίζονται με τα συζυγή τους. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το γεγονός ότι καθώς το X προσεγγίζει το A ή το B από το εξωτερικό του AB το αντίστοιχο συζυγές X' προσεγγίζει το ίδιο σημείο από το εσωτερικό και τούμπαλιν. Στο M ωστόσο αδυνατούμε να αντιστοιχίσουμε ένα συζυγές σημείο. Θεσπίζουμε (δηλαδή ορίζουμε), λοιπόν, ένα φανταστικό σημείο πάνω στην ευθεία AB που ονομάζουμε **Σημείο της ευθείας στο άπειρο** και θεωρούμε ότι είναι, αυτό ακριβώς, ένα φανταστικό σημείο της ευθείας πολύ μακριά, στο άπειρο και το σημείο αυτό είναι το συζυγές αρμονικό του μέσου M του AB . Το σημείο στο άπειρο της ευθείας AB συμπληρώνει και ένα άλλο κενό που αφήνουν τα κανονικά σημεία της ευθείας. Ο λόγος $\lambda=1$ δεν αντιστοιχεί σε κανένα σημείο της ευθείας AB . Θεωρούμε λοιπόν, ότι στο σημείο στο άπειρο αντιστοιχεί ο προσημασμένος λόγος $\lambda=1$. Με αυτές τις παραδοχές μπορούμε να συμπεριλάβουμε στο θεώρημα του Μενελάου και ένα παλιό συμπέρασμα από το θεώρημα του Θαλή. Φέρνοντας μία παράλληλο προς την πλευρά του $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει τις πλευρές του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα στα σημεία Γ^*



Σχήμα 523: Αναλογίες βάσει θεωρήματος Μενελάου

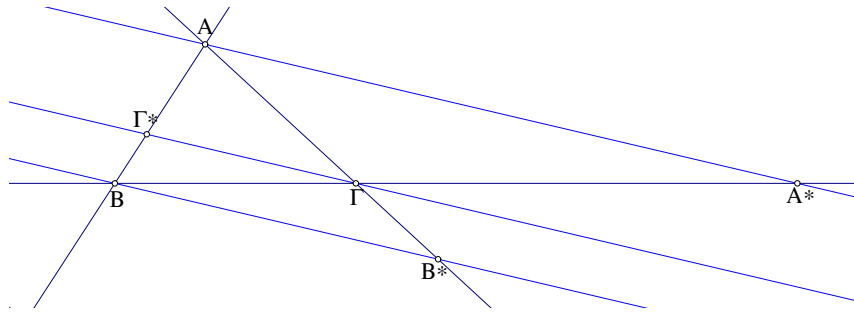
και B^* , έχουμε κατά Θαλή

$$\frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} = \frac{B^*A}{B^*\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} = 1 \Leftrightarrow \frac{\Gamma^*A}{\Gamma^*B} \cdot \frac{B^*\Gamma}{B^*A} \cdot \frac{A^*B}{A^*\Gamma} = 1.$$

Στην τελευταία ισοδυναμία θεωρούμε ακριβώς ότι η $B^*Γ^*$ τέμνει την $ΒΓ$ στο σημείο της στο άπειρο A^* για το οποίο ισχύει (κατά παραδοχήν)

$$\frac{A^*B}{A^*Γ} = 1.$$

Σχόλιο-3 Ανάλογη εξειδίκευση με την προηγούμενη ισχύει και για το θεώρημα του Ceva

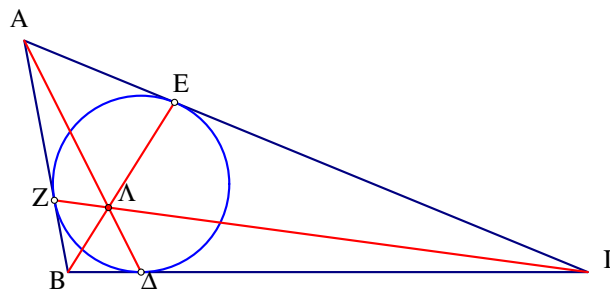


Σχήμα 524: θεώρημα του Ceva για παράλληλες AA^* , BB^* , $ΓΓ^*$

και την περίπτωση που το P είναι σημείο στο άπειρο, οπότε οι τρεις ευθείες AA^* , BB^* και $ΓΓ^*$ είναι τρεις παράλληλες, που θεωρούμε ότι συντρέχουν σε αυτό το σημείο (στο άπειρο). Το θεώρημα του Ceva προκύπτει από αυτό του Θαλή

$$\frac{A^*B}{A^*Γ} \cdot \frac{B^*Γ}{B^*A} \cdot \frac{Γ^*A}{Γ^*B} = -1.$$

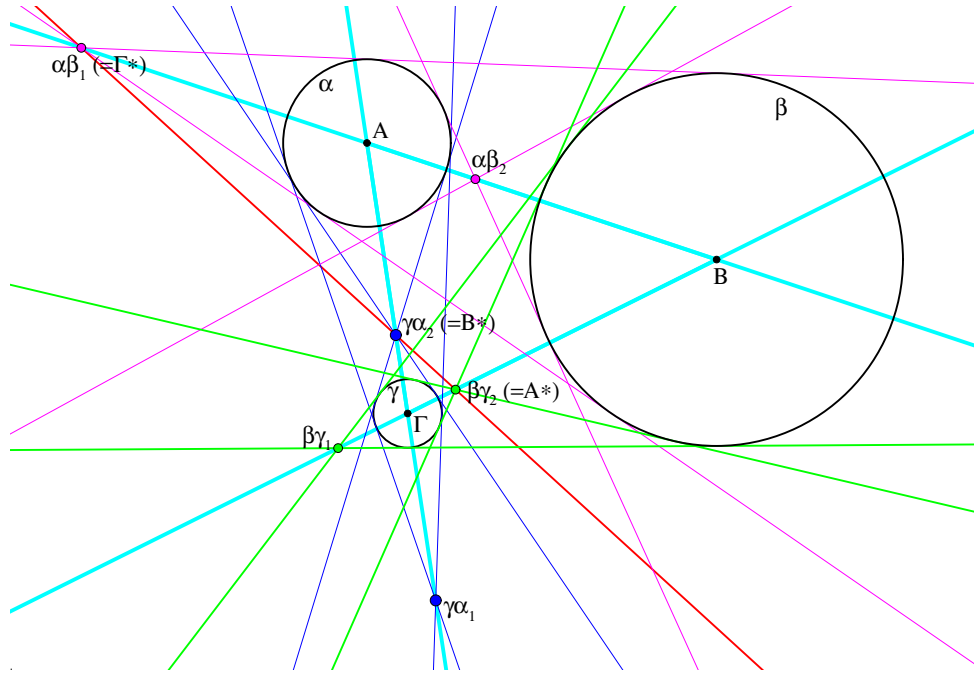
Σχόλιο-4 Αυτό το φανταστικό Σημείο στο Άπειρο, που δεχόμαστε ότι υπάρχει σε κάθε ευθεία, ενωποιεί, κατά κάποιο τρόπο, τα φαινόμενα που έχουν να κάνουν με τομές ευθειών και αίρει την διάκριση σε παράλληλες και μη-παράλληλες ευθείες. Δύο μη-παράλληλες τέμνονται σε κανονικό σημείο τους. Δύο παράλληλες τέμνονται στο σημείο τους στο άπειρο. Θεωρούμε επιπλέον ότι όλα αυτά τα σημεία στο άπειρο απαρτίζουν μία φανταστική ευθεία, που ονομάζουμε **Ευθεία στο άπειρο**. Κάθε κανονική ευθεία συναντά αυτήν την φανταστική ευθεία ακριβώς στο σημείο της στο άπειρο. Με αυτές τις παραδοχές, τα θεωρήματα του Μενελάου και του Ceva ισχύουν για σημεία A^* , B^* , $Γ^*$ επί των πλευρών του τριγώνου τα οποία μπορεί να είναι κανονικά αλλά και κάποια εξ αυτών μπορεί να είναι σημεία στο άπειρο. Κάτι ανάλογο ισχύει, όπως θα δούμε, και για θεωρήματα επομένων παραγράφων.



Σχήμα 525: Σημείο του Gergonne τριγώνου

Άσκηση 5.14.1 (Σημείο του Gergonne (1771-1859) τριγώνου) Δείξε ότι οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές τριγώνου με το απέναντι σημείο επαφής με τον εγγεγραμμένο κύκλο διέρχονται από κοινό σημείο Λ (λέγεται σημείου του Gergonne του τριγώνου).

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το θεώρημα του Ceva για τα σημεία επαφής Δ, E, Z του εγγεγραμμένου με τις πλευρές. $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} \frac{E \Gamma}{E A} \frac{Z A}{Z B} = -1$. Αυτό προκύπτει από το ότι οι εφαπτόμενες από σημείο προς κύκλο είναι ίσες. Έτσι $|B\Delta| = |BZ|, |\Delta \Gamma| = |\Gamma E|, |A E| = |A Z|$. Οι προσημασμένοι λόγοι είναι όλοι αρνητικοί διότι τα σημεία επαφής είναι μεταξύ των άκρων των πλευρών.



Σχήμα 526: Κέντρα ομοιότητας τριών κύκλων

Άσκηση 5.14.2 Δίδονται τρεις κύκλοι εξωτερικοί αλληλίων $\alpha(A, \rho_\alpha), \beta(B, \rho_\beta), \gamma(\Gamma, \rho_\gamma)$. Δείξε ότι τα κέντρα συμμετρίας τους, ανά τρία είναι συνευθειακά.

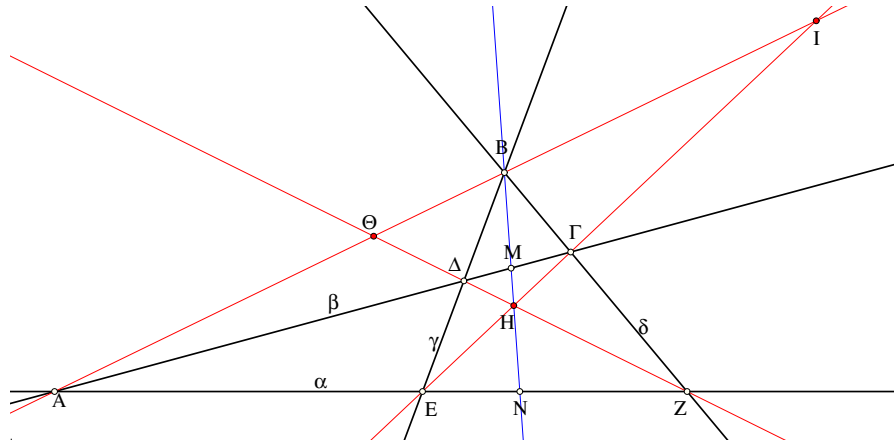
Υπόδειξη: Ας δείξουμε ότι τα σημεία $\Gamma^* = \alpha\beta_1, B^* = \gamma\alpha_2$ και $A^* = \beta\gamma_2$ είναι συνευθειακά εφαρμόζοντας το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $AB\Gamma$ των κέντρων των κύκλων:

$$\frac{\Gamma^* A}{\Gamma^* B} = \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}, \quad \frac{A^* B}{A^* \Gamma} = -\frac{\rho_\beta}{\rho_\gamma}, \quad \frac{B^* \Gamma}{B^* A} = -\frac{\rho_\gamma}{\rho_\alpha} \Rightarrow \frac{\Gamma^* A}{\Gamma^* B} \cdot \frac{A^* B}{A^* \Gamma} \cdot \frac{B^* \Gamma}{B^* A} = 1.$$

Άσκηση 5.14.3 Τα σημεία Δ και E ευρίσκονται αντίστοιχα στις πλευρές AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και τις χωρίζουν σε λόγους $\frac{\Delta A}{\Delta B} = -2, \frac{EB}{ET} = -\frac{1}{2}$. Δείξε ότι οι $\Gamma\Delta$ και AE τέμνονται σε σημείο Z έτσι ώστε $\frac{AZ}{ZE} = \frac{4}{3}$.

Άσκηση 5.14.4 Τα σημεία Δ και E ευρίσκονται αντίστοιχα στις πλευρές AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και τις χωρίζουν σε λόγους $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \lambda, \frac{EB}{ET} = \sigma$. Δείξε ότι οι $\Gamma\Delta$ και AE τέμνονται σε σημείο Z έτσι ώστε $\frac{AZ}{ZE} = \frac{\lambda}{1-\sigma}$.

5.15 Το πλήρες τετράπλευρο



Σχήμα 527: Πλήρες τετράπλευρο

Πλήρες τετράπλευρο λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τέσσερις, ανά δύο τεμνόμενες σε ένα σημείο, ευθείες α, β, γ και δ . Οι ευθείες αυτές λέγονται **Πλευρές** του πλήρους τετραπλεύρου. Κάθε ζεύγος πλευρών ορίζει μία **Κορυφή** του πλήρους τετραπλεύρου (A, B, Γ, Δ, E και Z στο σχήμα 527). Δύο κορυφές που δεν ανήκουν στην ίδια πλευρά λέγονται **Απέναντι** κορυφές του πλήρους τετραπλεύρου. Κάθε ζεύγος απέναντι κορυφών ορίζει μία **Διαγώνιο** του πλήρους τετραπλεύρου ($AB, \Delta Z, \Gamma E$ στο σχήμα) ([Cox61, σ. 231]).

Πρόταση 5.15.1 Κάθε ευθεία που ενώνει μία κορυφή B πλήρους τετραπλεύρου με το σημείο τομής H των δύο διαγωνίων που δεν διέρχονται από αυτήν, ορίζει στις πλευρές που δεν διέρχονται από αυτήν σημεία M, N αρμονικά συζυγή της απέναντι κορυφής της ως προς τις τομές των πλευρών με τις πλευρές που συντρέχουν στην κορυφή.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο Πόρισμα 5.14.1, εφαρμοζόμενο στο τρίγωνο $\Gamma\Delta N$ (σχήμα 527). Κατά το πόρισμα το A είναι αρμονικό συζυγές του N ως προς E, Z . Τότε η δέσμη ευθειών $B(A, N, E, Z)$ είναι αρμονική, άρα θα αποτεμνει αρμονική τετράδα και επί κάθε άλλης ευθείας (Θεώρημα 5.13.1), άρα και της ευθείας β , συνεπώς και τα A, M θα είναι αρμονικά συζυγή των Δ, Γ , ο.ε.δ.

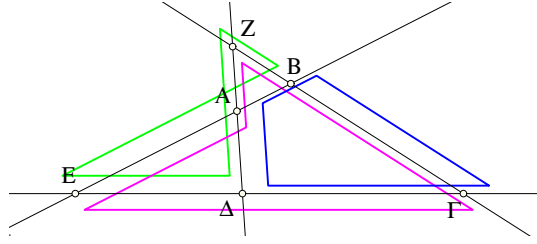
Πόρισμα 5.15.1 Όλες οι τετράδες συνευθειακών σημείων του σχήματος 527 είναι αρμονικές.

Απόδειξη: Πρόκειται για τις

$$(E, Z, A, N) = (\Delta, \Gamma, A, M) = (\Delta, Z, \Theta, H) = (E, \Gamma, I, H) = (M, N, H, B) = -1.$$

Η προηγούμενη πρόταση δίδει την απόδειξη για τις δύο πρώτες. Για τις δύο επόμενες το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 5.13.1 εφαρμοζόμενο στην δέσμη $B(E, Z, N, A)$. Η τελευταία προκύπτει από το ίδιο θεώρημα εφαρμοζόμενο στην αρμονική δέσμη $A(\Delta, Z, \Theta, H)$, ο.ε.δ.

Άσκηση 5.15.1 Δίδεται πλήρες τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta EZ$. Να βρεθούν όλα τα τετράπλευρα των οποίων οι πλευρές περιέχονται σε αυτές του πλήρους τετραπλεύρου.



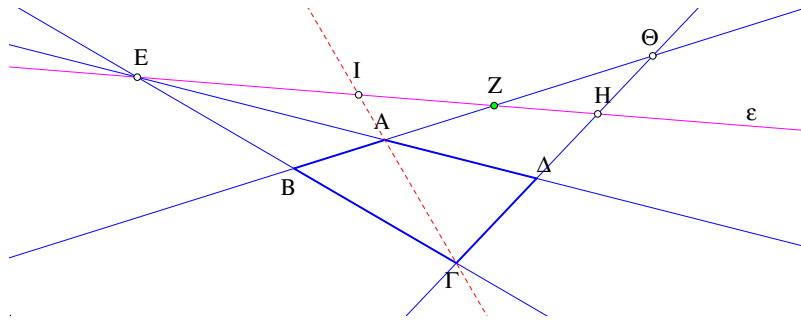
Σχήμα 528: Τετράπλευρα περιεχόμενα σε πλήρες τετράπλευρο

Πρόταση 5.15.2 Από την κορυφή E πλήρους τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta\Theta E$ άγεται ευθεία ε τέμνουσα τις μη περιέχουσες το E πλευρές του ΘA , $\Theta\Gamma$ στα σημεία Z και H . Ισχύει τότε η ισότητα

$$\frac{ZA}{ZB} \frac{H\Gamma}{H\Delta} = \frac{EA}{E\Delta} \frac{E\Gamma}{EB}$$

και τα δύο γινόμενα λόγων είναι ανεξάρτητα της θέσης της ευθείας ε . Επίσης ισχύει

$$\frac{\Theta A}{\Theta B} \frac{\Theta \Gamma}{\Theta \Delta} = \frac{EA}{E\Delta} \frac{E\Gamma}{EB}.$$



Σχήμα 529: Ιδιότητα του πλήρους τετραπλεύρου

Απόδειξη: Φέρε την διαγώνιο AG , που τέμνει την ε στο σημείο I (σχήμα 529) και εφάρμοσε το θεώρημα του Μενελάου στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ με τέμνουσα την ε . Αυτό δίδει αντίστοιχα

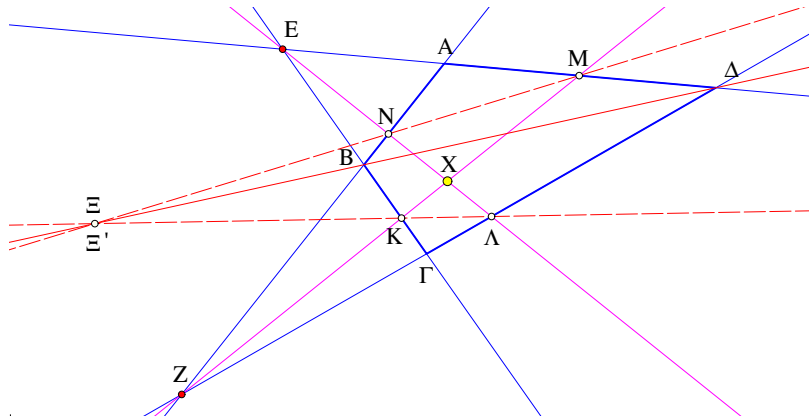
$$\frac{IA}{IG} \frac{E\Gamma}{EB} \frac{ZB}{ZA} = 1, \quad \frac{IG}{IA} \frac{EA}{E\Delta} \frac{H\Delta}{H\Gamma} = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει μία εξίσωση ισοδύναμη προς την πρώτη από τις ζητούμενες. Το δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει άμεσα καθώς η δεξιά πλευρά της πρώτης εξίσωσης δεν εξαρτάται από την ε . Το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει όταν η ε παίρνει την θέση της $E\Theta$, οπότε τα Z και H ταυτίζονται με το Θ , ο.ε.δ.

Άσκηση 5.15.2 Έστω E, Z απέναντι κορυφές πλήρους τετραπλεύρου και X τυχόν σημείο μη κείμενο επί των πλευρών του. Έστω N, Λ και K, M τα σημεία τομής των EX, ZX με τις πλευρές του τετραπλεύρου. Δείξε ότι οι ευθείες MN και $K\Lambda$ τέμνονται επί της διαγωνίου $B\Delta$.

Υπόδειξη: Έστω ότι οι NM τέμνει την διαγώνιο στο Ξ και η $K\Lambda$ στο Ξ' . Εφάρμοσε το θεώρημα του Μενελάου στα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta\Gamma B$ με τέμνουσες τις MN και $K\Lambda$:

$$\frac{\Xi B}{\Xi \Delta} \frac{M \Delta}{M A} \frac{N A}{N B} = 1 \Rightarrow \frac{\Xi B}{\Xi \Delta} = \frac{M A}{M \Delta} \frac{N B}{N A}, \quad \frac{\Xi' \Delta}{\Xi' B} \frac{K B}{K \Gamma} \frac{\Lambda \Gamma}{\Lambda \Delta} = 1 \Rightarrow \frac{\Xi' B}{\Xi' \Delta} = \frac{K B}{K \Gamma} \frac{\Lambda \Gamma}{\Lambda \Delta}.$$



Σχήμα 530: Ιδιότητα διαγωνίων πλήρους τετραπλεύρου

Κατά την Πρόταση 5.15.2 ισχύει

$$\frac{EB}{EG} \frac{ED}{EA} = \frac{ZB}{ZA} \frac{ZD}{ZG} \Rightarrow \frac{ED}{EA} \frac{ZA}{ZD} = \frac{ZD}{ZG} \frac{EG}{EB}.$$

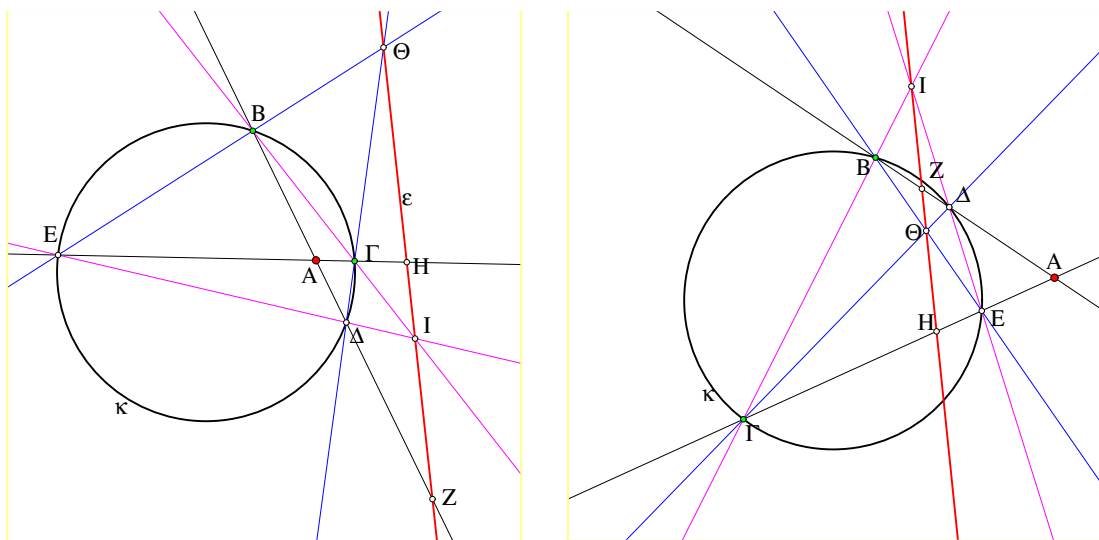
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με τις προηγούμενες παίρνουμε αντίστοιχα τις παραστάσεις

$$\left(\frac{MA}{MD} \frac{NB}{NA} \right) \left(\frac{ED}{EA} \frac{ZA}{ZD} \right), \quad \left(\frac{KB}{KT} \frac{\Lambda\Gamma}{\lambda\Delta} \right) \left(\frac{ZD}{ZG} \frac{EG}{EB} \right),$$

που είναι αντίστοιχα ίσες με τα γινόμενα διπλών λόγων

$$(A\Delta EM)(ABNZ), \quad (B\Gamma EK)(\Delta\Gamma\Lambda Z).$$

Κατά το Θεώρημα 5.13.1 οι πρώτοι παράγοντες στα δύο γινόμενα είναι ίσοι και οι δεύτεροι παράγοντες είναι επίσης ίσοι. Άρα τα γινόμενα είναι ίσα και συνεπώς και τα $\frac{\Xi B}{\Xi \Delta}$, $\frac{\Xi' B}{\Xi' \Delta}$ θα είναι ίσα, άρα τα Ξ και Ξ' θα ταυτίζονται (Γενίκευση της Άσκησης 3.10.11).

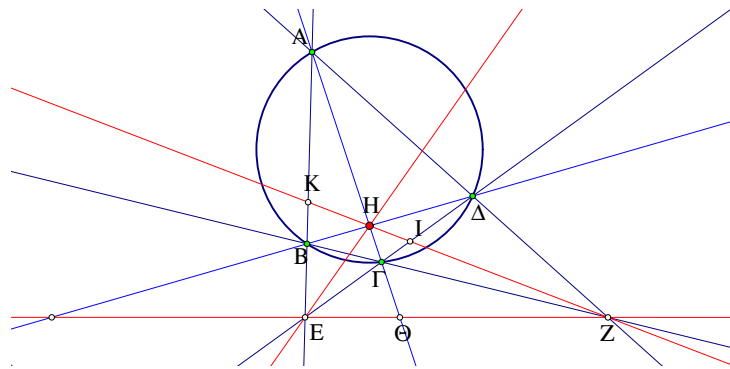


Σχήμα 531: Κατασκευή της πολικής σημείου ως προς κύκλο

Πρόταση 5.15.3 *Γιά κάθε πλήρες τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E\Theta$ του οποίου τέσσερις κορυφές περιέχονται σε κύκλο κ , η διαγώνιος που δεν περνά από αυτές τις τέσσερις είναι η πολική του σημείου τομής των δύο άλλων διαγωνίων.*

Απόδειξη: Έστω ότι οι κορυφές B, Γ, Δ, E περιέχονται σε κύκλο κ . Τότε η διαγώνιος $\varepsilon = \Theta I$ είναι αυτή που δεν περνά από τις τέσσερις κορυφές (σχήμα 531, το τετράπλευρο δεξιά είναι μη-κυρτό). Έστω A το σημείο τομής των δύο άλλων διαγωνίων ΓE και $B\Delta$. Εάν Z, H είναι τα σημεία τομής των $B\Delta$ και ΓE με την ε , τότε κατά το Πρόσμμα 5.15.1 οι (B, Δ, A, Z) και (Γ, E, A, H) θα είναι αρμονικές τετράδες, άρα τα H και Z θα είναι σημεία της πολικής του A (Πρόταση 4.9.1), ο.ε.δ.

Σχόλιο Η προηγούμενη πρόταση δίνει έναν εύκολο τρόπο ορισμού της πολικής ε ενός σημείου A ως προς κύκλο κ . Από το A φέρνουμε δύο τυχούσες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο σε σημεία B, Δ και ΓE αντίστοιχα, σχηματίζουμε το πλήρες τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E\Theta$ και βρίσκουμε την διαγώνιο $\varepsilon = \Theta I$ που δεν περιέχει το A . Αυτή είναι η πολική του A .



Σχήμα 532: Αυτοπολικό τρίγωνο από εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Άσκηση 5.15.3 *Έστω $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο κυρτό τετράπλευρο και $AB\Delta EZ$ το αντίστοιχο πλήρες τετράπλευρο με τις ίδιες πλευρές. Έστω H το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Δείξε ότι το τρίγωνο HEZ έχει την ιδιότητα: κάθε κορυφή του έχει πολική, ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του $AB\Gamma\Delta$, την απέναντι πλευρά του.*

Υπόδειξη: Η Πρόταση 5.15.3 εξασφαλίζει ότι η EZ είναι πολική του H . Αυτό συνεπάγεται ότι το σημείο τομής Θ της $A\Gamma$ με την HZ είναι αρμονικό συζυγές του H ως προς A, Γ . Αυτό με την σειρά του συνεπάγεται ότι η δέσμη ευθειών $Z(A, \Gamma, H, \Theta)$ είναι αρμονική (Θεώρημα 5.13.1) και επομένως αποτελεί αρμονική τετράδα και σε κάθε άλλη τέμνουσα της δέσμης. Δύο τέτοιες τέμνουσες είναι οι ευθείες EB και EG . Εάν K και I είναι τα σημεία τομής αυτών των ευθειών αντίστοιχα με την HZ , τότε οι τετράδες σημείων (E, I, Γ, Δ) και (E, K, B, A) είναι αρμονικές. Άρα η KI είναι η πολική του E ως προς τον κύκλο.

Τρίγωνα, όπως το HEZ της προηγούμενης άσκησης, για τα οποία υπάρχει κύκλος έτσι ώστε κάθε πλευρά τους να είναι πολική ως προς την απέναντι κορυφή, ονομάζονται **Αυτοπολικά**.

Άσκηση 5.15.4 *Στο προηγούμενο σχήμα (532) δείξε ότι οι κύκλοι με διάμετρο τις πλευρές του τριγώνου HEZ είναι ορθογώνιοι στον περιγεγραμμένο κύκλο του $AB\Gamma\Delta$. Συμπεράνε ότι το τρίγωνο HEZ είναι αμβλυγώνιο στο H .*

5.16 Θεώρημα του *Desargues*

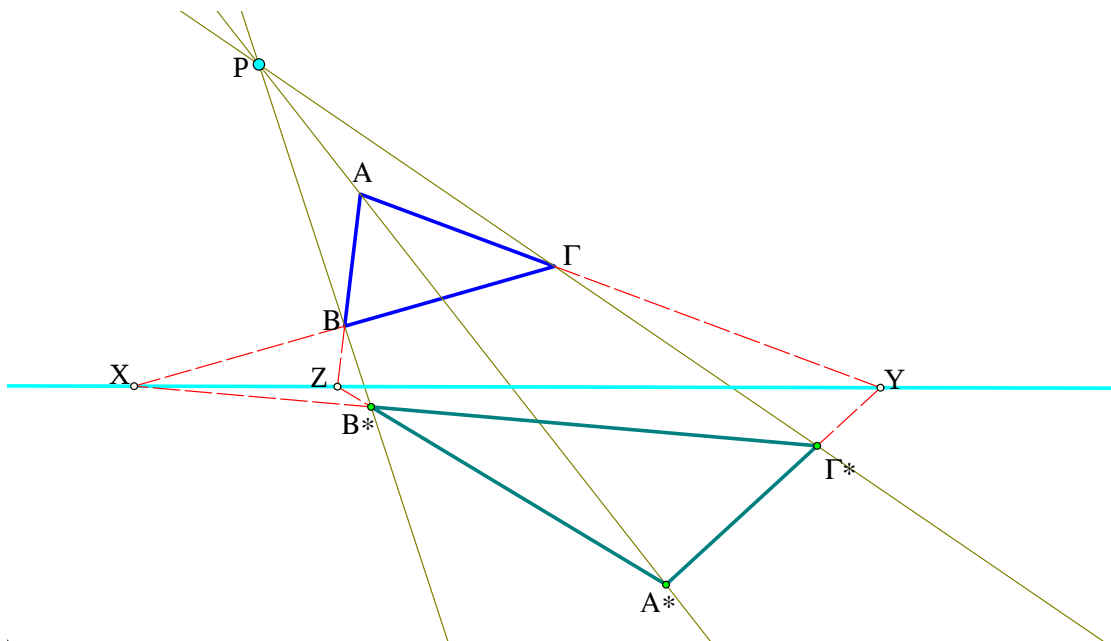
Στα επόμενα, για συντομία, θα συμβολίζω την τομή των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ με

$$X = (AB, \Gamma\Delta).$$

Δύο τρίγωνα λέγονται **Προοπτικά ως προς σημείο**, όταν μπορούν να τοποθετηθούν γράμματα στις κορυφές τους $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$, έτσι ώστε οι ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$ να συντρέχουν σε κοινό σημείο P . Τα A, A^* λέγονται τότε **Ομόλογα**, παρόμοια και τα B, B^* και Γ, Γ^* . Το σημείο P λέγεται **Κέντρο Προοπτικότητας** των δύο τριγώνων.

Τα δύο τρίγωνα λέγονται **Προοπτικά ως προς ευθεία**, όταν πάλι μπορούν να τοποθετηθούν γράμματα, έτσι ώστε τα σημεία $X=(AB, A^*B^*)$, $Y=(B\Gamma, B^*\Gamma^*)$ και $Z=(\Gamma A, \Gamma^*A^*)$ να περιέχονται στην ίδια ευθεία ε . Η πλευρές AB, A^*B^* λέγονται τότε **Ομόλογες**, παρόμοια και οι $B\Gamma, B^*\Gamma^*$ και $\Gamma A, \Gamma^*A^*$. Η ευθεία ε λέγεται **Άξονας Προοπτικότητας** των δύο τριγώνων.

Πρόταση 5.16.1 (Θεώρημα του *Desargues* 1591-1661) Δύο τρίγωνα είναι προοπτικά ως προς σημείο, τότε και μόνον τότε, όταν είναι προοπτικά ως προς ευθεία.



Σχήμα 533: θεώρημα του Desargues

Απόδειξη: Υπόθεσε ότι τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ είναι προοπτικά ως προς σημείο P και εφάρμοσε τρεις φορές το θεώρημα του Μενελάου:

1) Στο τρίγωνο PAB με τέμνουσα την ZB^*A^* :

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{A^*P}{A^*A} \cdot \frac{B^*B}{B^*P} = 1.$$

2) Στο τρίγωνο $PB\Gamma$ με τέμνουσα την $X\Gamma^*B^*$:

$$\frac{XB}{X\Gamma} \cdot \frac{B^*P}{B^*B} \cdot \frac{\Gamma^*\Gamma}{\Gamma^*P} = 1.$$

3) Στο τρίγωνο PΓΑ με τέμνουσα την ΥΓ*Α*:

$$\frac{ΥΓ}{ΥΑ} \cdot \frac{Γ^*P}{Γ^*Γ} \cdot \frac{Α^*Α}{Α^*P} = 1.$$

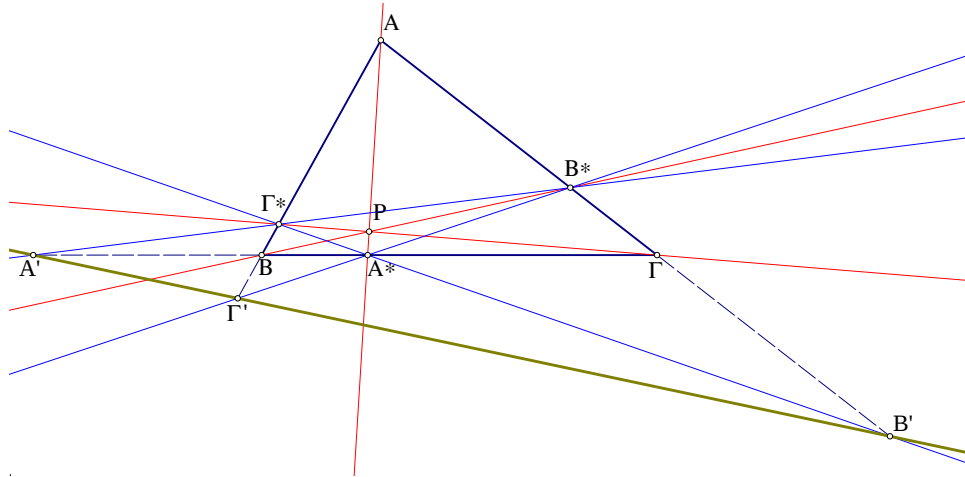
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις τρεις ισότητες και απλοποιώντας παίρνουμε την

$$\frac{ΖΑ}{ΖΒ} \cdot \frac{ΧΒ}{ΧΓ} \cdot \frac{ΥΓ}{ΥΑ} = 1.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Μενελάου η σχέση αυτή σημαίνει ότι το Χ είναι στην ευθεία ΥΧ.

Αντίστροφα, υποθέσει ότι τα σημεία Χ, Υ και Ζ είναι συγγραμμικά και εφάρμοσε το αποδειχθέν μέρος του θεωρήματος στα τρίγωνα ΖΒΒ* και ΥΓ*Γ, τα οποία, εξ υποθέσεως τώρα, είναι προοπτικά ως προς το σημείο Χ. Κατά το αποδειχθέν μέρος, τα σημεία τομής Α=(ΖΒ, ΥΓ), Α*=(ΖΒ*, ΥΓ*) και Ρ=(ΒΒ*, Γ*Γ) θα είναι συγγραμμικά. Τούτο είναι ισοδύναμο με το ότι οι ευθείες ΑΑ*, ΒΒ* και ΓΓ* συντρέχουν στο ίδιο σημείο, δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α*Β*Γ* είναι προοπτικά ως προς σημείο, ο.ε.δ.

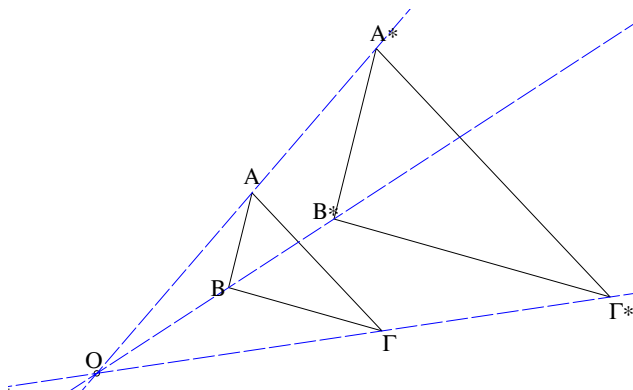
Πόρισμα 5.16.1 (Τριγραμμική πολική) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ μη κείμενο επί των πλευρών (ή προεκτάσεων) του. Έστω τα σημεία τομής των ζευγών ευθειών Α*=(ΑΡ,ΒΓ), Β*=(ΒΡ,ΓΑ) και Γ*=(ΓΡ,ΑΒ) και Α', Β' και Γ' τα αρμονικά συζυγή των Α* (ως προς Β,Γ), Β* (ως προς Γ,Α) και Γ* (ως προς Α,Β) αντίστοιχα. Τότε τα Α', Β' και Γ' είναι συγγραμμικά.



Σχήμα 534: Η τριγραμμική πολική του Ρ

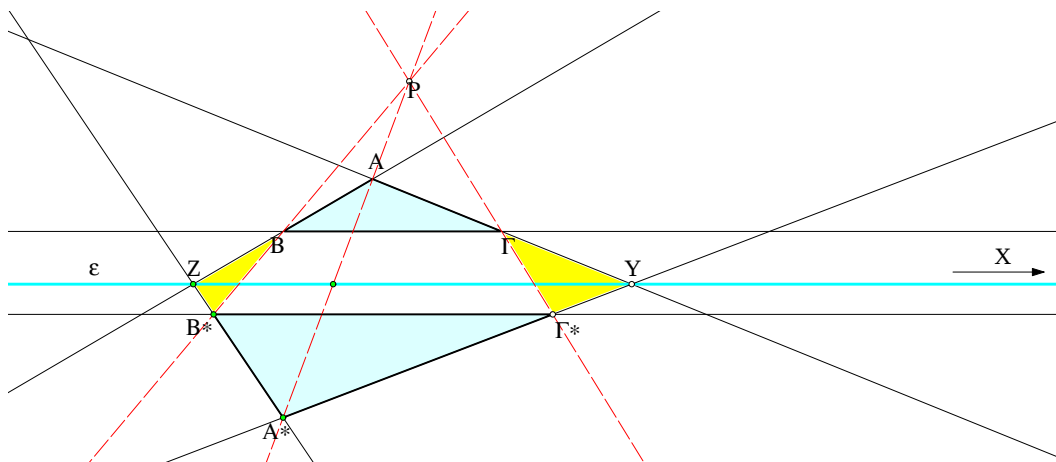
Απόδειξη: Εξ υποθέσεως τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α*Β*Γ* είναι προοπτικά ως προς το σημείο Ρ, άρα, κατά Desargues θα είναι και προοπτικά ως προς ευθεία, δηλαδή τα ζεύγη αντιστοιχών πλευρών τους (ΑΒ, Α*Β*), (ΒΓ, Β*Γ*) και (ΓΑ, Γ*Α*) θα τέμνονται επ' ευθείας, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Το θεώρημα του Desargues είναι ένα είδος γενίκευσης της Πρότασης 3.9.6 για ομοιόθετα τρίγωνα. Αν οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και Α*Β*Γ* είναι αντίστοιχα παράλληλες, τούτο σημαίνει ότι τα ζεύγη ευθειών (ΑΒ, Α*Β*), (ΒΓ, Β*Γ*) και (ΓΑ, Γ*Α*) τέμνονται στο άπειρο (στην Ευθεία στο Άπειρο, δες τελευταίο σχόλιο στην προηγούμενη



Σχήμα 535: Ομοιοθεσία και προοπτικότητα

παράγραφο). Όπως αποδείχθηκε στην προαναφερθείσα πρόταση, τότε οι ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$ διέρχονται από κοινό σημείο O (που ονομάσαμε κέντρο ομοιοθεσίας των δύο τριγώνων). Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η προοπτικότητα ως προς σημείο είναι γενίκευση της ομοιοθεσίας (Παράγραφος 3.9).

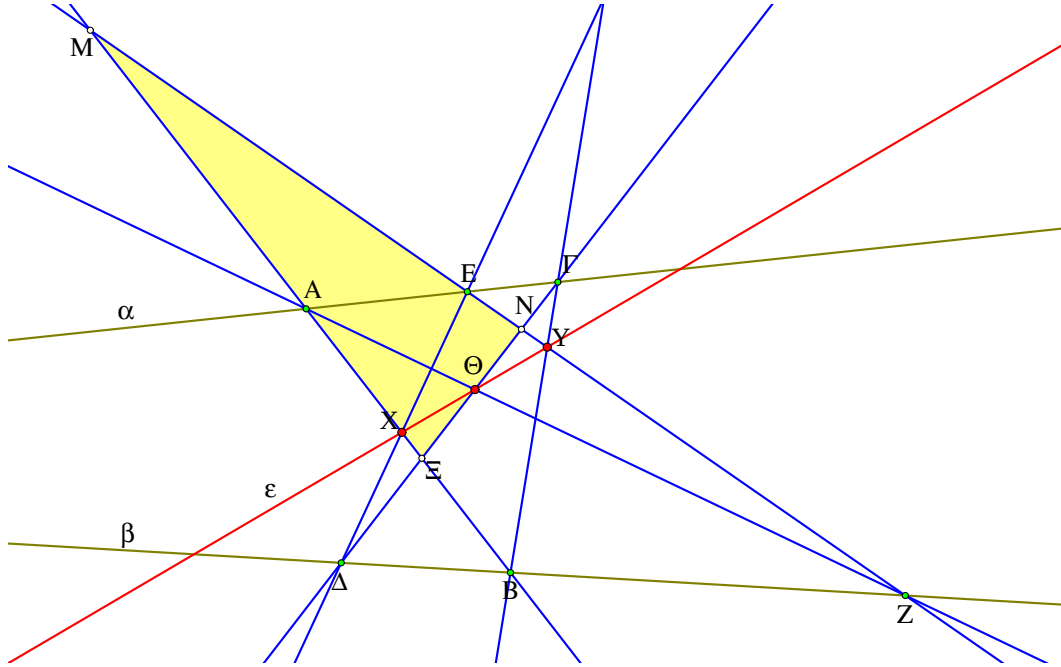


Σχήμα 536: Ειδική περίπτωση εφαρμογής του θεωρήματος Desargues

Σχόλιο-2 Μιά ειδική περίπτωση εφαρμογής του θεωρήματος του Desargues απεικονίζεται επίσης στο σχήμα-536. Σε αυτό τα δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους $B\Gamma$ και $B^*\Gamma^*$ παράλληλες προς την YZ , όπου $Y = (A\Gamma, A^*\Gamma^*)$ και $Z = (AB, A^*B^*)$. Οι παράλληλες θεωρούνται πάλι ότι τέμνονται σε σημείο X στο άπειρο από το οποίο διέρχεται και η YZ . Κατά Desargues λοιπόν, οι ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$ θα διέρχονται από κοινό σημείο. Το ίδιο σχήμα μπορεί να διαβασθεί και με άλλο τρόπο, θεωρώντας ως πρωταγωνιστές τα τρίγωνα BB^*Z και $\Gamma\Gamma^*Y$. Σε αυτά τα τρίγωνα οι ευθείες $B\Gamma$, ZY και $B^*\Gamma^*$ είναι παράλληλες και μπορούν να θεωρηθούν ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο X στο άπειρο. Κατά Desargues, τα σημεία $A = (BZ, \Gamma Y)$, $A^* = (ZB^*, Y\Gamma^*)$ και $P = (BB^*, \Gamma\Gamma^*)$ είναι συγγραμμικά. Το συμπέρασμα σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να το αποδείξουμε εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα του Θαλή.

5.17 Θεώρημα του Πάππου

Θεώρημα 5.17.1 (Θεώρημα του Πάππου) Έστω ότι A, Γ, E είναι επί της ευθείας α και B, Δ, Z επί της ευθείας β . Τότε τα σημεία τομής $X=(AB,\Delta E)$, $Y=(B\Gamma,EZ)$ και $\Theta=(\Gamma\Delta,ZA)$ είναι συγγραμμικά.



Σχήμα 537: Θεώρημα του Πάππου

Απόδειξη: ([Bot07, σ. 93]) Στο τρίγωνο $MN\Xi$, όπου $\Xi=(AB,\Gamma\Delta)$, $M=(AB,EZ)$, $N=(EZ,\Gamma\Delta)$ εφαρμόζουμε το θεώρημα του Μενελάου για τις 5 τέμνουσες του σχήματος:

1) τέμνουσα $E\Delta X$:

$$\frac{EM}{EN} \frac{\Delta N}{\Delta \Xi} \frac{X \Xi}{X M} = 1,$$

2) τέμνουσα $Z\Theta A$:

$$\frac{Z M}{Z N} \frac{\Theta N}{\Theta \Xi} \frac{A \Xi}{A M} = 1,$$

3) τέμνουσα $Y\Gamma B$:

$$\frac{Y M}{Y N} \frac{\Gamma N}{\Gamma \Xi} \frac{B \Xi}{B M} = 1,$$

4) τέμνουσα $E\Gamma A$:

$$\frac{E M}{E N} \frac{\Gamma N}{\Gamma \Xi} \frac{A \Xi}{A M} = 1,$$

5) τέμνουσα $Z\Delta B$:

$$\frac{Z M}{Z N} \frac{\Delta N}{\Delta \Xi} \frac{B \Xi}{B M} = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις τρεις πρώτες και τις δύο τελευταίες παίρνουμε τις

$$\frac{EM}{EN} \frac{\Delta N}{\Delta \Xi} \frac{X \Xi}{X M} \frac{Z M}{Z N} \frac{\Theta N}{\Theta \Xi} \frac{A \Xi}{A M} \frac{Y M}{Y N} \frac{\Gamma N}{\Gamma \Xi} \frac{B \Xi}{B M} = 1, \quad \frac{EM}{EN} \frac{\Gamma N}{\Gamma \Xi} \frac{A \Xi}{A M} \frac{Z M}{Z N} \frac{\Delta N}{\Delta \Xi} \frac{B \Xi}{B M} = 1.$$

Διαιρώντας κατά μέλη την πρώτη με την δεύτερη παίρνουμε την

$$\frac{X\Xi}{XM} \frac{\Theta N}{\Theta\Xi} \frac{YM}{YN} = 1,$$

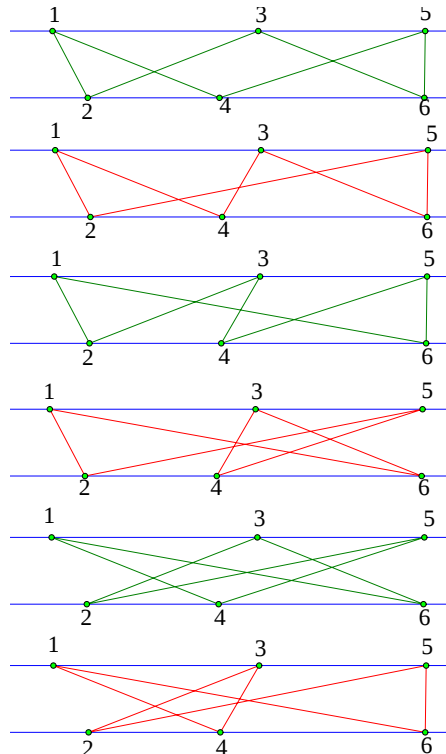
που δείχνει ότι τα σημεία X , Θ και Y είναι επ' ευθείας, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Ο τρόπος που επιλέγουμε τα σημεία για να ορίσουμε τις ευθείες και τις τομές τους στο θεώρημα του Πάππου είναι ο εξής:

(1) Τοποθετούμε τα $A, B, \Gamma, \dots$ εναλλάξ στις ευθείες α και β και σχηματίζουμε το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E Z$.

(2) Ξεκινώντας από οποιοδήποτε σημείο, λ.χ. το A παίρνουμε το επόμενο (B), αφήνουμε το επόμενο (Γ) και παίρνουμε το μεθεπόμενο (Δ) και το επόμενο αυτού (E) και σχηματίζουμε την τομή $(AB, \Delta E)$. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται η τομή δύο απέναντι πλευρών του πολυγώνου.

(3) Στο σύμβολο $(AB, \Delta E)$ αντικαθιστούμε κυκλικά τα γράμματα $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow E \rightarrow Z \rightarrow A$, και σχηματίζουμε τις τομές των άλλων δύο ζευγών απέναντι πλευρών $(B\Gamma, EZ)$ και $(\Gamma\Delta, ZA)$.

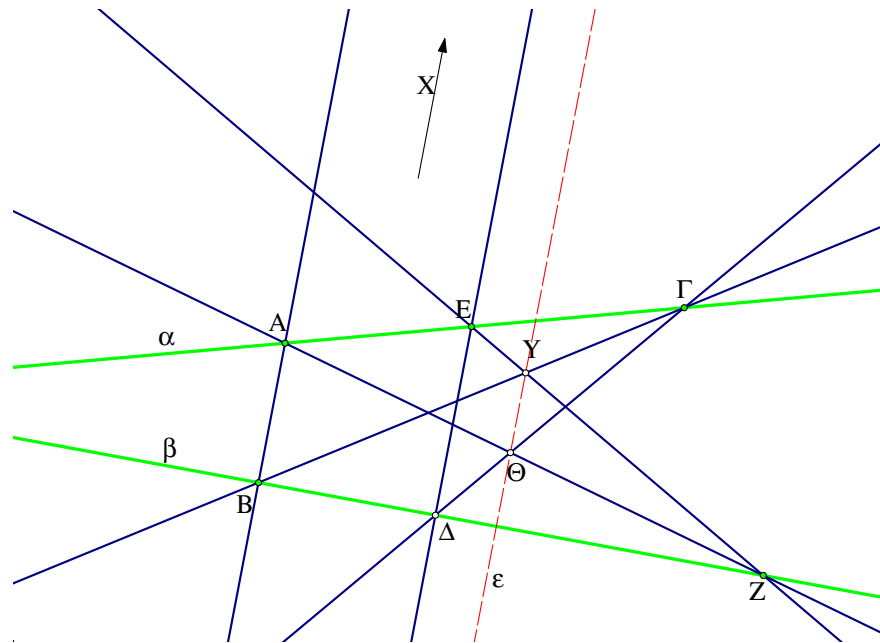


Σχήμα 538: Οι έξι δυνατότητες για πολύγωνα του Πάππου

Άσκηση 5.17.1 Δοθέντων τριών σημείων στην ευθεία α και άλλων τριών στην ευθεία β , δείξε ότι υπάρχουν έξι δυνατότητες να φτιάξουμε διαφορετικά πολύγωνα με την προηγούμενη συνταγή και κάθε ένα ορίζει μία αντίστοιχη ευθεία μέσω του θεωρήματος του Πάππου.

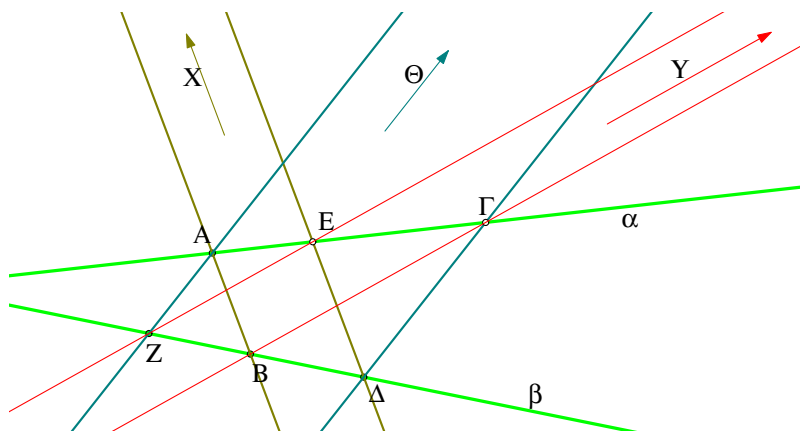
Υπόδειξη: Μία κορυφή λ.χ. η (1) (σχήμα-538) συνδέεται με δύο άλλες στην απέναντι ευθεία. Έχουμε λοιπόν τρεις δυνατότητες να επιλέξουμε τις δύο άλλες. Για κάθε επιλογή από

τις τρεις, έχουμε δύο δυνατότητες να επιλέξουμε την τέταρτη κορυφή και η επιλογή αυτή καθορίζει πλήρως το πολύγωνο.



Σχήμα 539: Ειδική περίπτωση εφαρμογής του θεωρήματος του Πάππου

Σχόλιο-4 Ανάλογες ειδικές περιπτώσεις υπάρχουν και για το θεώρημα του Πάππου. Οι περιπτώσεις αυτές προκύπτουν όταν κάποια από τα σημεία X , Y , Θ , που εμφανίζονται στο θεώρημα πάνε στο άπειρο. Μιά τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στο σχήμα-539, στο οποίο οι δύο ευθείες AB και ΔE τέμνονται σε σημείο X στο άπειρο, δηλαδή είναι παράλληλες. Τότε η συγγραμμικότητα των X , $Y = (BG, EZ)$ και $\Theta = (GD, AZ)$ σημαίνει ότι και η ΘY είναι παράλληλη των AB και ΔE .

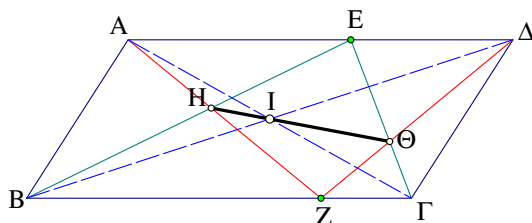


Σχήμα 540: Τρία σημεία τομής στο άπειρο

Μιά άλλη ειδική περίπτωση είναι όταν δύο εκ των X , Y , Θ είναι σημεία στο άπειρο, λ.χ. τα X και Θ , όπως φαίνεται στο σχήμα-540. Τότε, από την συγγραμμικότητα των X, Θ, Y προκύπτει ότι στην ευθεία των X , Θ , που είναι η *Ευθεία στο Άπειρο* θα περιέχεται και το

τρίτο σημείο Y , δηλαδή και αυτό θα είναι σημείο στο άπειρο. Με άλλα λόγια οι EZ και $BΓ$ θα είναι και αυτές παράλληλες.

Σχόλιο-5 Η προηγούμενη και αυτή η παράγραφος είναι μιά μικρή εισαγωγή στην λεγόμενη *Προβολική Γεωμετρία*, στην οποία εξετάζονται ιδιότητες σύμπτωσης σημείων επί ευθειών και ευθειών επί σημείων (δηλαδή διερχομένων διά των σημείων). Τα θεωρήματα των Μενέλαου, Πάππου, Ceva και Desargues είναι θεμελιώδους σημασίας σε αυτήν την γεωμετρία, αλλά έχουν και χρήσιμες εφαρμογές στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

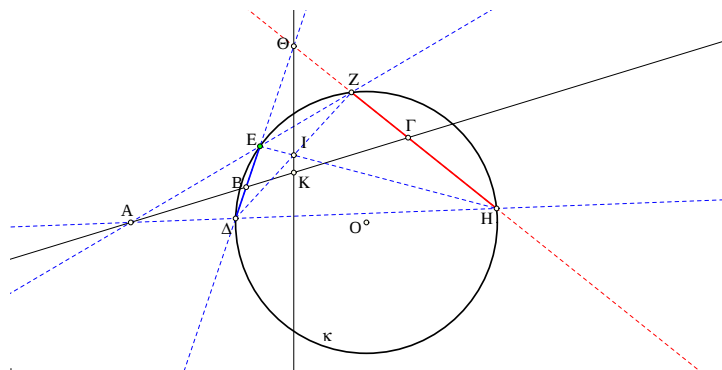


Σχήμα 541: Εφαρμογή του θεωρήματος του Πάππου

Άσκηση 5.17.2 Δίδονται σημεία E, Z κείμενα σε απέναντι πλευρές $AD, BΓ$ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$. Δείξε ότι τα σημεία τομής $H=(BE,AZ)$, $\Theta=(GE,\Delta Z)$ και το σημείο τομής των διαγωνίων I του παραλληλογράμμου είναι συγγραμμικά σημεία.

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το θεώρημα του Πάππου στο $AZ\Delta BE\Gamma$. Σύμφωνα με αυτό τα σημεία τομής $H=(AZ,BH)$, $\Theta=(Z\Delta,E\Gamma)$ και $I=(\Delta B,\Gamma A)$ θα είναι συγγραμμικά σημεία.

Άσκηση 5.17.3 Δίδονται δύο σημεία A και B εκτός του κύκλου κ και χορδή ΔE του κ διερχόμενη διά του B . Εάν Z, H είναι τα δεύτερα σημεία τομής των AE και AD με τον κ αντιστοίχως, δείξε ότι η χορδή ZH διέρχεται από σταθερό σημείο.

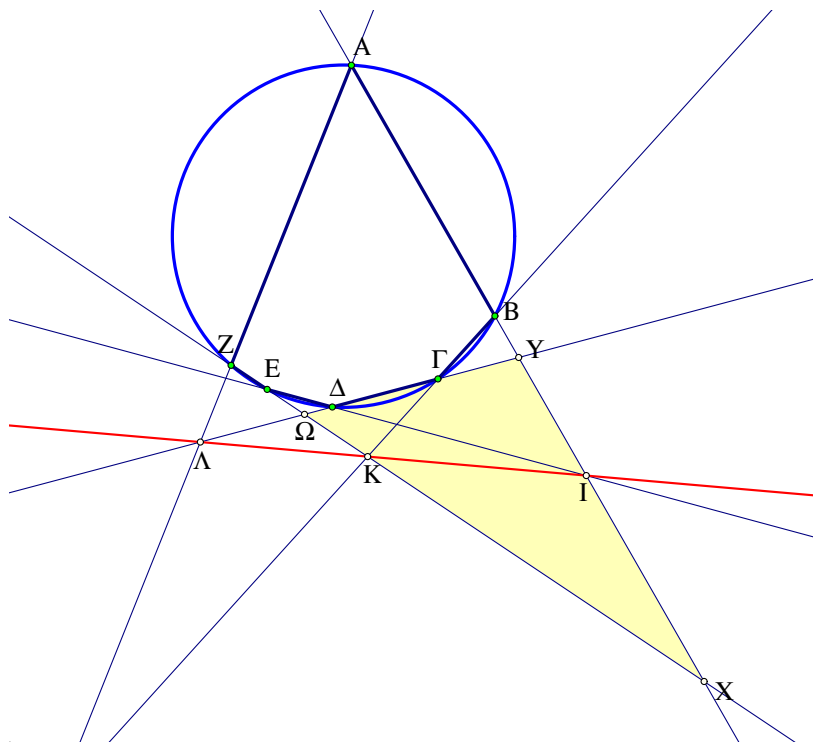


Σχήμα 542: Εγγεγραμμένο τετράπλευρο με μεταβαλλόμενες πλευρές

Υπόδειξη: Η πολική του A ως προς κ είναι η διαγώνιος ΘI του πλήρους τετραπλεύρου ΔEZH (Πρόταση 5.15.3). Εάν K και Γ είναι τα σημεία τομής των ΘI και ZH αντίστοιχα με την AB , τότε $(AKB\Gamma)=-1$ (Πόρισμα 5.15.1).

5.18 Θεωρήματα του *Pascal* και του *Brianchon*

Θεώρημα 5.18.1 (Θεώρημα μυστικού εξαγράμμου του *Pascal* 1623-1662) Τα σημεία τομής $I=(AB,\Delta E)$, $K=(B\Gamma,EZ)$, $\Lambda=(\Gamma\Delta,ZA)$ των απέναντι πλευρών εξαγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$, εγγεγραμμένου σε κύκλο, είναι συγγραμμικά.



Σχήμα 543: Θεώρημα του *Pascal*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τρεις φορές το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο $XY\Omega$ που σχηματίζεται από τις μη διαδοχικές πλευρές του εξαγώνου $(AB, \Gamma\Delta, EZ)$.

(1) Τέμνουσα $B\Gamma$:

$$\frac{BY}{BX} \frac{\Gamma\Omega}{\Gamma Y} \frac{KX}{K\Omega} = 1.$$

(2) Τέμνουσα ΔE :

$$\frac{IY}{IX} \frac{\Delta\Omega}{\Delta Y} \frac{EX}{E\Omega} = 1.$$

(3) Τέμνουσα AZ :

$$\frac{AY}{AX} \frac{ZX}{Z\Omega} \frac{\Lambda\Omega}{\Lambda Y} = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τρεις εξισώσεις κατά μέλη και παρατηρώντας ότι

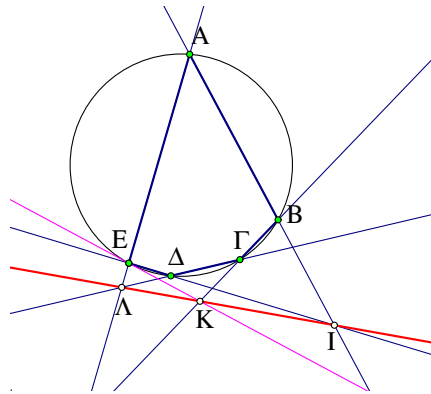
$$\frac{BY}{\Gamma Y} \frac{AY}{\Delta Y} = \frac{\Gamma\Omega}{E\Omega} \frac{\Delta\Omega}{Z\Omega} = \frac{EX}{BX} \frac{ZX}{AX} = 1,$$

λόγω του ότι τα γινόμενα σε αριθμητή και παρονομαστή εκφράζουν την δύναμη του ιδίου σημείου ως προς τον κύκλο, συμπεραίνουμε, απλοποιώντας, ότι ισχύει

$$\frac{KX}{K\Omega} \cdot \frac{IY}{IX} \cdot \frac{\Lambda\Omega}{\Lambda Y} = 1,$$

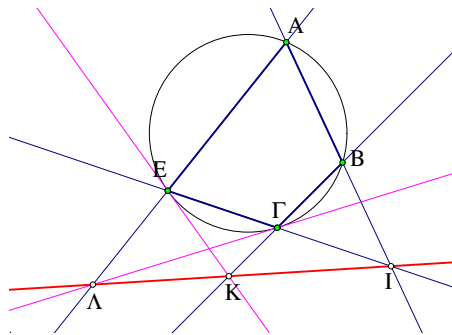
που σημαίνει ότι τα τρία σημεία I , K και Λ είναι συγγραμμικά, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Υπάρχει μιά συγγένεια μεταξύ των θεωρημάτων του Πάππου και του Pascal που αντανακλάται και στην διατύπωση, τον τρόπο που φτιάχνουμε τα κρίσιμα σημεία τομής, αλλά και στην απόδειξη. Πράγματι τα δύο θεωρήματα είναι ειδικές περιπτώσεις ενός γενικότερου θεωρήματος, που ισχύει για εξάγωνα εγγεγραμμένα σε κωνική τομή. Μάλιστα το γενικό αυτό θεώρημα δίδει ένα κριτήριο αναγκαίο και ικανό για την εγγραφή ενός εξαγώνου σε μιά τέτοια καμπύλη. Η ευθεία που περιέχει τα σημεία τομής I , K , Λ των πλευρών λέγεται **Ευθεία του Pascal** του εγγεγραμμένου εξαγώνου.



Σχήμα 544: Θεώρημα του Pascal για εγγεγραμμένα πεντάγωνα

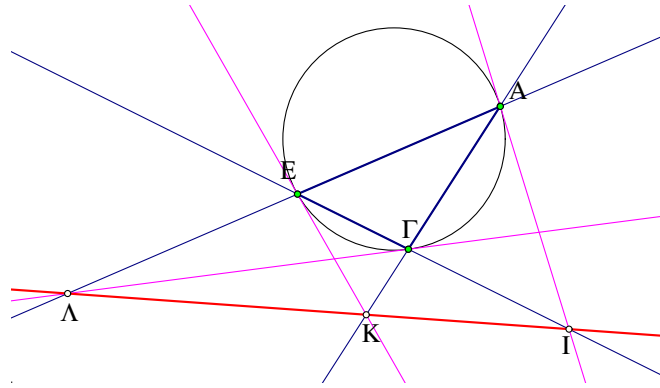
Σχόλιο-2 Το θεώρημα του Pascal οδηγεί και σε μία ιδιότητα για πεντάγωνα, καθώς εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που ένα από τα σημεία του εξαγώνου τείνει προς ένα γειτονικό του λ.χ. το Z προς το E . Τότε η πλευρά EZ τείνει να συμπίπτει με την εφαπτόμενη του κύκλου στο E και το θεώρημα εξασφαλίζει ότι τα σημεία τομής $I = (AB, E\Delta)$, $\Lambda = (AE, \Delta\Gamma)$ και $K = (t_E, B\Gamma)$, όπου t_E η εφαπτόμενη του περιγεγραμμένου κύκλου στο E , περιέχονται πάλι σε ευθεία.



Σχήμα 545: Θεώρημα του Pascal για εγγεγραμμένα τετράπλευρα

Η ίδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί με το πεντάγωνο και να οδηγήσει σε ιδιότητα των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων. Όταν το Δ τείνει να συμπίπτει με το Γ , τότε η $\Delta\Gamma$ τείνει προς την εφαπτόμενη του Γ και το θεώρημα του Pascal εξασφαλίζει ότι τα σημεία τομής $I = (AB, \Gamma E)$, $\Lambda = (AE, t_\Gamma)$, $K = (B\Gamma, t_E)$ περιέχονται σε μία ευθεία.

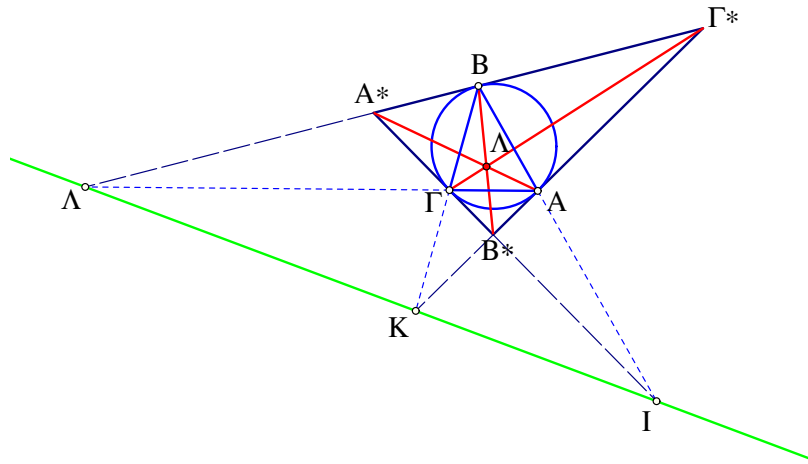
Τέλος, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία σε εγγεγραμμένα τετράπλευρα παίρνουμε μία ιδιότητα για τα τρίγωνα. Όταν και το B τείνει να συμπίπτει με το A , τότε η AB τείνει προς την



Σχήμα 546: Θεώρημα του Pascal για τρίγωνα

εφαπτόμενη στο A και το θεώρημα εξασφαλίζει την γνωστή ιδιότητα των τριγώνων, κατά την οποία Οι εφαπτόμενες του περικύκλου στις κορυφές του τριγώνου τέμνουν τις απέναντι πλευρές σε σημεία συνευθειακά.

Άσκηση 5.18.1 Δείξε ότι οι εφαπτόμενες του περικύκλου στις κορυφές του τριγώνου τέμνουν τις απέναντι πλευρές σε σημεία συνευθειακά, χρησιμοποιώντας την άσκηση 5.14.1 και το θεώρημα του Desargues.

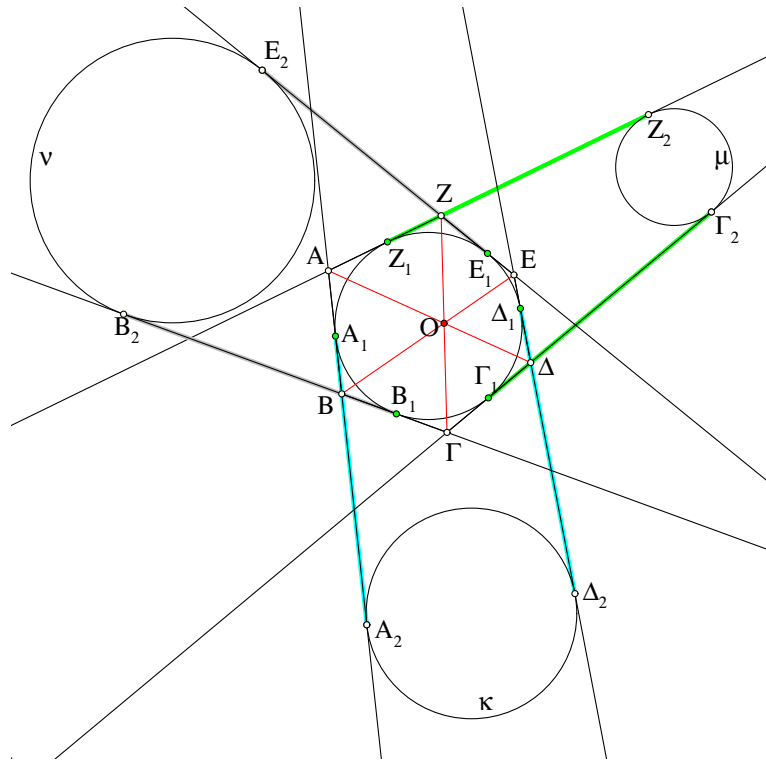


Σχήμα 547: Η ευθεία του Lemoine του τριγώνου

Υπόδειξη: Φέρνοντας τις εφαπτόμενες στις κορυφές τριγώνου ABΓ σχηματίζεται το λεγόμενο **Εφαπτομενικό τρίγωνο** $A^*B^*\Gamma^*$ του ABΓ, το οποίο έχει τον περικύκλο του ABΓ ως εγγεγραμμένο κύκλο του. Κατά την Άσκηση 5.14.1 οι ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$ διέρχονται από κοινό σημείο Λ. Αυτό σημαίνει ότι τα τρίγωνα ABΓ και $A^*B^*\Gamma^*$ είναι προοπτικά ως προς το σημείο Λ, άρα, κατά Desargues, θα είναι και προοπτικά ως προς ευθεία, δηλαδή τα σημεία τομής των ευθειών $I=(AB, A^*B^*)$, $K=(B\Gamma, B^*\Gamma^*)$ και $\Lambda=(\Gamma A, \Gamma^*A^*)$ θα είναι επ' ευθείας.

Η ευθεία που ορίζεται στην προηγούμενη άσκηση και περιέχει τα I, K και Λ λέγεται ευθεία του Lemoine (1840-1912) του τριγώνου ABΓ και παίζει εξέχοντα ρόλο στην Γεωμετρία του Τριγώνου ([Cou80, σ. 252]).

Θεώρημα 5.18.2 (Θεώρημα του *Brianchon* 1783-1864) Οι διαγώνιοι $ΑΔ$, $ΒΕ$, $ΓΖ$, που ενώνουν απέναντι κορυφές εξαγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$, περιγεγραμμένου σε κύκλο, διέρχονται από κοινό σημείο.



Σχήμα 548: Θεώρημα του Brianchon

Απόδειξη: Προέκτεινε τις πλευρές και πάρε ίσα τμήματα από τα σημεία επαφής με τον κύκλο

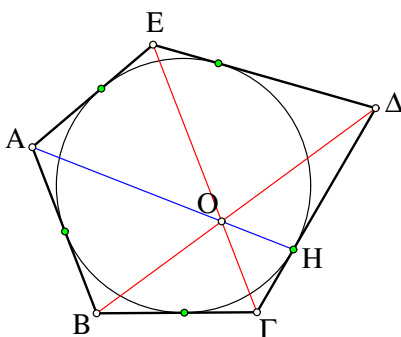
$$|A_1A_2| = |B_1B_2| = |\Gamma_1\Gamma_2| = |\Delta_1\Delta_2| = |E_1E_2| = |Z_1Z_2| = \lambda.$$

Ορίζονται τρεις άλλοι κύκλοι: (κ) εφαπτόμενος των $ΑΒ$, $ΔΕ$ στα A_2, Δ_2 , (μ) εφαπτόμενος των $ΓΔ$, $ΑΖ$ στα Γ_2, Z_2 , (ν) εφαπτόμενος των $ΕΖ$, $ΓΒ$ στα E_2, B_2 . Λόγω της ισότητας των εφαπτομένων από το B , $|BA_1| = |BB_1|$, έπεται και ότι $|BA_2| = \lambda - |BA_1| = \lambda - |BB_1| = |BB_2|$ και συνεπώς το B είναι επί του ριζικού άξονος των κύκλων κ και ν . Παρόμοια, λόγω της ισότητας των εφαπτομένων από το E : $|EE_1| = |E\Delta_1|$, έπεται ότι και $|EE_2| = |E\Delta_2|$, άρα και το E είναι επί του ριζικού άξονος των κ και ν . Συνάγεται ότι η ευθεία $ΒΕ$ συμπίπτει με τον ριζικό άξονα των κύκλων κ και ν . Ανάλογα δείχνουμε ότι και η ευθεία $ΑΔ$ συμπίπτει με τον ριζικό άξονα των κ και μ και ότι η $ΓΖ$ συμπίπτει με τον ριζικό άξονα των κύκλων μ και ν . Το θεώρημα προκύπτει λοιπόν από το ότι οι ριζικοί άξονες τριών κύκλων διέρχονται από κοινό σημείο O (Θεώρημα 4.3.1), ο.ε.δ.

Το σημείο τομής των διαγωνίων O του περιγεγραμμένου εξαγώνου ονομάζεται **Σημείο του Brianchon** του περιγεγραμμένου εξαγώνου.

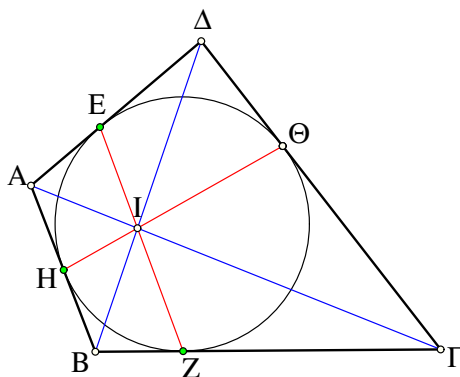
Σχόλιο-3 Όπως το θεώρημα του Pascal έτσι και αυτό του Brianchon, στην περίπτωση που μία κορυφή του εξαγώνου τείνει να συμπίπτει με μία γειτονική της, οδηγεί σε ένα θεώρημα για πεντάγωνα: Δύο διαγώνιοι $ΒΔ$, $ΓΕ$ πενταγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και η

ευθεία AH , που ενώνει την πέμπτη κορυφή με το απέναντι σημείο επαφής, διέρχονται από κοινό σημείο O .



Σχήμα 549: Θεώρημα του Brianchon για εγγεγραμμένα πεντάγωνα

Αφήνοντας, στο προηγούμενο σχήμα για το πεντάγωνο, το E να συμπίσει με το A , το πεντάγωνο μετασχηματίζεται σε τετράπλευρο και το θεώρημα εξασφαλίζει ότι: Οι διαγώνιοι τετραπλεύρου περιγεγραμμένου σε κύκλο και οι ευθείες που ενώνουν σημεία επαφής απέναντι κειμένων πλευρών, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

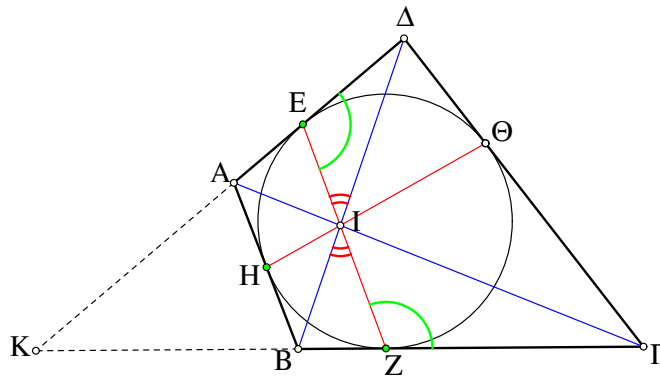


Σχήμα 550: Θεώρημα του Brianchon για εγγεγραμμένα τετράπλευρα

Τέλος, αφήνοντας στο προηγούμενο τετράπλευρο μία κορυφή να συμπίσει με μία γειτονική της παίρνουμε το συμπέρασμα της Άσκησης 5.14.1, κατά το οποίο: Οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές τριγώνου με τα απέναντι σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου διέρχονται από κοινό σημείο.

Άσκηση 5.18.2 Δείξε ότι σε κάθε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, περιγεγραμμένο σε κύκλο, οι διαγώνιοι και οι ευθείες που ενώνουν τα σημεία επαφής απέναντι πλευρών διέρχονται από κοινό σημείο (χωρίς χρήση του θεωρήματος του Brianchon).

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι η ευθεία EZ , που ενώνει τα απέναντι σημεία επαφής, τέμνει την διαγώνιο $B\Delta$ στο I . Προέκτεινε τις $A\Delta$ και $B\Gamma$ μέχρι την τομή τους στο K . Από την ισότητα



Σχήμα 551: Ιδιότητα περιγεγραμμένων τετραπλεύρων

των εφαπτομένων και το ισοσκελές EZK , έπεται ότι οι γωνίες ΔEI και ΓZI είναι ίσες. Συνεπώς τα τρίγωνα ΔEI και IBZ έχουν τις γωνίες τους στο I ίσες και αυτές στα E και Z παραπληρωματικές. Έπεται (Πρόταση 3.9.3) ότι

$$\frac{|I\Delta|}{|IB|} = \frac{|E\Delta|}{|ZB|}.$$

Ανάλογα, προεκτείνοντας τις AB και $\Delta\Gamma$ και παίρνοντας την τομή I' της $H\Theta$ με την $B\Delta$, βρίσκουμε ότι

$$\frac{|I'\Delta|}{|I'B|} = \frac{|\Delta\Theta|}{|BH|}.$$

Όμως από την ισότητα των εφαπτομένων $|BH| = |BZ|$, $|\Delta E| = |\Delta\Theta|$, έπεται ότι οι λόγοι στην δεξιά πλευρά των δύο προηγούμενων ισοτήτων είναι ίσοι και συνεπώς

$$\frac{|I\Delta|}{|IB|} = \frac{|I'\Delta|}{|I'B|},$$

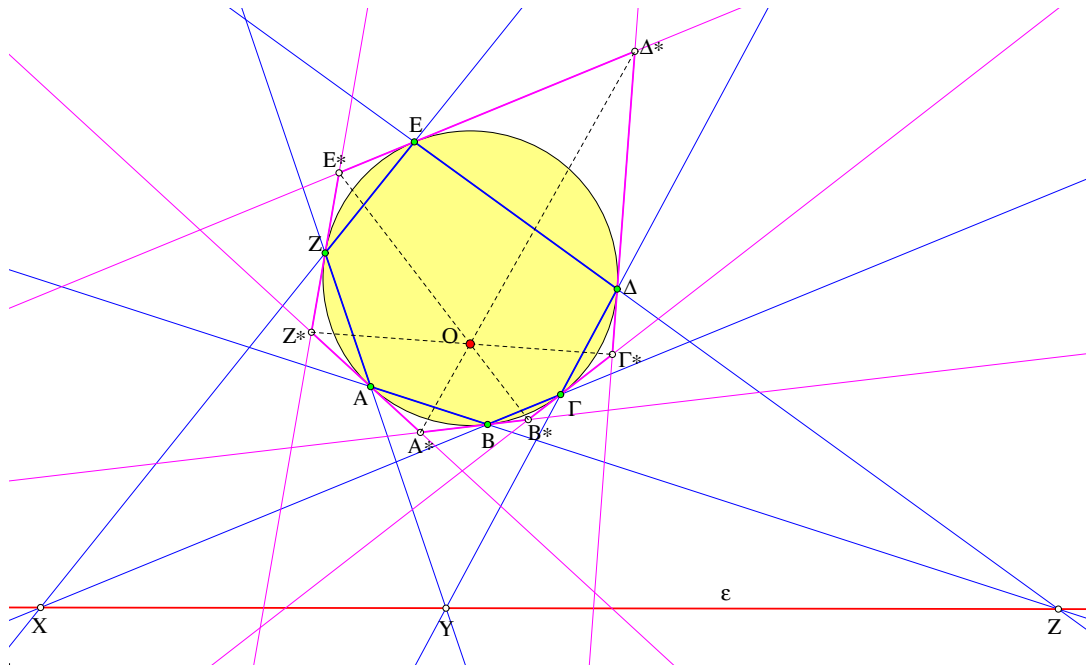
από την οποία συνάγεται ότι τα I και I' συμπίπτουν με το ίδιο σημείο επί της ΔB . Αυτό δείχνει ότι η $B\Delta$ διέρχεται από το σημείο τομής των EZ και $H\Theta$. Ανάλογα δείχνουμε, ότι και η διαγώνιος $A\Gamma$ διέρχεται από το σημείο τομής των EZ και $H\Theta$.

Σχόλιο-4 Τα θεωρήματα του Pascal και Brianchon ισχύουν γενικότερα ([VY10, σ. 111]) για τις λεγόμενες **Κωνικές τομές**, που είναι ακριβώς οι καμπύλες -τομές ορθού κώνου (Παράγραφος 8.9) και επιπέδου (10.1). Οι κύκλοι είναι ειδική περίπτωση τέτοιων κωνικών τομών. Μιά βασική ιδιότητα των κωνικών τομών είναι ότι πέντε σημεία σε γενική θέση ορίζουν πάντοτε μία ακριβώς κωνική τομή που περνά από αυτά. Το θεώρημα του Pascal, στην γενική του μορφή για κωνικές τομές, εκφράζει μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι έξι σημεία πάνω σε μία κωνική τομή ([Cha65, σ. 18]). Έτσι, το αντίστροφο του Θεωρήματος 5.18.1 εξασφαλίζει ότι, αν οι απέναντι πλευρές εξαγώνου τέμνονται επ' ευθείας, τότε το εξάγωνο εγγράφεται σε κωνική τομή, που δεν είναι, εν γένει, κύκλος. Από αυτήν την άποψη το θεώρημα του Pascal είναι εργαλείο της ίδιας μορφής με αυτό λ.χ. του θεωρήματος του Μενελάου (Θεώρημα 5.14.1) που αποφαίνεται για το πότε τρία σημεία είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει και για το θεώρημα του Brianchon, το οποίο, στα πλαίσια της *Προβολικής Γεωμετρίας* ([VY10]), αποδεικνύεται ισοδύναμο (δυϊκό) του θεωρήματος του

Pascal ([Cha65, σ. 26]). Η αντίστοιχη ισοδυναμία στην περίπτωση του κύκλου εξετάζεται στην επόμενη άσκηση. Αποδεικνύεται ότι πέντε ευθείες σε γενική θέση ορίζουν μονοσήμαντα μιά κωνική τομή εφαπτόμενη σε αυτές. Το θεώρημα του Brianchon δίνει ένα αναγκαίο και ικανό κριτήριο ύπαρξης κωνικής τομής εφαπτόμενης σε έξι ευθείες. Έτσι, το αντίστροφο του Θεωρήματος 5.18.2 εξασφαλίζει ότι, αν οι ευθείες που ενώνουν απέναντι σημεία εξαγώνου συντρέχουν σε ένα σημείο, τότε οι πλευρές του εξαγώνου εφάπτονται σε κωνική τομή, που δεν είναι, εν γένει, κύκλος.

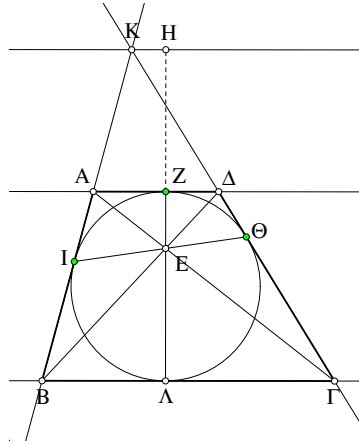
Άσκηση 5.18.3 Δείξε ότι οι πόλοι των πλευρών εξαγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$ εγγεγραμμένου σε κύκλο κ είναι κορυφές του εξαγώνου $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*E^*Z^*$ περιγεγραμμένου στον κύκλο κ , του οποίου τα σημεία επαφής των πλευρών με τον κύκλο συμπίπτουν με τις κορυφές του $AB\Gamma\Delta EZ$. Δείξε επίσης ότι η ευθεία του Pascal του $AB\Gamma\Delta EZ$, που περιέχει τα σημεία τομής X, Y, Z των απέναντι πλευρών του $AB\Gamma\Delta EZ$, συμπίπτει με την πολική του σημείου O του Brianchon του $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*E^*Z^*$, που είναι το σημείο τομής των διαγωνίων αυτού του εξαγώνου.



Σχήμα 552: Δυϊκότητα θεωρημάτων Pascal και Brianchon

Υπόδειξη: Το πρώτο μέρος, για τον ορισμό του $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*E^*Z^*$ από το $AB\Gamma\Delta EZ$, είναι αυτούσια η Άσκηση 4.9.4. Το κλειδί για τα υπόλοιπα είναι το ότι κάθε διαγώνιος, όπως λ.χ. η $A^*\Delta^*$ είναι η πολική ενός από τα τρία σημεία (του Z) στην ευθεία του Pascal. Πράγματι, το Δ^* είναι ο πόλος της $E\Delta$ και το A^* είναι ο πόλος της AB . Αφού λοιπόν η $A^*\Delta^*$ περιέχει τους πόλους των AB και $E\Delta$, και οι ευθείες αυτές θα περιέχουν τον πόλο της $A^*\Delta^*$, δηλαδή η τομή τους Z θα είναι ακριβώς ο πόλος της $A^*\Delta^*$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι τα Y και X είναι αντίστοιχα οι πόλοι των B^*E^* και Γ^*Z^* . Επειδή λοιπόν η ε περιέχει κάθε ένα από αυτούς τους πόλους και οι αντίστοιχες ευθείες $A^*\Delta^*$, B^*E^* , Γ^*Z^* θα περιέχουν τον πόλο O της ε , άρα θα τέμνονται σε αυτό το σημείο.

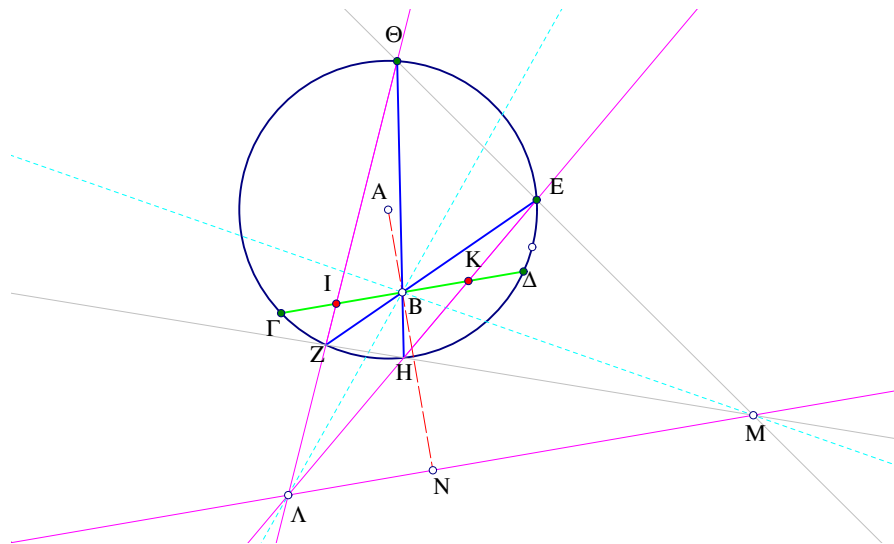
Άσκηση 5.18.4 Δείξε ότι σε μη ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ που περιγράφεται σε κύκλο, οι ευθείες που ενώνουν τα σημεία επαφής απέναντι πλευρών διέρχονται από το σημείο τομής E



Σχήμα 553: Ιδιότητα τραπεζίου

των διαγωνίων του. Επίσης εάν Z και Λ είναι τα σημεία επαφής των παραλλήλων πλευρών του, H το αρμονικό συζυγές του E ως προς Z και Λ και K το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών του, τότε η KH είναι παράλληλη προς τις παράλληλες πλευρές του.

Άσκηση 5.18.5 (Θεώρημα της πεταλούδας) Οι δύο χορδές ZE και $H\Theta$ του κύκλου κ διέρχονται από το μέσον B της τρίτης χορδής $\Gamma\Delta$. Δείξε ότι οι ευθείες $Z\Theta$ και EH τέμνουν την χορδή $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα σε σημεία I και K συμμετρικά κείμενα ως προς B .



Σχήμα 554: Θεώρημα της πεταλούδας

Υπόδειξη: Στο πλήρες τετράπλευρο $ZHE\Theta$ η πολική του σημείου τομής των διαγωνίων του B είναι ευθεία ΛM παράλληλη της $\Gamma\Delta$ (Πρόταση 5.15.3). Επίσης η δέσμη ευθειών $\Lambda(ZHBM)$ είναι αρμονική (Πρόταση 5.15.3), άρα θα αποτέμνει αρμονική τετράδα σε κάθε άλλη ευθεία που τέμνει αυτές τις τέσσερις. Ειδικά στην $\Gamma\Delta$, που είναι παράλληλη της ΛM , οι τρεις άλλες ευθείες της δέσμης θα αποτέμνουν ίσα τμήματα (Πόρισμα 5.13.2).

Κεφάλαιο 6

Κύκλου μέτρηση

6.1 Οι δυσκολίες, το όριο

Το πρόβλημα με τον κύκλο είναι ότι, πριν να τον μετρήσει, πρέπει κανείς να αποδείξει ότι έχει μήκος (συχνότερα λέμε **Περίμετρο**). Αυτό φαίνεται δύσκολο να κατανοηθεί από τον αρχάριο, είναι ωστόσο ένα πρόβλημα που προκύπτει από το ότι δεν έχουμε, ως τώρα, δώσει ορισμό του μήκους καμπύλης. Προς το παρόν, μήκος, ξέρουμε να μετράμε μόνο για ευθύγραμμα τμήματα και τα παράγωγα αυτών που είναι τεθλασμένες και πολύγωνα. Ο κύκλος ωστόσο είναι κάτι διαφορετικό. Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε τα πράγματα, να ορίσουμε τι ακριβώς εννοούμε με μήκος κύκλου και να αποδείξουμε ότι ο ορισμός μας έχει έννοια και δεν αντιφάσκει στα αξιώματά μας. Αφού γίνουν όλα αυτά μπορούμε κατόπιν να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του μήκους του κύκλου. Στο θέμα της ύπαρξης του μήκους λοιπόν εμφανίζεται η ανάγκη να καταφύγουμε σε ένα αξίωμα των πραγματικών αριθμών (λέγεται **Αξίωμα πληρότητας**) που έχει να κάνει με ακολουθίες και όρια. Το αξίωμα αυτό λέει:

Αξίωμα 6.1.1 Κάθε αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ που είναι και φραγμένη έχει όριο έναν πραγματικό αριθμό A .

Η λέξη **Ακολουθία** (αριθμών) σημαίνει ένα σύνολο αριθμών, που καθένας τους χαρακτηρίζεται από έναν ακέραιο αριθμό (δείκτη):

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n, \dots$$

Κάθε ένας από αυτούς τους αριθμούς ονομάζεται **Όρος** της ακολουθίας. Η λέξη **αύξουσα** σημαίνει ότι οι αριθμοί αυτοί βαίνουν συνεχώς αυξανόμενοι:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \dots$$

Το ότι η ακολουθία είναι φραγμένη σημαίνει ότι υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός M έτσι ώστε όλοι τους να είναι μικρότεροι από το M . Θα μπορούσαμε να γράψουμε εν συντομία:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \dots \leq M.$$

Το M λέγεται (άνω) **Φράγμα** της ακολουθίας. Ένα $M' > M$ είναι επίσης φράγμα και συνήθως δεν παίζει ρόλο η ακριβής τιμή του M . Αρκεί να βρούμε ότι υπάρχει κάποιο M που ικανοποιεί τις προηγούμενες ανισότητες. Για παράδειγμα, οι αριθμοί

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \dots$$

αποτελούν μία αύξουσα ακολουθία που είναι και φραγμένη αφού όλοι οι αριθμοί είναι μικρότεροι του $M=1$. Παρατήρησε ότι οι όροι της ακολουθίας αυτής δίνονται από τον τύπο

$$\alpha_n = \frac{n-1}{n},$$

αντικαθιστώντας σε αυτόν τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, ... κτλ.

Η τελευταία λέξη που θέλει εξήγηση στην σύντομη διατύπωση του αξιώματος είναι το **Όριο**. Δεν θα δώσω εδώ τον γενικό ορισμό του αλλά μόνο τον ειδικό, δηλαδή αυτόν του ορίου μίας αύξουσας ακολουθίας. Είναι λοιπόν το όριο μίας αύξουσας ακολουθίας ένας αριθμός A για τον οποίον ικανοποιούνται δύο ανισότητες

$$A - \varepsilon < \alpha_n \leq A,$$

η δεξιά για όλα τα α_n , η δε αριστερή, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και αν διαλέξουμε, ικανοποιείται για όλα τα α_n , εκτός ορισμένων, που όμως ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος (και εξαρτάται από το μέγεθος του ε). Στο προηγούμενο παράδειγμα λ.χ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το όριο είναι $A=1$. Πράγματι η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} \leq 1.$$

Η δεξιά ανισότητα αληθεύει για όλα τα $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Η αριστερή γράφεται

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n},$$

και είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

που με την σειρά της είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Η τελευταία όμως ικανοποιείται όπως ακριβώς απαιτεί ο ορισμός του ορίου, δηλαδή για όλα τα n εκτός κάποιων που το πλήθος τους είναι πεπερασμένο (και εξαρτάται από το μέγεθος του ε). Έτσι λ.χ. για $\varepsilon = 0,001$ άρα $\frac{1}{\varepsilon} = 1000$ η ανισότητα ικανοποιείται για όλα τα $n > 1000$ και δεν ικανοποιείται για τα $n < 1000$, που όμως είναι πεπερασμένα το πλήθος. Στην πράξη, για να δείξουμε ότι το A είναι το όριο της αύξουσας ακολουθίας κάνουμε τα εξής:

1. Βρίσκουμε το (υποψήφιο) όριο A ,
2. Δείχνουμε ότι η $\alpha_n \leq A$ ισχύει για όλα τα n ,
3. Θεωρούμε ότι το $\varepsilon > 0$ και “λύνουμε” την ανισότητα $A - \varepsilon < \alpha_n$ ως προς n ,
4. Διαπιστώνουμε ότι τα α_n που δεν είναι λύσεις της προηγούμενης ανισότητας είναι πεπερασμένα το πλήθος.

Η πρώτη δυσκολία είναι να βρούμε ή να μαντέψουμε το A . Το δεύτερο βήμα συνήθως προκύπτει από το πρώτο. Στο τρίτο βήμα πρέπει, όπως κάνουμε και με τις εξισώσεις, να καταφέρουμε να πάμε από την μιά μεριά της ανισότητας το ε και από την άλλη το n και να δείξουμε ότι η ανισότητα είναι ισοδύναμη με μιά της μορφής

$$N(\varepsilon) < n.$$

Το $N(\varepsilon)$ είναι συνήθως ένας αριθμός που εξαρτάται από το ε και το να φέρουμε την (3) σε αυτήν την μορφή, σημαίνει αυτόματα: (α) ότι η (3) ικανοποιείται για όλα τα n που είναι μεγαλύτερα του $N(\varepsilon)$ και (β) δεν ικανοποιείται για όλα τα n που είναι μικρότερα του $N(\varepsilon)$, που πάντως είναι πεπερασμένα το πλήθος.

Σχόλιο Η έννοια του ορίου μας χρειάζεται, διότι μέσω αυτής ορίζεται το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του. Όπως θα δούμε παρακάτω, ξεκινώντας από το τετράγωνο φτιάχνουμε κανονικά πολύγωνα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ καθένα από τα οποία έχει διπλάσιο αριθμό πλευρών από το προηγούμενο και είναι όλα εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο κ . Η περίμετρος του κύκλου

ορίζεται ως το όριο των περιμέτρων αυτών των πολυγώνων. Ανάλογα και το εμβαδόν του κύκλου ορίζεται ως το όριο των εμβαδών αυτών των πολυγώνων.

Συχνά στο μάθημα της Γεωμετρίας παραλείπεται η συζήτηση για τις δυσκολίες που παρουσιάζει ο κύκλος, όταν πάμε να μετρήσουμε την περίμετρο και το εμβαδόν του. Νομίζω όμως ότι αυτό δεν είναι σωστό. Στο σημείο αυτό έχουμε μία δυσκολία που η υπέρβασή της είναι ένα επίτευγμα της ανθρωπότητας. Εμφανίζεται η ανάγκη της προσέγγισης, του ορίου, και τίθενται τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού (από τον Αρχιμήδη), που θα αναπτυχθεί πολύ αργότερα. Είναι κρίμα να μην έχει ο μαθητής μία μικρή ιδέα γι' αυτά. Έστω και αν δυσκολεύεται κανείς να κατανοήσει πλήρως τις έννοιες, είναι χρήσιμο για την παιδεία του να νιώσει, άλλος περισσότερο άλλος λιγότερο, πώς η δυσκολία οδηγεί στην υπέρβασή της και το άνοιγμα νέων πεδίων, νέων οριζόντων. Εδώ η δυσκολία είναι ελεγχόμενη και υπάρχει ο πιστός συμπαραστάτης δάσκαλος. Είναι καλό να ασκηθεί ο μαθητής σε αυτό το είδος δυσκολίας, πριν αντιμετωπίσει την μη-ελεγχόμενη, για την οποία θα έχει πολλές ευκαιρίες αργότερα στην ζωή του.

Άσκηση 6.1.1 Δείξε ότι αν η αύξουσα ακολουθία $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \dots$ έχει όριο τον αριθμό A και ο αριθμός $A' < A$, τότε υπάρχει ένα α_i με

$$A' < \alpha_i < A.$$

Υπόδειξη: Γράψε $A' = A - \varepsilon$ με $\varepsilon = A - A' > 0$. Εφάρμοσε κατόπιν τον ορισμό του ορίου αύξουσας ακολουθίας, σύμφωνα με τον οποίο υπάρχουν άπειρα α_i που ικανοποιούν την $A - \varepsilon < \alpha_i < A$. Διάλεξε ένα από αυτά.

Άσκηση 6.1.2 Δείξε ότι αν η αύξουσα ακολουθία $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \dots$ έχει όριο τον αριθμό A τότε και η ακολουθία $\rho\alpha_1 \leq \rho\alpha_2 \leq \rho\alpha_3 \dots$, όπου $\rho > 0$, έχει όριο το ρA .

Υπόδειξη: Η δεξιά ανισότητα του ορισμού: $\rho\alpha_i \leq \rho A$ είναι συνέπεια της αντίστοιχης $\alpha_i \leq A$ που ισχύει εξ υποθέσεως. Η αριστερή ανισότητα του ορισμού του ορίου: $\rho A - \varepsilon < \rho\alpha_i$ είναι ισοδύναμη με την $A - \frac{\varepsilon}{\rho} < \alpha_i$. Εξ υποθέσεως όμως η τελευταία ισχύει για όλα τα α_i εκτός πεπερασμένων ολίγων, συνεπώς το ίδιο θα συμβαίνει και με την ισοδύναμή της προηγούμενη. Συνολικά λοιπόν, για κάθε $\varepsilon > 0$ οι ανισότητες $\rho A - \varepsilon < \rho\alpha_i \leq \rho A$ θα ισχύουν για όλα τα α_i εκτός πεπερασμένων ολίγων, πράγμα που δείχνει την αλήθεια του ισχυρισμού.

Άσκηση 6.1.3 Δείξε ότι η ακολουθία

$$\alpha_n = \frac{3n+2}{5n+10}$$

είναι αύξουσα. Δείξε ακόμη ότι το $A = \frac{3}{5}$ είναι όριο της ακολουθίας.

Υπόδειξη: Το ότι είναι αύξουσα είναι ισοδύναμο με την

$$\frac{3n+2}{5n+10} < \frac{3(n+1)+2}{5(n+1)+10},$$

που αποδεικνύεται εύκολα. Για το ότι το όριο είναι το συγκεκριμένο δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ ισχύει

$$\frac{3n+2}{5n+10} < \frac{3}{5}.$$

Κατόπιν “λύνουμε” την

$$\begin{aligned}
 A - \varepsilon &< \alpha_\nu \Leftrightarrow \\
 A - \alpha_\nu &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
 \frac{3}{5} - \frac{3\nu + 2}{5\nu + 10} &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
 \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\nu + 2} &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
 \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\varepsilon} &< \nu + 2 \Leftrightarrow \\
 \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - 2 &< \nu.
 \end{aligned}$$

Η τελευταία ισχύει για όλα τα ν εκτός πεπερασμένων ολίγων, το πλήθος των οποίων εξαρτάται από το μέγεθος του ε .

Άσκηση 6.1.4 Έστω η ακολουθία της οποίας ο γενικός όρος δίδεται από τον τύπο

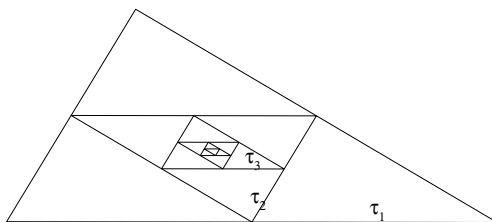
$$\alpha_\nu = \frac{\alpha\nu + \beta}{\gamma\nu + \delta},$$

όπου α, β, γ και δ σταθερές. Δείξε ότι η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα τότε και μόνον όταν $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Δείξε επίσης ότι όταν είναι αύξουσα, τότε η ακολουθία έχει όριο το $\frac{\alpha}{\gamma}$.

Εκτός της ακολουθίας αριθμών θα θεωρήσουμε στα επόμενα και Ακολουθίες Πολυγώνων. Όπως και στους αριθμούς έτσι και για πολύγωνα, η λέξη **Ακολουθία** σημαίνει ένα σύνολο πολυγώνων κάθε ένα από τα οποία χαρακτηρίζεται από έναν ακέραιο:

$$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_\nu, \dots$$

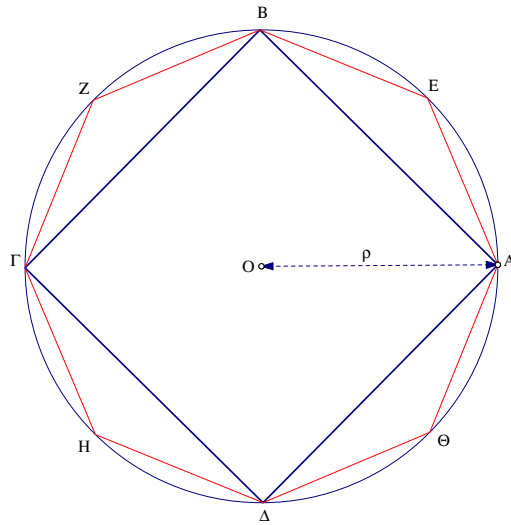
Κάθε ένα από τα πολύγωνα είναι ένας **Όρος** της ακολουθίας. Είναι φανερό ότι η έννοια της ακολουθίας και των όρων της μεταφέρεται και σε σύνολα ομοειδών αντικειμένων. Έτσι θα μπορούσαμε να ορίσουμε με κάποιο τρόπο ακολουθίες από σημεία, ακολουθίες από τετράγωνα, ακολουθίες από κύκλους κτλ. Το επόμενο σχήμα λ.χ. δείχνει λίγους όρους μιάς ακολουθίας τριγώνων $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ κάθε ένα εκ των οποίων ορίζεται από τα μέσα των πλευρών του προηγούμενου του, ξεκινώντας από ένα ορισμένο τρίγωνο τ_1 .



Σχήμα 555: Ακολουθία τριγώνων

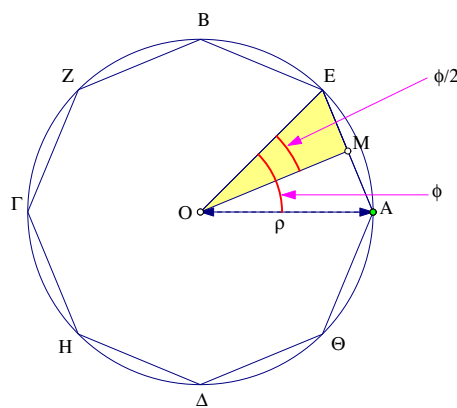
6.2 Ορισμός της περιμέτρου του κύκλου

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε κύκλο ακτίνας ρ και ορίζουμε κανονικά πολύγωνα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ εγγεγραμμένα σε αυτόν, καθένα από τα οποία έχει κορυφές αυτές του προηγούμενου συν τα μέσα των τόξων που ορίζονται από τις διαδοχικές κορυφές του προηγούμενου. Ξεκινάμε δε με το τετράγωνο Π_1 . Αν $AB\Gamma\Delta$ συμβολίζει το τετράγωνο, τότε τα μέσα των



Σχήμα 556: Το τετράγωνο και το οκτάγωνο

τόξων $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ ορίζουν τέσσερα πρόσθετα σημεία E, Z, H, Θ αντίστοιχα και το $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ είναι κανονικό οκτάγωνο: το Π_2 . Το Π_3 θα προκύπτει ανάλογα και θα έχει 16 πλευρές, το Π_4 θα έχει 32 και, γενικά, το Π_ν θα έχει $2^{\nu+1}$ πλευρές.



Σχήμα 557: $|AE|$: το $\frac{1}{\mu}$ της περιμέτρου

Λήμμα 6.2.1 Το κανόνικο πολύγωνο με μ πλευρές, εγγεγραμμένο στον κύκλο ακτίνας ρ έχει περίμετρο

$$2\mu\rho \eta_{\mu}\left(\frac{180}{\mu}\right).$$

Απόδειξη: Επειδή όλες οι πλευρές του κανονικού πολυγώνου είναι ίσες, η περίμετρος του θα είναι $\mu \cdot |AE|$ όπου AE μία πλευρά του. Άν O το κέντρο του κύκλου, τότε το AOE είναι ισοσκελές με γωνία στο O ίση με

$$\phi = \frac{360}{\mu} \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{180}{\mu}$$

αφού το άθροισμα μ τέτοιων ίσων γωνιών θα δίνει μιά πλήρη στροφή περί το O . Επίσης η διάμεσος AM είναι κάθετη στο μέσον της AE (Πόρισμα 1.8.2) και το τρίγωνο OME είναι ορθογώνιο, άρα κατά την Πρόταση 3.6.1

$$\frac{|AE|}{2} = |ME| = \rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Λήμμα 6.2.2 *Η ακολουθία των περιμέτρων $p_1, p_2, p_3, \dots$ των πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ είναι αύξουσα.*

Απόδειξη: Επειδή κάθε τέτοιο πολύγωνο έχει πλευρές διπλάσιες του προηγούμενου του, αρκεί να δείξουμε ότι ο λόγος των περιμέτρων $\frac{p}{p'}$ δύο κανονικών πολυγώνων Π και Π' εκ των οποίων το πρώτο έχει μ πλευρές και το δεύτερο έχει 2μ πλευρές είναι μικρότερος του 1. Όμως κατά τα προηγούμενα, λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο για το ημίτονο της διπλάσιας γωνίας (Άσκηση 3.6.5), έχουμε:

$$\frac{p}{p'} = \frac{2\mu\rho\eta\mu(\frac{180}{\mu})}{2(2\mu)\rho\eta\mu(\frac{180}{2\mu})} = \frac{\eta\mu(\frac{180}{\mu})}{2\eta\mu(\frac{180}{2\mu})} = \frac{2\eta\mu(\frac{180}{2\mu}) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{180}{2\mu})}{2\eta\mu(\frac{180}{2\mu})} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2\mu}\right) < 1,$$

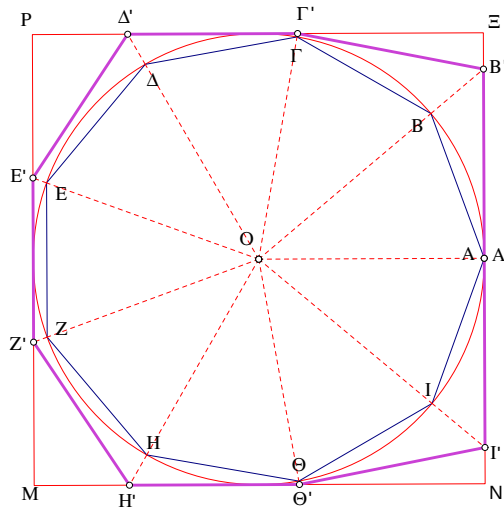
ο.ε.δ.

Λήμμα 6.2.3 *Κάθε κανονικό πολύγωνο με μ πλευρές εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ έχει περίμετρο μικρότερη από αυτήν του περιγεγραμμένου τετραγώνου στον ίδιο κύκλο.*

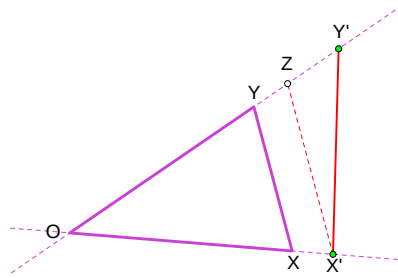
Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει προβάλλοντας το κανονικό πολύγωνο από το κέντρο O πάνω στο περιγεγραμμένο τετράγωνο. Προς τούτο, για κάθε μία από τις κορυφές $A, B, \Gamma, \dots$ του εγγεγραμμένου πολυγώνου φέρουμε την αντίστοιχη ημιευθεία $OA, OB, O\Gamma, \dots$ και ορίζουμε το σημείο τομής της $A', B', \Gamma', \dots$ με το περιγεγραμμένο τετράγωνο. Προκύπτει ένα πολύγωνο $A'B'\Gamma' \dots$ που έχει τις κορυφές του πάνω στο τετράγωνο και κάθε πλευρά του είναι μεγαλύτερη της αντίστοιχης πλευράς του αρχικού πολυγώνου. Αυτό προκύπτει από την σύγκριση των αντιστοίχων τριγώνων, $(AOB, A'O'B'), (BO\Gamma, B'O'\Gamma'), \dots$. Για κάθε τέτοιο ζεύγος τριγώνων, ας το ονομάσω $(XOY, X'O'Y')$, το X' είναι επί της προεκτάσεως της OX και το Y' επί της προεκτάσεως της OY , συνεπώς το $X'Y'$ είναι μεγαλύτερο από το XY . Για την απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού, υπόθεσε ότι από τις αποστάσεις XX' και YY' η XX' είναι η μικρότερη και φέρε παράλληλο $X'Z$ από το X' προς την XY . Προφανώς ισχύει

$$|XY| \leq |X'Z| < |X'Y'|.$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι, λόγω ομοιότητας, $\frac{|XY|}{|X'Z|} = \frac{|OX|}{|OX'|} \leq 1$. Η δεύτερη ανισότητα ισχύει διότι η γωνία $X'ZY'$ είναι αμβλεία (Πόρισμα 1.10.3), άρα απέναντί της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου $X'ZY'$. Προκύπτει λοιπόν ότι η περίμετρος του $A'B'\Gamma' \dots$ είναι



Σχήμα 558: Προβολή στο περιγεγραμμένο τετράγωνο



Σχήμα 559: Σύγκριση τριγώνου και προβολής του

μεγαλύτερη αυτής του $AB\Gamma$... αλλά και μικρότερη της περιμέτρου του τετραγώνου. Το τελευταίο διότι οι πλευρές του $A'B'\Gamma'$... είναι ή μέρη των πλευρών του τετραγώνου (όπως η $A'B'$ στο σχήμα) ή έχουν τα άκρα τους σε διαφορετικές πλευρές του τετραγώνου (όπως η $B'\Gamma'$ στο σχήμα) και είναι υποτείνουσες ορθογωνίων τριγώνων που είναι μικρότερες από το άθροισμα των δύο καθέτων πλευρών. Συνολικά λοιπόν οι περίμετροι p, p' και p'' του κανονικού πολυγώνου, της προβολής του στο τετράγωνο και του τετραγώνου αντίστοιχα, ικανοποιούν την

$$p < p' < p'',$$

ο.ε.δ.

Τα λήμματα 6.2.2 και 6.2.3 εξασφαλίζουν, βάσει του Αξιώματος 6.1.1, ότι η ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ των περιμέτρων των πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ έχει όριο A . Το A αυτό ορίζουμε ως μήκος ή **Περίμετρο** του κύκλου.

Σχόλιο-1 Οι αριθμοί α_i που αναφέρονται παραπάνω, ως περίμετροι των Π_i , προκύπτουν από το Λήμμα 6.2.1 θέτοντας σε αυτό

$$\mu = 2^{i+1}.$$

Έτσι η περίμετρος του Π_i είναι

$$\alpha_i = 2(2^{i+1}) \cdot \rho \cdot \eta\mu\left(\frac{180}{2^{i+1}}\right).$$

Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου, προκύπτει ότι για την περίμετρο του κύκλου A και τους παραπάνω αριθμούς α_i ισχύουν οι ανισότητες

$$A - \varepsilon < \alpha_i < A,$$

η δεξιά για όλα τα α_i και η αριστερή για όλα τα α_i εκτός πεπερασμένων ολίγων. Το πόσα α_i δεν ικανοποιούν την αριστερή ανισότητα εξαρτάται από το μέγεθος του ε . Πάντοτε όμως το πλήθος τους είναι πεπερασμένο.

Σχόλιο-2 Ο ορισμός της περιμέτρου του κύκλου που δώσαμε συνδέεται με τον ορισμό του μήκους τεθλασμένης γραμμής και αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές έννοιες μήκους (τεθλασμένης και κύκλου) μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις ενός εννιαίου ορισμού μήκους καμπύλης. Δυστυχώς ή ευτυχώς ο ορισμός αυτός ανήκει στην περιοχή του απειροστικού λογισμού και ξεπερνά τα πλαίσια του μαθήματος. Μιά ιδέα για τις λεπτομέρειες που υπεισέρχονται δίνουν οι επόμενες ασκήσεις.

Άσκηση 6.2.1 Δίδεται κύκλος κ . Δείξε ότι κάθε εγγεγραμμένο στον κ κανονικό πολύγωνο έχει περίμετρο μικρότερη αυτής του κύκλου κ .

Υπόδειξη: Εδώ το θέμα είναι ότι αναφερόμαστε σε γενικό κανονικό πολύγωνο και όχι στα ειδικά κανονικά πολύγωνα Π_i με 2^{i+1} πλευρές, για τα οποία δείξαμε ότι οι περιμέτροί τους α_i αποτελούν μία αύξουσα ακολουθία με όριο την περίμετρο του κύκλου A και $\alpha_i < A$. Η απόδειξη στην γενική περίπτωση προκύπτει από την ειδική αυτή περίπτωση και την Άσκηση 2.13.7, κατά την οποία η περίμετρος του κανονικού πολυγώνου με $n+1$ πλευρές είναι μεγαλύτερη αυτής του κανονικού πολυγώνου με n πλευρές. Έτσι, για δοθέν n βρίσκουμε μία δύναμη του 2 για την οποία $n \leq 2^{i+1}$, πράγμα που είναι πάντοτε δυνατόν. Τότε όμως η περίμετρος p του κανονικού πολυγώνου με n πλευρές θα είναι μικρότερη της αντίστοιχης περιμέτρου α_i του Π_i , που με την σειρά της είναι μικρότερη του A .

Άσκηση 6.2.2 Δείξε ότι η ακολουθία των περιμέτρων $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ των κανονικών πολυγώνων με $n=3, 4, 5, \dots$ πλευρές και εγγεγραμμένων σε κύκλο κ είναι αύξουσα και φραγμένη συνεπώς έχει όριο B . Δείξε ακόμη ότι $B=A$, όπου A το όριο των περιμέτρων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ των κανονικών πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ των εγγεγραμμένων στον κ .

Υπόδειξη: Τό ότι η ακολουθία $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ των περιμέτρων όλων των πολυγώνων είναι αύξουσα αποδεικνύεται στην Άσκηση 2.13.7. Το ότι η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη αποδεικνύεται όπως ακριβώς και στο Λήμμα 6.2.3. Η ύπαρξη του ορίου B είναι συνεπώς συνέπεια του Αξιώματος 6.1.1. Το ότι $B=A$ αποδεικνύεται αποκλείοντας τις περιπτώσεις $B < A$ και $A < B$. Πράγματι, έστω ότι $B < A$, τότε, κατά τον ορισμό του ορίου, θα υπάρχουν α_i τέτοια ώστε $B < \alpha_i < A$. Τότε όμως και για κάθε πολύγωνο με πλήθος πλευρών $n > 2^{i+1}$ θα έχουμε αντίστοιχη περίμετρο $\alpha_i < \beta_n$, που συνεπάγεται ότι $B < \alpha_i < \beta_n$. Τούτο όμως είναι άτοπο, διότι για όλα τα β_n ισχύει $\beta_n < B$. Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι και η $A < B$ οδηγεί σε άτοπο.

6.3 Ο αριθμός π

Λήμμα 6.3.1 Γιά κάθε κανονικό πολυγωνο με μ πλευρές ο λόγος της περιμέτρου προς την διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ανεξάρτητος του μεγέθους του, εξαρτάται μόνον από το μ και δίδεται από τον τύπο :

$$\mu \cdot \eta\mu \left(\frac{180}{\mu} \right).$$

Απόδειξη: Προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 6.2.1 διαιρώντας με 2ρ , ο.ε.δ.

Θεώρημα 6.3.1 Γιά κάθε κύκλο ο λόγος της περιμέτρου προς την διάμετρό του είναι μιά σταθερά π ανεξάρτητη της ακτίνας του κύκλου.

Απόδειξη: Έστω ότι ο λόγος της περιμέτρου p προς την διάμετρο $2r$ ενός συγκεκριμένου κύκλου κ είναι π και ένας άλλος κύκλος κ' έχει αντίστοιχο λόγο περιμέτρου προς διάμετρο

$$\pi' = \frac{p'}{2r'} < \pi.$$

Από τον ορισμό της περιμέτρου του κύκλου στην προηγούμενη παράγραφο (δες και Άσκηση 6.1.1), ως ορίου εγγεγραμμένων πολυγώνων, θα υπάρχει κανονικό πολύγωνο με μ πλευρές εγγεγραμμένο στον κύκλο κ και με περίμετρο p_μ που ικανοποιεί την:

$$2r \cdot \pi' < p_\mu < p = 2r \cdot \pi,$$

που είναι ισοδύναμη με την

$$\pi' < \frac{p_\mu}{2r} < \pi.$$

Το αντίστοιχο κανονικό πολύγωνο με μ πλευρές και εγγεγραμμένο στον κύκλο κ' θα έχει, κατά το προηγούμενο λήμμα, τον ίδιο λόγο περιμέτρου προς διάμετρο:

$$\frac{p'_\mu}{2r'} = \frac{p_\mu}{2r},$$

και η προηγούμενη ανισότητα συνεπάγεται

$$\pi' = \frac{p'}{2r'} < \frac{p'_\mu}{2r'} \Leftrightarrow p' < p'_\mu.$$

Η τελευταία όμως ανισότητα οδηγεί σε άτοπο, διότι σύμφωνα με τους ορισμούς μας, η περίμετρος p' είναι το όριο της αύξουσας ακολουθίας των p'_μ και είναι πάντα

$$p'_\mu < p'.$$

Εναλλάσσοντας τους ρόλους των κ και κ' αποδεικνύουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ότι και η $\pi < \pi'$ οδηγεί σε άτοπο. Άρα θα πρέπει να είναι $\pi' = \pi$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 6.3.1 Η περίμετρος ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι ίση με $2\pi\rho$.

Άσκηση 6.3.1 Δείξε ότι η ακολουθία των αριθμών

$$\mu \cdot \eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right), \quad \mu = 3, 4, 5, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη και έχει όριο τον αριθμό π .

Υπόδειξη: Η ακολουθία αυτή προκύπτει από τις περιμέτρους $\beta_\mu = 2\rho \cdot \mu \cdot \eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)$ των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας ρ (Λήμμα 6.2.1). Η ακολουθία αυτή κατά την Άσκηση 6.2.2 έχει όριο το $A = 2\pi\rho$. Το συμπέρασμα συνάγεται από την Άσκηση 6.1.2 εφαρμόζοντάς την στην ακολουθία $\frac{\beta_\mu}{2\rho} = \mu \cdot \eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)$ που συγκλίνει στο $\frac{A}{2\rho} = \pi$.

Σχόλιο Αποδεικνύεται (1882 Lindemann 1852-1939) ότι ο αριθμός π όχι μόνον είναι άρρητος, αλλά και **Υπερβατικός**, δηλαδή δεν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου ([Doe65, σ. 128]). Αυτό συνεπάγεται ότι ο λεγόμενος **Τετραγωνισμός του κύκλου**, δηλαδή η κατασκευή του π με κανόνα και διαβήτη, είναι **αδύνατη**. Ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας δύο πολύγωνα 96 πλευρών, ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο του κύκλου, απέδειξε ότι η τιμή του π είναι ανάμεσα στα:

$$3\frac{10}{71} \quad (\sim 3, 14084\dots) < \pi < 3\frac{10}{70} \quad (\sim 3, 14285\dots).$$

Σήμερα, με την χρήση λογισμικών, μπορούμε να προσεγγίσουμε τον π , πρακτικά, με όση ακρίβεια θέλουμε (δες λ.χ. [Bai88]). Η επόμενη προσέγγιση δίδει τα πρώτα 50 δεκαδικά ψηφία του

$$\pi \sim 3, 14159265358979323846264338327950288419716939937510\dots$$

Η μέθοδος προσέγγισης του Αρχιμήδη μπορεί να γίνει με την χρήση δύο ακολουθιών $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ και $\beta_0, \beta_1, \dots$ που δίνουν την ημιπερίμετρο των κανονικών πολυγώνων με $6 \cdot 2^n$ πλευρές που περιγράφονται (α_n), αντίστοιχα, εγγράφονται (β_n) σέ κύκλο ακτίνας 1. Οι πρώτοι όροι είναι

$$\alpha_0 = 2\sqrt{3}, \quad \beta_0 = 3,$$

και για τους υπόλοιπους αποδεικνύεται εύκολα ([eJPL99, σ. 2]) ότι δίδονται μέσω των τύπων

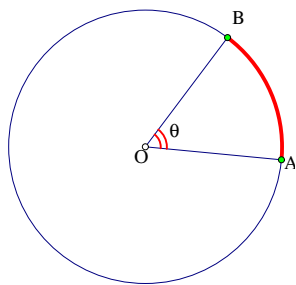
$$\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n\beta_n}{\alpha_n + \beta_n}, \quad \beta_{n+1} = \sqrt{\alpha_{n+1}\beta_n}.$$

Ο αριθμός π είναι όριο της ακολουθίας α_n αλλά ταυτόχρονα και της β_n . Το αξιοσημείωτο με αυτούς τους τύπους είναι ότι οδηγούν σε προσεγγίσεις του π και τελικά στο όριο, χωρίς την μεσολάβηση μετρήσεων των πραγματικών ημιπεριμέτρων. Έτσι, για να βρούμε τις αντίστοιχες ημιπεριμέτρους του 12-γώνου αντικαθιστούμε τα α_0, β_0 στους

$$\alpha_1 = \frac{2\alpha_0\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}, \quad \beta_1 = \sqrt{\alpha_1\beta_0},$$

που δίδουν τις προσεγγίσεις $\alpha_1 = 3, 2153$, $\beta_1 = 3, 1058$. Παρόμοια υπολογίζονται οι ημιπερίμετροι του 24-γώνου $\alpha_2 = 3, 1597$, $\beta_2 = 3, 1326$, του 48-γώνου $\alpha_3 = 3, 1461$, $\beta_3 = 3, 1394$, του 96-γώνου $\alpha_4 = 3, 1427$, $\beta_4 = 3, 1410$ κτλ.

6.4 Το μήκος τόξου του κύκλου, ακτίνια



Σχήμα 560: Μήκος τόξου: $\theta \frac{\pi}{180} \rho$

Το **Μήκος τόξου** AB κύκλου κ ακτίνας ρ ορίζεται, κατ' αναλογία με τον κύκλο, ως όριο μηκών τεθλασμένων γραμμών εγγεγραμμένων στον κύκλο και με άκρα τα σημεία A και B. Με μία διαδικασία ανάλογη με αυτήν του προσδιορισμού του μήκους του κύκλου, που δεν θα επαναλάβω εδώ, βρίσκουμε ότι το μήκος του τόξου εκφράζεται από τον τύπο

$$|\widehat{AB}| = \theta \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \rho, \quad (\theta \text{ το μέτρο της γωνίας σε μοίρες}).$$

Ειδικά για την γωνία 360 (πλήρους στροφής) ο τύπος δίδει το μήκος του κύκλου $2\pi\rho$. Συνοψίζω τις βασικές ιδιότητες του μήκους τόξου που απορρέουν από αυτόν τον τύπο και τις ιδιότητες των τόξων:

1. Ίσα τόξα στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους έχουν το ίδιο μήκος και αντίστροφα, τόξα του ίδιου μήκους στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους είναι ίσα.
2. Το μήκος του αθροίσματος δύο τόξων είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των δύο τόξων.
3. Η περίμετρος του κύκλου είναι $2\pi\rho$.

Οι ιδιότητες αυτές μεταφέρουν τις ιδιότητες που γνωρίσαμε στην Παράγραφο 2.12 από τα τόξα στα αντίστοιχα μήκη τους. Ο αριθμός

$$\phi = \theta \cdot \frac{\pi}{180}, \quad (\theta \text{ το μέτρο της γωνίας σε μοίρες})$$

λέγεται **Μέτρο της γωνίας σε ακτίνια**. Προφανώς πρόκειται για έκφραση του μέτρου της γωνίας με μία άλλη μονάδα μέτρησης που μετρά το ποσοστό του 2π που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία θ , με την έννοια ότι το $\frac{\theta}{360}$ είναι το ποσοστό της γωνίας ως προς τις 360 μοίρες της πλήρους περιστροφής. Και με αυτό το ποσοστό πολλαπλασιάζουμε το 2π . Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον αριθμό ϕ ως μέτρο της γωνίας ο τύπος για το μήκος τόξου γράφεται

$$|\widehat{AB}| = \phi \cdot \rho, \quad (\phi \text{ το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια}).$$

Ειδικά για $\rho = 1$ δηλαδή κύκλο με ακτίνα την μονάδα μήκους ο προηγούμενος τύπος γίνεται

$$|\widehat{AB}| = \phi, \quad (\rho=1 \text{ και μέτρο σε ακτίνια}).$$

Ο τύπος αυτός, διαβάζοντάς τον από τα δεξιά προς τα αριστερά, φανερώνει ότι το μέτρο γωνίας σε ακτίνια δεν είναι τίποτε άλλο παρά το μήκος του τόξου του μοναδιαίου κύκλου (κύκλου με ακτίνα την μονάδα μέτρησης) που έχει την γωνία αυτή ως αντίστοιχη επίκεντρο (δες Παράγραφο 2.12). Έτσι γωνία ενός ακτινίου ($\varphi=1$) είναι η επίκεντρη γωνία που προκύπτει από μήκος τόξου ίσο με μία μονάδα μέτρησης και λαμβανομένου πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Είναι σαν να λυγίζουμε την μονάδα μέτρησης (χωρίς να αλλάζουμε το μήκος της, σαν να ήταν από σύρμα ή κάτι παρόμοιο) και να την προσαρμόζουμε πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Η επίκεντρη γωνία του τόξου που προκύπτει είναι η γωνία με μέτρο 1 ακτίνιο. Ο επόμενος πίνακας δίνει ένα δείγμα της αντιστοίχισης μοιρών-ακτινίων για ειδικές γωνίες που συναντάμε συχνά σε εφαρμογές.

μοίρες	0	30	45	60	90	120	135	180	270	360
ακτίνια	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Άσκηση 6.4.1 Δείξε ότι η ακολουθία

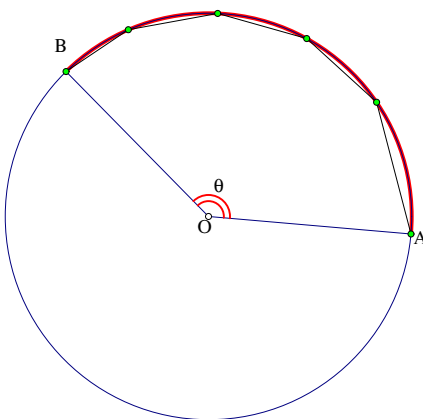
$$\frac{\mu}{\pi} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right), \quad \mu = 3, 4, 5, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη και έχει όριο το 1.

Υπόδειξη: Η άσκηση είναι επανάληψη της Άσκησης 6.3.1 αντικαθιστώντας το 180 με το π , μετρώντας δηλαδή τις γωνίες σε ακτίνια. Χρειάζεται προσοχή στο πώς ερμηνεύουμε την

$$\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right).$$

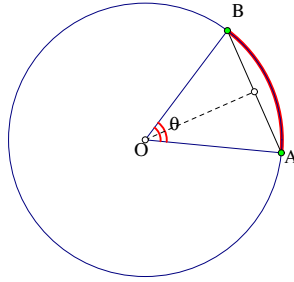
Στο ημίτονο αριστερά μετράμε την γωνία σε μοίρες. Στο ημίτονο δεξιά μετράμε την ίδια γωνία σε ακτίνια. Κατά την προαναφερθήσα άσκηση το όριο της $\mu \eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$ είναι το π . Άρα το όριο της $\frac{\mu}{\pi} \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$ θα είναι, κατά την Άσκηση 6.1.2, $\frac{\pi}{\pi} = 1$.



Σχήμα 561: Μήκος τόξου μεγαλύτερο του μήκους εγγεγραμμένης τεθλασμένης

Σχόλιο Το σχόλιο-2 της Παραγράφου 6.2 ισχύει και εδώ. Και το μήκος τόξου εντάσσεται

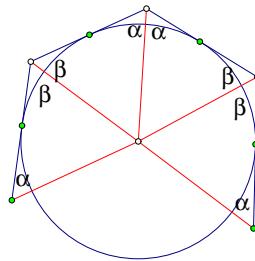
σε έναν γενικότερο ορισμό που συμπεριλαμβάνει τα μήκη τεθλασμένων γραμμών, του κύκλου και των τόξων του κύκλου ως ειδικές περιπτώσεις. Μιά άμεση συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι οι πολυγωνικές γραμμές οι εγγεγραμμένες στο τόξο με αρχή το Α και πέρας το Β έχουν μήκος μικρότερο του μήκους του τόξου. Ειδικά το μήκος της χορδής ΑΒ είναι μικρότερο του μήκους του τόξου. Έτσι μετρώντας γωνίες σε ακτίνια έχουμε



Σχήμα 562: $\eta\mu(\theta) < \theta$

$$|AB| = 2\rho\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) < \rho\theta \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\theta}{2}\right) < \frac{\theta}{2}.$$

Άσκηση 6.4.2 Κατασκεύασε ισόπλευρο πολύγωνο περιγεγραμμένο κύκλου κ που δεν είναι κανονικό. Δείξε ότι ένα ισόπλευρο πολύγωνο περιγεγραμμένο κύκλου κ που έχει περιττό αριθμό πλευρών είναι κανονικό.



Σχήμα 563: Περιγεγραμμένο και διαδοχή γωνιών

Υπόδειξη: Δείξε ότι η διαδοχή των γωνιών που σχηματίζονται με τις ευθείες από το κέντρο είναι όπως στο προηγούμενο σχήμα και δες τι συμβαίνει όταν το πολύγωνο έχει περιττό αριθμό πλευρών.

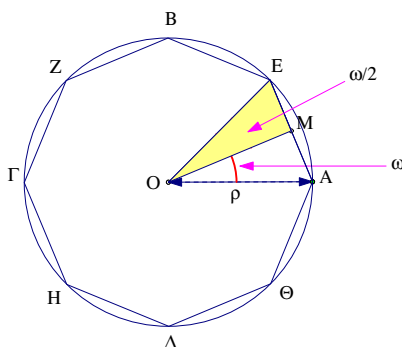
Άσκηση 6.4.3 Κατασκεύασε πολύγωνο με ίσες γωνίες εγγεγραμμένο σε κύκλο που δεν είναι κανονικό. Δείξε ότι ένα εγγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με ίσες γωνίες και περιττό αριθμό πλευρών είναι κανονικό.

6.5 Ορισμός του εμβαδού του κύκλου

Όπως το μήκος κύκλου (περίμετρος) έτσι και το εμβαδόν θέλει ειδική προσέγγιση. Οι βασικές ιδιότητες των εμβαδών (3.1.1-3.1.4) επιτρέπουν μόνο μετρήσεις πολυγώνων. Ο κύκλος είναι ένα νέο είδος σχήματος και πρέπει να ορίσουμε τί ακριβώς σημαίνει εμβαδόν αυτού του σχήματος. Για τον ορισμό μας χρειάζεται πάλι η διαδικασία του ορίου που χρησιμοποιήσαμε στην παράγραφο 6.2 για το μήκος του κύκλου και τα εγγεγραμμένα στον κύκλο κανονικά πολύγωνα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ με τα οποία προσεγγίσαμε τον κύκλο. Ο ορισμός του εμβαδού είναι λοιπόν εντελώς ανάλογος με αυτόν του μήκους του κύκλου. Έτσι, στην συνέχεια θα κάνουμε σχεδόν τα ίδια που κάναμε και στην παράγραφο 6.2. Γι' αυτό χρησιμοποιώ το ίδιο σχήμα και τους ίδιους συμβολισμούς αλλάζοντας μόνο τον τρόπο μέτρησης των γωνιών και υιοθετώντας από εδώ και πέρα ως μονάδα μέτρησης της γωνίας το ακτίνιο. Έτσι αντί του μέτρου γωνίας $\phi = \frac{360}{\mu}$ που εμφανίζεται εκεί θα εμφανίζεται εδώ το $\omega = \frac{2\pi}{\mu}$ (που βέβαια είναι ίσο με $\frac{\pi}{180}\phi$).

Λήμμα 6.5.1 Το εμβαδόν κανονικού πολυγώνου με μ πλευρές εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ είναι

$$\mu\left(\frac{\rho^2}{2} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mu}\right)\right).$$



Σχήμα 564: $\epsilon(AOE)$: το $\frac{1}{\mu}$ του εμβαδού

Απόδειξη: Επειδή το κανονικό πολύγωνο διασπάται σε μ ισοσκελή τρίγωνα, όπως το AOE που ορίζεται από το κέντρο και μία πλευρά του, το εμβαδόν του πολυγώνου θα είναι (Ιδιότητα 3.1.2) άθροισμα των εμβαδών αυτών των ίσων μεταξύ τους τριγώνων. Το τρίγωνο AOE είναι ισοσκελές με γωνία στο O ίση με

$$\omega = \frac{2\pi}{\mu} \Rightarrow \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{\mu}$$

αφού το άθροισμα μ τέτοιων ίσων γωνιών θα δίνει μία πλήρη στροφή περί το O. Επίσης η διάμεσος AM είναι κάθετη στο μέσον της AE (Πόρισμα 1.8.2) και το τρίγωνο OME είναι

ορθογώνιο, άρα κατά την Πρόταση 3.6.1

$$\begin{aligned} |AE| &= 2|ME| = 2\rho \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ |OM| &= \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) \Rightarrow \\ \epsilon(AOE) &= \frac{1}{2}|AE||OM| = \rho^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{\rho^2}{2} \eta\mu(\omega) = \frac{\rho^2}{2} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Η προτελευταία ισότητα οφείλεται στην Άσκηση 3.6.5. Το συμπέρασμα προκύπτει από το ότι το εμβαδόν του πολυγώνου είναι $\mu \cdot \epsilon(AOE)$, ο.ε.δ.

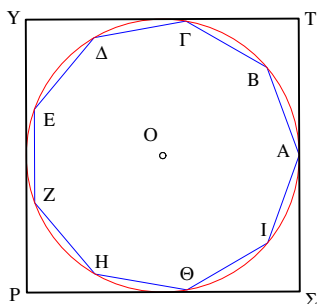
Λήμμα 6.5.2 Η ακολουθία των εμβαδών $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ των πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ είναι αύξουσα.

Απόδειξη: Επειδή κάθε τέτοιο πολύγωνο έχει πλευρές διπλάσιες του προηγούμενου του, αρκεί να δείξουμε ότι ο λόγος των εμβαδών $\frac{\epsilon}{\epsilon'}$ δύο κανονικών πολυγώνων Π και Π' εκ των οποίων το πρώτο έχει μ πλευρές και το δεύτερο έχει 2μ πλευρές είναι μικρότερος του 1. Όμως κατά τα προηγούμενα, λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο για το ημίτονο της διπλάσιας γωνίας (Άσκηση 3.6.5), έχουμε:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{\mu\left(\frac{\rho^2}{2} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mu}\right)\right)}{2\mu\left(\frac{\rho^2}{2} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{2\mu}\right)\right)} = \frac{\eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mu}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right)} = \frac{2\eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\mu}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right)} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\mu}\right) < 1,$$

ο.ε.δ.

Λήμμα 6.5.3 Η ακολουθία των εμβαδών $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ των πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ είναι φραγμένη.



Σχήμα 565: $\epsilon(\Pi_i) < \epsilon(P\Sigma TY)$

Απόδειξη: Σύμφωνα με το αξίωμα 3.1.3 το εμβαδόν καθενός από αυτά τα πολύγωνα είναι μικρότερο του εμβαδού του τετραγώνου που περιγράφεται στον κύκλο με ακτίνα ρ , ο.ε.δ.

Τα λήμματα 6.5.2 και 6.5.3 εξασφαλίζουν, βάσει του Αξιώματος 6.1.1, ότι η ακολουθία $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ των εμβαδών των πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ έχει όριο E . Το E αυτό ορίζουμε ως εμβαδόν του κύκλου.

Θεώρημα 6.5.1 Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ είναι $\pi\rho^2$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό, το εμβαδόν του κύκλου είναι όριο των εμβαδών των εγγεγραμμένων πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ που κατά το λήμμα 6.5.1 είναι

$$\epsilon(\Pi_i) = \mu \frac{\rho^2}{2} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mu}\right), \quad \text{όπου } \mu = 2^{i+1}.$$

Η απόδειξη προκύπτει συνδέοντας αυτό το όριο με το όριο των περιμέτρων των ιδίων πολυγώνων που κατά το λήμμα 6.2.1 είναι

$$\alpha_i = 2\mu\rho\eta\mu\left(\frac{\pi}{\mu}\right), \quad \text{όπου } \mu = 2^{i+1},$$

και, σύμφωνα με τον ορισμό, το όριό τους είναι η περίμετρος του κύκλου

$$A = 2\pi\rho.$$

Η διασύνδεση είναι πολύ απλή:

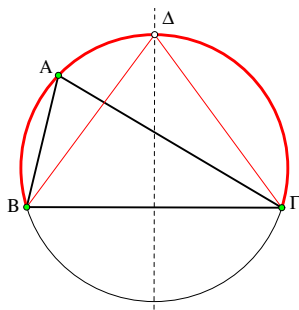
$$\begin{aligned} \epsilon(\Pi_i) &= \mu \frac{\rho^2}{2} \eta\mu\left(\frac{2\pi}{\mu}\right) \\ &= \rho \left(\frac{\mu}{2} \rho \eta\mu\left(\frac{\pi}{\frac{\mu}{2}}\right) \right) \\ &= \left(\frac{\rho}{2} \right) \left(2 \frac{\mu}{2} \rho \eta\mu\left(\frac{\pi}{\frac{\mu}{2}}\right) \right) \\ &= \left(\frac{\rho}{2} \right) \alpha_{i-1}. \end{aligned}$$

Η τελευταία προκύπτει λόγω του ότι έχουμε θέσει $\mu = 2^{i+1}$. Επομένως $\frac{\mu}{2} = 2^i$. Επειδή το όριο των α_i είναι το $2\pi\rho$ ο τελευταίος τύπος συνδυαζόμενος με την Άσκηση 6.1.2 δίνει ότι το όριο των $\epsilon(\Pi_i)$ είναι

$$\frac{\rho}{2} \cdot (2\pi\rho) = \pi\rho^2,$$

ο.ε.δ.

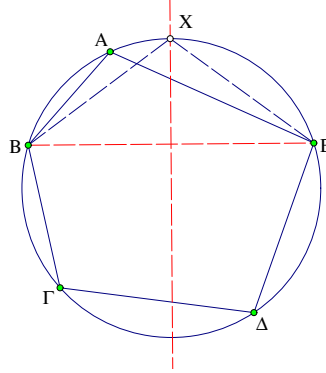
Άσκηση 6.5.1 Δείξε ότι από όλα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ τα εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο κ και έχοντα κοινή βάση $B\Gamma$, το τρίγωνο μεγίστου εμβαδού είναι ισοσκελές.



Σχήμα 566: Μεγιστοποίηση εμβαδού τριγώνου

Υπόδειξη: Επειδή όλα τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση $B\Gamma$, το μεγίστου εμβαδού θα είναι εκείνο του οποίου η κορυφή είναι στην μεγαλύτερη δυνατή απόσταση από την $B\Gamma$. Αυτή η θέση όμως συμπίπτει με ένα από τα δύο σημεία (Δ στο σχήμα) στα οποία η μεσοκάθετος του $B\Gamma$ τέμνει τον κύκλο κ .

Άσκηση 6.5.2 Δείξε ότι από όλα τα πολύγωνα $AB\Gamma\Delta\ldots$ με n πλευρές τα εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο κ το κανονικό πολύγωνο με n πλευρές έχει μέγιστο εμβαδόν.



Σχήμα 567: Μεγιστοποίηση εμβαδού πολυγώνου

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι το πολύγωνο $\Pi=AB\Gamma\Delta\ldots$ με n πλευρές έχει μέγιστη περίμετρο p και δεν είναι κανονικό. Τότε υπάρχουν δύο διαδοχικές πλευρές του άνισες λ.χ. οι BA και AE . Κατά την προηγούμενη άσκηση το τρίγωνο ABE θα έχει μικρότερο εμβαδόν από το αντίστοιχο εγγεγραμμένο ισοσκελές XBE . Αντικαθιστώντας λοιπόν το ABE με το AXE ευρίσκουμε άλλο πολύγωνο με n πλευρές και εμβαδόν $p' > p$, πράγμα άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το p είναι το μέγιστο δυνατόν εμβαδόν ([M52, σ. 198]).

Άσκηση 6.5.3 Διαίρεσε δοθέντα κύκλο κ σε n ισοεμβαδικά μέρη μέσω κύκλων συγκεντρικών με τον κ .

Άσκηση 6.5.4 Έστω P σημείο στο εσωτερικό κανονικού n -γώνου Π . Δείξε ότι το άθροισμα των αποστάσεων του P από τις πλευρές του πολυγώνου ισούται με nr , όπου r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου.

Άσκηση 6.5.5 (Θεώρημα του Γαλιλαίου) Το εμβαδόν κύκλου $\epsilon(\kappa)$ είναι η μέση ανάλογος $\epsilon(\kappa) = \sqrt{\epsilon(\Pi)\epsilon(\Pi')}$ του εμβαδού ενός περγεγραμμένου πολυγώνου Π και ενός ομοίου του Π πολυγώνου Π' του οποίου η περίμετρος ισούται με την περίμετρο του κύκλου.

Άσκηση 6.5.6 Οι κορυφές πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_n$ προβάλλονται σε ευθεία ε στα σημεία $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Δείξε ότι γιά τα προσημασμένα μήκη ισχύει

$$B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nB_1 = 0.$$

Άσκηση 6.5.7 Δίδεται κανονικό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_n$ και ευθεία OX διά του κέντρου του. Εάν $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι οι γωνίες που σχηματίζει η OX με (τις ευθείες που ορίζονται από) τις πλευρές του $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$, δείξε ότι ισχύει:

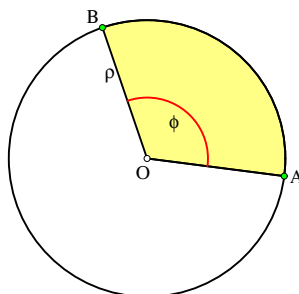
$$\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2) + \ldots + \sin(\alpha_n) = 0.$$

Άσκηση 6.5.8 Δείξε ότι γιά κάθε σημείο X σε απόσταση δ από το κέντρο κανονικού n -γώνου $A_1A_2\ldots A_n$ εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ ισχύει:

$$|XA_1|^2 + |XA_2|^2 + \ldots + |XA_n|^2 = n(\rho^2 + \delta^2).$$

6.6 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα

Κυκλικός τομέας λέγεται το μέρος του κύκλου που περικλείεται από ένα τόξο του και τις ακτίνες στα άκρα του. Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ορίζεται, κατ' αναλογία με



Σχήμα 568: Κυκλικός τομέας

τον κύκλο, ως όριο εμβαδών τεθλασμένων γραμμών που έχουν τις ακτίνες OA, OB ως δύο διαδοχικές πλευρές τους και οι υπόλοιπες σχηματίζουν πολυγωνική γραμμή εγγεγραμμένη στον κύκλο και με άκρα τα σημεία A και B. Με μία διαδικασία ανάλογη με αυτήν του προσδιορισμού του εμβαδού του κύκλου, που δεν θα επαναλάβω εδώ, βρίσκουμε ότι το εμβαδόν του τόξου εκφράζεται μέσω της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας του τόξου του και με τον τύπο

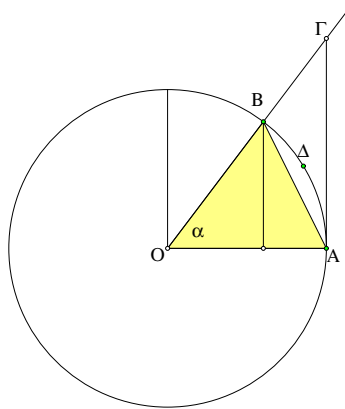
$$\epsilon(AOB) = \frac{1}{2}\phi\rho^2, \quad (\phi \text{ το μέτρο της γωνίας } AOB \text{ σε ακτίνια}).$$

Ειδικά για την γωνία 360 (πλήρους στροφής) ο τύπος δίνει το εμβαδόν του κύκλου $\pi\rho^2$. Συνοψίζω τις βασικές ιδιότητες του εμβαδού κυκλικού τομέα που απορρέουν από τον ορισμό αυτό και τις ιδιότητες των τόξων (2.12):

1. Ίσα τόξα στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ορίζουν κυκλικούς τομείς με το ίδιο εμβαδόν.
2. Το εμβαδόν τομέα τόξου που είναι το άθροισμα δύο τόξων είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τομέων των δύο τόξων.
3. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$.

Οι ιδιότητες αυτές είναι εντελώς ανάλογες με τις ιδιότητες που γνωρίσαμε στην Παράγραφο 2.12 και έχουν αντίστοιχες συνέπειες για εμβαδά με αυτές των τόξων. Τα σχόλια που κατέγραψα στην παράγραφο 6.4 για το μήκος τόξου ισχύουν και για τα εμβαδά των τομέων. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία γενικότερη έννοια εμβαδού σχημάτων που περιλαμβάνει αυτό των πολυγώνων, των κύκλων και των κυκλικών τομέων ως ειδικές περιπτώσεις (Μέτρο του Jordan[BH07, σ. 503]). Ο ορισμός όμως αυτός ανήκει στην περιοχή της Μαθηματικής ανάλυσης και ξεπερνά τα πλαίσια του μαθήματος. Η ένταξη ωστόσο σε έναν εννιαίο ορισμό επιτρέπει σύγκριση πολυγωνικών εμβαδών και εμβαδών καμπύλων σχημάτων όπως αυτό του τομέως. Οι ιδιότητες των εμβαδών που περιγράψαμε στην Παράγραφο 3.1 μεταφέρονται αυτολεξί και στον γενικό ορισμό που περιλαμβάνει καμπυλόγραμμα σχήματα και έτσι προκύπτουν ανισότητες όπως λ.χ. αυτή που εμπεριέχεται στο επόμενο σχήμα.

$$\epsilon(AOB) < \epsilon(A\Delta BO) < \epsilon(ΑΓΟ).$$



Σχήμα 569: Ανισότητες από συγκρίσεις εμβαδών

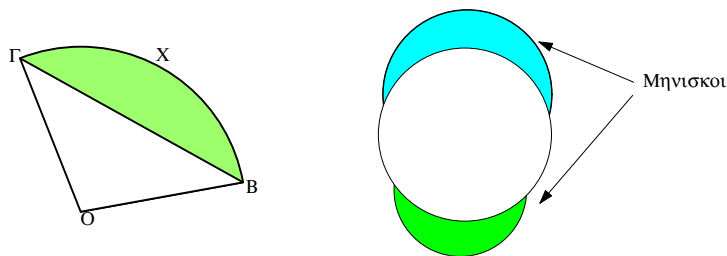
Το δεύτερο εμβαδόν είναι αυτό του τομέα $A\Delta BO$ και η ανισότητα ισχύει για κάθε γωνία α με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (μέτρο της σε ακτίνια). Αντικαθιστώντας με τους τύπους που δίδουν το εμβαδόν παίρνουμε την

$$\frac{1}{2}\rho^2 \eta\mu(\alpha) < \frac{1}{2}\rho^2 \alpha < \frac{1}{2}\rho^2 \epsilon\varphi(\alpha),$$

που απλοποιώντας οδηγεί στην

$$1 < \frac{\alpha}{\eta\mu(\alpha)} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\alpha)}.$$

Η επόμενη άσκηση χρησιμοποιεί τις έννοιες **Κυκλικό τμήμα** και **Μηνίσκος**. Η πρώτη



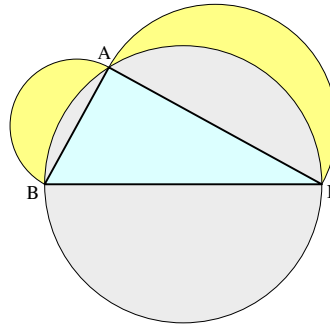
Σχήμα 570: Κυκλικό τμήμα και μηνίσκοι

ορίζεται ως το μέρος του κύκλου $BX\Gamma$ που περιέχεται μεταξύ ενός τόξου $BX\Gamma$ και της χορδής που ενώνει τα άκρα του. Η δεύτερη ορίζεται ως το μη κοινό μέρος ενός κύκλου με έναν άλλον που τον τέμνει [M52, σ. 788].

Άσκηση 6.6.1 (Μηνίσκοι του Ιπποκράτη (περίπου 470-410 π.Χ.)) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεώρησε τους κύκλους με διαμέτρους τις πλευρές του τριγώνου. Δείξε ότι στις κάθετες πλευρές ορίζονται δύο μηνίσκοι των οποίων το εμβαδόν είναι συνολικά ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου.

Υπόδειξη: Το εν λόγω εμβαδόν ϵ είναι ίσο με την διαφορά δύο εμβαδών. Το πρώτο είναι το εμβαδόν των δύο ημικυκλίων με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές του $AB\Gamma$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{8}\pi(|AB|^2 + |A\Gamma|^2).$$

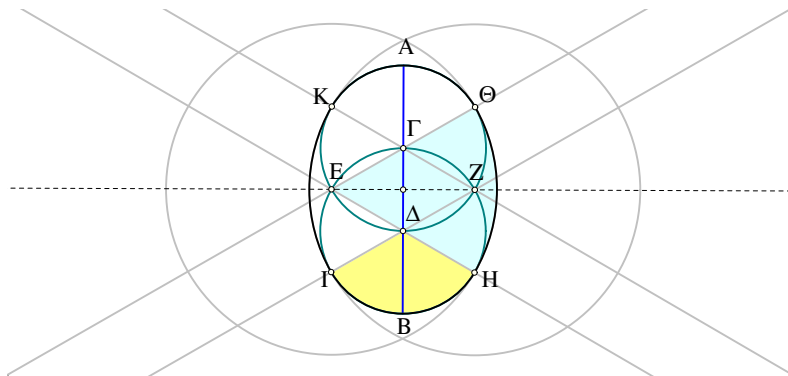


Σχήμα 571: Μηνίσκοι του Ιπποκράτη

Το δεύτερο είναι το εμβαδόν των δύο κυκλικών τμημάτων του περιγεγραμμένου που ορίζονται από τις κάθετες πλευρές. Ας ονομάσουμε το εμβαδόν αυτό ϵ_2 . Προσθέτοντας στο ϵ_2 το εμβαδόν του τριγώνου παίρνουμε ολόκληρο το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την υποτείνουσα ΒΓ. Έχουμε επομένως

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \epsilon_1 - \epsilon_2 \\
 &= \left(\epsilon_1 + \frac{1}{2}|AB||AG|\right) - \left(\epsilon_2 + \frac{1}{2}|AB||AG|\right) \\
 &= \left(\frac{1}{8}\pi(|AB|^2 + |AG|^2) + \frac{1}{2}|AB||AG|\right) - \frac{1}{8}\pi|BG|^2 \\
 &= \frac{1}{8}\pi(|AB|^2 + |AG|^2 - |BG|^2) + \frac{1}{2}|AB||AG| \\
 &= \frac{1}{2}|AB||AG|.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.6.2 Ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 3δ διαφείται σε τρία ίσα μέρη με τα σημεία Γ και Δ . Με κέντρο Γ και ακτίνα δ , κατασκευάζεται τόξο ΘAK γωνίας $\pi/3$. Με κέντρο Δ και ακτίνα δ , κατασκευάζεται τόξο HBF γωνίας $\pi/3$. Με κέντρα τα σημεία τομής E, Z των κύκλων $\Gamma(\delta)$ και $\Delta(\delta)$ και ακτίνα 2δ , κατασκευάζονται τόξα ΘH και IK γωνίας $\pi/6$. Να βρεθεί το εμβαδόν του προκύπτοντος σχήματος.



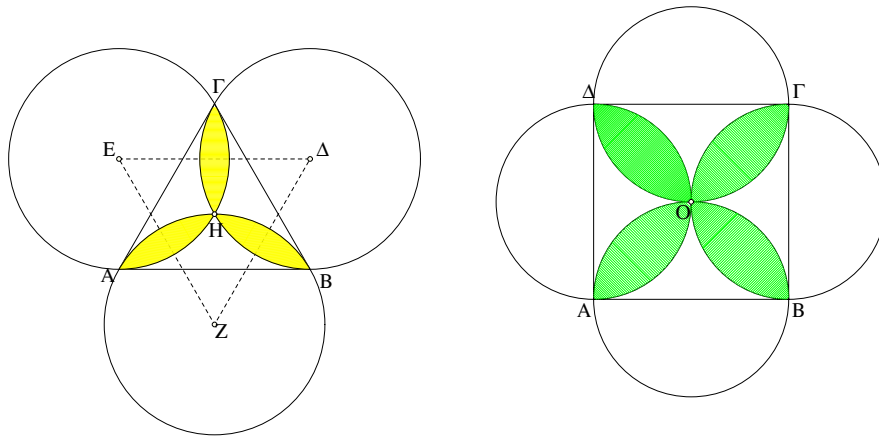
Σχήμα 572: Ωοειδές

Υπόδειξη: Το εμβαδόν ϵ του σχήματος (πού λέγεται **Ωοειδές**) είναι το άθροισμα των τεσσάρων κυκλικών τομέων που ορίζονται από τα τόξα της εκφώνησης μείον το εμβαδόν του

ρόμβου $\Gamma E \Delta Z$, που προσμετράται δύο φορές.

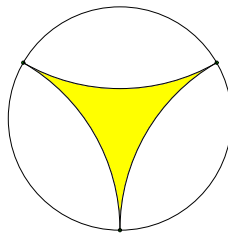
$$\begin{aligned}\epsilon &= 2\epsilon(\Delta \Gamma B H) + 2\epsilon(E H \Theta) - \epsilon(\Gamma E \Delta Z) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\left(\delta^2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) + 2\left(\frac{1}{2}\left((2\delta)^2 \frac{\pi}{6}\right)\right) - \delta \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\delta\right) \\ &= \delta^2 \left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

Άσκηση 6.6.3 Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τρίφυλλου που δημιουργείται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς δ από κύκλους ίσους με τον περιγεγραμμένο του που έχουν ως κέντρα τα συμμετρικά του κέντρου βάρους H του ισοπλεύρου ως προς τις πλευρές του.



Σχήμα 573: Τρίφυλλο και τετράφυλλο

Άσκηση 6.6.4 Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετράφυλλου που δημιουργείται στο εσωτερικό τετραγώνου πλευράς δ από κύκλους με διάμετρο τις πλευρές του τετραγώνου.



Σχήμα 574: Καμπυλόγραμμο τρίγωνο με ίσες πλευρές

Άσκηση 6.6.5 Σε δοθέντα κύκλο κατασκεύασε καμπυλόγραμμο τρίγωνο του οποίου οι πλευρές είναι τρία ίσα τόξα, τα οποία ανά δύο εφάπτονται στα άκρα τους. Υπολόγισε το εμβαδόν ενός τέτοιου τριγώνου.

Κεφάλαιο 7

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

7.1 Αξιώματα για τον χώρο

Γιά την μελέτη σχημάτων του χώρου χρειαζόμαστε την αόριστη έννοια του **Επιπέδου** και μερικά συμπληρωματικά αξιώματα αυτών που γνωρίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Αξιώματα που περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες των επιπέδων αλλά και των ευθειών του χώρου.

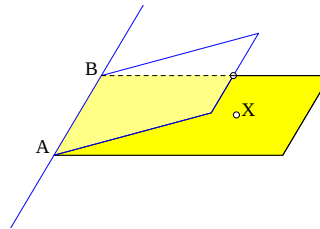
Αξίωμα 7.1.1 Τρία σημεία μη κείμενα επ' ευθείας ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο. Κάθε επίπεδο ϵ περιέχει άπειρα σημεία και υπάρχουν επίσης άπειρα σημεία μη περιεχόμενα στο επίπεδο ϵ .

Αξίωμα 7.1.2 Αν μία ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με ένα επίπεδο ϵ τότε περιέχεται στο επίπεδο ϵ .

Αξίωμα 7.1.3 Αν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο τότε έχουν και ολόκληρη ευθεία κοινή.

Αξίωμα 7.1.4 Κάθε επίπεδο ϵ χωρίζει τον χώρο σε δύο μέρη που δεν έχουν κοινά σημεία και ονομάζονται **Ημίχωροι**. Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του σε διαφορετικούς ημίχωρους τέμνει το επίπεδο σε ένα ακριβώς σημείο. Ένα ευθύγραμμο τμήμα, που έχει και τα δύο άκρα του στον ίδιο ημίχωρο, δεν τέμνει το επίπεδο.

Τα επίπεδα παίζουν στο χώρο τον ρόλο που παίζουν οι ευθείες στο επίπεδο. Στην επιπεδομετρία απομονώνουμε ένα από τα επίπεδα του χώρου και εξετάζουμε τα σχήματα που ορίζονται μέσα σε αυτό το επίπεδο. Στην **Στερεομετρία** εξετάζουμε σχήματα, όπως λ.χ. τον κύβο, που εκτείνονται στον χώρο και δεν περιορίζονται σε κάποιο επίπεδο.

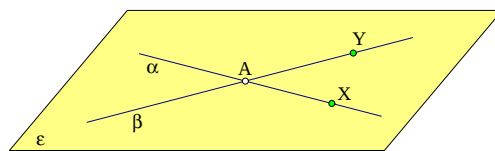


Σχήμα 575: Τεμνόμενα επίπεδα

Πρόταση 7.1.1 Αν δύο διαφορετικά επίπεδα τέμνονται τότε η τομή τους συμπίπτει με μία ευθεία.

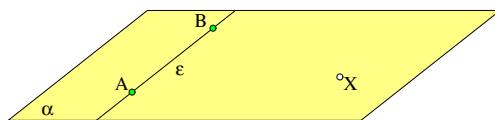
Απόδειξη: Κατά το τελευταίο αξίωμα η τομή τους θα περιλαμβάνει τουλάχιστον μία ευθεία AB. Δεν μπορεί όμως να περιλαμβάνει σημεία εκτός της AB. Τούτο διότι δύο σημεία της ευθείας λ.χ. τα A, B και ένα σημείο X εκτός αυτής ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο. Άρα αν το X ανήκε και στα δύο επίπεδα τότε αυτά, κατά το πρώτο αξίωμα, θα έπρεπε να ταυτίζονται, αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.

Πρόταση 7.1.2 Δύο διαφορετικές τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα και μοναδικό επίπεδο που τις περιέχει.



Σχήμα 576: Επίπεδο δύο τεμνομένων ευθειών

Απόδειξη: Θεώρησε το σημείο τομής A δύο ευθειών α και β . Πάρε επίσης δύο σημεία X και Y , το πρώτο στην α και το δεύτερο στην β . Κατά το πρώτο αξίωμα ορίζεται ένα ακριβώς επίπεδο ε που περιέχει τα τρία σημεία A , X και Y . Κατά το δεύτερο αξίωμα το επίπεδο θα περιέχει και τις δύο ευθείες, ο.ε.δ.



Σχήμα 577: Επίπεδο ευθείας και σημείου

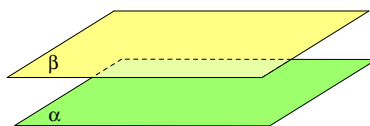
Πρόταση 7.1.3 Μία ευθεία ε και σημείο X εκτός αυτής ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο που τα περιέχει

Απόδειξη: Θεώρησε δύο σημεία A και B της ε . Το επίπεδο α που περιέχει τα τρία σημεία A, B και X περιέχει και όλη την ευθεία ε (Αξίωμα 7.1.2). Κάθε επίπεδο που περιέχει την ε και το X θα περιέχει και τα A, B και X , άρα θα ταυτίζεται με το α (Αξίωμα 7.1.1), ο.ε.δ.

Πρόταση 7.1.4 Αν δύο ευθείες ε και ζ περιέχονται σε επίπεδο, τότε το επίπεδο αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη: Η ίδια με την προηγούμενη, παίρνοντας δύο σημεία A, B στην ε και ένα X στην ζ κτλ. ο.ε.δ.

Παράλληλα επίπεδα ονομάζονται δύο επίπεδα που δεν τέμνονται. Μία ευθεία λέγεται **Παράλληλη** προς το επίπεδο όταν δεν το τέμνει. Ένα επίπεδο λέγεται **παράλληλο**

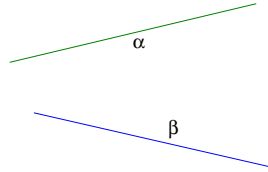


Σχήμα 578: Παράλληλα επίπεδα

προς ευθεία όταν δεν την τέμνει. Δύο ευθείες λέγονται **Παράλληλες** (στον χώρο) όταν (1) περιέχονται σε ένα επίπεδο α και (2) είναι παράλληλες ευθείες αυτού του επιπέδου. **Ασύμβατες ευθείες** λέγονται δύο ευθείες α και β που δεν τέμνονται και δεν είναι και παράλληλες (δεν περιέχονται σε ένα επίπεδο).

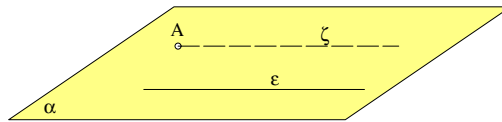
Ξεκαθαρίζω πρώτα ένα λεπτό σημείο με δύο ευθείες παράλληλες στο χώρο, διότι ο ορισμός των παραλλήλων του χώρου και του επιπέδου έχουν μία μικρή διαφορά. Ενώ στο

επίπεδο δύο παράλληλες ορίζονται ως δύο μη-τεμνόμενες ευθείες, στον χώρο αυτή η ιδιότητα δεν αρκεί, όπως φαίνεται με δύο ασύμβατες ευθείες, οι οποίες να μην τέμνονται, δεν είναι όμως και παράλληλες. Οι παράλληλες στον χώρο περιέχονται εξ υποθέσεως στο ίδιο επίπεδο και ο ορισμός τους ως παραλλήλων του χώρου ανάγεται στον ορισμό ως παραλλήλων του επιπέδου που τις περιέχει.



Σχήμα 579: Ασύμβατες ευθείες

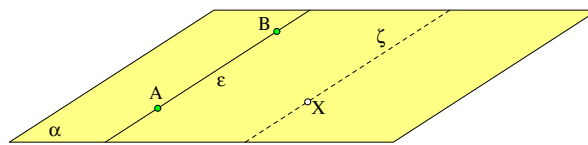
Πρόταση 7.1.5 Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μία και μόνον ευθεία ζ παράλληλος της ε .



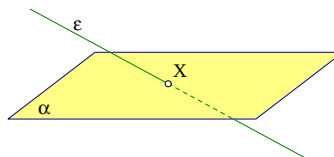
Σχήμα 580: Μοναδικότητα παραλλήλου στον χώρο

Απόδειξη: Στο επίπεδο α που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο A θεωρήσε την μοναδική παράλληλο ζ προς την ε (Αξίωμα παραλληλίας 1.15.1). Κάθε άλλο επίπεδο που περιέχει την ε και το A θα ταυτίζεται με το α , συνεπώς η παράλληλος από το A προς την ε θα είναι μοναδική, ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.1.1 Γιά κάθε σημείο X εκτός ευθείας ε το επίπεδο που περιέχει το X και την ε περιέχει και την παράλληλο ζ της ε από το X .



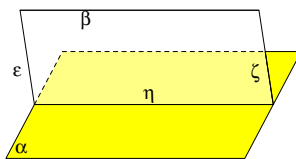
Σχήμα 581: Επίπεδο δύο παραλλήλων ευθειών



Σχήμα 582: Ευθεία τέμνουσα επίπεδο

Πρόταση 7.1.6 Αν ευθεία ε δεν είναι παράλληλη προς το επίπεδο α και δεν περιέχεται σε αυτό τότε το τέμνει σε ένα ακριβώς σημείο.

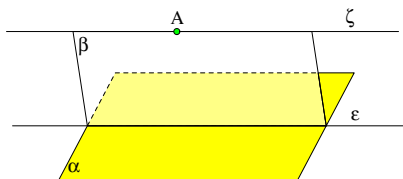
Απόδειξη: Προφανώς πρέπει η ε να τέμνει το α . Διαφορετικά θα ήταν παράλληλη προς αυτό. Επίσης αν το έτεμνε σε περισσότερα από ένα σημεία τότε, κατά το δεύτερο αξίωμα θα περιήχετο στο α , αντίθετα με την υπόθεση. Άρα η ε τέμνει το α σε ένα ακριβώς σημείο, ο.ε.δ.



Σχήμα 583: Ευθείες παράλληλες τέμνουσες επίπεδο

Πρόταση 7.1.7 Αν ευθεία ε τέμνει επίπεδο α σε ένα σημείο τότε και κάθε παράλληλος ζ προς αυτήν θα τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο.

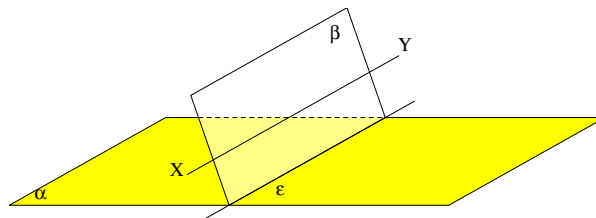
Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο β που περιέχει τις παράλληλες ε και ζ . Αυτό θα τέμνει το επίπεδο α κατά ευθεία η . Στο επίπεδο β οι ε και ζ είναι παράλληλες και η ε τέμνει την η . Άρα και η ζ θα τέμνει την η σε ένα σημείο (Πόρισμα 1.15.1) που είναι και σημείο του α , ο.ε.δ.



Σχήμα 584: Κατασκευή παραλλήλου ευθείας προς επίπεδο

Κατασκευή 7.1.1 Από σημείο A εκτός επιπέδου α φέρε παράλληλο ευθεία ζ προς το επίπεδο α .

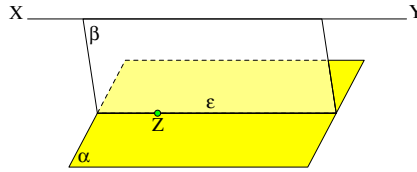
Κατασκευή: Θεώρησε τυχούσα ευθεία ε του επιπέδου α και όρισε το επίπεδο β που περιέχει την ευθεία ε και το σημείο A . Στο επίπεδο αυτό φέρε την παράλληλο ζ της ε από το A . Η ζ δεν μπορεί να τέμνει το α , διότι αν το έτεμνε, τότε το κοινό σημείο Σ της ζ με το α θα ήταν και σημείο της ε που είναι άτοπο, ο.ε.κ.



Σχήμα 585: Επίπεδο διά ευθείας τέμνον παράλληλο επίπεδο

Πρόταση 7.1.8 Αν επίπεδο β διέρχεται από ευθεία XY και τέμνει επίπεδο α προς το οποίο η XY είναι παράλληλος, τότε η τομή ε των α και β είναι ευθεία παράλληλος της XY .

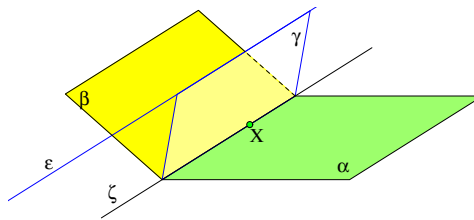
Απόδειξη: Αν η ε δεν ήταν παράλληλος αλλά έτεμνε την XY σε σημείο Σ , τότε το Σ θα ήταν και στην XY και στο α , άρα η XY δεν θα ήταν παράλληλος προς το α , αντίθετα με την υπόθεση. Το άτοπο αυτό δείχνει ότι η ε είναι παράλληλος της XY , ο.ε.δ.



Σχήμα 586: Ευθεία παράλληλη προς επίπεδο

Πρόταση 7.1.9 Μία ευθεία XY είναι παράλληλος προς επίπεδο α τότε και μόνον, όταν το α περιέχει ευθεία ε παράλληλο της XY .

Απόδειξη: Αν η XY είναι παράλληλος προς το επίπεδο α , θεωρήσε σημείο Z του α και το επίπεδο β που περιέχει την XY και το Z . Κατά την προηγούμενη πρόταση το β θα τέμνει το α κατά ευθεία παράλληλο της XY . Αντίστροφα, έστω ότι η XY είναι παράλληλος προς ευθεία ε του επιπέδου α και έστω ότι η XY τέμνει το επίπεδο α σε σημείο Σ . Κατά τον ορισμό οι ευθείες XY και ε περιέχονται σε επίπεδο β και η ε συμπίπτει με την τομή των α και β . Επίσης το Σ θα περιέχεται στην τομή των α και β , άρα θα είναι σημείο της ε . Τούτο όμως είναι άτοπο, διότι η ε υπετέθει παράλληλος της XY . Άρα η XY δεν μπορεί να τέμνει το α , ο.ε.δ.



Σχήμα 587: Τομή επιπέδων παραλλήλων προς ευθεία

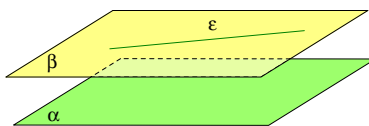
Πρόταση 7.1.10 Δύο τεμνόμενα επίπεδα παράλληλα προς ευθεία ε τέμνονται κατά ευθεία ζ παράλληλο της ε .

Απόδειξη: Έστω ότι τα επίπεδα α και β είναι παράλληλα προς την ευθεία ε και τέμνονται κατά ευθεία ζ . Έστω X σημείο της ζ . Κατά την Πρόταση 7.1.8 το επίπεδο γ που ορίζεται από την ε και το X θα τέμνει το α και το β κατά ευθείες παράλληλες της ε και διερχόμενες από το X . Αυτό συνεπάγεται ότι οι δύο αυτές ευθείες θα συμπίπτουν και θα συμπίπτουν επίσης με την τομή των α και β , ο.ε.δ.

Άσκηση 7.1.1 Έστω ότι τα επίπεδα α και β διέρχονται από την ευθεία ε που είναι παράλληλη προς επίπεδο ζ . Έστω επίσης ότι τα α και β τέμνουν το επίπεδο ζ . Δείξε οι τομές τους είναι δύο παράλληλες ευθείες του ζ .

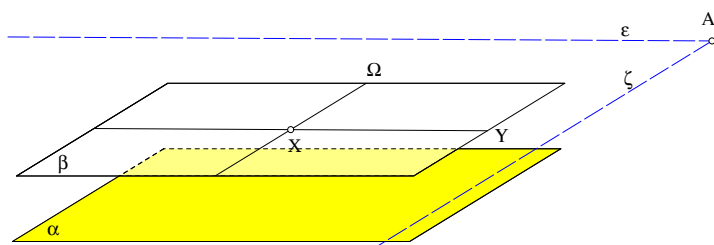
7.2 Παράλληλα επίπεδα

Πρόταση 7.2.1 Αν δύο επίπεδα α και β είναι παράλληλα τότε κάθε ευθεία του ενός είναι παράλληλη προς το άλλο επίπεδο.



Σχήμα 588: Ευθεία παράλληλη σε επίπεδο

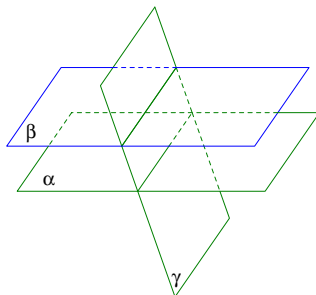
Απόδειξη: Αν η ευθεία ϵ του α έτεμνε το β σε σημείο X , τότε τα α και β θα είχαν το X κοινό σημείο, αντίθετα με την υπόθεση. Άρα η ϵ δεν μπορεί να τέμνει το β , ο.ε.δ.



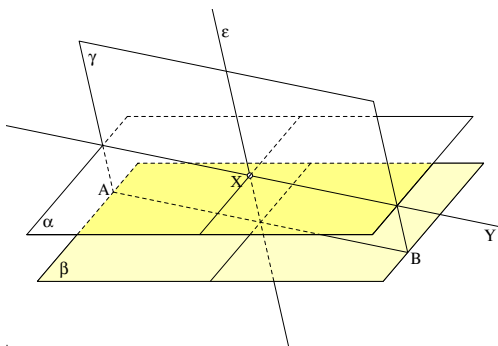
Σχήμα 589: Επίπεδο δύο παραλλήλων προς επίπεδο

Πρόταση 7.2.2 Το επίπεδο β δύο τεμνομένων ευθειών που είναι παράλληλες προς επίπεδο α είναι παράλληλο του α .

Απόδειξη: Έστω ότι το επίπεδο β των τεμνομένων ευθειών XY και $X\Omega$ τέμνει το επίπεδο α κατά ευθεία η . Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Προς τούτο θεωρήσε σημείο A εκτός των δύο επιπέδων και φέρε από το A την παράλληλη ϵ προς την XY και την παράλληλη ζ προς την $X\Omega$. Επειδή η ϵ είναι παράλληλη προς την XY δεν τέμνει ούτε το β ούτε το α («Πρόταση 7.1.7»), (Πρόταση 7.1.9». Άρα, κατά την Πρόταση 7.1.10 η τομή η των α και β θα είναι παράλληλη προς την ϵ . Ανάλογα και για την ζ δείχνουμε ότι θα είναι παράλληλη προς την η . Από το A λοιπόν θα έχουμε δύο παράλληλες προς την ζ , που είναι άτοπο και δείχνει ότι τα α και β δεν τέμνονται, ο.ε.δ.



Σχήμα 590: Επίπεδο τέμνον παράλληλα επίπεδα

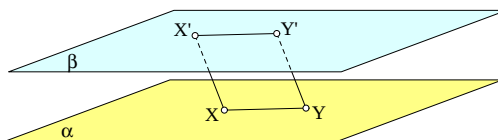


Σχήμα 592: Ευθεία τέμνουσα παράλληλα επίπεδα

Απόδειξη: Έστω ότι η ευθεία ε τέμνει το επίπεδο α στο σημείο X αλλά δεν τέμνει το παράλληλό του β . Φέρε τυχόν επίπεδο γ περιέχον την ε και τέμνον το α κατά την ευθεία XY . Επειδή τα επίπεδα α, β είναι παράλληλα και το γ τέμνει το α θα τέμνει και το β (Πόρισμα 7.2.1) και μάλιστα κατά παράλληλες ευθείες XY και AB (Πρόταση 7.2.3). Συνάγεται ότι στο επίπεδο γ έχουμε από το σημείο X δύο παράλληλες προς την AB : την XY και την ε , για την οποία υποθέσαμε ότι δεν τέμνει το β , άρα και την AB . Το άτοπο αυτό δείχνει ότι αν η ε τέμνει το α τότε πρέπει να τέμνει και το β , ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.2.3 Εάν ευθεία ε είναι παράλληλη προς επίπεδο α τότε θα είναι και παράλληλη προς κάθε επίπεδο β παράλληλο του α .

Πόρισμα 7.2.4 Από σημείο X εκτός επιπέδου β άγονται άπειρες ευθείες παράλληλες προς το επίπεδο β . Όλες αυτές οι ευθείες περιέχονται στο μοναδικό επίπεδο α που διέρχεται από το X και είναι παράλληλο του β .



Σχήμα 593: Παράλληλες μεταξύ παραλλήλων

Πρόταση 7.2.6 Παράλληλα επίπεδα αποτέμνουν επί παραλλήλων ευθειών ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

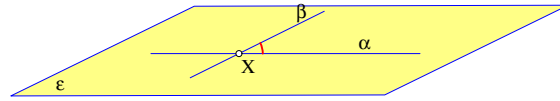
Απόδειξη: Έστω ότι τα παράλληλα επίπεδα α και β αποτέμνουν επί παραλλήλων ευθειών τα τμήματα XX' και YY' . Τότε το $XX'Y'Y$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα τα XX' και YY' είναι ίσα, ο.ε.δ.

Πρόταση 7.2.7 Αν το επίπεδο β είναι παράλληλο του α και το επίπεδο γ είναι παράλληλο του β , τότε το επίπεδο γ είναι και παράλληλο του α .

Απόδειξη: Αν τα α και γ δεν ήταν παράλληλα τότε από την τομή τους, που είναι ευθεία ε μη τέμνουσα το β , άρα παράλληλη προς αυτό, θα είχαμε δύο διαφορετικά επίπεδα παράλληλα προς το β , που είναι άτοπο (Πόρισμα 7.2.2). Συνεπώς τα α και γ πρέπει να είναι παράλληλα, ο.ε.δ.

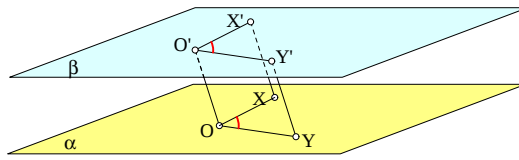
7.3 Γωνίες στον χώρο

Γωνίες στον χώρο μετράμε με τον τρόπο που τις μετράμε και στο επίπεδο. Δύο διαφορετικές και τεμνόμενες ευθείες α και β ορίζουν ένα ακριβώς επίπεδο ε (Πρόταση 7.1.2) και σε αυτό



Σχήμα 594: Γωνία στον χώρο

το επίπεδο μετράμε τις γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες με τον ίδιο τρόπο που το κάνουμε για τις γωνίες του επιπέδου (Παράγραφος 1.4).

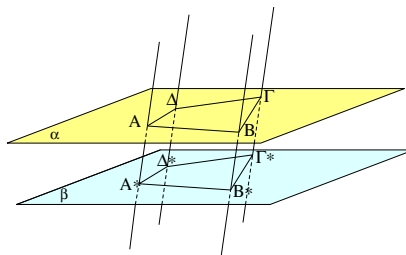


Σχήμα 595: Γωνίες με πλευρές παράλληλες

Πρόταση 7.3.1 Γωνίες με παράλληλες και ομόρροπες πλευρές είναι ίσες.

Απόδειξη: Έστω ότι οι δύο γωνίες XOY και $X'O'Y'$ έχουν αντίστοιχες πλευρές παράλληλες. Τότε περιέχονται σε διαφορετικά ή ταυτιζόμενα επίπεδα. Αν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, τότε κατά το Πόρισμα 1.15.10 σχηματίζουν ίσες γωνίες. Αν περιέχονται σε διαφορετικά επίπεδα τότε τα επίπεδα αυτά είναι παράλληλα (Πρόταση 7.2.2). Σε αυτήν την περίπτωση όρισε επί των πλευρών τους τα σημεία έτσι ώστε $|OX| = |O'X'|$ και $|OY| = |O'Y'|$. Τότε τα $OXX'O'$ και $OYY'O'$ είναι παραλληλόγραμμα και συνεπώς οι XX' και YY' είναι παράλληλες, άρα και το $XY Y'X'$ είναι παραλληλόγραμμο. Συνάγεται ότι τα τρίγωνα OXY και $O'X'Y'$ έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές, άρα είναι ίσα και συνεπώς οι γωνίες τους στα O και O' είναι ίσες, ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.3.1 Έστω δύο επίπεδα XOO' και YOO' τεμνόμενα κατά την ευθεία OO' . Δύο παράλληλα επίπεδα α και β που τέμνουν την OO' τέμνουν τα επίπεδα XOO' και YOO' κατά γωνίες ίσες ($|XOY| = |X'O'Y'|$ στο σχήμα-595).



Σχήμα 596: Ίσα πολύγωνα οριζόμενα από παράλληλη δέσμη

Πόρισμα 7.3.2 Έστω $AB\Gamma\Delta\ldots$ πολύγωνο στο επίπεδο α και παράλληλη δέσμη ευθειών διερχομένων διά των κορυφών του. Η δέσμη αυτή ορίζει σε κάθε επίπεδο β , παράλληλο του α , πολύγωνο $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*\ldots$ ίσο προς το $AB\Gamma\Delta\ldots$.

Απόδειξη: Κατά την Πρόταση 7.2.6 τα ABB^*A^* , $B\Gamma\Gamma^*B^*$, ... είναι όλα παραλληλόγραμμα, συνεπώς τα πολύγωνα έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες $|AB| = |A^*B^*|$, $|B\Gamma| = |B^*\Gamma^*|$, Κατά την Πρόταση 7.3.1 τα πολύγωνα έχουν αντίστοιχες γωνίες επίσης ίσες, ο.ε.δ.

Σχόλιο Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι η έννοια της γωνίας στο χώρο γενικεύεται και για ασύμβατες ευθείες, οι οποίες, εξ ορισμού, δεν είναι παράλληλες αλλά και δεν τέμνονται.

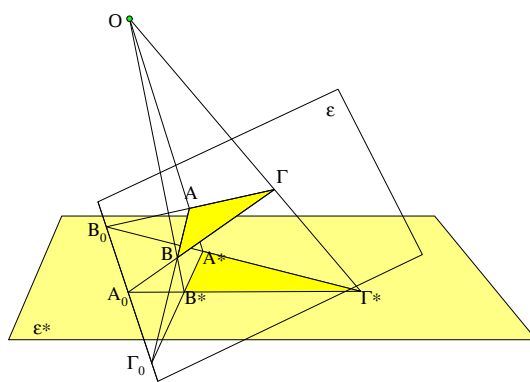
Άσκηση 7.3.1 Δείξε ότι αν οι ευθείες κ και λ είναι παράλληλες και περιέχονται αντίστοιχα στα τεμνόμενα επίπεδα α και β , τότε είναι και παράλληλες προς την ευθεία η της τομής των δύο επιπέδων.

Άσκηση 7.3.2 Δείξε ότι αν τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο και τέμνουν μιά τέταρτη σε διαφορετικά σημεία της, τότε και οι τέσσερις ευθείες είναι στο ίδιο επίπεδο.

Άσκηση 7.3.3 Δείξε ότι ένας κύκλος περιεχόμενος σε επίπεδο α και επίπεδο β , διαφορετικό του α , έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Άσκηση 7.3.4 Δείξε ότι δύο κύκλοι περιεχόμενοι σε δύο διαφορετικά επίπεδα α και β έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Άσκηση 7.3.5 Δείξε ότι αν οι αντίστοιχες πλευρές των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ τέμνονται, τότε οι ευθείες AA^* , BB^* και $\Gamma\Gamma^*$ ή διέρχονται από κοινό σημείο O ή είναι παράλληλες.

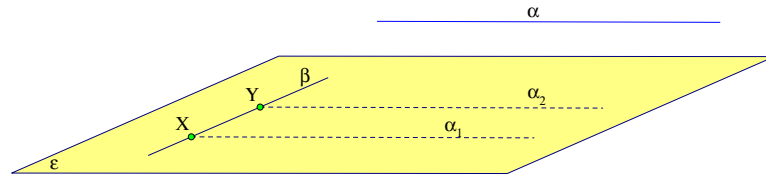


Σχήμα 597: Desargues στο χώρο

Υπόδειξη: Τα σημεία τομής A_0, B_0, Γ_0 των αντιστοίχων πλευρών των τριγώνων περιέχονται στην ευθεία που είναι η τομή των επιπέδων ϵ και ϵ^* των τριγώνων. Έστω ότι οι AA^* και BB^* τέμνονται στο O . Το O περιέχεται τότε στο επίπεδο των BB^* και $\Gamma\Gamma^*$, καθώς και στο επίπεδο των AA^* και $\Gamma\Gamma^*$. Άρα θα περιέχεται και στην τομή αυτών των δύο επιπέδων, που είναι η $\Gamma\Gamma^*$. Ανάλογη είναι η απόδειξη και στην περίπτωση της παραλληλίας των AA^* και BB^* .

7.4 Ασύμβατες ευθείες

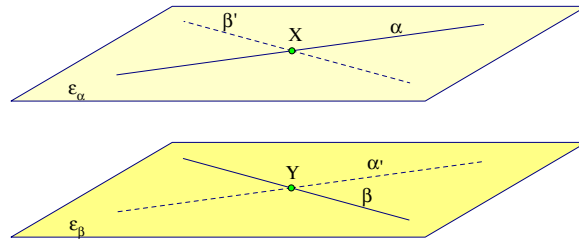
Όπως ήδη αναφέρθηκε (Παράγραφος 7.1) ασύμβατες λέγονται δύο ευθείες του χώρου για τις οποίες δεν υπάρχει επίπεδο στο οποίο να περιέχονται και οι δύο.



Σχήμα 598: Επίπεδο διά της β παράλληλο της ασυμβάτου α προς την β

Πρόταση 7.4.1 Αν a και b είναι ασύμβατες ευθείες, τότε υπάρχει ένα ακριβώς επίπεδο ε_b περιέχον την b και παράλληλο της a .

Απόδειξη: Από σημείο X της b φέρε παράλληλη α_1 της a . Το επίπεδο ε_b που περιέχει τις b και α_1 είναι παράλληλο της a (Πρόταση 7.1.9). Αν υπήρχε και άλλο επίπεδο ε περιέχον την a και παράλληλο της b , τότε η τομή τους, που είναι η ευθεία a , θα ήταν παράλληλη της b (Πρόταση 7.1.10), όπερ άτοπο, ο.ε.δ.



Σχήμα 599: Τα επίπεδα δύο ασυμβάτων ευθειών

Πρόταση 7.4.2 Δοθέντων ασυμβάτων ευθειών a και b υπάρχουν δύο ακριβώς παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ έτσι ώστε το πρώτο να περιέχει την a και το δεύτερο την b .

Απόδειξη: Θεώρησε τα επίπεδα ε_a και ε_b που ορίζονται στην προηγούμενη πρόταση. Αυτά είναι παράλληλα, διότι αν ετέμοντο, τότε η τομή τους θα ήταν και παράλληλη της a και παράλληλη της b (Πρόταση 7.1.8), που είναι άτοπο. Η προηγούμενη πρόταση δείχνει επίσης ότι δεν υπάρχει άλλο ζεύγος παραλλήλων επιπέδων ε' και ε'' περιέχον αντίστοιχα τις a και b . Διότι αν υπήρχε, και ήταν λ.χ. το ε' διαφορετικό του ε_a , τότε θα είχαμε δύο επίπεδα διά της a παράλληλα της b , όπερ άτοπο, ο.ε.δ.

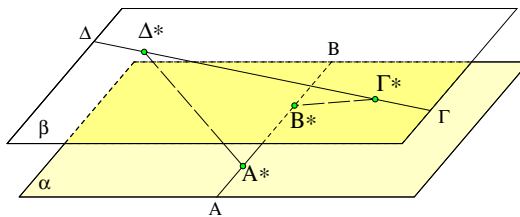
Η τελευταία πρόταση δείχνει την χαρακτηριστική ιδιότητα δύο ασυμβάτων ευθειών. Είναι απλά δύο ευθείες που περιέχονται σε δύο παράλληλα επίπεδα (επομένως δεν τέμνονται) αλλά δεν είναι παράλληλες. Η γωνία της ευθείας a και της παράλληλης β' της b από τυχόν σημείο X της a , όπως ορίσθηκε στην Πρόταση 7.4.1 είναι ανεξάρτητη της θέσης του σημείου X . Κατά την Πρόταση 7.3.1 είναι επίσης ίση με την γωνία των ευθειών b και α' , όπου α' παράλληλη της a από τυχόν σημείο Y της b . Η γωνία αυτή λέγεται **Γωνία των ασυμβάτων**. Στην περίπτωση που η γωνία αυτή είναι ορθή οι δύο ευθείες a και b λέγονται **Ασύμβατα κάθετες**.

Άσκηση 7.4.1 Δείξε ότι, αν οι ευθείες a και b είναι ασύμβατα κάθετες και οι a' και b' είναι παράλληλες αντίστοιχα των a και b , τότε και οι a' και b' είναι ή κάθετες (εάν τέμνονται) ή ασύμβατα κάθετες.

Άσκηση 7.4.2 Δείξε ότι δεν υπάρχουν περισσότερες από τρεις ευθείες του χώρου που είναι ανά δύο ασύμβατα κάθετες.

Άσκηση 7.4.3 Έστω a και b ασύμβατες και $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ τα παράλληλα επίπεδα που τις περιέχουν. Δείξε ότι για κάθε σημείο X εκτός αυτών των επιπέδων υπάρχει μία ακριβώς ευθεία διά του X που τέμνει και τις δύο ασύμβατες.

Άσκηση 7.4.4 Δίδονται τρεις ευθείες στο χώρο a, b και γ , που είναι, ανά δύο, ασύμβατες. Δείξε ότι υπάρχουν άπειρες διαφορετικές ευθείες δ που τέμνουν ταυτόχρονα και τις τρεις δοθείσες ευθείες.



Σχήμα 600: Ασύμβατες από σημεία επί ασυμβάτων

Άσκηση 7.4.5 Δίδονται τα διαφορετικά σημεία A^*, B^* στην ευθεία AB και Γ^*, Δ^* στην ασύμβατο $\Gamma\Delta$ της AB . Δείξε ότι και οι ευθείες $A^*\Delta^*$ και Γ^*B^* είναι ασύμβατες.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι οι ευθείες $A^*\Delta^*$ και Γ^*B^* δεν τέμνονται (1) και δεν είναι παράλληλες (2). (1) Αν ετέμνοντο, τότε το σημείο τομής, πες X , θα ήταν και στο επίπεδο $B^*\Gamma^*\Delta^*$ και στο $A^*\Gamma^*\Delta^*$ που τέμνονται κατά την ευθεία $\Gamma^*\Delta^*$, άρα το X θα ήταν επί της $\Gamma^*\Delta^*$. Ανάλογα προκύπτει ότι το X θα ήταν και επί της A^*B^* , πράγμα άτοπον. (2) Αν οι $A^*\Delta^*$ και $B^*\Gamma^*$ ήταν παράλληλες, τότε θα υπήρχε επίπεδο ε , το οποίο θα περιείχε και τις δύο. Τότε όμως το ε θα περιείχε και τις ευθείες A^*B^* και $\Gamma^*\Delta^*$, πράγμα επίσης άτοπον.

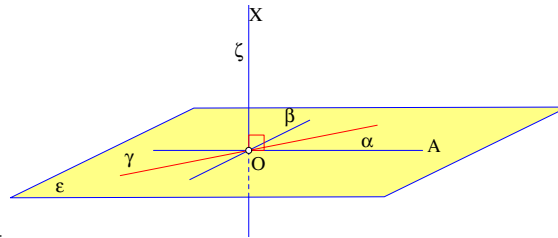
Το σχήμα $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*$ της προηγούμενης άσκησης λέγεται **Στρεβλό Τετράπλευρο** και προφανώς είναι η γενίκευση του επιπέδου τετραπλεύρου στον χώρο. Μία ιδιότητα κοινή με τα επίπεδα τετράπλευρα, που αποδεικνύεται και με τον ίδιο τρόπο (Πρόταση 2.7.2) είναι αυτή της επόμενης άσκησης.

Άσκηση 7.4.6 Τα μέσα των πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 7.4.7 Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα απέναντι πλευρών στρεβλού τετραπλεύρου τέμνονται στο μέσον τους.

7.5 Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

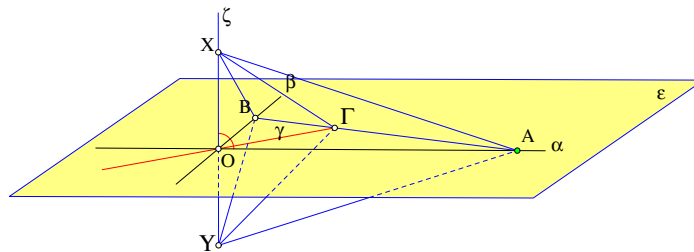
Μία ευθεία ζ λέγεται **Κάθετη στο επίπεδο** ε , όταν η ζ τέμνει το ε σε ένα σημείο O και είναι κάθετη σε δύο διαφορετικές ευθείες α και β του ε που διέρχονται από το O . Λέμε τότε επίσης ότι το επίπεδο ε είναι κάθετο στην ευθεία ζ . Την εικόνα της καθετότητας ευθείας και



Σχήμα 601: Ευθεία κάθετη σε επίπεδο

επιπέδου συμπληρώνουν οι επόμενες προτάσεις που δείχνουν ότι ένα επίπεδο κάθετο σε μία ευθεία OX παράγεται από μία ευθεία OA που περιστρέφεται περί τον άξονα OX παραμένοντας συνεχώς κάθετη προς αυτόν.

Πρόταση 7.5.1 Ευθεία XY τέμνουσα επίπεδο ε στο σημείο O και κάθετη σε αυτό είναι και κάθετη σε κάθε ευθεία του ε που διέρχεται από το O .



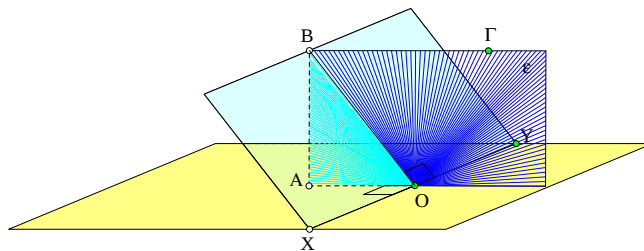
Σχήμα 602: Καθετότητα της XY προς όλες τις ευθείες OG

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία ζ είναι κάθετη στις διερχόμενες διά του O ευθείες α και β του επιπέδου ε . Έστω επίσης γ τυχούσα ευθεία διά του O , διαφορετική των α και β . Θα δείξουμε ότι η XY είναι κάθετη και προς την γ . Προς τούτο παίρνουμε τυχόν σημείο Γ της γ και φέρνουμε βοηθητική ευθεία του ε διά του Γ , που τέμνει τις α και β στα σημεία A και B . Ας πάρουμε επίσης τα X, Y επί της ζ να ισαπέχουν από το O . Τότε τα τρίγωνα XOA, YOA είναι ορθογώνια με ίσες κάθετες πλευρές, άρα ίσα και συνεπώς οι AX και AY θα είναι ίσες. Ανάλογα δείχνουμε και ότι οι BX και BY είναι ίσες. Τούτο συνεπάγεται ότι τα τρίγωνα ABX και ABY είναι ίσα (ΠΠΠ-κριτήριο). Συνεπώς και τα τρίγωνα BGX και BGY θα είναι ίσα (ΠΓΠ-κριτήριο), άρα οι GX και GY θα είναι ίσες, το τρίγωνο XGY θα είναι ισοσκελές και επειδή το O είναι το μέσον της XY , η GO θα είναι κάθετος της XY , ο.ε.δ.

Πόρισμα 7.5.1 Αν το επίπεδο ε είναι κάθετο στην XY στο σημείο O , τότε κάθε ευθεία OA κάθετη στην XY στο σημείο O περιέχεται στο επίπεδο ε .

Απόδειξη: Αν η ευθεία OA είναι κάθετη στην XY στο σημείο O , αυτό σημαίνει ότι στο επίπεδο ζ που περιέχει την XY και την OA οι δύο αυτές ευθείες είναι κάθετες. Αν η OA

δεν περιήχεται στο επίπεδο ε , τότε το επίπεδο ζ θα έτεμνε το ε κατά ευθεία OA' , κατά την προηγούμενη πρόταση, επίσης κάθετο στην XY άρα στο επίπεδο ζ θα είχαμε δύο καθέτους προς την XY από το O . Το άτοπο αυτό δείχνει ότι η OA περιέχεται στο ε , ο.ε.δ.

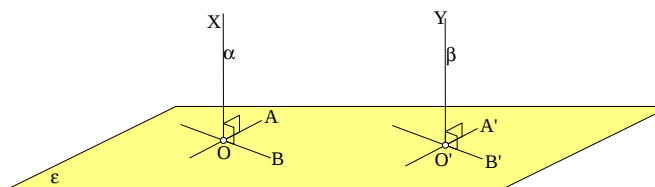


Σχήμα 603: Μεσοκάθετο επίπεδο του XY

Πρόταση 7.5.2 *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου A τα οποία ισαπέχουν από δύο σημεία X και Y είναι ένα επίπεδο ε κάθετο στο μέσον O του ευθυγράμμου τμήματος XY .*

Απόδειξη: Θεώρησε τυχόν επίπεδο περιέχον το XY και την μεσοκάθετο (Πόρισμα 1.9.1) OA σε αυτό το επίπεδο. Ανάλογα όρισε και την μεσοκάθετο OB του XY για ένα δεύτερο επίπεδο περιέχον το XY . Οι δύο ευθείες OA και OB ορίζουν ένα επίπεδο ε , το οποίο κατά την Πρόταση 7.5.1 θα έχει όλες τις ευθείες του OG τις διερχόμενες διά του O κάθετες στο XY , άρα συμπίπτουσες με τις μεσοκαθέτους των αντιστοίχων επιπέδων που περιέχουν το XY και το Γ . Το επίπεδο ε λοιπόν που ορίζεται από τις OA και OB περιέχεται στον γεωμετρικό τόπο. Αντίστροφα, αν ένα σημείο Γ περιέχεται στον τόπο, τότε η OG θα είναι κάθετος στην XY στο O και κατά το Πόρισμα 7.5.1 θα περιέχεται στο ε , άρα το Γ θα περιέχεται στο επίπεδο ε . Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του ότι το ε ταυτίζεται με τον αναφερόμενο γεωμετρικό τόπο, ο.ε.δ.

Το επίπεδο που ορίζεται από την προηγούμενη πρόταση ονομάζεται **Μεσοκάθετο επίπεδο** του ευθυγράμμου τμήματος XY .

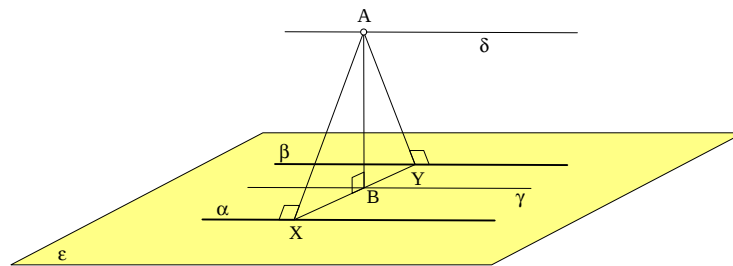


Σχήμα 604: Κάθετες στο ε είναι παράλληλες

Πρόταση 7.5.3 *Αν ευθεία a είναι κάθετος σε επίπεδο ε τότε και κάθε παράλληλος ευθεία β της a θα είναι κάθετος στο ε . Και αντίστροφα, δύο ευθείες a και β κάθετες στο επίπεδο ε είναι παράλληλες.*

Απόδειξη: Έστω ότι η κάθετος $a=XO$ τέμνει το ε στο σημείο O και OA , OB είναι δύο ευθείες του ε προς τις οποίες η a είναι κάθετος (κατά τον ορισμό). Έστω τώρα O' το σημείο τομής της παραλλήλου $\beta=Y'O'$ της a με το ε . Από το O' φέρε τις $O'A'$, $O'B'$ αντίστοιχα

παράλληλες προς τις OA και OB . Κατά την Πρόταση 7.3.1 οι γωνίες XOA και YOA' είναι ίσες και οι γωνίες XOB και $XO'B'$ είναι επίσης ίσες. Αυτό συνεπάγεται ότι η $\beta = YO'$ είναι κάθετη στις OA' και OB' , άρα, κατά τον ορισμό, κάθετη στο επίπεδο ϵ . Αντίστροφα, αν οι α και β είναι κάθετες στο ϵ αλλά η β δεν είναι παράλληλη προς την α , τότε φέρε από το O' την παράλληλο α' προς την α . Κατά το πρώτο μέρος της απόδειξης η α' θα είναι κάθετος στο επίπεδο ϵ , άρα το επίπεδο των α' και β θα τέμνει το ϵ κατά μία ευθεία γ η οποία θα είναι κάθετος και στην α' και στην β , πράγμα άτοπο. Το άτοπο δείχνει ότι η β πρέπει να είναι παράλληλος της α , ο.ε.δ.



Σχήμα 605: Κατασκευή καθέτου από σημείο

Κατασκευή 7.5.1 Να κατασκευασθεί η κάθετος προς επίπεδο ϵ από σημείο A εκτός αυτού.

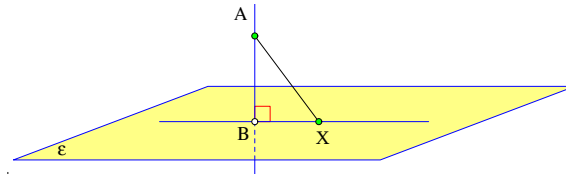
Κατασκευή: Θεώρησε δύο παράλληλες ευθείες α και β στο επίπεδο ϵ και στα αντίστοιχα επίπεδα που ορίζονται από τις α , β και το σημείο A φέρε τις κάθετες AX και AY στις α και β από το A . Σχημάτισε το τρίγωνο AXY και φέρε το ύψος του AB προς την XY . Η AB είναι η ζητούμενη κάθετος από το A προς το επίπεδο ϵ . Για να το δείξουμε αρκεί να βρούμε δύο ευθείες του ϵ κάθετες στην AB στο B . Προφανώς μία είναι η XY . Η άλλη είναι η παράλληλος γ των α και β από το B . Το ότι και αυτή είναι κάθετος στην AB φαίνεται ως εξής. Έστω δ η παράλληλος των α και β από το A . Η δ είναι κάθετος στην AX και στην AY , άρα είναι κάθετος στο επίπεδό τους. Η γ είναι παράλληλος της δ , άρα και αυτή κάθετος στο επίπεδο AXY (Πρόταση 7.5.3). Κατά την Πρόταση 7.5.1 η ευθεία γ θα είναι και κάθετος στην BA , άρα και η AB θα είναι κάθετος στην γ , ο.ε.δ.

Πρόταση 7.5.4 Από σημείο A εκτός επιπέδου ϵ άγεται μία και μόνον κάθετος προς αυτό.

Απόδειξη: Η προηγούμενη κατασκευή δείχνει ότι υπάρχει μία κάθετος από το A . Αν υπήρχε και δεύτερη AB' , τότε το τρίγωνο ABB' θα είχε στα B και B' ορθές γωνίες, άρα το άθροισμα των γωνιών του θα ήταν μεγαλύτερο του π . Το άτοπο αυτό δείχνει ότι δεν μπορεί να υπάρχει δεύτερη κάθετος AB' από το A , ο.ε.δ.

Για κάθε σημείο A εκτός του επιπέδου ϵ , το αντίστοιχο σημείο B , στο οποίο η κάθετος από το A τέμνει το ϵ , λέγεται **Προβολή του σημείου A στο επίπεδο ϵ** . Για κάθε σημείο A του επιπέδου ϵ θεωρούμε ότι η προβολή του στο ϵ ταυτίζεται με το ίδιο το σημείο. Γενικότερα, το σύνολο των προβολών X' των σημείων X ενός σχήματος Σ του χώρου σε επίπεδο ϵ είναι ένα σχήμα Σ' του επιπέδου ϵ που λέγεται **Προβολή του σχήματος Σ στο επίπεδο**. Το μήκος $|AB|$ της καθέτου από το σημείο A μέχρι την προβολή του B στο επίπεδο ϵ λέγεται **Απόσταση του σημείου A από το επίπεδο ϵ** .

Άσκηση 7.5.1 Δείξε ότι η προβολή ευθείας a του χώρου σε επίπεδο ε είναι ευθεία a' του ε και ο λόγος τριών σημείων της a ισούται με τον λόγο των προβολών τους επί της a' .



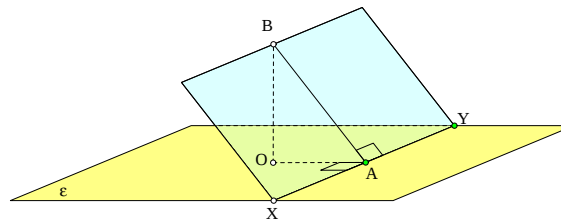
Σχήμα 606: Απόσταση σημείου από επίπεδο

Πρόταση 7.5.5 Η απόσταση $|AB|$ του σημείου A από το επίπεδο ε είναι μικρότερη από την απόσταση $|AX|$ για κάθε σημείο X του επιπέδου ε διαφορετικό από την προβολή B του A στο επίπεδο.

Απόδειξη: Για κάθε τέτοιο σημείο X το ABX είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές AB , BX και υποτείνουσα την AX , άρα $|AX| > |AB|$, ο.ε.δ.

Αν ε και ε' είναι παράλληλα επίπεδα τότε η απόσταση $|AB|$ ενός σημείου A του ε από το ε' δεν εξαρτάται από την θέση του A στο ε (Πρόταση 7.2.6) και λέγεται **Απόσταση των δύο επιπέδων ε και ε'** . Παρόμοια αν η ευθεία a είναι παράλληλος του επιπέδου ε και A είναι σημείο της ευθείας a , η απόσταση $|AB|$ δεν εξαρτάται της θέσης του A στην a και λέγεται **Απόσταση της παράλληλης ευθείας από το επίπεδο**. Δοθέντων δύο ασυμβάτων ευθειών η απόσταση των παραλλήλων επιπέδων που τις περιέχουν (Πρόταση 7.4.2) λέγεται **Απόσταση των ασυμβάτων ευθειών**.

Κατασκευή 7.5.2 Να κατασκευασθεί η κάθετος προς επίπεδο ε από σημείο O εντός αυτού.



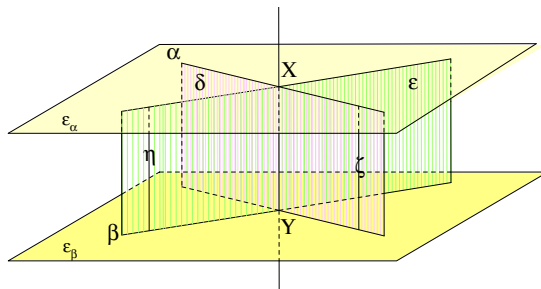
Σχήμα 607: Κατασκευή καθέτου από σημείο O επιπέδου

Κατασκευή: Θεώρησε τυχούσα ευθεία XY του ε μη περιέχουσα το O . Από το O φέρε κάθετο OA στην ευθεία XY . Θεώρησε κατόπιν τυχόν επίπεδο διερχόμενο διά της XY και στο επίπεδο αυτό φέρε την AB επίσης κάθετο στην XY . Εάν η γωνία OAB είναι ορθή στρέψε το επίπεδο περί την XY ώστε να γίνει οξεία. Στο επίπεδο των σημείων OAB φέρε την κάθετο OB στην OA από το σημείο O αυτής. Αυτή είναι η ζητούμενη κάθετος. Τούτο διότι εκ κατασκευής η OB είναι κάθετη στην OA αλλά και στην XY . Άρα η OB είναι κάθετος σε δύο ευθείες του επιπέδου ε , άρα και κάθετος σε αυτό, ο.ε.δ.

Πρόταση 7.5.6 Από σημείο O εντός επιπέδου ε άγεται μία και μόνον κάθετος προς αυτό.

(2): Αν η α είναι κάθετη στο επίπεδο των β, δ και η γ κάθετη στην δ , τότε η δ είναι κάθετη στην γ και ασύμβατα κάθετη στην α , άρα και στο επίπεδό τους καθώς και σε κάθε ευθεία του επιπέδου τους που διέρχεται από το X , όπως η β .

(3): Αν η δ είναι κάθετη στο επίπεδο των β, γ και η α είναι κάθετη στην β , τότε η α είναι κάθετη στην β και ασύμβατα κάθετη στην δ , άρα και στο επίπεδό τους, ο.ε.δ.



Σχήμα 610: Κοινή κάθετος δύο ασυμβάτων ευθειών

Πρόταση 7.5.9 Υπάρχει μία ακριβώς ευθεία XY ταυτόχρονα κάθετη σε δύο ασύμβατες ευθείες α και β .

Απόδειξη: Θεώρησε τα δύο παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ που περιέχουν αντίστοιχα τις ασύμβατες α και β (Πρόταση 7.4.2). Επίσης από τυχόν σημείο της α φέρε κάθετο ζ προς αυτά τα επίπεδα και από τυχόν σημείο της β φέρε κάθετο η προς αυτά τα επίπεδα. Σχηματίζονται δύο νέα επίπεδα, το δ που περιέχει την α και ζ και το ε που περιέχει την β και η . Τα δύο αυτά επίπεδα είναι παράλληλα προς μία ευθεία κάθετη στα δύο επίπεδα (Πρόταση 7.1.9), άρα και η τομή τους θ θα είναι παράλληλη της καθέτου στα δύο επίπεδα (Πρόταση 7.1.10), επομένως και αυτή κάθετη στα δύο επίπεδα. Η θ συναντά την ευθεία α σε σημείο X , διότι η παράλληλός της ζ την συναντά εξ υποθέσεως. Παρόμοια η θ συναντά και την β σε σημείο Y , άρα η θ ταυτίζεται με την XY . Η XY είναι μοναδική ταυτόχρονα κάθετος και στην α και στην β . Τούτο, διότι αν υπήρχε και δεύτερη XY' κάθετος στις α και β , τότε η XY' θα ήταν κάθετος και στα παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$, συνεπώς θα ήταν παράλληλος της XY (Πρόταση 7.5.3). Αυτό θα είχε όμως ως συνέπεια η α , που περιέχει τα X, X' και η β , που περιέχει τα Y, Y' να ήταν στο ίδιο επίπεδο, πράγμα άτοπον, ο.ε.δ.

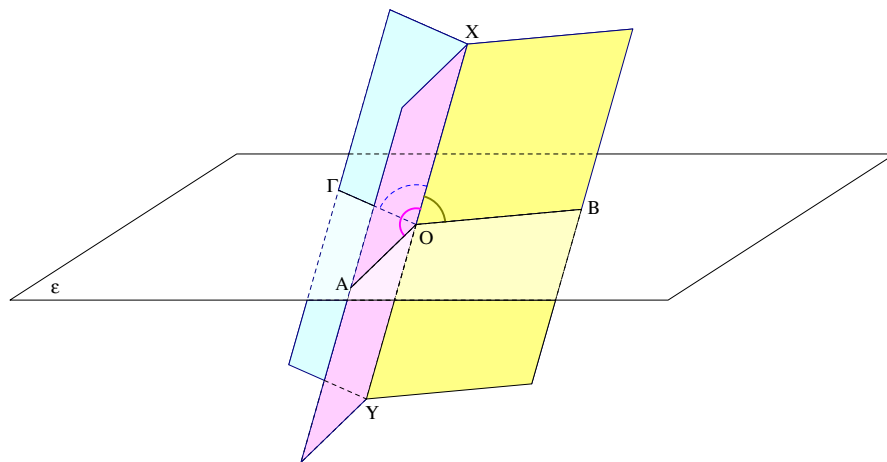
Η ευθεία XY , που εξασφαλίζεται από την προηγούμενη πρόταση, ονομάζεται **Κοινή κάθετος των ασυμβάτων** α και β .

Άσκηση 7.5.2 Δείξε ότι τα μεσοκάθετα επίπεδα των πλευρών τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται κατά ευθεία διερχόμενη από το περίκεντρο O του τριγώνου και κάθετη στο επίπεδο αυτού. Δείξε επίσης ότι για κάθε σημείο X αυτής της ευθείας και κάθε σημείο Σ του περικύκλου κ το μήκος $X\Sigma$ είναι σταθερό όταν το Σ μεταβάλλεται στον κ .

Υπόδειξη: Έστω OX τη τομή των μεσοκαθέτων επιπέδων των τμημάτων AB και $B\Gamma$. Κάθε σημείο X αυτής της ευθείας θα έχει $|XA| = |XB|$, ως ανήκον στο μεσοκάθετο του AB και $|XB| = |X\Gamma|$ ως ανήκον στο μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Από τις δύο συνάγεται $|XA| = |X\Gamma|$, άρα το X είναι στο μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Η OX είναι ασύμβατα κάθετη στις AB και $B\Gamma$, άρα (Άσκηση 7.5.7) κάθετη στο ε . Αυτό δείχνει το πρώτο μέρος της άσκησης. Για το δεύτερο θεώρησε σημείο Σ του περικύκλου κ και το τρίγωνο $XO\Sigma$. Αυτό είναι ορθογώνιο στο O και ίσο με το $XO\Gamma$, ως έχον αντίστοιχα ίσες καθέτους με αυτό, άρα $|X\Sigma| = |X\Gamma|$.

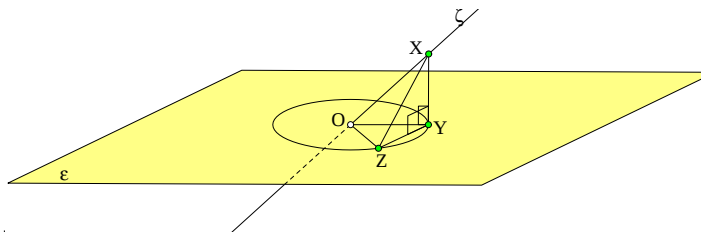
7.6 Γωνία ευθείας και επιπέδου

Στον χώρο εμφανίζεται μία νέα δυνατότητα: η **Γωνία ευθείας και επιπέδου**. Μία ευθεία XY που τέμνει επίπεδο ε στο σημείο O ορίζει διάφορες γωνίες μέσω των επιπέδων που περιέχουν την XY . Πράγματι, κάθε σημείο A του επιπέδου ε ορίζει το επίπεδο που περιέχει την XY και το A . Αυτό τέμνει το ε κατά ευθεία OA και συνεπώς ορίζει μία γωνία XOA . Από όλες τις γωνίες που δημιουργούνται κατ' αυτόν τον τρόπο υπάρχει μία που είναι η ελάχιστη δυνατή. Η γωνία αυτή ονομάζεται γωνία της ευθείας XY και του επιπέδου ε . Την ύπαρξη αυτής της γωνίας εξασφαλίζει η επόμενη πρόταση.



Σχήμα 613: Γωνία ευθείας XY και επιπέδου ε

Πρόταση 7.6.1 Έστω ευθεία ζ τέμνουσα το επίπεδο ε σε ένα σημείο και μή-κάθετος προς αυτό. Έστω X τυχόν σημείο της ευθείας ζ διαφορετικό της τομής O της ζ με το ε . Γιά κάθε επίπεδο XOZ περιέχον την ζ θεώρησε την γωνία XOZ που σχηματίζεται από την ζ και την τομή OZ αυτού του επιπέδου με το ε . Από όλες αυτές τις γωνίες η ελάχιστη είναι η XOY , όπου Y η προβολή του X στο επίπεδο ε .



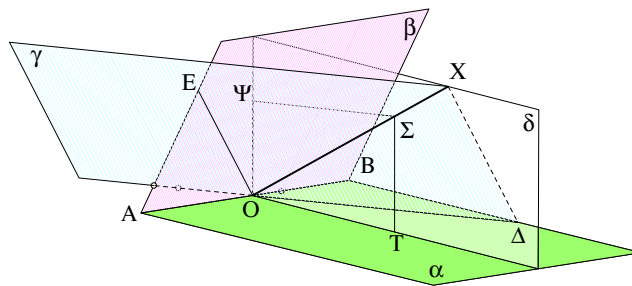
Σχήμα 614: Ορισμός γωνίας ευθείας και επιπέδου

Απόδειξη: Θεώρησε τον κύκλο του ε με κέντρο O και ακτίνα OY . Κάθε επίπεδο που περιέχει την ζ τέμνει το επίπεδο κατά μία ευθεία OZ διερχόμενη διά του O και ορίζει δύο σημεία επί του κύκλου. Έστω Z ένα εξ αυτών. Το τρίγωνο XYZ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα XZ μεγαλύτερη της καθέτου XY . Συνεπώς τα τρίγωνα XOZ και XOY έχουν τις πλευρές τους τις προσκείμενες στην κορυφή τους O αντίστοιχα ίσες και την απέναντι πλευρά XZ

μεγαλύτερη της απέναντι πλευράς XY . Από το Πόρισμα 1.10.10 έπεται ότι η γωνία XOZ θα είναι μεγαλύτερη της XOY , ο.ε.δ.

Σχόλιο Κατ' αυτόν τον ορισμό της γωνίας ευθείας και επιπέδου θα πρέπει μία ευθεία που σχηματίζει ορθή γωνία με το επίπεδο να συμπίπτει με μία κάθετο στο επίπεδο, με την έννοια που δώσαμε στην Παράγραφο 7.5. Το ότι αυτό συμβαίνει προκύπτει από την παρατήρηση ότι εάν η γωνία XOZ είναι ελάχιστη, τότε η παραπληρωματική της είναι μέγιστη, μεταξύ όλων των γωνιών που προκύπτουν στρέφοντας την OZ περί το O στο επίπεδο ε (σχήμα 614). Έτσι, αν το ελάχιστο αυτό είναι μία ορθή, τότε θα συμπίπτει με το μέγιστο και συνεπώς όλες οι γωνίες XOZ θα είναι ορθές.

Άσκηση 7.6.1 Δείξε ότι δύο παράλληλες ευθείες σχηματίζουν τις ίδιες γωνίες με επίπεδο ε .



Σχήμα 615: Ελάχιστη γωνία μεταξύ δύο επιπέδων

Άσκηση 7.6.2 Δύο επίπεδα α και β τέμνονται κατά την ευθεία AB . Ευθεία OX είναι κάθετη στην AB στο σημείο της O και περιέχεται ανάμεσα στα δύο επίπεδα. Έστω δ το επίπεδο που διέρχεται από το O και είναι κάθετο στην AB . Δείξε ότι κάθε άλλο επίπεδο γ , που περιέχει την OX , τέμνει τα α και β κατά γωνία ΔOE , που είναι μεγαλύτερη της γωνίας $TO\Psi$ κατά την οποία τέμνει το επίπεδο δ τα α και β .

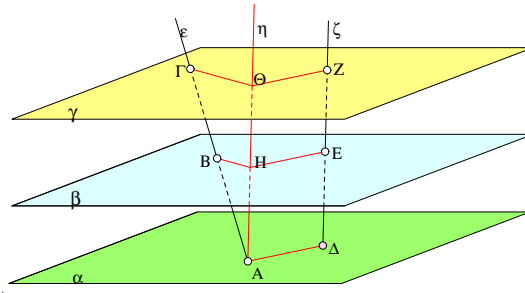
Υπόδειξη: Κατ' αρχήν το επίπεδο δ , ως κάθετο στην AB στο O , θα περιέχει και κάθε ευθεία κάθετη στην AB στο O , άρα και την OX . Επίσης, για τυχόν σημείο Σ της OX , το δ θα περιέχει τις ευθείες ΣT και $\Sigma\Psi$, όπου T και Ψ οι προβολές του Σ στα α και β αντιστοίχως. Από την προηγούμενη πρόταση, η γωνία ΣOT είναι μικρότερη της ΣOD . Το ίδιο και η γωνία $\Sigma O\Psi$ είναι μικρότερη της ΣOE , άρα και

$$|\angle TO\Psi| = |\angle \Sigma OT| + |\angle \Sigma O\Psi| < |\angle \Sigma OD| + |\angle \Sigma OE| = |\angle \Delta OE|.$$

Άσκηση 7.6.3 Δείξε ότι n ευθείες του χώρου που τέμνονται ανά δύο, ή διέρχονται όλες από κοινό σημείο ή περιέχονται στο ίδιο επίπεδο.

Υπόδειξη: Δείξε πρώτα την πρόταση για $n=3$. Κατόπιν χρησιμοποίησε αυτήν την περίπτωση για την απόδειξη της γενικής πρότασης.

7.7 Θεώρημα του Θαλή στο χώρο



Σχήμα 616: Ευθείες τεμνόμενες υπό παραλλήλων επιπέδων

Πρόταση 7.7.1 *Παράλληλα επίπεδα αποτέμνουν από τέμνουσες αυτά ευθείες τμήματα ανάλογα.*

Απόδειξη: Έστω ότι οι ευθείες ϵ και ζ τέμνουν τα επίπεδα α, β, γ στα σημεία αντίστοιχα (A, B, Γ) και (Δ, E, Z) . Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|\Delta E|}{|EZ|}.$$

Προς τούτο θεωρήσε ευθεία η παράλληλο της ζ από το σημείο A και τέμνουσα τα επίπεδα β και γ αντίστοιχα στα σημεία H και Θ . Κατά την Πρόταση 7.2.6

$$|\Delta E| = |AH|, |EZ| = |H\Theta| \Rightarrow \frac{|\Delta E|}{|EZ|} = \frac{|AH|}{|H\Theta|}.$$

Κατά την του Θαλή εφαρμοζόμενη στο επίπεδο των ευθειών (ϵ, η) (Πρόταση 3.8.1) έχουμε

$$\frac{|AB|}{|B\Gamma|} = \frac{|AH|}{|H\Theta|}.$$

Τούτη συνδυαζόμενη με την προηγούμενη οδηγεί στην απόδειξη.

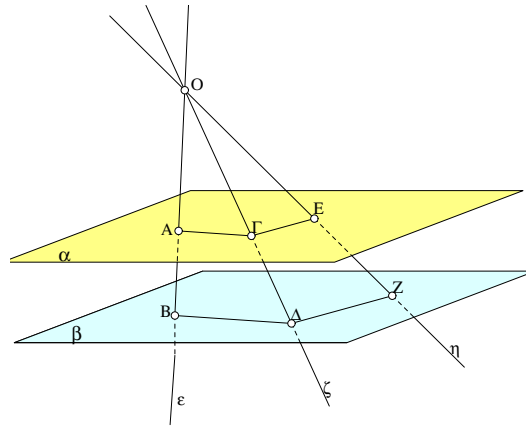
Πρόταση 7.7.2 *Ευθύγραμμα τμήματα οριζόμενα από σημειακή δέσμη σε παράλληλα επίπεδα είναι ανάλογα.*

Απόδειξη: Έστω ότι οι ευθείες ϵ, ζ και η , διερχόμενες διά του σημείου O τέμνουν τα επίπεδα α και β αντίστοιχα στα σημεία (A, Γ, E) και (B, Δ, Z) . Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{|A\Gamma|}{|\Gamma E|} = \frac{|B\Delta|}{|\Delta Z|}.$$

Κατά το Πόρισμα 3.7.3 εφαρμοζόμενο στο επίπεδο των ευθειών (ϵ, ζ) έχουμε ότι

$$\frac{|A\Gamma|}{|B\Delta|} = \frac{|O\Gamma|}{|O\Delta|}.$$



Σχήμα 617: Σημειακή δέσμη και παράλληλα επίπεδα

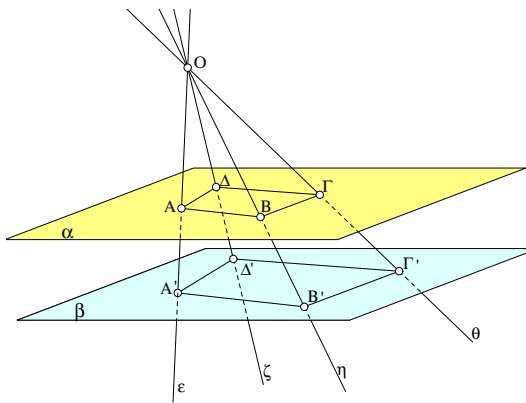
Επίσης εφαρμόζοντας το ίδιο πόρισμα στο επίπεδο των ευθειών (ζ,η) έχουμε ότι

$$\frac{|OG|}{|OD|} = \frac{|GE|}{|DZ|}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις παίρνουμε την ζητούμενη, ο.ε.δ.

Σχόλιο Η προηγούμενη πρόταση δείχνει ότι το θεώρημα του Θαλή στην μορφή της Πρότασης 3.8.2 που ισχύει για σημειακές δέσμες του επιπέδου επεκτείνεται και σε σημειακές δέσμες ευθειών στο χώρο.

Πόρισμα 7.7.1 Έστω $AB\Gamma\Delta\ldots$ πολύγωνο στο επίπεδο α και σημείο O εκτός του επιπέδου. Σε κάθε επίπεδο β παράλληλο του α η σημειακή δέσμη ευθειών διά του O ορίζει πολύγωνο $A'B'\Gamma'\Delta'\ldots$ όμοιο του $AB\Gamma\Delta\ldots$.

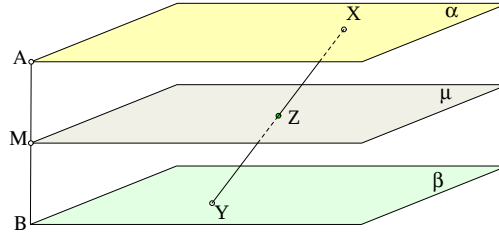


Σχήμα 618: Όμοια πολύγωνα σε παράλληλα επίπεδα

Απόδειξη: Το πόρισμα λέει ότι οι ευθείες $OA, OB, OG\ldots$ που ενώνουν το σημείο O με τις κορυφές του πολυγώνου ορίζουν σε παράλληλο επίπεδο β του α πολύγωνο $A'B'\Gamma'\ldots$ όμοιο του $AB\Gamma\Delta\ldots$. Η ομοιότητα εδώ σημαίνει, όπως και στην περίπτωση δύο πολυγώνων του ίδιου επιπέδου (Παράγραφος 3.10), ότι οι πλευρές των δύο πολυγώνων είναι ανάλογες

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'\Gamma'|}{|B\Gamma|} = \frac{|G'\Delta'|}{|G\Delta|} = \ldots \kappa,$$

όπου κ σταθερά, και οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες. Η ισότητα των λόγων προκύπτει από την ομοιότητα των ζευγών τριγώνων $(\text{ΟΑ}'\text{Β}', \text{ΟΑΒ})$, $(\text{ΟΒ}'\Gamma', \text{ΟΒ}\Gamma)$, $(\text{Ο}\Gamma'\Delta', \text{Ο}\Gamma\Delta)$, ... που με την σειρά της προκύπτει από την προηγούμενη απόδειξη. Η ισότητα των γωνιών προκύπτει από το γεγονός ότι οι οι πλευρές των αντιστοίχων γωνιών, όπως η $\text{Α}'\text{Β}'\Gamma'$ και $\text{ΑΒ}\Gamma$ είναι παράλληλες (Πρόταση 7.3.1), ο.ε.δ.



Σχήμα 619: Μεσοπαράλληλο επίπεδο των επιπέδων α και β

Πρόταση 7.7.3 Ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M ευθυγράμμων τμημάτων XY που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλα επίπεδα α και β , είναι επίπεδο μ που ισαπέχει από τα α και β .

Απόδειξη: Θεώρησε ένα τμήμα AB με άκρα στα α και β και μέσον M . Από το M φέρε το παράλληλο επίπεδο μ προς τα α, β . Κατά την Πρόταση 7.7.1 και κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα XY θα έχει σημείο τομής Z με το μ έτσι ώστε $\frac{|ZX|}{|ZY|} = \frac{|MA|}{|MB|} = 1$. Άρα το Z θα είναι το μέσον του XY . Συνεπώς κάθε σημείο του μ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο. Γιά το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε σημείο του τόπου περιέχεται στο μ , θεωρήσε τυχόν τμήμα XY και το μέσον του Z και φέρε από το Z παράλληλο επίπεδο προς τα α και β . Και πάλι κατά την Πρόταση 7.7.1 αυτό θα τέμνει το AB στο μέσον του, άρα θα ταυτίζεται με το μ , ο.ε.δ.

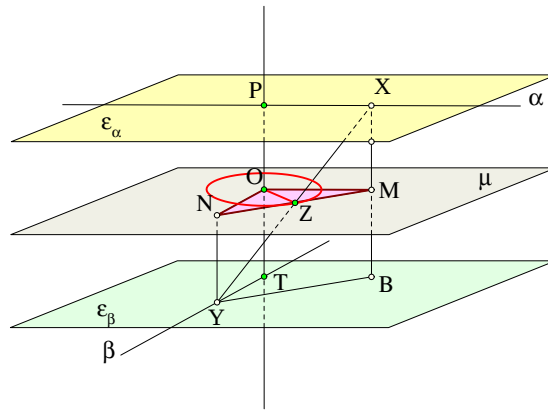
Το επίπεδο που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση λέγεται **Μεσοπαράλληλο επίπεδο** των α και β .

Άσκηση 7.7.1 Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων M ευθυγράμμων τμημάτων XY που έχουν τα άκρα τους επί δύο ασυμβάτων ευθειών α και β είναι ένα επίπεδο ε παράλληλο και ισαπέχον από τις α και β .

Υπόδειξη: Θεώρησε τα δύο παράλληλα επίπεδα η, ζ που περιέχουν αντίστοιχα τις α και β (Πρόταση 7.4.2). Δείξε ότι ο ζητούμενος τόπος είναι το μεσοπαράλληλο επίπεδο των η και ζ .

Άσκηση 7.7.2 Ευθύγραμμο τμήμα XY σταθερού μήκους έχει τα άκρα του επί δύο ασύμβατα καθέτων ευθειών α και β . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου του Z .

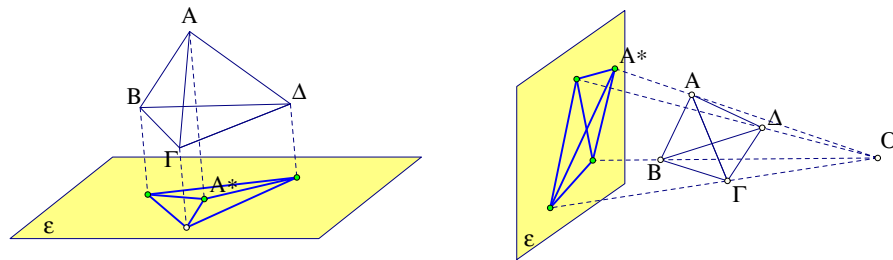
Υπόδειξη: Θεώρησε τα δύο παράλληλα επίπεδα $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$, που περιέχουν αντίστοιχα τις α και β (Πρόταση 7.4.2). Πρόβαλε το X στο επίπεδο ε_β στο σημείο B . Παρόλο που τα X, Y μεταβάλλονται το ορθογώνιο τρίγωνο $XB\Upsilon$ παραμένει ίσο εαυτώ, αφού η υποτείνουσα XY είναι σταθερού μήκους και το $|XB|$ ισούται με την απόσταση των επιπέδων. Επομένως το ΥB είναι σταθερού μήκους, περ λ . Άρα και η προβολή του MN στο μεσοπαράλληλο επίπεδο μ των $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ είναι του ιδίου σταθερού μήκους λ . Αν PT είναι η κοινή κάθετος των δύο



Σχήμα 620: Γεωμετρικός τόπος με ασύμβατες

ασυμβάτων και O το σημείο που αυτή συναντά το μ , το τρίγωνο ONM είναι ορθογώνιο στο O . Επί πλέον το Z είναι το μέσον της MN , αφού το $XYMN$ είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του XY και MN διχοτομούνται στο Z . Άρα η OZ είναι και η διάμεσός του ορθογωνίου προς την υποτείνουσα και συνεπώς είναι μήκους $\lambda/2$. Άρα το Z περιέχεται στον κύκλο κ με κέντρο O και ακτίνα $\lambda/2$.

Αντίστροφα, αν Z σημείο του κύκλου κ , τότε οι προβολές του N' , M' επί των ON και OM αντίστοιχα, ορίζουν την κατεύθυνση $N'M'$ και της παράλληλής της MN , αφού τα M' και N' είναι τα μέσα των OM και ON αντιστοίχως. Επομένως η MN κατασκευάζεται φέρνοντας παράλληλη της $M'N'$ από το Z . Η ευθεία MN και η παράλληλη της PT από το Z ορίζουν επίπεδο ν διερχόμενο από το Z , το οποίο τέμνει τις α και β σε δύο σημεία X και Y αντίστοιχα. Μία διαδικασία αντίστροφης από αυτήν του πρώτου μέρους της απόδειξης δείχνει ότι τα X, Z και Y είναι συγγραμμικά και το Z είναι το μέσον της XY .



Σχήμα 621: Παράλληλη και προοπτική προβολή

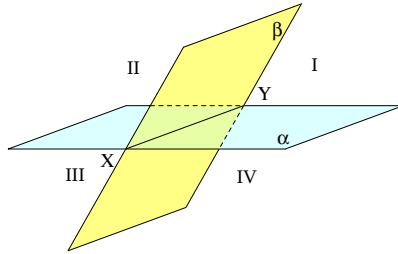
Οι δέσμες παραλλήλων ευθειών στο χώρο και οι δέσμες ευθειών που διέρχονται από σταθερό σημείο O του χώρου δίνουν την δυνατότητα να προβάλλουμε ένα σχήμα Σ του χώρου σε ένα σχήμα Σ' ενός σταθερού επιπέδου ϵ . Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει μία σταθερή ευθεία ζ και σε κάθε σημείο A του Σ αντιστοιχούμε την τομή A^* της παραλλήλου της ζ από το A με το ϵ . Την διαδικασία αυτή ονομάζουμε **Παράλληλη προβολή** του Σ στο ϵ κατά την κατεύθυνση της ζ . Στην δεύτερη περίπτωση αντιστοιχούμε στο X την τομή της OA με το ϵ . Την διαδικασία αυτή ονομάζουμε **Κεντρική προβολή** (ή και προοπτική προβολή) από το O στο επίπεδο ϵ . Η διαδικασία αυτή υλοποιείται στην φωτογράφιση, κατά την οποία ένα σχήμα του χώρου προβάλλεται στο φωτογραφικό φιλμ (επίπεδο ϵ).

Κεφάλαιο 8

Στερεά

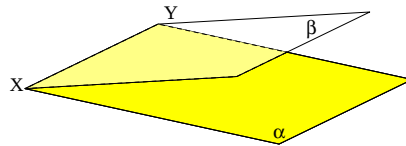
8.1 Διέδρες γωνίες

Δύο επίπεδα που τέμνονται χωρίζουν τον χώρο σε τέσσερα **Τεταρτημόρια** και ορίζουν στον χώρο σχήματα ανάλογα των γωνιών που ορίζουν δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου. Δύο από τα ημιεπίπεδα των α και β ορίζουν μία κυρτή **Διέδρου γωνία** καθώς και μία μη-



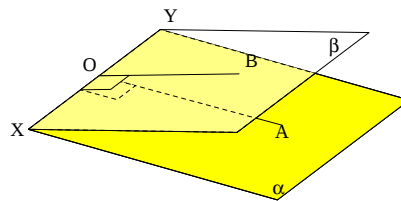
Σχήμα 622: Τεταρτημόρια οριζόμενα από δύο τεμνόμενα επίπεδα

κυρτή. Η ευθεία XY λέγεται **Ακμή της διέδρου**. Τα ημιεπίπεδα των α και β λέγονται **Έδρες της διέδρου γωνίας**.



Σχήμα 623: Διέδρος γωνία

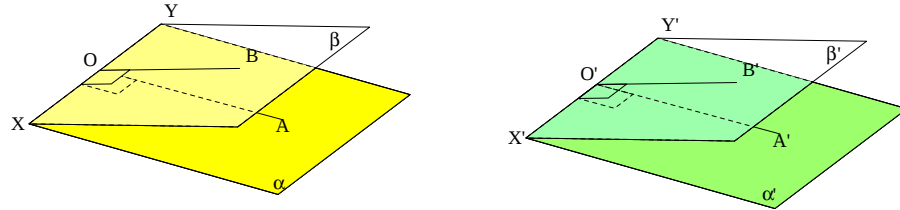
Στην έννοια της διέδρου αντιστοιχεί αυτή της γωνίας του επιπέδου. Αυτό τονίζεται και με τον επόμενο ορισμό που δίνει τον τρόπο που μετράμε το μέγεθος μιάς διέδρου. Το **Μέτρο**



Σχήμα 624: Διέδρος γωνία

διέδρου γωνίας ορίζεται φέρνοντας ένα επίπεδο κάθετο στην ακμή. Το επίπεδο αυτό τέμνει τις έδρες κατά ευθείες OA και OB και ως μέτρο της διέδρου ορίζουμε το μέτρο της γωνίας AOB . Έτσι η κυρτή διέδρος αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία AOB με μέτρο μικρότερο του π (σε ακτίνια) και η μη-κυρτή διέδρος αντιστοιχεί στην μη-κυρτή γωνία AOB με μέτρο μεγαλύτερο του π . Πρέπει να σημειώσουμε ότι το μέτρο της διέδρου δεν εξαρτάται από την θέση του O στην ακμή XY αυτής. Αν φέρουμε το κάθετο στην XY επίπεδο σε ένα άλλο σημείο O' της ακμής, τότε η αντίστοιχη γωνία που θα σχηματισθεί $A'O'B'$ θα έχει τις πλευρές της παράλληλες και ομόρροπες προς αυτές της AOB , συνεπώς οι δύο γωνίες θα είναι ίσες (Πρόταση 7.3.1). Δύο διέδρες γωνίες τις λέμε **Ίσες** όταν έχουν το ίδιο μέτρο. Γενικότερα, μεταφέροντας τις έννοιες των επιπέδων γωνιών στις διέδρους μιλάμε για **Ορθή διέδρου**,

Αμβλεία διέδρο, Οξεία διέδρο, Συμπληρωματική διέδρο, Παραπληρωματική διέδρο, Κατά κορυφήν διέδρο κτλ. Ισχύουν επίσης ιδιότητες ανάλογες με αυτές των γωνιών. Αρκεί να ανατρέξουμε στις ιδιότητες των γωνιών και να αντικαταστήσουμε σε αυτές την φράση *πλευρά γωνίας* με την φράση *έδρα διέδρου*. Η επόμενη πρόταση δίνει ένα παράδειγμα αυτών των αναλογιών.



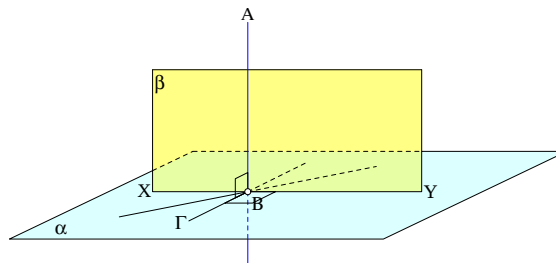
Σχήμα 625: Ίσες διέδρες γωνίες

Πρόταση 8.1.1 Διέδρες γωνίες των οποίων οι αντίστοιχες έδρες είναι παράλληλα επίπεδα είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Απόδειξη: Έστω ότι οι έδρες α' , β' της μιάς διέδρου είναι παράλληλα επίπεδα αντίστοιχα προς τις έδρες α , β της άλλης. Τότε οι ακμές τους είναι παράλληλες. Αυτό συνάγεται προεκτείνοντας μία έδρα λ.χ. την β' έως ότου τμήσει την α κατά ευθεία ε . Κατά την Πρόταση 7.2.3 η ε και η XY θα είναι παράλληλες ως αποτεμνόμενες από τα παράλληλα επίπεδα β και β' μέσω του α . Παρόμοια και οι ε και $X'Y'$ θα είναι όμοιες ως αποτεμνόμενες από τα παράλληλα επίπεδα α και α' μέσω της β' . Συνεπώς οι ακμές XY και $X'Y'$ θα είναι παράλληλες ευθείες. Επομένως ένα επίπεδο γ κάθετο στην ακμή XY που ορίζει την γωνία AOB της μιάς διέδρου θα είναι και κάθετο στην ακμή $X'Y'$ της άλλης διέδρου (Πρόταση 7.5.3) και θα ορίζει την γωνία $A'O'B'$ της άλλης διέδρου. Λόγω της παραλληλίας των επιπέδων οι γωνίες AOB και $A'O'B'$ θα έχουν πλευρές παράλληλες, άρα θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές (Πόρισμα 1.15.10), ο.ε.δ.

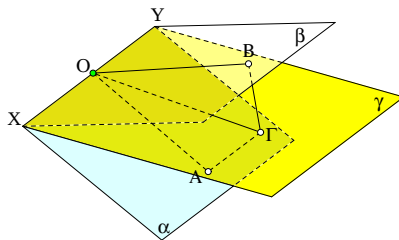
Δύο επίπεδα που σχηματίζουν μία ορθή διέδρο τα λέμε **Κάθετα επίπεδα**.

Πρόταση 8.1.2 Αν μία ευθεία AB είναι κάθετος στο επίπεδο α , τότε κάθε άλλο επίπεδο β που περιέχει την AB θα είναι κάθετο στο επίπεδο α .



Σχήμα 626: Κάθετα επίπεδα

Απόδειξη: Η AB είναι κάθετος σε κάθε ευθεία του α που διέρχεται από το B (Πρόταση 7.5.1), άρα θα είναι κάθετος και στην ευθεία $B\Gamma$ που είναι ορθογώνια προς την τομή XY των επιπέδων και περιέχεται στο α . Αυτό δείχνει ότι η γωνία της διέδρου των α και β είναι ορθή, ο.ε.δ.

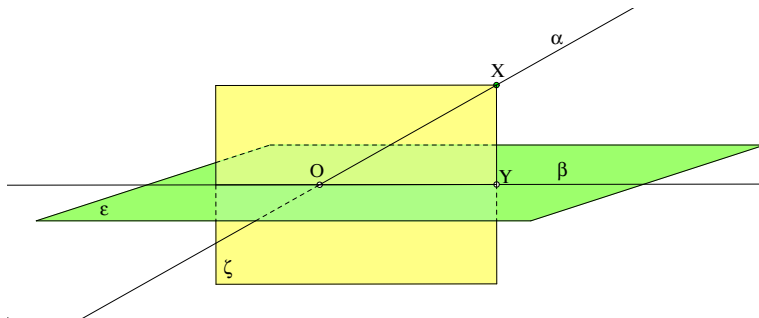


Σχήμα 627: Διχοτόμο επίπεδο διέδρου

Πρόταση 8.1.3 Για δύο επίπεδα α και β τεμνόμενα κατά την ευθεία XY , τα σημεία του χώρου Γ που ισαπέχουν από τα επίπεδα ευρίσκονται επί δύο άλλων επιπέδων γ , δ διερχομένων διά της XY και σχηματιζόντων ίσες διέδρες με τα α και β και είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη: Έστω σημείο Γ ισαπέχον από τα επίπεδα α και β . Φέρε τις κάθετες ΓA και ΓB σε αυτά. Το επίπεδο $AB\Gamma$ είναι κάθετο στην XY διότι η XY , ως ευθεία του επιπέδου β είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και ως ευθεία του επιπέδου α είναι κάθετη στην $A\Gamma$. Έπεται ότι η γωνία AOB , όπου O το σημείο τομής της XY με το επίπεδο $AB\Gamma$, είναι η γωνία της διέδρου των α και β που περιέχει το Γ . Επίσης τα ορθογώνια τρίγωνα $O\Gamma A$ και $O\Gamma B$ είναι ίσα, ως έχοντα την υποτείνουσα $O\Gamma$ κοινή και τις καθέτους ΓA και ΓB ίσες εξ υποθέσεως. Συνάγεται ότι το επίπεδο γ που περιέχει το Γ και την ευθεία XY σχηματίζει ίσες γωνίες με τα επίπεδα α και β . Ανάλογα δείχνουμε ότι αν το Γ είναι σε ένα από τα άλλα τεταρτημόρια που ορίζουν τα δύο επίπεδα περιέχεται είτε στο γ είτε στο επίπεδο δ που σχηματίζει ορθή γωνία με το γ , ο.ε.δ.

Στην προηγούμενη πρόταση βλέπουμε πάλι μιά ιδιότητα γωνιών του επιπέδου (Άσκηση 1.15.6) να μεταφέρεται στις διέδρες γωνίες. Τα επίπεδα που ορίζονται από την προηγούμενη πρόταση λέγονται **Διχοτομούντα επίπεδα της διέδρου**.



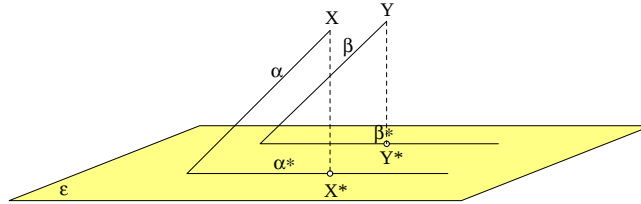
Σχήμα 628: Επίπεδο διερχόμενο από ευθεία κάθετο σε άλλο

Πρόταση 8.1.4 Δοθείσης ευθείας α και επιπέδου ϵ υπάρχει ένα ακριβώς επίπεδο ζ περιέχον την ευθεία α και κάθετο στο ϵ .

Απόδειξη: Φέρε από τυχόν σημείο X της α την κάθετο XY στο ϵ . Το επίπεδο ζ που περιέχει την α και την XY είναι κάθετο στο ϵ (Πρόταση 8.1.2). Κάθε άλλο επίπεδο ζ' που περιέχει την α και είναι κάθετο στο ϵ , θα τέμνει το ϵ κατά ευθεία β . Φέρε από το X την κάθετο XY^* στην β στο επίπεδο ζ' . Η XY^* θα είναι και κάθετος στο ϵ διότι εκτός της ευθείας β θα είναι και κάθετος σε μία ορθογώνιά της και περιεχόμενη στο α , λόγω της υποθέσεως ότι τα ζ' και ϵ τέμνονται κάθετα. Συνεπώς η XY^* θα συμπίπτει με την προηγούμενη XY και το ζ' θα

περιέχει την α και την XY , άρα θα ταυτίζεται με το ζ , ο.ε.δ.

Η ευθεία β που ορίζεται από την προηγούμενη πρόταση, ως τομή του μοναδικού επιπέδου ζ που περιέχει την ευθεία α και τέμνει κάθετα το επίπεδο ε , λέγεται **Προβολή της ευθείας α στο επίπεδο ε** .

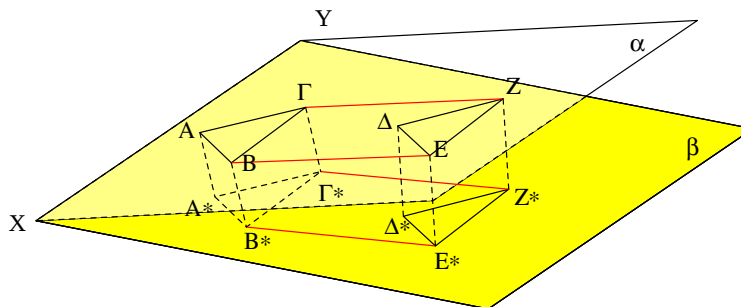


Σχήμα 629: Προβολή παραλλήλων σε παράλληλες

Πρόταση 8.1.5 Οι προβολές α^* , β^* δύο παραλλήλων ευθειών α και β στο επίπεδο ε ή ταυτίζονται ή είναι δύο σημεία ή είναι παράλληλες ευθείες του ε .

Απόδειξη: Αν οι α , β είναι κάθετες στο ε , τότε οι προβολές τους είναι δύο σημεία: τα σημεία στα οποία αυτές τέμνουν το ε . Αν το ε είναι κάθετο στο επίπεδό τους, αλλά όχι κάθετο στις α , β , τότε οι ευθείες προβάλλονται στην ίδια ευθεία του ε . Στην περίπτωση που δεν συμβαίνουν τα παραπάνω, παίρνοντας ένα σημείο X στην α και ένα Y στην β και προβάλλοντάς τα στο ε , ορίζουμε τα κάθετα στο ε επίπεδα που περιέχουν τις προβολές α^* και β^* των δύο ευθειών. Τα δύο αυτά επίπεδα, ως περιέχοντα δύο ζεύγη παραλλήλων ευθειών είναι παράλληλα (Πρόταση 7.2.2) άρα οι α^* , β^* κατά τις οποίες τέμνουν την ε θα είναι παράλληλες (Πρόταση 7.2.3), ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.1.1 Η προβολή ενός παραλληλογράμμου του επιπέδου ε σε ένα άλλο επίπεδο ζ που δεν είναι κάθετο στο ε είναι ένα παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 630: Προβολή ίσων τριγώνων σε ίσα

Πόρισμα 8.1.2 Δύο τμήματα $AB\Gamma$ και ΔEZ περιεχόμενα σε επίπεδο α που είναι ίσα και με παράλληλες πλευρές προβάλλονται σε επίπεδο β , μη-κάθετο στο α , σε δύο τμήματα $A^*B^*\Gamma^*$ και $\Delta^*E^*Z^*$ που είναι επίσης ίσα και με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα αφού το παραλληλόγραμμο λ.χ. $BΓΖΕ$ που ορίζεται από δύο ίσες και παράλληλες πλευρές των τριγώνων στο α θα προβάλλεται σε παραλληλόγραμμο $B^*Γ^*Ζ^*Ε^*$ ορίζοντας ίσες και παράλληλες πλευρές $B^*Γ^*$ και $Ε^*Ζ^*$, ο.ε.δ.

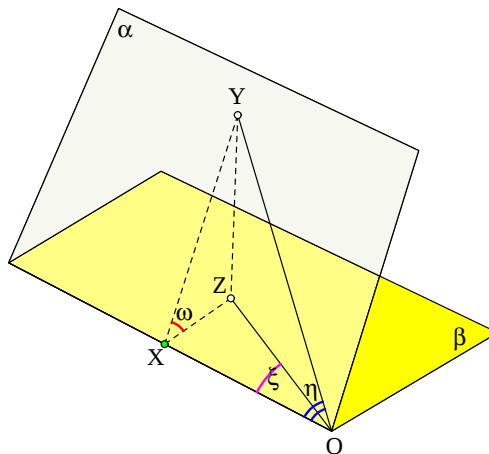
Πόρισμα 8.1.3 Δύο πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ... ΠΡΣΤ...$ περιεχόμενα σε επίπεδο α που είναι ίσα και με παράλληλες πλευρές προβάλλονται σε επίπεδο β , μη-κάθετο στο α , σε δύο πολύγωνα $Α^*Β^*Γ^*Δ^*... και Π^*Ρ^*Σ^*Τ^*...$ που είναι επίσης ίσα και με παράλληλες πλευρές.

Απόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα διαιρώντας τα δύο πολύγωνα σε τρίγωνα και προβάλλοντας, ο.ε.δ.

Άσκηση 8.1.1 Δείξε ότι η προβολή M^* του μέσου M ευθυγράμμου τμήματος $ΑΒ$ σε επίπεδο ε είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $Α^*Β^*$, όπου $Α^*$ και $Β^*$ οι προβολές των A και B στο επίπεδο.

Άσκηση 8.1.2 Εάν $Α^*Β^*Γ^*$ είναι η προβολή τριγώνου $ΑΒΓ$ στο επίπεδο ε , δείξε ότι η προβολή του κέντρου βάρους του $ΑΒΓ$ είναι το κέντρο βάρους του $Α^*Β^*Γ^*$.

Άσκηση 8.1.3 Εάν $Α^*Β^*Γ^*$ είναι η προβολή τριγώνου $ΑΒΓ$ στο επίπεδο ε , δείξε ότι η προβολή του κέντρου βάρους του $ΑΒΓ$ είναι το κέντρο βάρους του $Α^*Β^*Γ^*$.



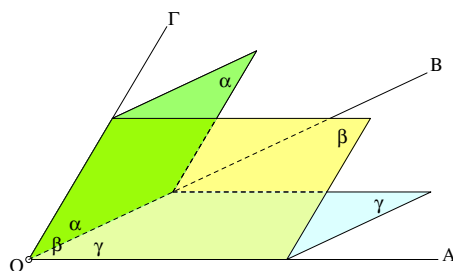
Σχήμα 631: Προβολή γωνίας

Άσκηση 8.1.4 Έστω $ΟΧ$ η ακμή της διέδρου και ω η γωνία των εδρών της α και β . Φέρε ευθεία $ΟΥ$ στο επίπεδο α και έστω $ΟΖ$ η προβολή της στο επίπεδο β . Δείξε ότι η γωνία $\eta = |\angle XOY|$ και η προβολή της στο β : $\xi = |\angle XOZ|$ ικανοποιούν την $\varepsilon\varphi(\xi) = \varepsilon\varphi(\eta) \sin(\omega)$.

Άσκηση 8.1.5 Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X του χώρου που απέχουν δοθείσα απόσταση δ από τις έδρες μιάς διέδρου γωνίας.

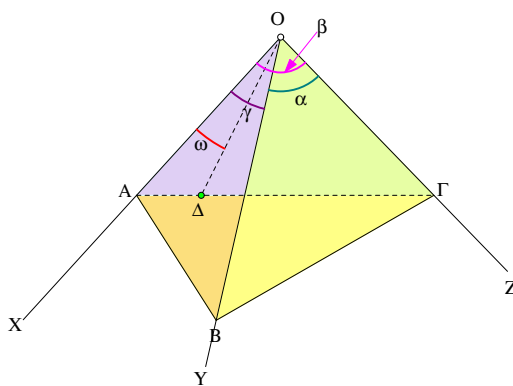
8.2 Τρίεδρες γωνίες

Τρεις ημιευθείες OA , OB , OG διερχόμενες από κοινό σημείο O και μη περιεχόμενες σε ένα επίπεδο ορίζουν, ανά δύο, επίπεδα και δημιουργούν ένα στερεό σχήμα που χωρίζει τον χώρο σε δύο μέρη. Από τα δύο αυτά μέρη το ένα είναι κυρτό (δηλαδή με κάθε ζεύγος σημείων X , Y που περιέχονται σε αυτό το μέρος και ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα XY περιέχεται στο ίδιο μέρος) και το άλλο είναι μη-κυρτό. Επιλέγοντας ένα εξ αυτών των μερών, συνήθως το κυρτό, ορίζεται μια **Τρίεδρος γωνία**. Το μέρος του χώρου που επιλέγεται λέγεται **Εσωτερικό της τριέδρου**. Οι ημιευθείες που ορίζουν την τριέδρο λέγονται **Ακμές** της τριέδρου και οι γωνίες $\alpha = \angle BOG$, $\beta = \angle GOA$, $\gamma = \angle AOB$ που σχηματίζονται μεταξύ αυτών λέγονται **Έδρες** της τριέδρου. Συχνά ονομάζουμε έδρες και τα επίπεδα στα οποία περιέχονται αυτές οι γωνίες. Οι



Σχήμα 632: Τρίεδρος γωνία

διέδρες γωνίες με ακμές τις ευθείες OA , OB και OG , λέγονται **Διέδρες της τριέδρου** και συμβολίζονται αντίστοιχα με $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Συχνά με το ίδιο γράμμα συμβολίζουμε και το μέτρο της γωνίας. Έτσι στις διάφορες προτάσεις παρακάτω τα α, β και γ μπορεί να συμβολίζουν τις έδρες ή και τα μέτρα των εδρών της τριέδρου. Ανάλογα τα $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ μπορεί να συμβολίζουν τις διέδρες ή και τα μέτρα αυτών, που λαμβάνονται μετρώντας τις γωνίες που αποτεμνουν οι διέδρες αυτές σε επίπεδα κάθετα στις ακμές τους. Δύο τρίεδρες $OAB\Gamma$ και $OA'B'\Gamma'$ λέγονται **Ίσες** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες.



Σχήμα 633: Ανισότητες εδρών

Πρόταση 8.2.1 Σε κάθε τριέδρο $OAB\Gamma$ το άθροισμα δύο εδρών της είναι μεγαλύτερο της τρίτης.

Απόδειξη: Υπόθεσε ότι η $\beta = \angle XOZ$ είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις έδρες $\alpha = \angle YOZ$, $\beta = \angle XOZ$, $\gamma = \angle ZOX$. Θα δείξουμε ότι $\beta < \alpha + \gamma$. Πάρε Β και Γ επί των ακμών ΟΥ και ΟΖ αυθαίρετα. Κατόπιν σχημάτισε στο επίπεδο ΧΟΖ το τρίγωνο ΔΟΓ έτσι ώστε να είναι ίσο με το ΒΟΓ και προέκτεινε την ΔΓ μέχρι το σημείο τομής Α της με την τρίτη ακμή. Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΑΔΟ έχουν την ΑΟ κοινή και τις ΒΟ και ΔΟ ίσες. Επίσης από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|ΑΓ| = |ΑΔ| + |ΔΓ| < |ΑΒ| + |ΒΓ|.$$

Όμως $|\Delta \Gamma| = |B \Gamma| \Rightarrow |A \Delta| < |A B|$. Από το Πόρισμα 1.10.10 η γωνία

$$\omega = |\angle A O \Delta| < |\angle A O B| \Leftrightarrow |\angle A O \Gamma| - |\angle B O \Gamma| < |\angle A O B|,$$

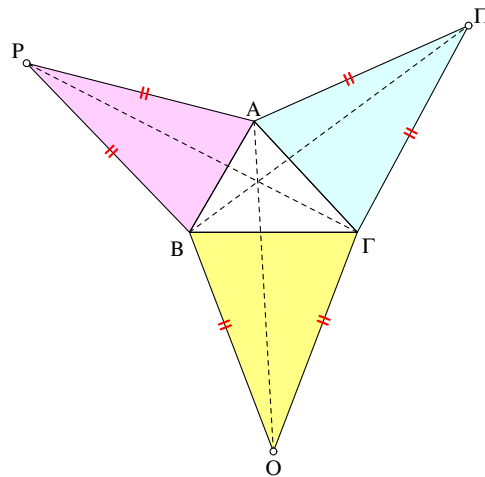
ο.ε.δ.

Πρόταση 8.2.2 Σε κάθε τριέδρου ΟΑΒΓ το άθροισμα των εδρών της είναι μικρότερο του 2π .

Απόδειξη: Θεώρησε τυχόντα σημεία Α, Β και Γ επί των ακμών αντίστοιχα ΟΧ, ΟΥ και ΟΖ της τριέδρου (σχήμα 633). Σχηματίζονται άλλες τρεις τριέδρου με κορυφές στα σημεία Α, Β και Γ. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση στις τρεις αυτές τριέδρους έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= (\pi - \angle O B \Gamma - \angle O \Gamma B) + (\pi - \angle O A \Gamma - \angle O \Gamma A) + (\pi - \angle O A B - \angle O B A) \\ &= 3\pi - (\angle O B \Gamma + \angle O B A) - (\angle O \Gamma B + \angle O \Gamma A) - (\angle O A \Gamma + \angle O A B) \\ &< 3\pi - (\angle A B \Gamma + \angle B \Gamma A + \angle \Gamma A B) \\ &= 3\pi - \pi = 2\pi, \end{aligned}$$

ο.ε.δ.



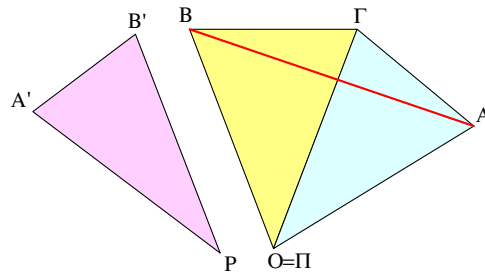
Σχήμα 634: Ανάπτυγμα τριέδρου

Παίρνοντας ίσα ευθύγραμμα τμήματα $|OA| = |OB| = |OG| = \delta$ επί των ακμών αντίστοιχα ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ σχηματίζουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο μαζί με το μήκος δ, περιγράφει πλήρως την τριέδρου και μάλιστα με την βοήθεια ενός επιπέδου σχήματος που λέγεται **Ανάπτυγμα τριέδρου**. Το σχήμα αυτό προκύπτει κόβοντας την τριέδρου κατά μήκος των

ακμών της και περιστρέφοντας τα ισοσκελή τρίγωνα περί τις βάσεις τους, που είναι οι πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$, έως ότου τα επίπεδά των ισοσκελών συμπίσουν με αυτό του $AB\Gamma$. Το σχήμα (634) που προκύπτει μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή τριέδρου από χαρτί. Αρκεί να περιστρέψουμε, αντίστροφα προς την προηγούμενη φορά, τα ισοσκελή τρίγωνα περί τις βάσεις τους, έως ότου οι τρεις κορυφές τους συμπίσουν στο ίδιο σημείο του χώρου O , που ορίζει τότε την κορυφή της τριέδρου. Οι επόμενες δύο προτάσεις δείχνουν ότι οι ανισότητες των δύο προηγούμενων προτάσεων είναι και ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι μιά τέτοια διαδικασία οδηγεί πάντοτε σε τριέδρο.

Λήμμα 8.2.1 *Δοθέντων τριών ισοσκελών τριγώνων με ίσα σκέλη, των οποίων οι κορυφές λαμβανόμενες ανά δύο έχουν άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο της τρίτης, μπορούμε να κατασκευάσουμε τρίγωνο, του οποίου οι πλευρές να συμπίουν με τις βάσεις των ισοσκελών.*

Απόδειξη: Έστω ότι τα τρία τρίγωνα με ίσα σκέλη είναι τα $OB\Gamma$, $\Pi\Gamma A$ και $PA'B'$. Τοποθετούμε δύο εξ αυτών λ.χ. τα δύο πρώτα έτσι ώστε οι γωνίες στις κορυφές τους να γίνουν εφεξής. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι



Σχήμα 635: Τριεδρική ανισότητα

$$|B\Gamma| + |\Gamma A| > |BA|.$$

Τα τρίγωνα PAB και $OA'B'$ είναι ισοσκελή με το ίδιο μήκος σκέλους και εξ υποθέσεως έχουμε ότι οι γωνίες τους ικανοποιούν την

$$|A'PB'| < |BO\Pi|.$$

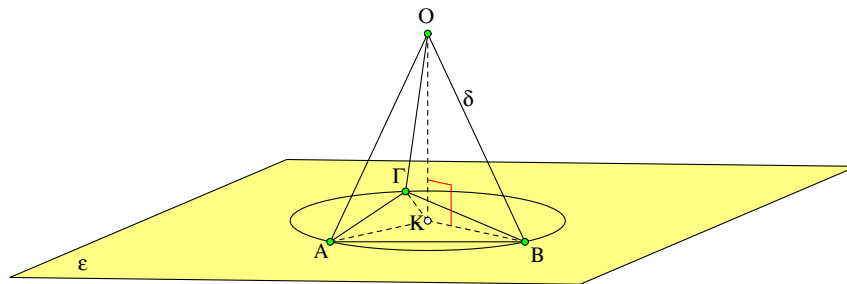
Από την Πρόταση 1.10.5 συνάγεται ότι

$$|A'B'| < |AB| < |B\Gamma| + |\Gamma A|,$$

συνεπώς ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα και κατασκευάζεται τρίγωνο με πλευρές τις βάσεις των ισοσκελών (Πρόταση 2.3), ο.ε.δ.

Πρόταση 8.2.3 *Γιά κάθε τριάδα γωνιών α, β και γ με $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ και τέτοια ώστε η μεγαλύτερη εξ αυτών να είναι μικρότερη του αθροίσματος των δύο άλλων, υπάρχει τριέδρος με έδρες τις τρεις αυτές γωνίες.*

Απόδειξη: Κατασκεύασε ισοσκελή τρίγωνα με γωνία στην κορυφή αντίστοιχα α, β και γ και τα σκέλη τους όλα ίσα με αυθαίρετο θετικό αριθμό δ . Οι υποθέσεις για τις γωνίες συνεπάγονται, κατά το προηγούμενο λήμμα, ότι οι βάσεις αυτών των ισοσκελών αποτελούν

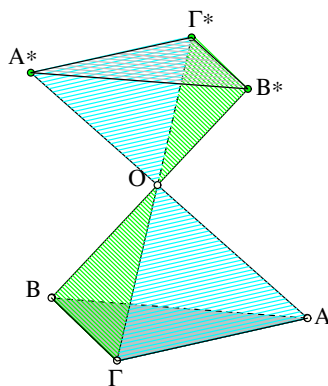


Σχήμα 636: Κατασκευή τριέδρου

πλευρές τριγώνου ΒΓΑ. Θεώρησε τον περιγεγραμμένο κύκλο αυτού του τριγώνου και φέρε την κάθετο στο κέντρο του Κ. Επί της κάθετου δε πάρε ευθύγραμμο τμήμα ΚΟ μήκους

$$\kappa = |KO| = \sqrt{\delta^2 - \rho^2},$$

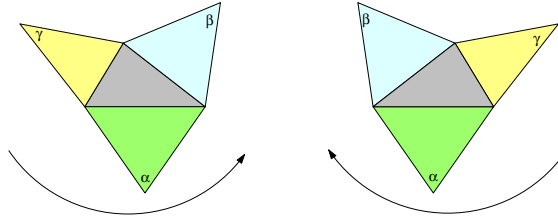
όπου ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Από το πυθαγόρειο θεώρημα συνάγεται ότι οι $|OA| = |OB| = |OG| = \delta$ και τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ έχουν τα ίδια μήκη σκελών και τις βάσεις αντίστοιχα ίσες με αυτές των αρχικών ισοσκελών τριγώνων, άρα είναι ίσα με αυτά και στο Ο σχηματίζεται τριέδρος με τις δοθείσες γωνίες. Το ότι το σημείο Ο είναι εκτός του επιπέδου ε του τριγώνου ΑΒΓ εξασφαλίζει η υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$, από την οποία προκύπτει ότι $\delta > \rho$. Πράγματι αν το Ο συνέπιπτε με το Κ, δηλαδή ήταν $\delta = \rho$, τότε θα είχαμε $\alpha + \beta + \gamma = |AKB| + |BKT| + |ΓΚΑ| = 2\pi$ αντίθετα με την υπόθεση. Επίσης αν ήταν $\delta < \rho$, τότε η γωνία ΑΟΒ θα ήταν στο επίπεδο ε του τριγώνου ΑΒΓ και μικρότερη της ΑΚΒ, διότι το ισοσκελές ΑΟΒ θα ήταν εντός του ισοσκελούς ΑΚΒ (Πρόταση 1.10.2). Το ανάλογο θα ίσχυε και για τις άλλες γωνίες ΒΟΓ και ΓΟΑ. Συνεπώς το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma = |BOΓ| + |ΓΟΒ| + |ΑΟΓ| < |BKT| + |ΓΚΑ| + |AKB| = 2\pi$, πάλι αντίθετα με την υπόθεση, ο.ε.δ.



Σχήμα 637: Κατά κορυφήν τριέδρες

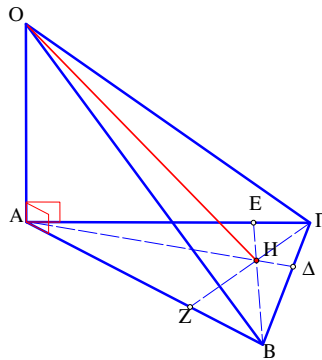
Σχόλιο Η τελευταία πρόταση συνεπάγεται ότι μία τριέδρος γωνία καθορίζεται πλήρως από τις έδρες της. Δεν θα προχωρήσω στις λεπτομέρειες της απόδειξης αυτής της ιδιότητας. Θα σημειώσω ωστόσο ότι η ισότητα τριέδρων, όπως την ορίσαμε, δεν είναι στο χώρο ταυτόσημη με την δυνατότητα τοποθέτησης της μιάς τριέδρου πάνω στην άλλη, ώστε να συμπίσουν. Εάν γίνεται το τελευταίο, τότε βέβαια οι τριέδρες είναι ίσες. Η ισότητά μας όμως περιλαμβάνει

και άλλη μία περίπτωση που δεν είναι δυνατή η ταύτιση. Αυτή είναι η περίπτωση των *κατά κορυφήν* τριέδρων. Εδώ (σχήμα-637) οι δύο τριέδρες $OAB\Gamma$ και $OA^*B^*\Gamma^*$ έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες. Ωστόσο δεν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν η μία πάνω στην άλλη ώστε να συμπίσουν. Τούτο διότι διαφέρουν οι προσανατολισμοί τους. Οι δύο τριέδρες προκύπτουν από τρία ισοσκελή μέσω της προηγούμενης πρότασης αλλά τοποθετημένα έτσι ώστε τα βασικά τρίγωνα να έχουν διαφορετικό προσανατολισμό.



Σχήμα 638: Αντίθετος προσανατολισμός τριέδρων

Πρόταση 8.2.4 Για κάθε τριέδρο, τα τρία επίπεδα που διέρχονται από μία ακμή και είναι κάθετα στην απέναντι της ακμής έδρα τέμνονται κατά ευθεία.



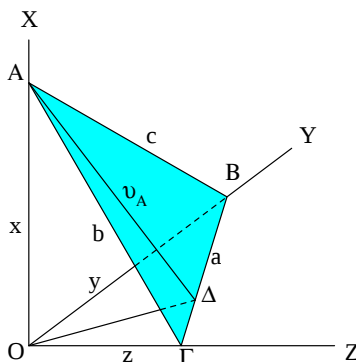
Σχήμα 639: Ύψη τριέδρου

Απόδειξη: ([Gla20, σ. 69]) Θεώρησε ένα επίπεδο κάθετο σε μία ακμή της τριέδρου, λ.χ. την OA , που τέμνει την τριέδρο κατά το τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεώρησε και τα ύψη AD , BE και ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$. Τα ύψη αυτά τέμνονται στο ορθόκεντρο H του τριγώνου και η ευθεία OH συμπίπτει με την αναφερόμενη τομή των τριών επιπέδων. Πράγματι, η BE είναι κάθετη στην $A\Gamma$ και ασύμβατα κάθετη στην OA , άρα και κάθετη στο επίπεδό τους που είναι η έδρα OAG (Πρόταση 7.5.7). Άρα το επίπεδο OBE είναι το διερχόμενο από την ακμή OB και κάθετο στην απέναντι έδρα OAG . Παρόμοια το επίπεδο OGZ είναι το διερχόμενο από την ακμή OG και κάθετο στην απέναντι έδρα OAB . Τέλος, η $B\Gamma$ είναι κάθετη στην AD και ασύμβατα κάθετη στην OA , άρα είναι κάθετη στο επίπεδό τους OAH και συνεπώς το επίπεδο BGO που διέρχεται από την $B\Gamma$ είναι και αυτό κάθετο στο OAH (Πρόταση 8.1.2), ο.ε.δ.

Άσκηση 8.2.1 Δείξε ότι τα τρία διχοτομούντα επίπεδα των διέδρων μιάς τριέδρου τέμνονται κατά ευθεία ε , τα σημεία της οποίας ισαπέχουν από τις έδρες της τριέδρου.

Άσκηση 8.2.2 Δίδεται τρισορθογώνια τριέδρος $OXYZ$ (και οι τρεις έδρες της ορθές) και σημεία A, B, Γ στις ακμές της OX , OY και OZ αντίστοιχα, δείξε ότι γιά τα εμβαδά των τριγώνων ισχύει

$$\epsilon(OA\Gamma)^2 + \epsilon(OBA)^2 + \epsilon(O\Gamma B)^2 = \epsilon(AB\Gamma)^2.$$



Σχήμα 640: Είδος Πυθαγορείου θεωρήματος γιά εμβαδά

Υπόδειξη: ([Fou05, σ. 102], [M52, σελ. 967]) Με τους συμβολισμούς του σχήματος 640:

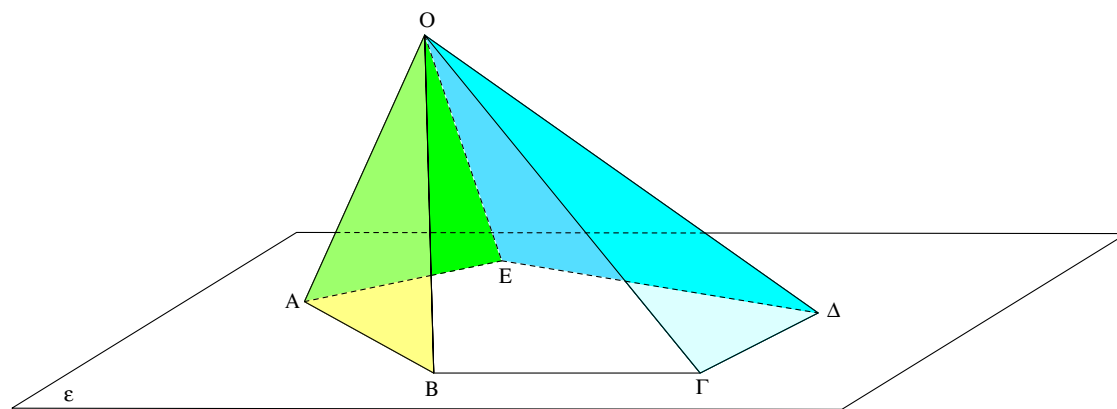
$$\begin{aligned} 4\epsilon(AB\Gamma)^2 &= a^2 \cdot v_A^2 \\ &= a^2 \cdot (x^2 + |O\Delta|^2) \\ &= a^2 \cdot |O\Delta|^2 + (y^2 + z^2) \cdot x^2 \\ &= 4\epsilon(OB\Gamma)^2 + (y^2 \cdot x^2) + (z^2 \cdot x^2) \\ &= 4\epsilon(OB\Gamma)^2 + 4\epsilon(OAB)^2 + 4\epsilon(OA\Gamma)^2. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το ότι και η $O\Delta$ είναι κάθετος στην $B\Gamma$ (ύψος του τριγώνου $OB\Gamma$), διότι η $B\Gamma$ είναι κάθετος στο ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και ασύμβατα κάθετος στην OA , άρα (ασύμβατα) κάθετος και σε κάθε ευθεία του επιπέδου OAB , ο.ε.δ.

Άσκηση 8.2.3 Η μία διέδρος τριέδρου στερεάς γωνίας είναι ορθή και οι προσκείμενες έδρες είναι οξείες μέτρου α και β . Να υπολογισθεί η τρίτη έδρα της τριέδρου.

8.3 Πυραμίδες, πολυεδρικές γωνίες

Δοθέντος πολυγώνου $ΑΒΓΔ...$ περιεχομένου σε επίπεδο ϵ και σημείου $Ο$ εκτός του επιπέδου αυτού, ονομάζουμε **Πυραμίδα** το στερεό σχήμα που δημιουργείται ενώνοντας το σημείο $Ο$ με τις κορυφές του πολυγώνου. Οι πλευρές του πολυγώνου καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $ΟΑ$, $ΟΒ$, ... λέγονται **Ακμές της πυραμίδας**. Οι ακμές $ΟΑ$, $ΟΒ$, ... λέγονται συχνά και **Παράπλευρες ακμές** της πυραμίδας. Το πολύγωνο, λέγεται **Βάση της πυραμίδας**. Όταν το πολύγωνο είναι κυρτό η πυραμίδα λέγεται **Κυρτή πυραμίδα**. Συχνά με τον όρο **βάση πυραμίδας** εννοούμε και το επίπεδο ϵ που περιέχει το πολύγωνο. Στα



Σχήμα 641: Πυραμίδα

επόμενα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με κυρτές πυραμίδες. Το σημείο $Ο$ λέγεται **Κορυφή της πυραμίδας**, οι γωνίες $ΑΟΒ$, $ΒΟΓ$, $ΓΟΔ$, ... λέγονται **Παράπλευρες έδρες** της πυραμίδας και οι τριέδρες γωνίες που σχηματίζονται στις κορυφές του πολυγώνου λέγονται **Τριέδρες της πυραμίδας**.

Στο σημείο $Ο$ (κορυφή της πυραμίδας) ορίζεται κάτι ανάλογο της τριέδρου, που ονομάζεται **Πολυεδρική γωνία** ή **Στερεά γωνία**. Οι γωνίες $ΑΟΒ$, $ΒΟΓ$, ... (και τα επίπεδα που τις περιέχουν) λέγονται **Έδρες της πολυεδρικής γωνίας** και οι ημιευθείες που τις ορίζουν λέγονται **Ακμές της πολυεδρικής γωνίας**. Η πολυεδρική γωνία λέγεται **Κυρτή** όταν το αντίστοιχο πολύγωνο που προκύπτει από επίπεδο που τέμνει όλες τις ακμές της είναι κυρτό. Δύο πολυεδρικές $ΟΑΒΓ...$, $Ο^*Α^*Β^*Γ^*...$ γωνίες λέγονται **Ίσες**, αντιστοιχες έδρες τους είναι ίσες και αντιστοιχες διέδρες είναι επίσης ίσες. Οι πυραμίδες δημιουργούνται από μία πολυεδρική γωνία και ένα επίπεδο ϵ που τέμνει όλες τις ακμές της. Κρατώντας σταθερή την πολυεδρική γωνία και μεταβάλλοντας το επίπεδο ϵ δημιουργούμε άπειρες πυραμίδες που έχουν την ίδια πολυεδρική γωνία και οι βάσεις τους είναι τα πολύγωνα που ορίζονται ως τομές της πολυεδρικής γωνίας και του επιπέδου ϵ . Δύο πυραμίδες $ΟΑΒΓ...$ και $Ο^*Α^*Β^*Γ^*...$ λέγονται **Ίσες** όταν οι αντιστοιχες έδρες τους είναι ίσες και οι αντιστοιχες διέδρες τους είναι επίσης ίσες.

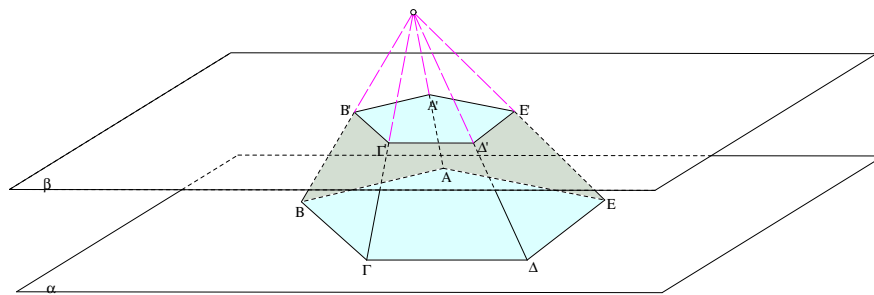
Πρόταση 8.3.1 *Γιά κάθε κυρτή πολυεδρική γωνία το άθροισμα των μέτρων των εδρών της είναι μικρότερο του 2π .*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι στην ουσία η ίδια με αυτήν της Πρότασης 8.2.2. Έστω ότι η κυρτή πολυεδρική γωνία έχει n έδρες. Θεωρούμε ένα επίπεδο τέμνον την πολυεδρική και ορίζον μία πυραμίδα $ΟΑΒΓΔ...$. Τις γωνίες στην κορυφή $Ο$ της πυραμίδας (έδρες) γράφουμε

συναρτήσει των άλλων γωνιών:

$$\begin{aligned}
 |AOB| &= \pi - |BAO| - |ABO|, \\
 |BO\Gamma| &= \pi - |\Gamma BO| - |B\Gamma O|, \\
 |\Gamma O\Delta| &= \pi - |\Delta \Gamma O| - |\Gamma \Delta O|, \\
 &\dots \Rightarrow \\
 |AOB| + |BO\Gamma| + |\Gamma O\Delta| + \dots &= (\pi - |BAO| - |ABO|) + (\pi - |\Gamma BO| - |B\Gamma O|) + \dots, \\
 &= (\pi - |ABO| - |\Gamma BO|) + (\pi - |B\Gamma O| - |\Delta \Gamma O|) + \dots \\
 &< (\pi - |AB\Gamma|) + (\pi - |B\Gamma\Delta|) + \dots \\
 &= \nu \cdot \pi - (|AB\Gamma| + |B\Gamma\Delta| + |\Gamma\Delta E| + \dots) \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

Η ανισότητα προκύπτει εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.2.1 στις τριέδρους της πυραμίδας. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι το άθροισμα των μέτρων των γωνιών κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι $(\nu - 2)\pi$ (Πρόταση 2.11.1), ο.ε.δ. Το σχήμα που προκύπτει από μιά πολυεδρική γωνία και ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις ακμές της καθώς και ένα άλλο παράλληλο προς το προηγούμενο επίπεδο λέγεται **Κόλουρη πυραμίδα**.

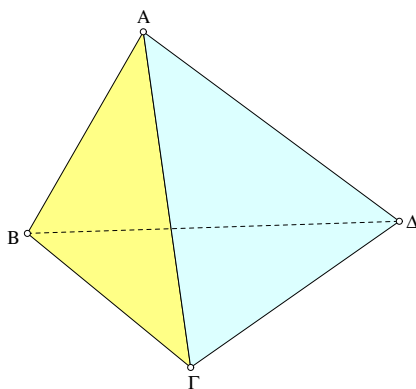


Σχήμα 642: Κόλουρη πυραμίδα

Πρόταση 8.3.2 Σε κάθε κόλουρη πυραμίδα τα πολύγωνα που ορίζονται από τις παράλληλες έδρες της είναι όμοια.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της πρότασης του Θαλή στο χώρο (Πόρισμα 7.7.1), ο.ε.δ.

8.4 Τετράεδρα



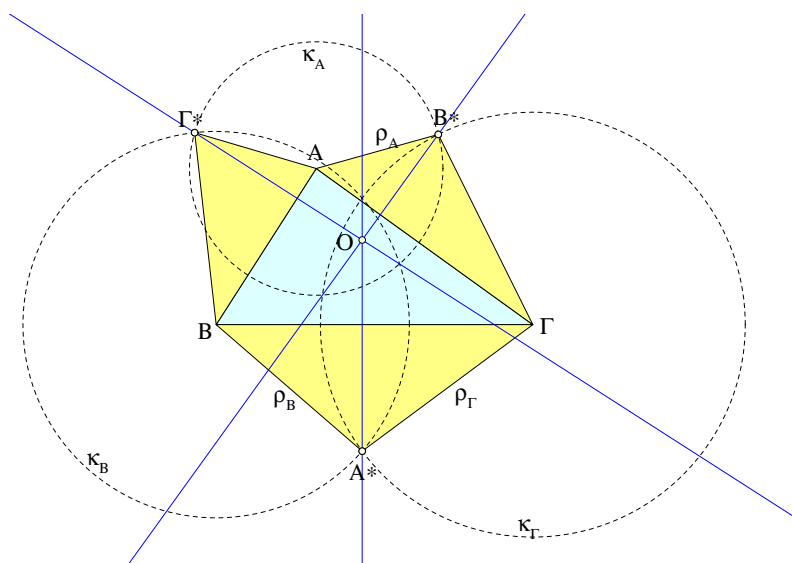
Σχήμα 643: Τετράεδρο

Τις πυραμίδες με τριγωνικές βάσεις ονομάζουμε **Τετράεδρα**. Το τετράεδρο στον χώρο είναι το ανάλογο του τριγώνου στο επίπεδο. Κάθε τετράδα σημείων μη-περιεχομένων σε ένα επίπεδο ορίζει ένα τετράεδρο που έχει τα σημεία αυτά ως κορυφές.

Πρόταση 8.4.1 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία A^*, B^*, Γ^* στο επίπεδό του ε , έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$|A^*B| = |B\Gamma^*|, \quad |\Gamma^*A| = |AB^*|, \quad |B^*\Gamma| = |\Gamma A^*|.$$

Τότε οι κάθετες από τα A^*, B^*, Γ^* αντίστοιχα στις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ συντρέχουν σε σημείο O . Επίσης αν τα τρίγωνα $A^*B\Gamma, AB^*\Gamma, AB\Gamma^*$ περιστραφούν αντιστοίχως περί τις $B\Gamma, \Gamma A, AB$ έως ότου οι κορυφές τους A^*, B^*, Γ^* βρεθούν στην κάθετο η του ε στο σημείο O , τότε τα A^*, B^*, Γ^* θα συμπέσουν με σημείο Δ της ζ και θα σχηματισθεί τετράεδρο.



Σχήμα 644: Τετράεδρου κατασκευή

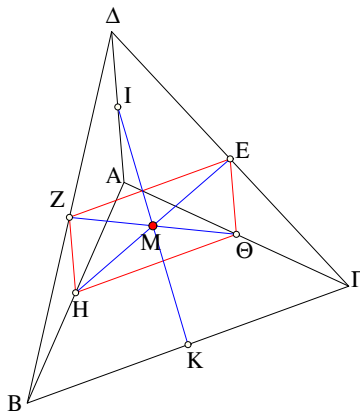
Απόδειξη: Στο σχήμα 644 το επίπεδο ε είναι αυτό του χαρτιού και η ζ είναι η κάθετη στο ε στο σημείο O . Ότι οι ευθείες που αναφέρονται διέρχονται από κοινό σημείο O είναι συνέπεια της Άσκησης 3.4.9. Μία άλλη απόδειξη προκύπτει επίσης από το γεγονός ότι οι τρεις αυτές κάθετες ευθείες συμπίπτουν με τους ριζικούς άξονες των κύκλων $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_\Gamma$ με κέντρα στις κορυφές του τριγώνου και ακτίνες τις πλευρές των άλλων τριγώνων που διέρχονται από αυτές. Το O είναι το ριζικό κέντρο αυτών των κύκλων (Θεώρημα 4.3.1). Η ιδιότητα του ριζικού κέντρου, να έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους τρεις κύκλους, χρησιμεύει στον προσδιορισμό του Δ επί της ευθείας ζ . Ας συμβολίσουμε με $\rho_A, \rho_B, \rho_\Gamma$ τις ακτίνες αυτών των κύκλων. Τότε η ιδιότητα του ριζικού κέντρου συνεπάγεται ότι

$$\rho_A^2 - |OA|^2 = \rho_B^2 - |OB|^2 = \rho_\Gamma^2 - |O\Gamma|^2.$$

Τούτο σημαίνει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα με υποτεινούσα και μία κάθετο αντίστοιχα τις $(\rho_A, |OA|)$, $(\rho_B, |OB|)$, $(\rho_\Gamma, |O\Gamma|)$, έχουν τις άλλες κάθετες ίσες, άρα κατά την στροφή των εξωτερικών τριγώνων περί τις πλευρές του $AB\Gamma$ οι κορυφές θα συμπέσουν σε σημείο Δ της ζ , ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Το τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ που σχηματίζεται κατά την προηγούμενη πρόταση θα έχει το O ως προβολή της κορυφής του Δ επί του επιπέδου ε της έδρας $AB\Gamma$, επομένως το $|O\Delta|$ θα είναι το ύψος του τετραπλεύρου από το Δ και αυτό θα εκφράζεται με την δύναμη του O ως προς έναν, οποιονδήποτε, από τους τρεις κύκλους ($|O\Delta|^2 = \rho_A^2 - |OA|^2$).

Σχόλιο-2 Ισχύει και το αντίστροφο της Πρότασης 8.4.1. Εάν δοθεί τετράεδρο $AB\Gamma\Delta$ και προβάλλουμε την κορυφή Δ στο επίπεδο ε του $AB\Gamma$, η προβολή O θα έχει τις ιδιότητες που αναφέρονται στην πρόταση. Έτσι οι κάθετες από το O προς τις πλευρές του $AB\Gamma$ θα περιέχουν τις κορυφές A^*, B^*, Γ^* , που θα προκύψουν όταν κόψουμε τις παράπλευρες έδρες κατά μήκος των ακμών $\Delta A, \Delta B, \Delta \Gamma$ και τις ξεδιπλώσουμε στο επίπεδο ε περιστρέφοντάς τις αντίστοιχα περί τις πλευρές του $AB\Gamma$. Θα δημιουργηθεί τότε επίπεδο σχήμα παρόμοιο του 644.

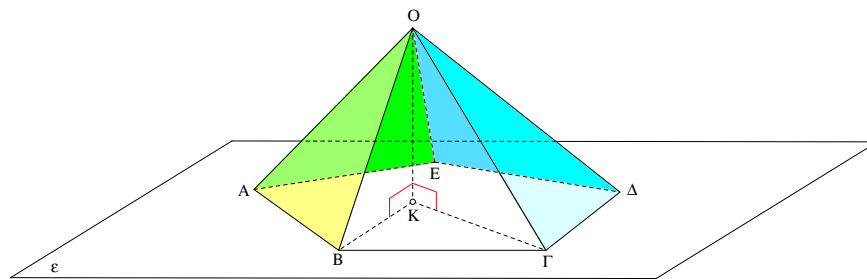


Σχήμα 645: Ενώνοντας τα μέσα απέναντι ακμών

Άσκηση 8.4.1 Δείξε ότι τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι ακμών ενός τετραέδρου διέρχονται από κοινό σημείο M που τα διχοτομεί.

8.5 Κανονικές πυραμίδες

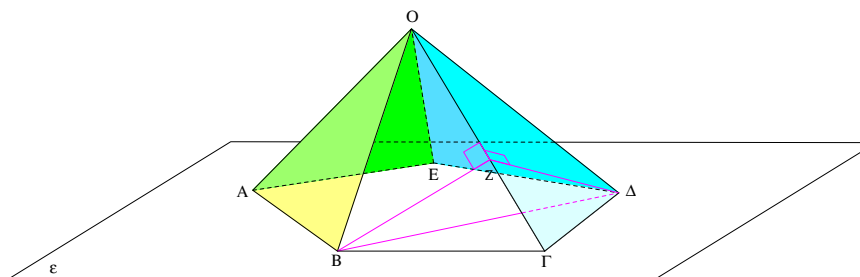
Ονομάζουμε **Κανονική** μία πυραμίδα της οποίας (α:) η βάση είναι ένα κανονικό πολύγωνο και (β:) η ευθεία KO που ενώνει το κέντρο K του κανονικού πολυγώνου με την κορυφή της πυραμίδας είναι κάθετη στο επίπεδο ϵ της βάσης.



Σχήμα 646: Κανονική πυραμίδα

Πρόταση 8.5.1 Σε κάθε κανονική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ίσες και οι παράπλευρες διέδρες είναι ίσες. Και αντίστροφα, αν οι παράπλευρες έδρες είναι ίσες μεταξύ τους και οι παράπλευρες διέδρες είναι επίσης ίσες μεταξύ τους, τότε η πυραμίδα είναι κανονική.

Απόδειξη: Κατ' αρχήν τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται από την κάθετο OK στο επίπεδο ϵ της βάσης και τις ακτίνες $KA, KB, KG, \dots$ προς τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου (σχήμα 646) είναι ίσα, ως έχοντα κοινή την κάθετο OK και τις ακτίνες $KA, KB, KG, \dots$ ίσες. Από αυτό έπεται ότι και τα τρίγωνα $OAB, OBG, OGD, \dots$ είναι ισοσκελή και ίσα μεταξύ τους, ως έχοντα αντίστοιχες πλευρές ίσες (ΠΠΠ-κριτήριο). Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει η ισότητα των εδρών στο O . Γιά την ισότητα των παράπλευρων διέδρων χρειαζόμαστε τις γωνίες που σχηματίζονται από επίπεδα κάθετα στις παράπλευρες ακμές. Ένα τέτοιο επίπεδο λ.χ. κάθετο στην ακμή OF προκύπτει φέρνοντας τα ύψη των τριγώνων



Σχήμα 647: Παράπλευρη διέδρος κανονικής πυραμίδας

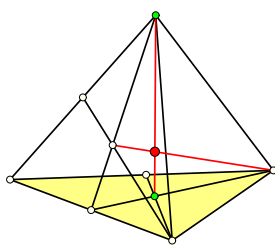
BOF και $FOΔ$ από τα B και Δ αντίστοιχα. Λόγω της ισότητας αυτών των τριγώνων τα ύψη διέρχονται από το ίδιο σημείο Z της OF και ορίζουν επίπεδο κάθετο στην ακμή OF (Παράγραφος 7.5). Από τον τρόπο κατασκευής τους όμως όλα τα τρίγωνα όπως το $BZ\Delta$ που κατασκευάζονται με ανάλογο τρόπο και γιά τις άλλες ακμές $OD, OE, \dots$ είναι ίσα μεταξύ τους, άρα και οι γωνίες που αντιστοιχούν στην $BZ\Delta$ είναι ίσες μεταξύ τους. Οι γωνίες αυτές όμως είναι ακριβώς οι γωνίες των διέδρων, οι οποίες επομένως θα είναι ίσες μεταξύ τους. Γιά το αντίστροφο θεωρήσε το ίδιο σχήμα. Από την ισότητα των εδρών συνάγεται η ύπαρξη του

Οι τιμές για $\kappa=7,8,\dots$ κ.τ.λ., λόγω του φθίνοντος της ακολουθίας, θα είναι μικρότερες του 3 και επειδή πρέπει ταυτόχρονα $\nu \geq 3$ και $\nu < \frac{2\kappa}{\kappa-2}$ σε αυτές τις περιπτώσεις δεν θα υπάρχει ν που να τις ικανοποιεί. Το κ λοιπόν μπορεί να έχει μόνο τις τιμές 3, 4 και 5 και για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις τα επιτρεπόμενα $\nu < \frac{2\kappa}{\kappa-2}$ είναι τα αναγραφόμενα στην στήλη κάτω από την αντίστοιχη τιμή του κ , ο.ε.δ.

Σχόλιο Η απλή αυτή πρόταση είναι η αιτία του δραματικού περιορισμού των λεγομένων *κανονικών πολυέδρων* που εξετάζονται στην επόμενη παράγραφο. Η πρόταση λέει ότι αν θέλει κανείς να φτιάξει πολυεδρική γωνία της οποίας οι έδρες να είναι κανονικά πολύγωνα, τότε υπάρχουν 5 και μόνον δυνατότητες:

1. Τριεδρικές γωνίες ($\kappa=3$): Υπάρχουν τρεις και μόνο δυνατότητες κανονικών τριεδρικών γωνιών. Αυτές που έχουν τις τρεις έδρες τους ισόπλευρα τρίγωνα ($\nu=3$), αυτές που έχουν τις τρεις έδρες τους τετράγωνα ($\nu=4$) και αυτές που έχουν τις τρεις έδρες τους κανονικά πεντάγωνα ($\nu=5$).
2. Τετραεδρικές γωνίες ($\kappa=4$): Υπάρχει μία και μόνο κανονική τετραεδρική γωνία, που έχει έδρες ισόπλευρα τρίγωνα ($\nu=3$).
3. Πενταεδρικές γωνίες ($\kappa=5$): Υπάρχει μία και μόνο κανονική πενταεδρική γωνία, που έχει έδρες ισόπλευρα τρίγωνα ($\nu=3$).

Άσκηση 8.5.1 Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο $B\Delta Z$ του σχήματος 648 έκφρασε το συνημίτονο της γωνίας της διέδρου συναρτήσει της γωνίας της έδρας τους, για κάθε μία από τις 5 δυνατές κανονικές πολυεδρικές γωνίες.



Σχήμα 649: Κέντροειδές τετραέδρου

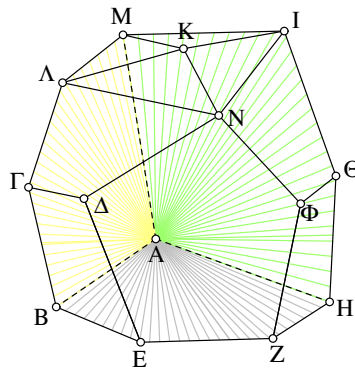
Άσκηση 8.5.2 Δείξε ότι σε κάθε τετραέδρου οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές του με τα κέντρα βάρους των απέναντι αυτών εδρών διέρχονται από κοινό σημείο.

Υπόδειξη: Εφάρμοσε την Άσκηση 5.14.3.

Οι ευθείες της προηγούμενης άσκησης λέγονται **Διάμεσοι** του τετραέδρου. Το σημείο τομής τους λέγεται **Κέντροειδές** του τετραέδρου.

Άσκηση 8.5.3 Δείξε ότι οι ευθείες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών του τετράεδρου διέρχονται από το κέντροειδές του.

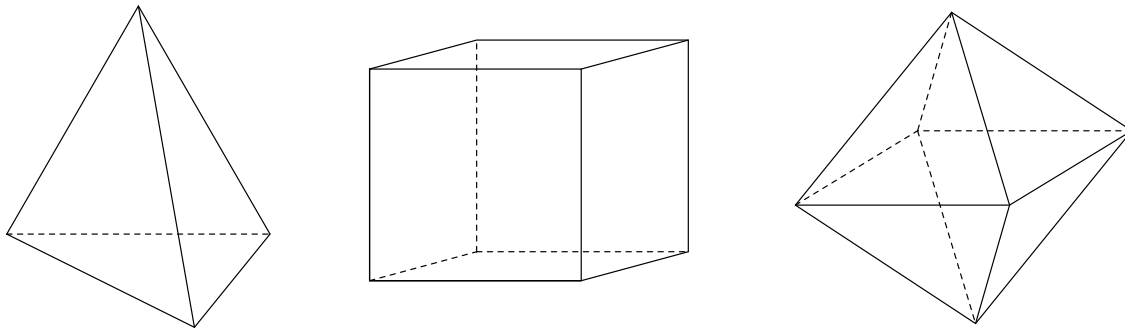
8.6 Πολύεδρα, Πλατωνικά σώματα



Σχήμα 650: Πολύεδρο

Ονομάζουμε **Πολύεδρο** ένα στερεό το οποίο περικλείεται από επίπεδα. Τα επίπεδα που περιορίζουν τον χώρο που καταλαμβάνει το στερεό λέγονται **Έδρες του πολυέδρου**. Οι ευθείες που ορίζονται ως τομές δύο εδρών του πολυέδρου λέγονται **Ακμές του πολυέδρου**. Συχνά ονομάζουμε έδρες και τα πολύγωνα που σχηματίζονται επί μιάς έδρας μέσω των ευθειών-τομών της με τις άλλες. Οι διέδρες γωνίες που σχηματίζονται στις ακμές του πολυέδρου λέγονται **Διέδρες του πολυέδρου**. Οι πολυεδρικές γωνίες που σχηματίζονται από τρεις ή περισσότερες έδρες που διέρχονται από κοινό σημείο λέγονται **Πολυεδρικές γωνίες του πολυέδρου**. Οι κορυφές των πολυεδρικών γωνιών λέγονται **Κορυφές του πολυέδρου**. Ένα πολύεδρο λέγεται **Κυρτό** όταν κάθε έδρα του αφήνει το πολυέδρου από την μιά μεριά του μόνο. Δύο πολύεδρα $AB\Gamma\dots$ και $A^*B^*\Gamma^*\dots$ λέγονται **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες.

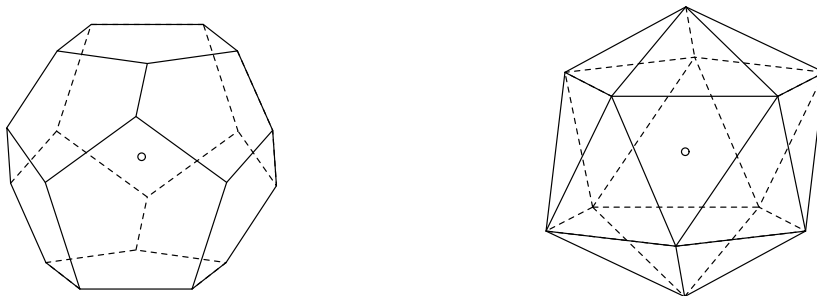
Κυρτά πολύεδρα είναι τα ανάλογα στον χώρο των κυρτών πολυγώνων του επιπέδου. Μιά σημαντική διαφορά από τα πολύγωνα είναι τα πολλά είδη γωνιών που συναντάμε στον χώρο: διέδρες, τριέδρες και γενικότερα πολυεδρικές γωνίες. Η πυραμίδα και η κόλουρη πυραμίδα που συναντήσαμε ήδη στην προηγούμενη παράγραφο είναι από τα απλούστερα είδη κυρτών πολυέδρων. Άλλα είδη πολυέδρων είναι τα γνωστά: πρίσματα, παραλληλεπίπεδα, τετράεδρα, κύβοι, κτλ. που θα εξετάσουμε παρακάτω.



Σχήμα 651: Κανονικό τετράεδρο, κύβος και κανονικό οκτάεδρο

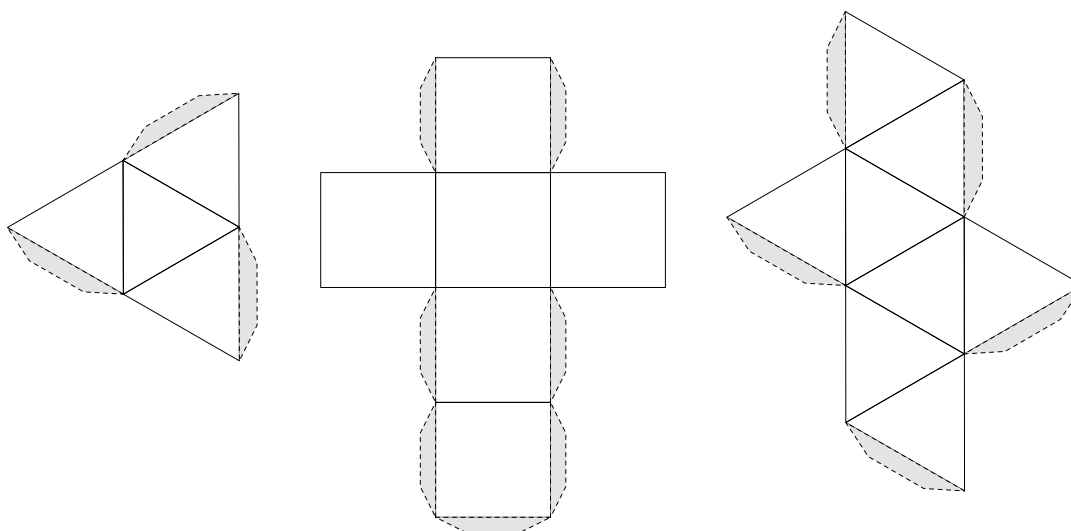
Μιά ιδιαίτερη κατηγορία πολυέδρων είναι τα **Κανονικά πολύεδρα**, τα αντίστοιχα στον χώρο των κανονικών πολυγώνων του επιπέδου. Αυτά ορίζονται ως τα πολύεδρα που έχουν

όλες τις έδρες τους ίσες με ένα κανονικό πολύγωνο και όλες τις διέδρες γωνίες τους ίσες μεταξύ τους. Ενώ στο επίπεδο υπάρχουν άπειρα κανονικά πολύγωνα, στο χώρο, τα αντίστοιχά τους, που είναι τα κανονικά πολυέδρα, υπάρχουν μόνο πέντε. Αυτά είναι τα πέντε **Πλατωνικά σώματα**: Το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος, και τα κανονικά οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο. Τα επόμενα σχήματα δίνουν εικόνες για την κατασκευή αυτών



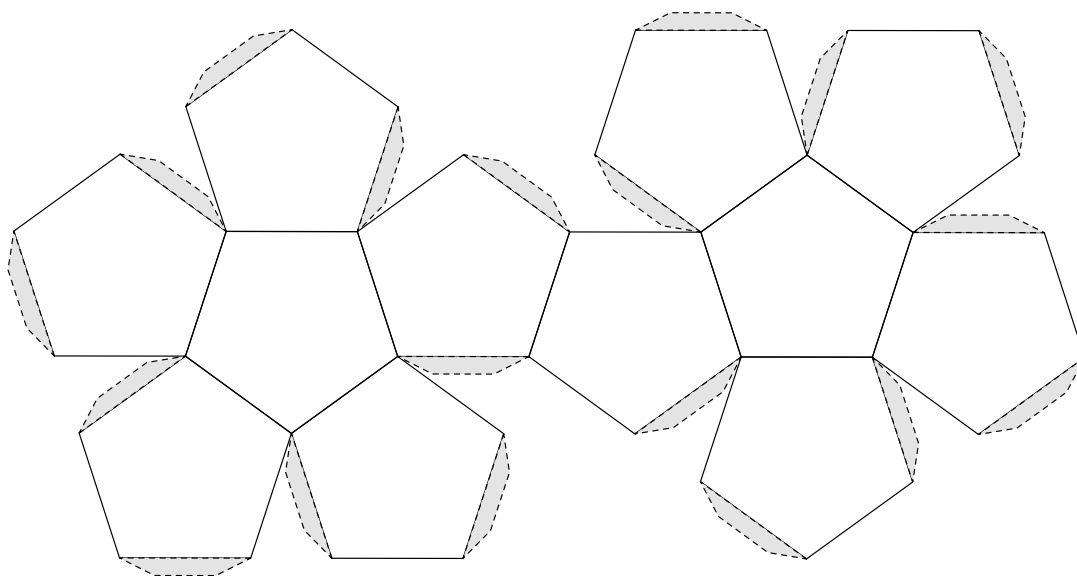
Σχήμα 652: Κανονικό δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο

των πολυέδρων από χαρτί. Αφού σχεδιασθούν τα σχήματα στο επιθυμητό μέγεθος πρέπει να διπλωθούν κατά μήκος των ακμών που είναι κοινές σε δύο από τα πολύγωνα. Οι ακμές που είναι μόνες τους πρέπει να συγκολληθούν κάθε μία με μία αντίστοιχη που έχει ένα βοηθητικό αυτί που θα αληφθεί με κόλλα. Για διευκόλυνση σχεδιάζονται και τα βοηθητικά αυτιά που πρέπει να αλειφθούν με κόλλα.



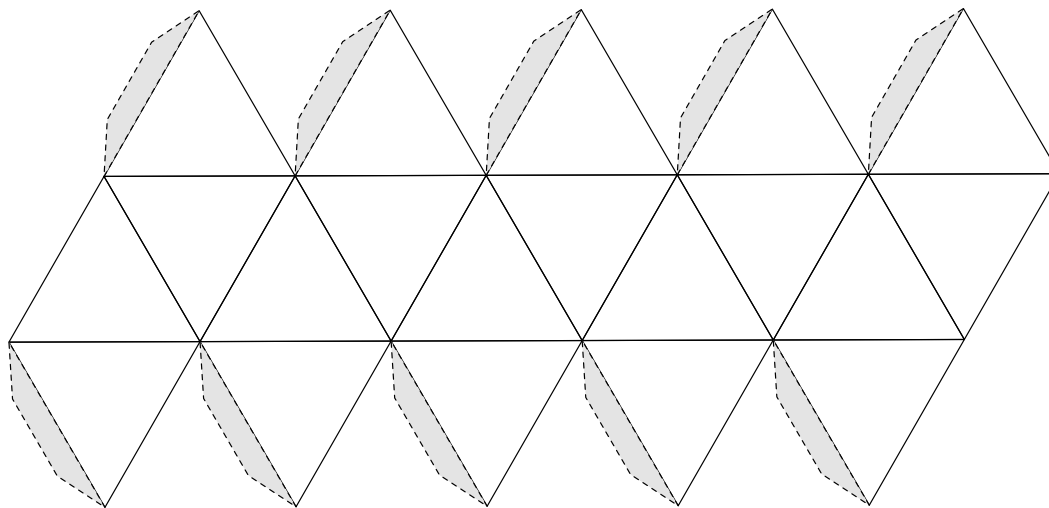
Σχήμα 653: Μοντέλα κανονικού τετράεδρου, κύβου και οκτάεδρου

Ο περιορισμός σε 5 των κανονικών πολυέδρων οφείλεται στον αντίστοιχο περιορισμό για κανονικές πολυεδρικές γωνίες (Πρόταση 8.5.2). Το ότι υπάρχουν αυτά τα πέντε πλατωνικά σώματα είναι σχετικά εύκολο ναδειχθεί. Το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος και το κανονικό οκτάεδρο κατασκευάζονται εύκολα, με την έννοια ότι αν δοθεί ένα ορισμένο μήκος δ , κατασκευάζεται το αντίστοιχο στερεό του οποίου όλες οι ακμές να έχουν μήκος δ . Για το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο η αντίστοιχη κατασκευή είναι πιο σύνθετη, μπορεί ωστόσο να στηριχθεί στα προτεινόμενα μοντέλα.



Σχήμα 654: Μοντέλο κανονικού δωδεκαέδρου

Η απόδειξη του ότι δεν υπάρχουν άλλα από τα 5 είναι και αυτή απλή και μπορεί να στηριχθεί στην προαναφερθείσα Πρόταση 8.5.2. Η απόδειξη θα μπορούσε να σκιαγραφηθεί ως εξής. Στην αρχή κατασκευάζουμε τα πέντε σώματα με μήκος ακμής δ . Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και κάποιο άλλο Σ' με μήκος ακμής δ , τότε μία πολυεδρική γωνία B του Σ' θα πρέπει να συμπίπτει με μία από τις 5 δυνατότητες της προαναφερθείσας πρότασης. Έστω ότι συμπίπτει με την πολυεδρική γωνία A ενός από τα 5 συγκεκριμένα σώματα, πες του Σ . Τότε προσαρμό-

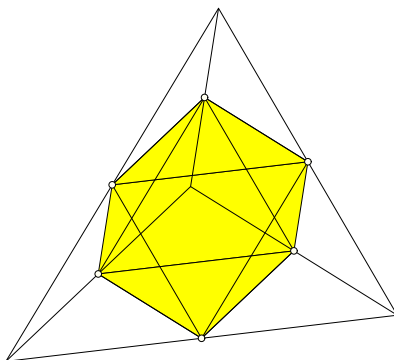


Σχήμα 655: Μοντέλο κανονικού εικοσαέδρου

ζουμε το Σ' πάνω στο Σ , έτσι ώστε η πολυεδρική γωνία B να συμπίπτει με την A . Κατόπιν θα συμπίψουν και οι μη-παράπλευρες διέδροι των A και B λόγω της ισότητας των διέδρων γωνιών (Άσκηση 8.5.1). Προχωράμε κατόπιν επαγωγικά ως προς το πλήθος των εδρών του

Σ για τις οποίες έχουμε αποδείξει την σύμπτωση με αντίστοιχες του Σ' , μέχρι να δείξουμε την σύμπτωση όλων των εδρών του Σ με αντίστοιχες του Σ' .

Αν και η σκιαγράφηση της προηγούμενης απόδειξης μπορεί να συμπληρωθεί σε πλήρη απόδειξη, εν τούτοις δεν κρίνω σκόπιμο, στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, να εμβαθύνω στις διάφορες λεπτομέρειες που απαιτούνται και αφορούν στην ισότητα πολυεδρικών γωνιών και την ομοιότητα πολυέδρων.



Σχήμα 656: Οκτάεδρο από τα μέσα τετραέδρου

Άσκηση 8.6.1 Δείξε ότι τα μέσα των ακμών κανονικού τετραέδρου ορίζουν τις κορυφές ενός κανονικού οκταέδρου.

Άσκηση 8.6.2 Δείξε ότι το μέτρο ω της διέδρου γωνίας ενός κανονικού τετραέδρου ικανοποιεί την εξίσωση $\sin(\omega) = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 8.6.3 Δείξε ότι το μέτρο ω της διέδρου γωνίας ενός κανονικού οκταέδρου ικανοποιεί την εξίσωση $\eta\mu(\omega) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Άσκηση 8.6.4 Δείξε ότι το μέτρο ω της διέδρου γωνίας ενός πλατωνικού σώματος στο οποίο σε κάθε κορυφή συντρέχουν q ακμές και κάθε έδρα είναι κανονικό p -γωνο, ικανοποιεί τον τύπο

$$\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Υπόδειξη: Παραλλαγή της Άσκησης 8.5.1.

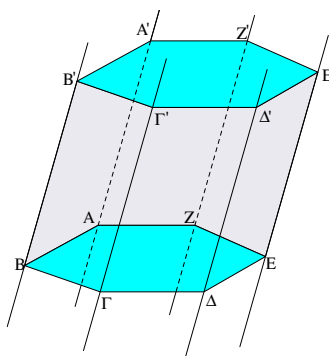
Άσκηση 8.6.5 Για κάθε ένα από τα Πλατωνικά σώματα να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών τετραέδρων, των οποίων οι κορυφές συμπίπτουν με κορυφές του σώματος.

Άσκηση 8.6.6 Δείξε ότι για τετράεδρα των οποίων οι απέναντι ακμές είναι ασύμβατα κάθετες, τα ύψη, δηλαδή οι ευθείες από μιά κορυφή που είναι κάθετες στην απέναντι έδρα, διέρχονται όλες από κοινό σημείο.

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την Πρόταση 8.2.4.

Άσκηση 8.6.7 Δείξε ότι αν σε τετράεδρο δύο ζεύγη απέναντι ακμών αποτελούνται από ασύμβατα κάθετες, τότε το ίδιο συμβαίνει και με το τρίτο ζεύγος απέναντι ακμών.

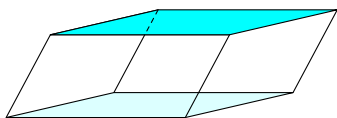
8.7 Πρίσματα



Σχήμα 657: Πρίσμα

Η εκτεινόμενη στο άπειρο επιφάνεια, αποτελούμενη από τις λωρίδες μεταξύ των παραλλήλων ευθειών (AA', BB') , $(BB', \Gamma\Gamma')$, ... λέγεται **Πρισματική επιφάνεια**. Οι διέδρες γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών λωρίδων ονομάζονται **Διέδρες** της πρισματικής επιφάνειας. Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας μία πρισματική επιφάνεια με δύο παράλληλα επίπεδα λέγεται **Πρίσμα**. Η απόσταση αυτών των επιπέδων λέγεται **Ύψος του πρίσματος**. Τα πολύγωνα που $AB\Gamma\Delta\ldots$ και $A'B'\Gamma'\Delta'\ldots$ που ορίζονται από την τομή της πρισματικής επιφάνειας με τα παράλληλα επίπεδα είναι ίσα (Πόρισμα 7.3.2) και λέγονται **Βάσεις του πρίσματος**. Το πρίσμα λέγεται **Κυρτό** όταν το αντίστοιχο πολύγωνο της βάσης $AB\Gamma\Delta\ldots$ είναι κυρτό. Τα ευθύγραμμα τμήματα AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, ... λέγονται **Παράπλευρες ακμές** του πρίσματος. Κάθε λωρίδα της πρισματικής επιφάνειας τέμνεται από τα παράλληλα επίπεδα των βάσεων κατά παραλληλόγραμμο που ονομάζεται **Έδρα** του πρίσματος. Το πρίσμα λέγεται **Ορθό** όταν οι παράπλευρες ακμές είναι κάθετες στις βάσεις του. Το πρίσμα λέγεται **Κανονικό** όταν είναι ορθό και το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta\ldots$ είναι κανονικό. Δύο πρίσματα λέγονται **Ίσα** όταν έχουν αντίστοιχες έδρες ίσες και αντίστοιχες διέδρες επίσης ίσες.

Ένα από τα πιο απλά πρίσματα είναι το **Παραλληλεπίπεδο** στο οποίο οι βάσεις είναι παραλληλόγραμμα. Δύο κορυφές που δεν έχουν κοινές ακμές λέγονται **Απέναντι** κορυφές του παραλληλεπιπέδου. Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν δύο απέναντι κορυφές λέγονται **Διαγώνιοι** του παραλληλεπιπέδου.

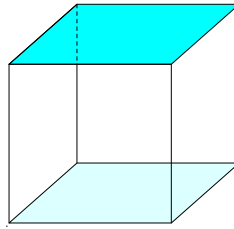


Σχήμα 658: Παραλληλεπίπεδο και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Άσκηση 8.7.1 Δείξε ότι οι τέσσερις διαγώνιοι του παραλληλεπιπέδου διέρχονται από το ίδιο σημείο που τις διχοτομεί. Δείξε επίσης ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες μεταξύ τους.

Άσκηση 8.7.2 Δείξε ότι, εάν σε πρίσμα με τετραγωνικές βάσεις οι τέσσερις διαγώνιοι διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε διχοτομούνται από αυτό και το πρίσμα είναι ένα παραλληλεπίπεδο.

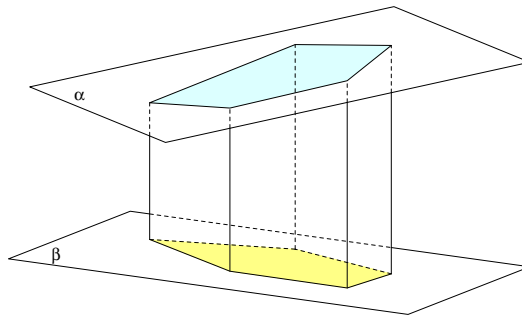
Ένα ορθό παραλληλεπίπεδο στο οποίο επιπλέον οι βάσεις είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα λέγεται **Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**. Ο **Κύβος** είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου όλες οι έδρες είναι τετράγωνα.



Σχήμα 659: Κύβος

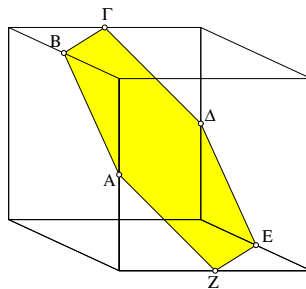
Άσκηση 8.7.3 Δείξε ότι τα τετράγωνα που αποτελούν τις έδρες του κύβου είναι ίσα μεταξύ τους.

Άσκηση 8.7.4 Δείξε ότι οι απέναντι ακμές τετραέδρου (δηλαδή ακμές που δεν έχουν κοινές κορυφές) ορίζουν δύο ασύμβατες ευθείες. Δείξε επίσης ότι η τομή τετραέδρου με επίπεδο παράλληλο προς δύο απέναντι ακμές του είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 660: Κολοβό πρίσμα

Το στερεό που προκύπτει τέμνοντας μία πρισματική επιφάνεια με μη-παράλληλα επίπεδα λέγεται **Κολοβό πρίσμα**.

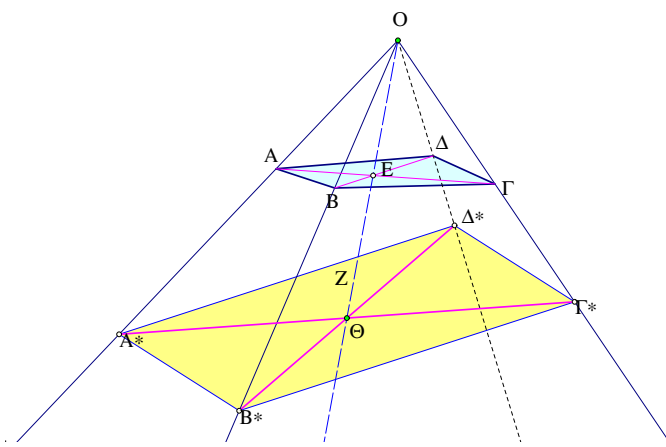


Σχήμα 661: Εξαγωνική τομή κύβου

Άσκηση 8.7.5 Δείξε ότι υπάρχει τομή του κύβου με επίπεδο που ορίζει επί του τέμνοντος επιπέδου ένα κανονικό εξάγωνο.

Υπόδειξη: Οι κορυφές του εξαγώνου είναι μέσα ακμών του κύβου. Αυτό εξασφαλίζει ότι όλες οι πλευρές του εξαγώνου είναι ίσες με το μισό της διαγωνίου της τετράγωνης έδρας του κύβου. Για το ότι το σχήμα είναι επίπεδο και έχει και ίσες γωνίες αρκεί ναδειχθεί ότι τέσσερα διαδοχικά σημεία είναι στο ίδιο επίπεδο και σχηματίζουν τραπέζιο (όπως λ.χ. το $AB\Gamma\Delta$ στο σχήμα-661).

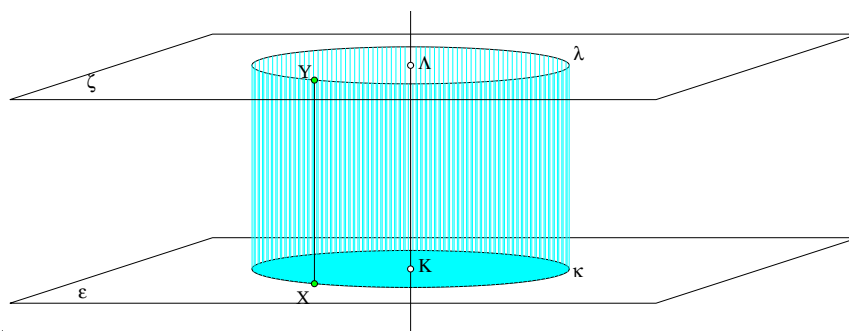
Άσκηση 8.7.6 Να τμηθεί τετραεδρική γωνία $OAB\Gamma\Delta$ με επίπεδο κατά παραλληλόγραμμο $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*$.



Σχήμα 662: Τομή κατά παραλληλόγραμμο

Υπόδειξη: Η τομή των επιπέδων $OB\Delta$ και OAG είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας Θ του παραλληλογράμμου. Η κατεύθυνση των διαγωνίων $A^*\Gamma^*$ και $B^*\Delta^*$ προσδιορίζεται από την Άσκηση 3.12.8.

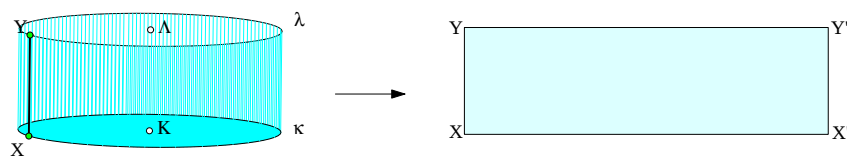
8.8 Κύλινδρος



Σχήμα 663: Κύλινδρος

Δοθέντος κύκλου κ στο επίπεδο ε , η εκτεινόμενη στο άπειρο επιφάνεια που παράγεται από ευθεία XY κάθετη στο ε και διερχόμενη από τα σημεία X του κύκλου λέγεται **Κυλινδρική επιφάνεια**. Οι παράλληλες ευθείες XY που παράγουν την επιφάνεια λέγονται **Γενέτειρες της επιφανείας** και η παράλληλη αυτών από το κέντρο K του κύκλου λέγεται **Άξονας της κυλινδρικής επιφανείας**. Για να τις διακρίνουμε από άλλες επιφάνειες που παράγονται με παρόμοιο τρόπο συχνά χρησιμοποιούμε τον ακριβέστερο όρο **Ορθή κυκλική κυλινδρική επιφάνεια**. Η τομή μιάς τέτοιας επιφανείας με δύο επίπεδα ε και ζ κάθετα στην γενέτειρα ορίζει ένα στερεό που ονομάζεται **Κύλινδρος**. Οι δύο ίσοι κύκλοι που αποτείνουν τα επίπεδα ε και ζ από την κυλινδρική επιφάνεια λέγονται **Βάσεις του κυλίνδρου**. Ενίοτε ονομάζουμε βάσεις και τα ίδια τα επίπεδα ε και ζ . Η απόσταση αυτών των επιπέδων λέγεται **Ύψος του κυλίνδρου**. Από τον ορισμό συνάγεται ότι ο κύλινδρος είναι το στερεό που προκύπτει περιστρέφοντας το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $KXY\Lambda$ γύρω από την πλευρά του $K\Lambda$. Από τον ορισμό προκύπτει επίσης αμέσως ότι οι τομές του κυλίνδρου με επίπεδα παράλληλα προς τις βάσεις του είναι κύκλοι ίσοι προς τον κ . Η ακτίνα ρ του κύκλου κ λέγεται **Ακτίνα του κυλίνδρου**. Δύο κύλινδροι λέγονται **Ίσοι** όταν έχουν την ίδια ακτίνα και το ίδιο ύψος.

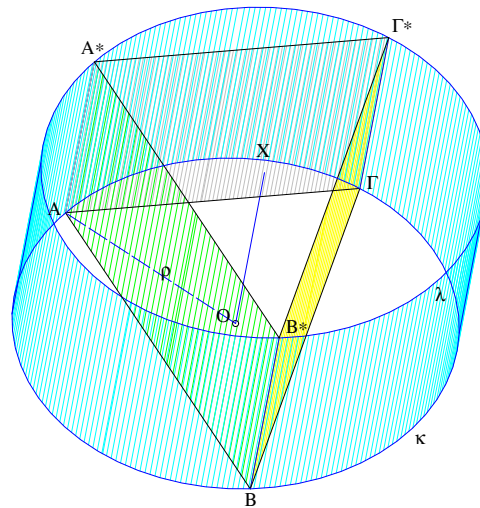
Οι κύλινδροι κατασκευάζονται εύκολα από ορθογώνια παραλληλόγραμμο $XY\Upsilon'X'$ που κάμπτουμε σε κυκλική μορφή και ταυτίζουμε (κολλάμε) τις απέναντι πλευρές τους XY και $X'\Upsilon'$. Αποδεικνύεται με την βοήθεια της *διαφορικής γεωμετρίας* (θεώρημα εωρδΗαρτμανν-Νιρενμπεργ [Ber02, σ. 77], δες και παραπομπές παραγράφου 8.9) ότι η διαδικασία αυτή διατηρεί τις αποστάσεις σημείων μεταφέροντας την ευθύγραμμη απόσταση πάνω στο επίπεδο ανάπτυγματος στο μήκος τόξου μιάς έλλικας πάνω στον κύλινδρο. Η αντίστροφη διαδικασία κατά την οποία κόβουμε έναν κύλινδρο κατά μήκος μιάς γενέτειράς του XY και τον ξετυλίγουμε σε ένα επίπεδο ορθογώνιο $XY\Upsilon'X'$ λέγεται **Ανάπτυγμα του κυλίνδρου**. Το μήκος της



Σχήμα 664: Κύλινδρου ανάπτυγμα

πλευράς XX' του αναπτύγματος είναι ίσο με την περίμετρο του κύκλου κ . Συνεπώς αν ρ είναι

η ακτίνα του κυλίνδρου τότε $|XX'| = 2\rho$. Η αντίστροφη διαδικασία είναι προφανής. Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $XX'Y'Y$ μπορεί να καμφθεί και με συγκόλληση των πλευρών του XY και $X'Y'$ να δώσει την παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου. Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται στην βιομηχανία για την παραγωγή σωλήνων.



Σχήμα 665: Κύλινδρος περιγεγραμμένος τριγωνικού πρίσματος

Άσκηση 8.8.1 Δείξε ότι κάθε ορθό τριγωνικό πρίσμα εγγράφεται σε κύλινδρο, με την έννοια ότι υπάρχει ορθός κυκλικός κύλινδρος που περιέχει τις ακμές του πρίσματος ως γενέτειρες.

Υπόδειξη: Έστω $AB\Gamma$ το τρίγωνο της βάσης του πρίσματος και κ ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Ο κύλινδρος με βάση τον κ και άξονα την κάθετο OX στην βάση του στο κέντρο O του κ είναι ο ζητούμενος. Τούτο διότι οι ακμές AA^* , BB^* , $\Gamma\Gamma^*$ περιέχονται στον κύλινδρο.

Άσκηση 8.8.2 Δείξε ότι κάθε ορθό κανονικό πρίσμα εγγράφεται σε κύλινδρο.

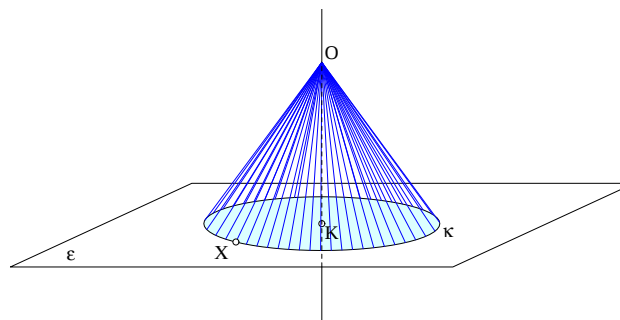
Υπόδειξη: Ανάλογη της προηγούμενης άσκησης.

Σχόλιο Με μικρές αλλαγές στην απόδειξη οι δύο προηγούμενες ασκήσεις γενικεύονται και για πλάγια πρίσματα των οποίων οι βάσεις είναι εγγράψιμα σε κύκλο πολύγωνα. Και γι' αυτά αποδεικνύεται ότι υπάρχει **Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος** που τα περιβάλλει, δηλαδή κύλινδρος που παράγεται από παράλληλες μεταξύ τους ευθείες που ενώνουν σημεία δύο ίσων κύκλων που ευρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα.

8.9 Κώνος, Κωνική επιφάνεια

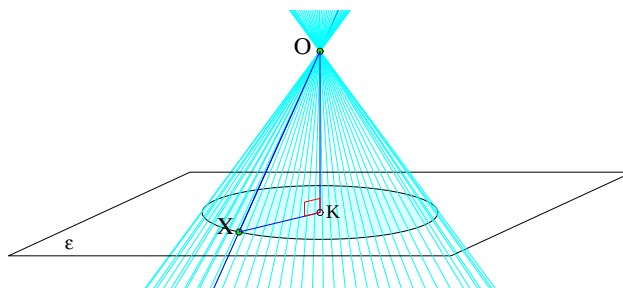
Δοθέντος κύκλου κ στο επίπεδο ϵ και σημείου O επί της ευθείας της καθέτου στο επίπεδο ϵ που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου (O διαφορετικό του K), ονομάζουμε **Κώνο** το στερεό που προκύπτει από τις ευθείες που ενώνουν το σημείο O με όλα τα σημεία X του κύκλου. Το σημείο O λέγεται **Κορυφή του κώνου**, οι ευθείες OX λέγονται **Γενέτιρες του κώνου** και ο κύκλος κ λέγεται **Βάση του κώνου**. Συχνά, για να διακρίνουμε αυτό το είδος του κώνου από άλλα πιο γενικά, τον ονομάζουμε **Ορθό κυκλικό κώνο**. Η ευθεία OK λέγεται **Άξονας του κώνου**. Το μήκος της λέγεται **Ύψος του κώνου**. Δύο κώνοι λέγονται **Ίσοι** όταν έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη.

Από τον ορισμό συνάγεται ότι όλα τα τρίγωνα OKX , για σημεία X επί του κύκλου κ , είναι ορθογώνια στο K τρίγωνα ίσα μεταξύ τους. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο κώνος είναι το στερεό που περιορίζεται από το επίπεδο ϵ και την επιφάνεια που διαγράφει η υποτείνουσα OX του ορθογωνίου τριγώνου OKX καθώς περιστρέφουμε το τρίγωνο περί την κάθετο OK . Την επιφάνεια αυτή ονομάζουμε **Παράπλευρη επιφάνεια** του κώνου. Η επιφάνεια



Σχήμα 666: Κώνος

αυτή είναι μέρος της εκτεινόμενης στο άπειρο επιφάνειας που προκύπτει περιστρέφοντας την ευθεία-φορέα της υποτείνουσας OX του ορθογωνίου OKX (και όχι μόνο το τμήμα της OX). Την επιφάνεια αυτή ονομάζουμε **Κωνική επιφάνεια** και ακριβέστερα **Ορθή κυκλική κωνική επιφάνεια**, για να την διακρίνουμε από άλλες επιφάνειες που παράγονται με παρόμοιο τρόπο. Η κωνική επιφάνεια αποτελείται από δύο χωνιά με κοινή κορυφή στο σημείο O .



Σχήμα 667: Ορθή κωνική επιφάνεια

Πρόταση 8.9.1 Τα ορθογώνια τρίγωνα OKX που σχηματίζονται από τα σημεία X της βάσης, το κέντρο K της βάσης και την κορυφή του κώνου, είναι όλα ίσα μεταξύ τους.

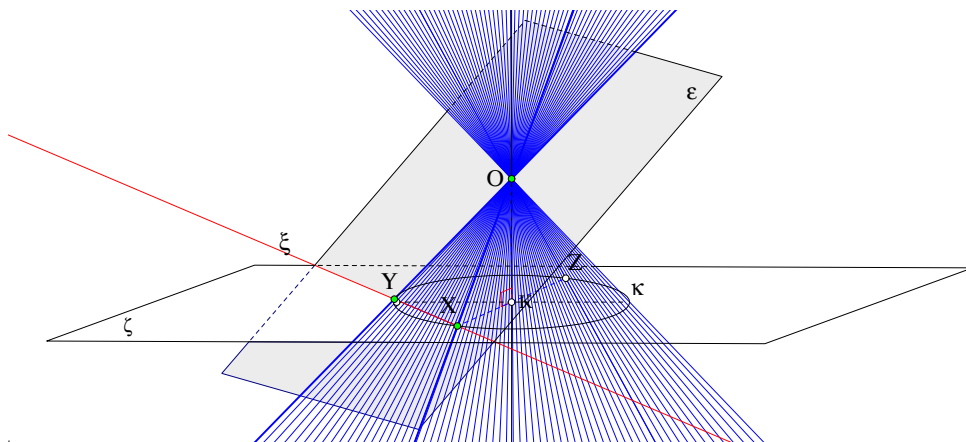
Απόδειξη: Προφανώς, διότι έχουν κοινή την OK και ίσες τις άλλες κάθετες πλευρές τους ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, ο.ε.δ.

Την διπλάσια της γωνίας $\alpha = \angle KOX$, που είναι σταθερή για κάθε γενέτειρα και κάθε σημείο της X , ονομάζουμε **Άνοιγμα ή Γωνία του κώνου**.

Πρόταση 8.9.2 *Η τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονά της και δεν διέρχεται από την κορυφή της είναι κύκλος με κέντρο στον άξονά της.*

Απόδειξη: Έστω ε επίπεδο τέμνον κάθετα τον άξονα στο σημείο K . Έστω και X σημείο τομής μιάς γενέτειρας με το ε . Τα τρίγωνα OKX είναι ορθογώνια στο K και έχουν σταθερά και ανεξάρτητα του X τα $|OK|$ και την γωνία $\alpha = \angle XOK$, άρα είναι ίσα μεταξύ τους και επομένως και η $\rho = |XK|$ είναι σταθερά. Άρα τα σημεία X περιέχονται σε κύκλο κέντρου K και ακτίνας ρ . Αντίστροφα κάθε σημείο αυτού του κύκλου ορίζει ορθογώνιο τρίγωνο XOK , με την ίδια γωνία $\alpha = \angle XOK$, άρα περιέχεται στον κώνο, ο.ε.δ.

Πρόταση 8.9.3 *Η τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο ε που διέρχεται από την κορυφή της είναι ένα ζεύγος από γενέτειρες ή μία ακριβώς γενέτειρα ή ένα και μόνο σημείο που συμπίπτει με την κορυφή της.*



Σχήμα 668: Τομή κώνου με επίπεδο διά της κορυφής του

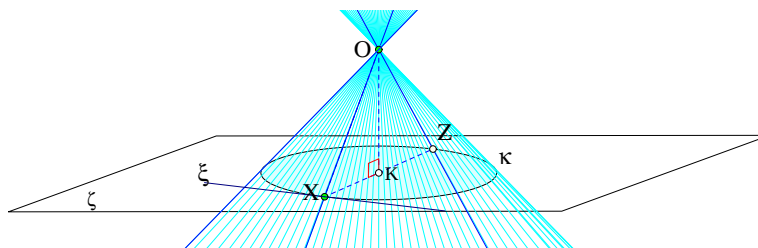
Απόδειξη: Έστω επίπεδο ζ κάθετο στον άξονα της κωνικής επιφάνειας, που, κατά την προηγούμενη πρόταση, τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά κύκλο κ . Εάν το επίπεδο ε περιέχει και άλλο σημείο X γενέτειρας (εκτός του O), τότε θα περιέχει όλη την γενέτειρα και συνεπώς θα τέμνει τον κύκλο κ , αφού αυτός τέμνει κάθε γενέτειρα σε ένα ακριβώς σημείο. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι γενέτειρες που περιέχονται στο ε αντιστοιχούν ακριβώς στα σημεία τομής του κύκλου κ και της ευθείας ξ που είναι η τομή των επιπέδων ε και ζ . Η πρόταση προκύπτει από το γεγονός ότι η ευθεία ξ και ο κύκλος κ μπορεί να έχουν δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο, ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.9.1 *Ένα επίπεδο που περιέχει τον άξονα του κώνου τέμνει αυτόν κατά δύο γενέτειρες συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα.*

Απόδειξη: Από την υπόθεση έπεται ότι η ευθεία ξ τομή των επιπέδων ε και ζ της (απόδειξης της) προηγούμενης πρότασης διέρχεται τότε από το κέντρο του κύκλου κ και τον τέμνει κατά δύο αντιδιαμετρικά σημεία X και Z , εξ ου και το συμπέρασμα, ο.ε.δ.

Ονομάζουμε **Εφαπτόμενο επίπεδο** του κώνου ένα επίπεδο που έχει κοινή με τον κώνο μία ακριβώς γενέτειρα.

Πρόταση 8.9.4 Ένα επίπεδο ε είναι εφαπτόμενο του κώνου τότε ακριβώς όταν περιέχει μία γενέτειρα η του κώνου και είναι κάθετο στο επίπεδο θ που παράγεται από την γενέτειρα η και τον άξονα OK του κώνου.

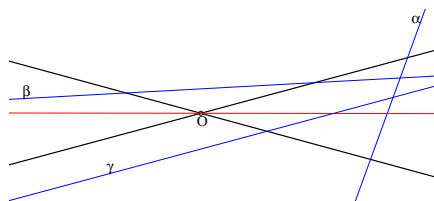


Σχήμα 669: Επίπεδο εφαπτόμενο κώνου

Απόδειξη: Εξ ορισμού το εφαπτόμενο επίπεδο ε κώνου περιέχει μία ακριβώς γενέτειρά του η . Φέρουμε επίπεδο ζ κάθετο στον άξονα του κώνου που τον τέμνει κατά κύκλο κ . Έστω και ξ η ευθεία τομή του ε και του ζ . Οι γενέτειρες του κώνου που περιέχονται στο ε αντιστοιχούν ακριβώς στα σημεία τομής της ευθείας ξ με τον κύκλο κ . Αν λοιπόν υπάρχει ένα μόνο σημείο τομής X , τότε η ξ θα είναι εφαπτόμενη στον κ στο X και η ξ θα είναι κάθετη στην ακτίνα KX του κύκλου κ και (ασύμβστα) κάθετη στον άξονα του κώνου, άρα η ξ θα είναι κάθετη και στο επίπεδο της $\eta=OX$ και του άξονα. Το ε , ως περιέχον την ξ , θα είναι συνεπώς και αυτό κάθετο στο επίπεδο των η και OK . Ο συλλογισμός αντιστρέφεται και δείχνει την αλήθεια της πρότασης, ο.ε.δ.

Πρόταση 8.9.5 Δοθείσης κωνικής επιφάνειας Σ , κάθε επίπεδο ε του χώρου τέμνει την Σ και μάλιστα τέμνει ή (α) όλες τις γενέτειρές της ή (β) όλες εκτός δύο ή (γ) όλες εκτός μίας.

Απόδειξη: Φέρε από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας επίπεδο ε' παράλληλο του ε . Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις (Πρόταση 8.9.3): (α) το ε' έχει κοινό με την Σ μόνο το O , (β) το ε' τέμνει την Σ κατά δύο γενέτειρες, (γ) το ε' τέμνει την Σ κατά μία γενέτειρα. Στην πρώτη περίπτωση, αφού το ε' τέμνει όλες τις γενέτειρες, χωρίς να περιέχει καμία τους, το ίδιο θα κάνει και το παράλληλο επίπεδο ε . Στην δεύτερη περίπτωση το ε' θα τέμνει όλες τις γενέτειρες χωρίς να τις περιέχει, εκτός των δύο συγκεκριμένων, που περιέχει. Άρα το παράλληλο επίπεδο ε θα τέμνει και αυτό όλες τις γενέτειρες εκτός των δύο που περιέχονται στο ε' . Στην τρίτη περίπτωση, το ε' θα περιέχει μία ακριβώς γενέτειρα (άρα θα είναι εφαπτόμενο της Σ) και το παράλληλό του θα τέμνει όλες τις άλλες εκτός αυτής προς την οποία θα είναι παράλληλο, ο.ε.δ.

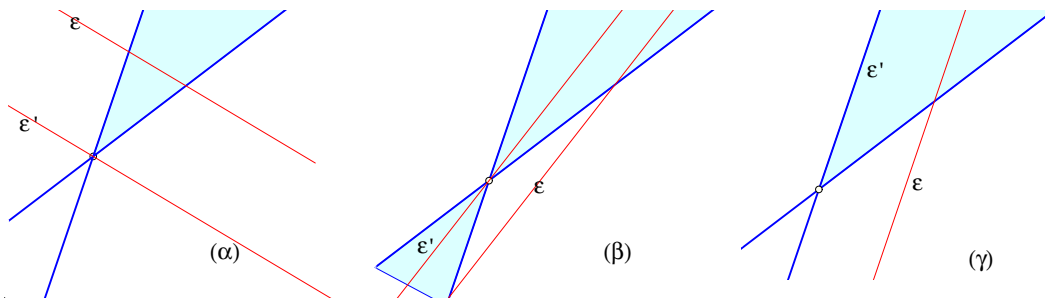


Σχήμα 670: Τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο διά του άξονος

Σχόλιο Συχνά είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε μιά αναλογία που υπάρχει μεταξύ της κωνικής επιφάνειας Σ και του επιπέδου σχήματος που προκύπτει τέμνοντας την Σ με επίπεδο ϑ που διέρχεται από τον άξονά της. Το σχήμα αυτό (σχήμα-670 στο οποίο το ϑ ταυτίζεται με το επίπεδο του χαρτιού) αποτελείται από δύο γενέτειρες των οποίων μία από τις διχοτόμους της γωνίας που σχηματίζουν είναι ο άξονας της Σ . Έτσι λ.χ. στην τελευταία πρόταση αντιστοιχεί το επίπεδο σχήμα με τις ευθείες α , β και γ να περιγράφουν το ανάλογο των τριών περιπτώσεων (α), (β) και (γ), κατά τις οποίες το τέμνον την Σ επίπεδο ε συναντά (α) όλες (β) όλες εκτός δύο και (γ) όλες εκτός μίας γενέτειρες της Σ .

Πόρισμα 8.9.2 Δοθείσης κωνικής επιφάνειας Σ , αν το επίπεδο ε δεν διέρχεται από την κορυφή της O αλλά τέμνει όλες τις γενέτειρες ή όλες εκτός μίας, τότε η τομή της Σ και του ε περιέχεται στο ένα από τα δύο χωνιά της Σ . Αν το ε τέμνει όλες εκτός από δύο γενέτειρες της Σ , τότε τέμνει και τα δύο χωνιά της Σ .

Απόδειξη: Από την απόδειξη της Πρότασης 8.9.5 είδαμε ότι το παράλληλο επίπεδο ε' του ε που διέρχεται από το O στις περιπτώσεις (α) και (γ) δεν περιέχει καμία γενέτειρα, αντίστοιχα είναι εφαπτόμενο μίας γενέτειρας η . Συνεπώς το παράλληλό του ε στην πρώτη περίπτωση θα τέμνει ένα από τα δύο χωνιά. Στην δεύτερη περίπτωση το ε θα είναι παράλληλο προς το εφαπτόμενο επίπεδο ε' το οποίο περιέχει το κάθε χωνί σε διαφορετική πλευρά του. Άρα το ε θα τέμνει τό ένα μόνο χωνί. Τέλος στην περίπτωση που το ε περιέχει δύο γενέτειρες α και β , αυτές χωρίζουν όλες τις άλλες που περιέχονται στο ίδιο χωνί σε δύο ομάδες και το ε θα τέμνει τις γενέτειρες της μίας ομάδας στο ένα χωνί και τις γενέτειρες της άλλης ομάδας στο άλλο χωνί. Η επόμενη εικόνα δείχνει το ανάλογο επίπεδο σχήμα που προκύπτει, σύμφωνα με το προηγούμενο σχόλιο. Το σκιασμένο χωρίο αντιστοιχεί στο χωνί που τέμνει το επίπεδο ε , ο.ε.δ.

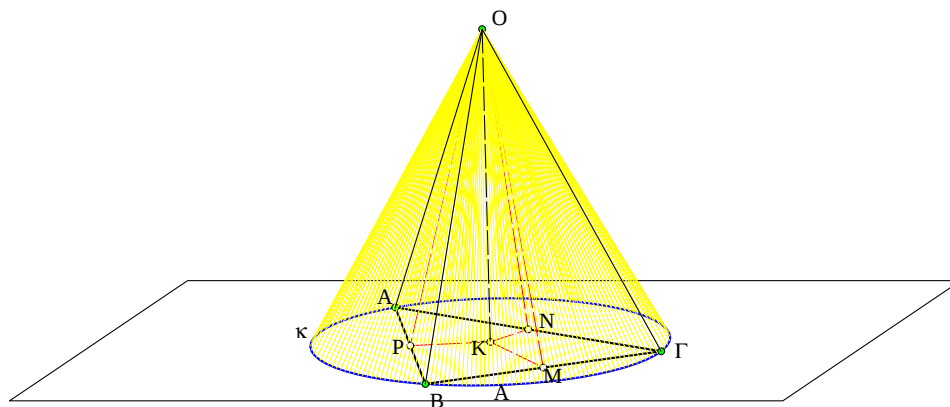


Σχήμα 671: Τομή κωνικής επιφάνειας με επίπεδο ε

Μία πολυεδρική γωνία $OXYZ$... λέγεται **Εγγεγραμμένη σε κώνο** ή ότι **Εγγράφεται σε κωνική επιφάνεια** όταν υπάρχει κωνική επιφάνεια της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το O και ταυτόχρονα οι ακμές της πολυεδρικής γωνίας είναι γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας.

Πρόταση 8.9.6 Κάθε τριέδρος $OXYZ$ εγγράφεται σε ορθή κυκλική κωνική επιφάνεια.

Απόδειξη: Έστω η τριέδρος $OXYZ$. Πάρε σημεία A, B, Γ επί των ακμών της ισαπέχοντα από την κορυφή της $|AO| = |BO| = |GO| = \delta$. Θεώρησε κατόπιν τα μεσοκάθετα επίπεδα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $B\Gamma$ και ΓA . Τα επίπεδα αυτά διέρχονται και τα τρία από την ευθεία OK που είναι η κάθετη στο επίπεδο $AB\Gamma$ από το O . Αυτό προκύπτει από το ότι τα



Σχήμα 672: Περιγεγραμμένος κώνος τριέδρου

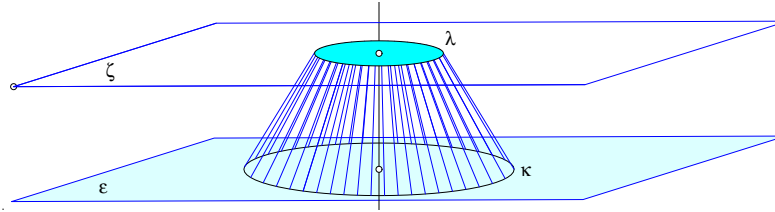
σημεία του μεσοκάθετου επιπέδου λ.χ. του AB χαρακτηρίζονται από το ότι ισαπέχουν από τα A και B. Έτσι, εκ κατασκευής, το O ανήκει και στα τρία μεσοκάθετα επίπεδα. Για τον ίδιο λόγο και το κέντρο K του περιγεγραμμένου κύκλου κ του τριγώνου ABΓ ανήκει και στα τρία μεσοκάθετα επίπεδα. Συνεπώς και η OK περιέχεται και στα τρία μεσοκάθετα επίπεδα. Η OK ως (ασύμβατα) κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου ABΓ (λ.χ. την AB και AG) είναι κάθετη σε αυτό (Άσκηση 7.5.7). Προκύπτει ότι οι ακμές OX, OY και OZ της τριέδρης γωνίας είναι γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας που ορίζεται από τον κύκλο κ και το σημείο O, που σημαίνει ακριβώς ότι η τριέδρος είναι εγγεγραμμένη στην κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

Η κωνική επιφάνεια, την ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση, λέγεται **Περιγεγραμμένη κωνική επιφάνεια** της τριέδρου. Αντίστοιχα ορίζεται και η **Εγγεγραμμένη κωνική επιφάνεια** της τριέδρου, ως η ορθή κυκλική κωνική επιφάνεια που εφάπτεται και των τριών εδρών της τριέδρου. Στην συνέχεια θα δούμε (Άσκηση 8.11.7) ότι κάθε τριέδρος έχει όντως μία εγγεγραμμένη κωνική επιφάνεια.

Άσκηση 8.9.1 Δείξε ότι κάθε κανονική πυραμίδα εγγράφεται σε ορθό κυκλικό κώνο. Δηλαδή, υπάρχει κώνος με κορυφή την κορυφή της πυραμίδας που περιέχει τις ακμές της πυραμίδας ως γενέτειρες.

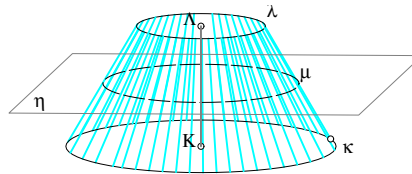
8.10 Κόλουρος Κώνος, Ανάπτυγμα κώνου

Δοθέντος κύκλου κ στο επίπεδο ε και σημείου O επί της ευθείας της καθέτου στο επίπεδο ε που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου (O διαφορετικό του K), Ονομάζουμε **Κόλουρο κώνο** το στερεό που αποτελείται από κώνο με επίπεδο ζ παράλληλο προς την βάση του ε και μη διερχόμενο από την κορυφή του O . Η τομή του επιπέδου ζ με την αντίστοιχη κωνική



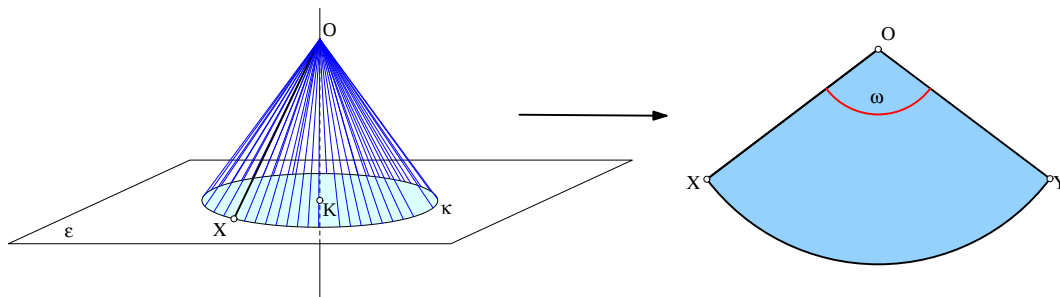
Σχήμα 673: Κόλουρος κώνος

επιφάνεια του κώνου είναι κύκλος λ περιεχόμενος στο επίπεδο ζ με κέντρο επί του άξονος του κώνου (Άσκηση 8.9.2). Οι δύο κύκλοι κ και λ (καθώς και τα επίπεδα ε και ζ) που ορίζουν τον κόλουρο κώνο λέγονται **Βάσεις του κόλουρου κώνου**. Η απόσταση των επιπέδων ε και ζ λέγεται **Ύψος του κόλουρου κώνου**. Δύο κόλουροι κώνοι λέγονται **Ίσοι** όταν έχουν ίσες αντίστοιχες βάσεις και ίσα ύψη. Ο κύκλος μ που προκύπτει ως τομή του κώνου με το επίπεδο η που είναι παράλληλο προς την βάση και διέρχεται από το μέσον του ύψους του KL λέγεται **Μεσαία τομή** του κόλουρου κώνου.



Σχήμα 674: Μεσαία τομή κόλουρου κώνου

Κώνοι και κόλουροι κώνοι χρησιμοποιούνται σε πολλές τεχνικές εφαρμογές. Κατασκευάζονται εύκολα από κυκλικούς τομείς (Παράγραφος 6.6) συγκολλώντας την αρχική και τελική ακτίνα αυτών. Πράγματι, αποδεικνύεται με την βοήθεια της διαφορικής γεωμετρίας (Θεώρημα του Minding(1806-1885) [dC76, σ.289], Theorema Eggregium του Gauss, [MP77, σ.161],[ST76, σ.206]), ότι αν κόψουμε ένα κώνο κατά μήκος μιάς γενέτειράς του OX μπο-



Σχήμα 675: Ανάπτυγμα του κώνου

ρούμε να τον ξεδιπλώσουμε κατόπιν στο επίπεδο και να πάρουμε έναν κυκλικό τομέα $OX\Upsilon$,

του οποίου το κέντρο αντιστοιχεί στην κορυφή O του κώνου και το τόξο του κυκλικού τομέα αντιστοιχεί στην βάση του κώνου και έχει το μήκος που έχει ο κύκλος της βάσης του κώνου. Ο τομέας αυτός λέγεται **Ανάπτυγμα του κώνου**. Όπως αποδεικνύεται αυτή η διαδικασία διατηρεί τις αποστάσεις και τα εμβαδά, με την έννοια ότι δύο σημεία του κώνου ορίζουν πάνω στον κώνο ένα συντομότερο δρόμο που τα συνδέει και κατά το ανάπτυγμα ο δρόμος αυτός αντιστοιχεί σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Επίσης ορίζεται εμβαδόν σχημάτων πάνω στον κώνο και κατά το ανάπτυγμα τα σχήματα αυτά αντιστοιχούν σε επίπεδα σχήματα με το ίδιο εμβαδόν.

Τα στοιχεία του αναπτύγματος υπολογίζονται εύκολα από αυτά του κώνου. Έτσι η ακτίνα του τομέα είναι $\rho = |OX|$. Το μήκος του τόξου του τομέα σχετίζεται με το μήκος της γενέτειρας $|OX|$ του κώνου και το άνοιγμά του. Αν συμβολίσουμε με $\omega = |\angle XOY|$ το μέτρο της επίκεντρης γωνίας του τομέα σε ακτίνια, τότε το μήκος του τόξου είναι $\sigma = |XY| = \rho \cdot \omega$. Από την άλλη μεριά το ίδιο μήκος σ έχει και ο κύκλος κ της βάσης του κώνου, του οποίου η ακτίνα ισούται με

$$r = \rho \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

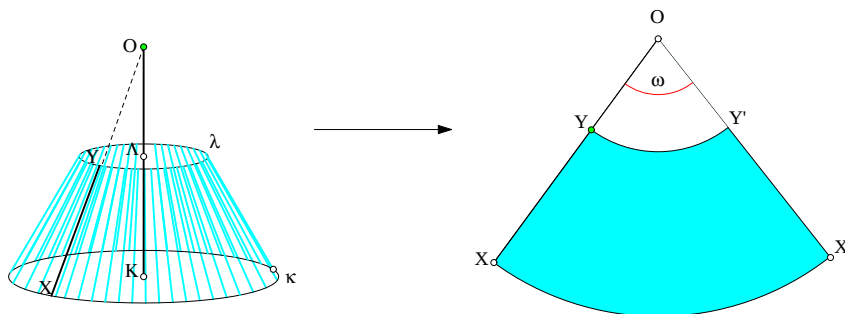
όπου α είναι το άνοιγμα του κώνου. Έτσι θα έχουμε συνολικά

$$\sigma = |XY| = \rho \cdot \omega = 2\pi r = 2\pi \rho \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Απλοποιώντας την σχέση βλέπουμε ότι η γωνία ω του αναπτύγματος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνον από το άνοιγμα α του κώνου (όλες οι μετρήσεις σε ακτίνια)

$$\omega = 2\pi \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

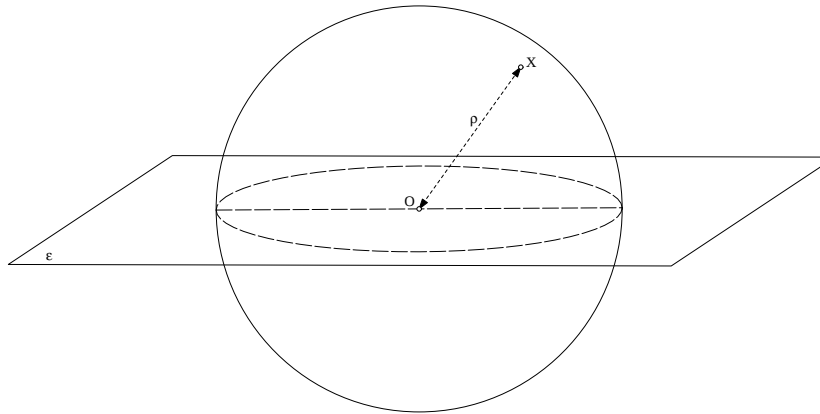
Στην αντίστροφη διαδικασία, της κατασκευής του κώνου από τον κυκλικό τομέα XOY , τυλίγουμε τον τομέα ταυτίζοντας (κολλώντας) τις ακτίνες του OX και OY . Ο προσδιορισμός του ανοίγματος α του κώνου από την γωνία ω του τομέα οδηγεί στην λύση της τελευταίας εξίσωσης ως προς α , που γίνεται μέσω της λεγόμενης *αντίστροφης συνάρτησης του ημιτόνου*, ένα θέμα που εξετάζεται στον *Απεροστικό Λογισμό*. Η ίδια διαδικασία οδηγεί και στο ανάπτυγμα του κόλουρου κώνου. Ο κώνος κόβεται πάλι κατά μήκος μιάς γενέτειρας XY



Σχήμα 676: Ανάπτυγμα του κόλουρου κώνου

και ξετυλίγεται στο επίπεδο σχηματίζοντας ένα τομέα κυκλικού δακτυλίου. Οι υπολογισμοί των σχέσεων μεταξύ του κόλουρου κώνου και του αντίστοιχου επιπέδου σχήματος είναι ανάλογοι των προηγούμενων. Παρόμοια είναι και η αντίστροφη διαδικασία της παραγωγής του κόλουρου κώνου από το επίπεδο σχήμα.

8.11 Σφαίρα



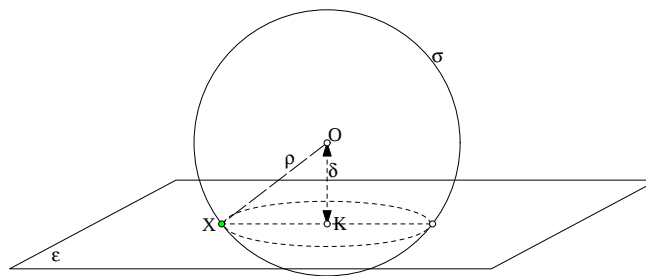
Σχήμα 677: Σφαίρα

Δοθέντος σημείου O στον χώρο και μήκους ρ , ονομάζουμε **Σφαίρα κέντρου O και ακτίνας ρ** τον γεωμετρικό τόπο των σημείων X του χώρου για τα οποία ισχύει

$$|OX| = \rho.$$

Τα σημεία του χώρου για τα οποία $|OX| < \rho$ αποτελούν το **Εσωτερικό της σφαίρας**. Τα σημεία για τα οποία $|OX| > \rho$ αποτελούν το **Εξωτερικό της σφαίρας**. Μερικές από τις έννοιες που συναντάμε στον κύκλο γενικεύονται και στην σφαίρα. Έτσι έχουμε την **Χορδή σφαίρας**, που είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα είναι σημεία της σφαίρας, την **Διάμετρο σφαίρας** που είναι μία χορδή διερχόμενη από το κέντρο της σφαίρας. Δύο σφαίρες λέγονται **Ίσες** όταν έχουν την ίδια ακτίνα.

Πρόταση 8.11.1 Τα κοινά σημεία σφαίρας σ και επιπέδου ε , που την τέμνει, είναι ή ένας κύκλος του ε ή ένα σημείο του ε .



Σχήμα 678: Τομή σφαίρας και επιπέδου

Απόδειξη: Το κλειδί του θέματος είναι η απόσταση $\delta = |OK|$ του κέντρου O από το επίπεδο. Αυτή ορίζεται φέρνοντας την κάθετο από το O στο επίπεδο και ορίζοντας επ' αυτής το ευθύγραμμο τμήμα OK , όπου K η προβολή του O επί του ε . Υπάρχουν οι εξής δυνατότητες σχετικά με το μήκος δ και την ακτίνα ρ : (1) $\delta=0$, (2) $\delta \neq 0$ και $\delta < \rho$, (3) $\delta=\rho$, (4) $\delta > \rho$.

(1) Στην περίπτωση αυτή ($\delta=0$) το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο O της σφαίρας ($K=O$) και τα κοινά σημεία ταυτίζονται με τα σημεία του κύκλου κέντρου O και ακτίνας

ρ του επιπέδου. Ένας τέτοιος κύκλος λέγεται **Μέγιστος κύκλος** της σφαίρας. Κάθε επίπεδο διερχόμενο διά του κέντρου της σφαίρας ορίζει μέσω της τομής του με αυτήν έναν τέτοιο κύκλο.

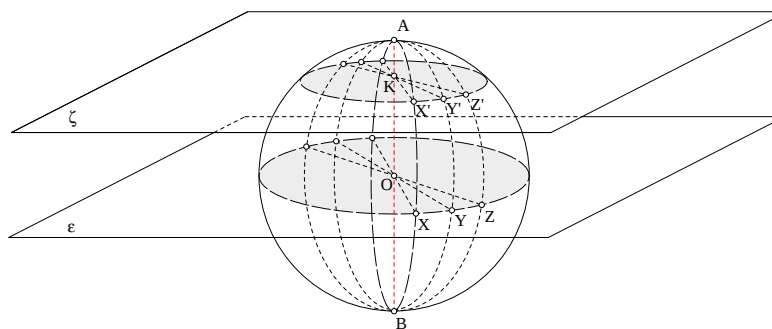
(2) Στην περίπτωση αυτή ($\delta < \rho$) υπάρχουν σημεία του επιπέδου X σε απόσταση $|XK| = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}$, για τα οποία, από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $|XO| = \rho$, που σημαίνει ότι είναι και επί της σφαίρας. Με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε εύκολα ότι ο κύκλος του ϵ με κέντρο K και ακτίνα $r = \sqrt{\rho^2 - \delta^2}$ ταυτίζεται με την τομή του επιπέδου και της σφαίρας. Τέτοιοι κύκλοι λέγονται **Μικροί κύκλοι** ή **Ελάσσονες κύκλοι** ή **Παράλληλοι κύκλοι** της σφαίρας. Το χαρακτηριστικό τους είναι ότι προκύπτουν από επίπεδα που τέμνουν την σφαίρα, όμως δεν διέρχονται από το κέντρο της. Το ότι $r < \rho$ δικαιολογεί την ονομασία τους, καθώς και την ονομασία των κύκλων της περίπτωσης (1).

(3) Στην περίπτωση αυτή ($\delta = \rho$) η απόσταση από το επίπεδο ισούται με την ακτίνα και το K είναι σημείο της σφαίρας. Για κάθε άλλο σημείο X του επιπέδου το τρίγωνο XKO θα είναι ορθογώνιο στο K και η απόστασή του από το O είναι $|XO| = \sqrt{|XK|^2 + \rho^2} > \rho$, άρα το σημείο δεν περιέχεται στην σφαίρα. Ένα τέτοιο επίπεδο λέγεται **Εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας**. Το μοναδικό κοινό σημείο K του επιπέδου αυτού με την σφαίρα λέγεται **Σημείο επαφής** του εφαπτόμενου επιπέδου με την σφαίρα.

(4) Στην περίπτωση αυτή ($\delta > \rho$) η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά σημεία, αφού για κάθε άλλο σημείο X του επιπέδου θα ισχύει $|XO| > |XK| > \rho$, ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.11.1 Κάθε εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας είναι κάθετο στην ακτίνα της προς το σημείο επαφής του με την σφαίρα. Αντίστροφα, κάθε επίπεδο κάθετο στο άκρο ακτίνος της σφαίρας είναι εφαπτόμενο της σφαίρας.

Απόδειξη: Δείξαμε στην προηγούμενη πρόταση ότι όταν $|OK| = \rho$, δηλαδή η απόσταση του κέντρου από το επίπεδο ισούται με την ακτίνα της σφαίρας, τότε το επίπεδο εφάπτεται της σφαίρας και έχει κοινό με αυτήν μόνο το K . Αντίστροφα, αν το επίπεδο ϵ είναι κάθετο στο άκρο K μιάς ακτίνας OK της σφαίρας, τότε, κατά το Πυθαγόρειο θεώρημα, όλα τα άλλα σημεία X του επιπέδου θα έχουν $|OX| > |OK| = \rho$, άρα το K θα είναι το μοναδικό κοινό σημείο του ϵ με την σφαίρα, ο.ε.δ.

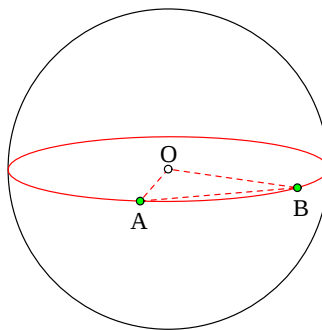


Σχήμα 679: Σφαίρα εκ περιστροφής ημικυκλίου AXB

Είναι εύκολο να δούμε ότι η σφαίρα παράγεται από ένα ημικύκλιο AXB το οποίο περιστρέφουμε περί την διάμετρό του AB. Το μέσον X του τόξου AB διαγράφει κατά την περιστροφή ένα μέγιστο κύκλο της σφαίρας. Κάθε άλλο σημείο X' του τόξου, διαφορετικό των A και B , διαγράφει ένα παράλληλο κύκλο. Τα σημεία A και B ορίζουν τον άξονα περιστροφής και παραμένουν σταθερά ορίζοντας επίσης μία διάμετρο της παραγόμενης σφαίρας. Οι κύκλοι που

διαγράφουν τα σημεία X' του τόξου AXB περιέχονται όλοι σε παράλληλα επίπεδα τα οποία είναι κάθετα στην διάμετρο AB . Τα σημεία A και B είναι οι πόλοι όλων αυτών των κύκλων. Γενικά για έναν κύκλο περιεχόμενο σε μία σφαίρα ονομάζουμε **Πόλους του κύκλου** τα άκρα της διαμέτρου της σφαίρας που είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου. Δύο σημεία της σφαίρας που είναι άκρα μιάς διαμέτρου της τα ονομάζουμε **Αντιδιαμετρικά**.

Σχόλιο-1 Αποδεικνύεται με τα μέσα της *Διαφορικής Γεωμετρίας* ([dC76, σ. 246]) ότι πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων της A και B είναι κατά μήκος ενός εκ των τόξων AB που ορίζονται επί του μεγίστου κύκλου που διέρχεται από τα A και B . Όταν τα A και B δεν είναι αντιδιαμετρικά, τότε τα σημεία A , B και O , όπου O το κέντρο της σφαίρας, δεν είναι συγγραμμικά. Ορίζουν συνεπώς αυτά τα τρία σημεία ένα ακριβώς επίπεδο AOB που τα περιέχει και ένα ακριβώς μέγιστο κύκλο που περιέχει τα A και B . Εάν επιτρέπεται να κινούμεθα και εκτός της επιφανείας της σφαίρας, τότε ο συντομότερος



Σχήμα 680: Μέγιστος κύκλος οριζόμενος από τα A, B

δρόμος μεταξύ των A και B είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB . Αν όμως δεν επιτρέπεται η έξοδος από την επιφάνεια της σφαίρας, τότε η απόσταση μετρούμενη επί της επιφανείας, ταυτίζεται, όπως ανέφερα με το μήκος ενός εκ των τόξων του μεγίστου κύκλου που ορίζεται από τα A και B . Αυτό συμβαίνει λ.χ. επί γής, που είναι κατά προσέγγιση σφαίρα. Οι συντομότερες πλεύσεις μεταξύ δύο σημείων A και B του ωκεανού είναι κατά μήκος μεγίστου κύκλου που ορίζεται από τα A , B και το κέντρο O της γης. Όταν τα A και B είναι αντιδιαμετρικά, τότε όλα τα επίπεδα που περιέχουν τα A και B διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας. Κάθε ένα τέτοιο επίπεδο ορίζει και ένα μέγιστο κύκλο και ο συντομότερος δρόμος μεταξύ των A και B , σε αυτήν την περίπτωση, δεν είναι μοναδικός. Οποιοδήποτε ημικύκλιο ενός μεγίστου κύκλου διά των A, B δίδει την συντομότερη διαδρομή μεταξύ των A και B .

Αν εξαιρέσουμε αυτήν την περίπτωση των αντιδιαμετρικών σημείων, υπάρχει μία ομοιότητα μεταξύ των μεγίστων κύκλων της σφαίρας και των ευθειών του επιπέδου. Όπως και στο επίπεδο, έτσι και στην σφαίρα, για κάθε ζεύγος (μη αντιδιαμετρικών) σημείων A και B υπάρχει ένας ακριβώς μέγιστος κύκλος που διέρχεται από αυτά. Τα ευθύγραμμα τμήματα του επιπέδου αντιστοιχούν σε τόξα μεγίστων κύκλων, τα οποία υλοποιούν τις συντομότερες συνδέσεις μεταξύ σημείων της σφαίρας.

Άσκηση 8.11.1 Δείξε ότι το μεσοκάθετο επίπεδο χορδής AB της σφαίρας διέρχεται από το κέντρο της.

Υπόδειξη: Προφανώς, αφού το μεσοκάθετο επίπεδο είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα A, B της χορδής και το κέντρο O της σφαίρας έχει αυτήν την ιδιότητα.

Άσκηση 8.11.2 Δείξε ότι τα μέσα παραλλήλων χορδών της σφαίρας περιέχονται σε επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

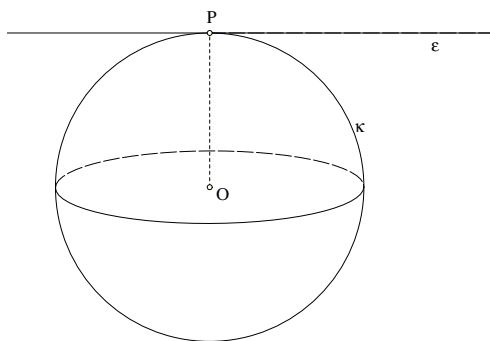
Υπόδειξη: Θεώρησε μία από τις παράλληλες χορδές, την AB και το μεσοκάθετο επίπεδό της ε . Αυτό, κατά την προηγούμενη άσκηση θα περνά από το κέντρο O της σφαίρας. Μία άλλη παράλληλη της AB χορδή $\Gamma\Delta$ θα είναι επίσης κάθετη στο ε (Πρόταση 7.5.3). Επομένως, αν M το σημείο τομής της $\Gamma\Delta$ με το ε , η OM που περιέχεται στο ε θα είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$, άρα το M θα είναι το μέσον της, αφού το $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 8.11.3 Δείξε ότι για τρία σημεία A, B και Γ της σφαίρας η ευθεία η κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου περιέχεται στην σφαίρα.

Άσκηση 8.11.4 Δείξε ότι παράλληλα επίπεδα που τέμνουν την σφαίρα σ' ορίζουν κύκλους των οποίων τα κέντρα είναι σε ευθεία κάθετη στα παράλληλα αυτά επίπεδα.

Μία ευθεία που έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με την σφαίρα λέγεται **Εφαπτόμενη της σφαίρας**. Το κοινό σημείο της εφαπτόμενης με την σφαίρα λέγεται **Σημείο επαφής** της εφαπτόμενης με την σφαίρα.

Πρόταση 8.11.2 Μία ευθεία ε είναι εφαπτόμενη της σφαίρας ς τότε και μόνον, όταν είναι κάθετη στο άκρο μιάς ακτίνας της σφαίρας.

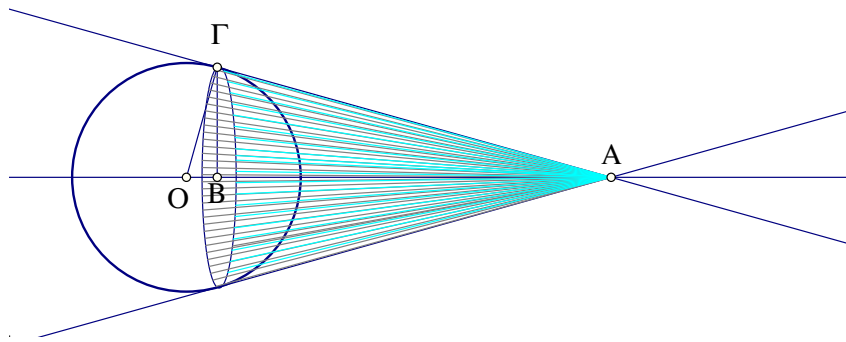


Σχήμα 681: Ευθεία εφαπτόμενη στην σφαίρα

Απόδειξη: Η ευθεία ε και το κέντρο O της σφαίρας ορίζουν επίπεδο η που τέμνει την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο κ . Αν η σφαίρα και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο, τότε και ο κύκλος κ και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο, άρα εφάπτονται και η ευθεία είναι κάθετη στο άκρο ακτίνας του κύκλου, που είναι και ακτίνα της σφαίρας (Πρόταση 2.2.2). Αντίστροφα, αν η ευθεία ε είναι κάθετη στο άκρο ακτίνας της σφαίρας, θα είναι κάθετη και στο άκρο ακτίνας του κ , συνεπώς θα έχει ένα κοινό σημείο με αυτόν, άρα και με την σφαίρα, ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.11.2 Μία ευθεία ε είναι εφαπτόμενη της σφαίρας ς στο σημείο P τότε και μόνον, όταν διέρχεται από το P και περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας στο P .

Πρόταση 8.11.3 Γιά κάθε σημείο A εκτός σφαίρας $O(\rho)$, οι εφαπτόμενες από το A προς την σφαίρα είναι ίσες μεταξύ τους και σχηματίζουν κώνο που έχει κοινό με την σφαίρα ένα μικρό κύκλο αυτής, το επίπεδο του οποίου είναι κάθετο στον άξονα του κώνου. Τα σημεία αυτού του κύκλου συμπίπτουν με τα σημεία επαφής των εφαπτομένων με την σφαίρα.



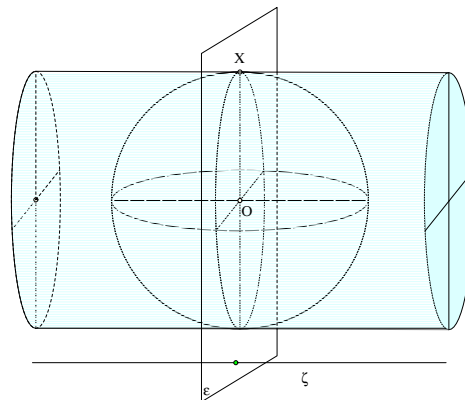
Σχήμα 682: Εφαπτόμενος κώνος σφαίρας από σημείο εκτός αυτής

Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ε που ορίζεται από την ευθεία OA και μία εφαπτόμενη AG από το A . Το επίπεδο αυτό τέμνει την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο με τον οποίο η AG έχει ένα κοινό σημείο, άρα είναι εφαπτόμενη αυτού. Το τρίγωνο $OΓA$ είναι συνεπώς ορθογώνιο, ανεξάρτητο της ειδικής θέσης του ε , αφού έχει πάντοτε την ίδια υποτείνουσα OA και κάθετο $ΟΓ$ με το ίδιο μήκος $|ΟΓ| = \rho$. Συνάγεται ότι η απόσταση $\delta = |ΓB|$ του Γ από τον άξονα, που ισούται με το ύψος αυτού του ορθογωνίου τριγώνου, είναι σταθερά και ανεξάρτητη του επιπέδου ε . Συνεπώς τα σημεία επαφής, όπως το Γ , περιέχονται στον μικρό κύκλο με κέντρο B και ακτίνα δ . Η ακτίνα δ του μικρού κύκλου υπολογίζεται εύκολα από τα όμοια τρίγωνα $OBΓ$ και $ΟΓA$:

$$\frac{\delta}{\rho} = \frac{|BΓ|}{|ΟΓ|} = \frac{|ΑΓ|}{|ΟΑ|} = \frac{\sqrt{x^2 - \rho^2}}{x} \Rightarrow \delta = \frac{\rho\sqrt{x^2 - \rho^2}}{x},$$

όπου $x = |OA|$, ο.ε.δ.

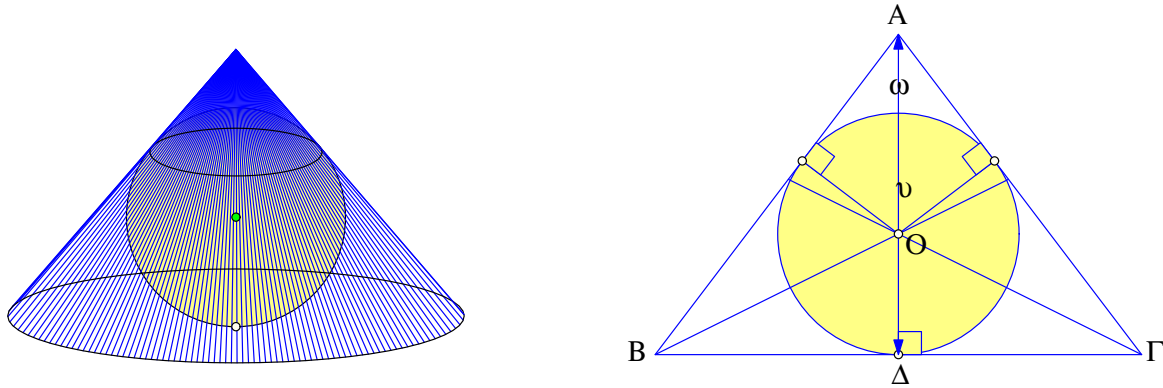
Ο κώνος που εξασφαλίζει η προηγούμενη πρόταση λέγεται **Εφαπτόμενος κώνος** της σφαίρας από το σημείο A . Όταν το σημείο A απομακρύνεται στο άπειρο, οι εφαπτόμενες από αυτό τείνουν να γίνουν παράλληλες και στο όριο ορίζεται μία (άπειρα εκτεινόμενη) κυλινδρική επιφάνεια που εφάπτεται του κώνου. Την ύπαρξη αυτής της επιφάνειας εξασφαλίζει η επόμενη πρόταση.



Σχήμα 683: Εφαπτόμενος κύλινδρος σφαίρας

Πρόταση 8.11.4 Δοθείσης σφαίρας $O(\rho)$ και ευθείας ζ υπάρχει κύλινδρος εφαπτόμενος της σφαίρας με γενέτειρες παράλληλες της ζ . Τα σημεία επαφής του κυλίνδρου και της σφαίρας συμπίπτουν με μέγιστο κύκλο, το επίπεδο ε του οποίου είναι κάθετο στην ζ .

Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ε το κάθετο στην ζ και διερχόμενο από το κέντρο O της σφαίρας. Το επίπεδο αυτό τέμνει την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο κ . Οι ευθείες οι παράλληλες της διερχόμενες από σημεία Y του κ είναι εφαπτόμενες της σφαίρας. Τούτο διότι είναι κάθετες στο άκρο της ακτίνας OY της σφαίρας. Παράγουν συνεπώς αυτές οι ευθείες (άπειρα εκτεινόμενη) κυλινδρική επιφάνεια εφαπτόμενη της σφαίρας κατά μήκος του κύκλου κ , ο.ε.δ.



Σχήμα 684: Σφαίρα εγγεγραμμένη σε κώνο

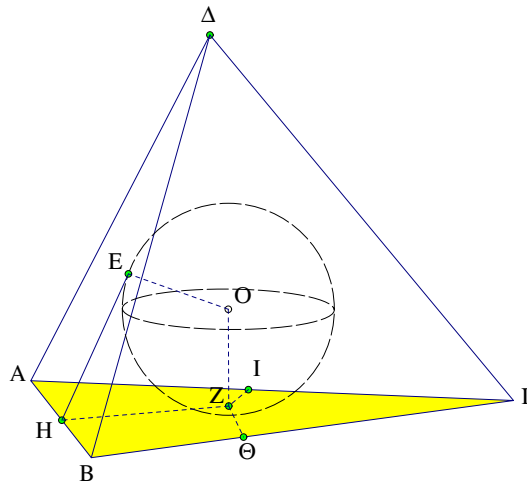
Άσκηση 8.11.5 Βρες την ακτίνα της σφαίρας που εγγράφεται σε κώνο ύψους υ και γωνίας ω .

Υπόδειξη: Η ζητούμενη ακτίνα υπολογίζεται από το επίπεδο σχήμα που αποτελεί το επίπεδο διερχόμενο από τον άξονα του κώνου. Αυτό τέμνει τον κώνο κατά ένα ισοσκελές $AB\Gamma$ και την σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο που είναι ταυτόχρονα ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου. Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου υπολογίζεται (Πρόταση 5.6.2):

$$\rho = \frac{\upsilon \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1 + \eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Άσκηση 8.11.6 Δείξε ότι κάθε τετράεδρο έχει εγγεγραμμένη σφαίρα, δηλαδή σφαίρα που εφάπτεται και των τεσσάρων εδρών του. Δείξε ότι η θέση του σημείου επαφής της σφαίρας αυτής με μία έδρα $AB\Gamma$, καθορίζεται από τις διέδρες που μία τους έδρα είναι η $AB\Gamma$.

Υπόδειξη: Θεώρησε τα τρία διχοτομούντα επίπεδα των διέδρων (της βάσης) AB , $B\Gamma$ και GA . Τα τρία αυτά επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο O , το οποίο έχει ίσες αποστάσεις από την βάση $AB\Gamma$ καθώς και όλες τις άλλες έδρες του τετράεδρου. Άρα η σφαίρα με κέντρο O και ακτίνα $|OZ|$ όπου Z η προβολή του O στο $AB\Gamma$, εφάπτεται όλων των εδρών του τετραέδρου. Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη της σφαίρας. Για τον καθορισμό του Z παρατήρησε ότι, εάν E η προβολή του O στην έδρα ΔAB , τότε το επίπεδο ε που περιέχει τα O , Z και E τέμνει την ακμή AB κάθετα και ορίζει την γωνία EHZ , της οποίας το μέτρο είναι και το μέτρο της διέδρου AB του τετραέδρου. Αυτό διότι το επίπεδο ε περιέχει δύο (ασύμβατα) κάθετες προς



Σχήμα 685: Εγγεγραμμένη σφαίρα τετραέδρου

την ΑΒ: τις ΟΕ και ΟΖ. Συνάγεται ότι η $\gamma = |EHZ|$ είναι το μέτρο της διέδρου ΑΒ. Επίσης, αν r συμβολίζει την ακτίνα της σφαίρας, τότε

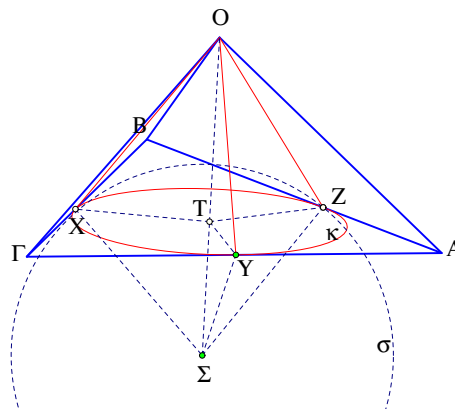
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r}{|HZ|} \Rightarrow |HZ| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Συνάγεται ότι οι αποστάσεις του σημείου επαφής Ζ της εγγεγραμμένης σφαίρας με την έδρα ΑΒΓ, από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, ικανοποιούν τις

$$|ZH| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad |Z\Theta| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad |ZI| = r \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

όπου α, β, γ τα μέτρα των διέδρων ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντιστοίχως.

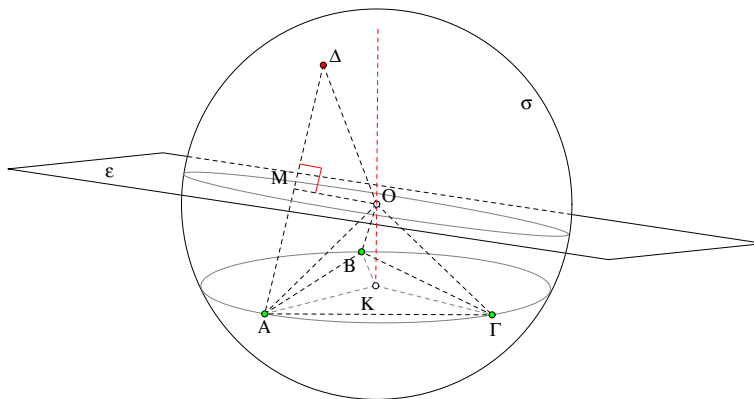
Άσκηση 8.11.7 Δείξε ότι για κάθε τριέδرو γωνία υπάρχει ορθός κυκλικός κώνος που εφάπτεται των εδρών της.



Σχήμα 686: Κατασκευή εγγεγραμμένου κώνου τριέδρου

Υπόδειξη: Κατασκεύασε σφαίρα $\sigma(\Sigma, r)$ εγγεγραμμένη στην κωνική επιφάνεια, δηλαδή εφάπτομενη και των τριών εδρών της. Τα σημεία επαφής Χ, Υ, Ζ της σφαίρας με τις έδρες της

8.12 Σφαιρικά πολύεδρα



Σχήμα 688: Περιγεγραμμένη σφαίρα τετραέδρου

Πρόταση 8.12.1 Τέσσερα μη συνεπίεδα σημεία ορίζουν μονοσήμαντα μία σφαίρα που τα περιέχει.

Απόδειξη: Τα τέσσερα σημεία ορίζουν ένα τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$. Θεώρησε το κέντρο K του περιγεγραμμένου κύκλου της έδρας $AB\Gamma$ του τετραέδρου. Τα σημεία της ευθείας KO που είναι κάθετη στο επίπεδο του $AB\Gamma$ και διέρχεται από το K ισαπέχουν από τα A, B και Γ . Από την άλλη μεριά το μεσοκάθετο επίπεδο ε σε μία από τις ακμές που διέρχονται από το Δ λ.χ. την ΔA τέμνει την KO . Τούτο λόγω της υπόθεσης ότι τα 4 σημεία A, B, Γ και Δ δεν είναι συνεπίεδα. Αν το ε δεν έτεμνε την KO , τότε θα ήταν παράλληλο προς αυτήν άρα και αυτό κάθετο στο επίπεδο του $AB\Gamma$, συνεπώς και η $A\Delta$ θα ήταν ευθεία του επιπέδου του $AB\Gamma$, αντίθετα με την υπόθεση. Το σημείο τομής (O) του ε και της KO έχει την ιδιότητα

$$|OD| = |OA| = |OB| = |OG| = \rho,$$

άρα είναι στην σφαίρα κέντρου O και ακτίνας ρ , ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.12.1 Οι κορυφές τετραέδρου περιέχονται σε σφαίρα.

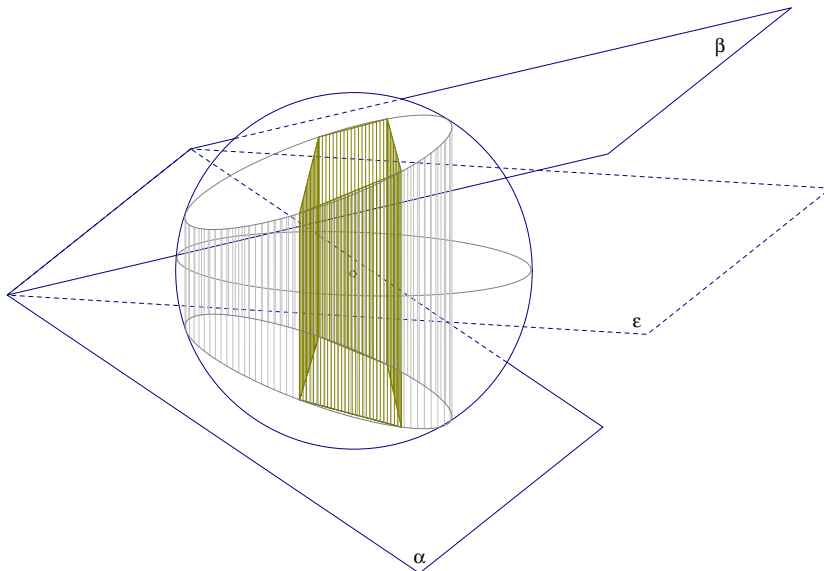
Η σφαίρα που εξασφαλίζει το προηγούμενο πόρισμα λέγεται **Περιγεγραμμένη σφαίρα του τετραέδρου**. Πολύεδρα με περισσότερες από 4 έδρες δεν έχουν εν γένει περιγεγραμμένη σφαίρα. Αν έχουν, τότε τα ονομάζουμε **Σφαιρικά πολύεδρα** και την σφαίρα που περνά από όλες τις κορυφές τους ονομάζουμε **Περιγεγραμμένη σφαίρα**. Συχνά λέμε τότε ότι το πολύεδρο είναι **Εγγράψιμο σε σφαίρα**.

Άσκηση 8.12.1 Δείξε ότι ένα παραλληλεπίπεδο εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 8.12.2 Δείξε ότι μία πυραμίδα εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν η βάση της είναι πολύγωνο εγγράψιμο σε κύκλο.

Άσκηση 8.12.3 Δείξε ότι ένα ορθό πρίσμα εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν η βάση του είναι πολύγωνο εγγράψιμο σε κύκλο.

Άσκηση 8.12.4 Δείξε ότι ένα κολοβό πρίσμα εγγράφεται σε σφαίρα τότε και μόνον, όταν οι βάσεις του είναι πολύγωνα εγγράψιμα σε κύκλο και το διχοτομούν επίπεδο ε των βάσεων του είναι κάθετο στις παράπλευρες ακμές του.



Σχήμα 689: Κολοβό πρίσμα εγγεγραμμένο σε σφαίρα

Άσκηση 8.12.5 Να κατασκευασθεί σφαίρα δοθείσης ακτίνας η οποία να διέρχεται από τρία δοθέντα σημεία. Να εξετασθεί τότε το πρόβλημα έχει λύση.

Άσκηση 8.12.6 Να κατασκευασθεί σφαίρα δοθείσης ακτίνας η οποία να διέρχεται από δύο δοθέντα σημεία και να εφάπτεται δοθέντος επιπέδου. Να εξετασθεί τότε το πρόβλημα έχει λύση.

Άσκηση 8.12.7 Να κατασκευασθεί σφαίρα δοθείσης ακτίνας η οποία να διέρχεται από ένα δοθέν σημείο και να εφάπτεται δύο δοθέντων επιπέδων. Να εξετασθεί τότε το πρόβλημα έχει λύση.

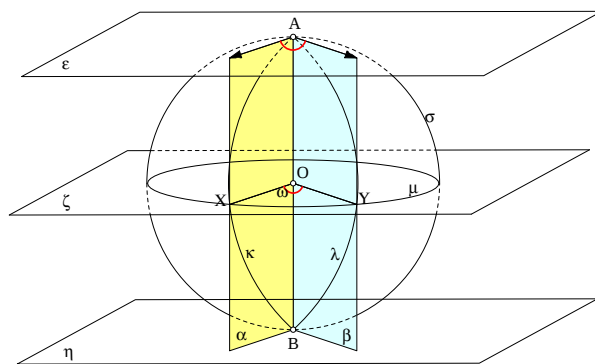
Άσκηση 8.12.8 Δίδεται επίπεδο ε , ευθεία η , μη περιεχόμενη σε αυτό και σημείο A εκτός των ε και η . Να βρεθεί σημείο B επί της η το οποίο να ισαπέχει από το A και το επίπεδο ε .

Υπόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ζ το κάθετο στην η και διερχόμενο από το A . Έστω K το σημείο τομής του ζ με την η . Θεώρησε και το επίπεδο κ , το περιέχον την ευθεία η και κάθετο στο ε . Έστω ϑ η ευθεία-τομή των κ και ε (η ϑ είναι η προβολή της η στο ε). Ο κύκλος $\lambda(K, |KA|)$ και το επίπεδο κ τέμνονται σε δύο σημεία Γ και Δ . Το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα του επιπέδου κ : Να βρεθεί σημείο B επί της η ισαπέχον από το Γ (ή Δ) και την ευθεία ϑ (Άσκηση 4.7.3).

Άσκηση 8.12.9 Δίδονται τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και επίπεδο ε μη περιέχον αυτά. Να βρεθεί σφαίρα διερχόμενη από τα τρία σημεία και εφαιπόμενη του επιπέδου ε .

Υπόδειξη: Το πρόβλημα ανάγεται στο προηγούμενο, θεωρώντας τον κύκλο λ που διέρχεται από τα τρία σημεία και την ευθεία η την κάθετη στο επίπεδο $AB\Gamma$ στο κέντρο του κ .

8.13 Άτρακτος, γωνία μεγίστων κύκλων



Σχήμα 690: Σφαίρα και διέδρος

Δύο επίπεδα α και β διερχόμενα από το κέντρο O σφαίρας σ τέμνονται κατά μία διάμετρο αυτής AB . Τα επίπεδα αυτά αποτελούν από την σφαίρα και δύο μέγιστους κύκλους αντίστοιχα κ και λ . Τα επίπεδα αυτά ορίζουν επίσης τέσσερις διέδρες γωνίες με ακμή την AB . Η γωνία μιάς εκ των διέδρων ορίζεται από την επίπεδη γωνία που σχηματίζεται επί επιπέδου ζ που διέρχεται από το O και είναι κάθετο στην διάμετρο AB . Το επίπεδο αυτό είναι παράλληλο των εφαπτομένων επιπέδων στα A και B (Πόρισμα 8.11.1). Αυτό συνεπάγεται ότι η γωνία της διέδρου $\omega = XOY$ είναι ίση με την αντίστοιχη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των κύκλων κ και λ στα σημεία A και B . Γενικά, δύο μέγιστοι κύκλοι κ και λ ορίζονται αντίστοιχα από επίπεδα που διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας επομένως τέμνονται κατά διάμετρο αυτής AB . Την γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες αυτών των κύκλων στα A και B ονομάζουμε **Γωνία των μεγίστων κύκλων**.

Άτρακτο Ονομάζουμε το τμήμα της σφαίρας που περιλαμβάνεται μεταξύ των εδρών μιάς διέδρου γωνίας, της οποίας η ακμή είναι διάμετρος της σφαίρας. Η γωνία της διέδρου λέγεται **Γωνία της ατράκτου**. Δύο άτρακτοι λέγονται **Ίσες** όταν οι ακτίνες των σφαιρών που τις περιέχουν είναι ίσες και οι γωνίες τους είναι επίσης ίσες.

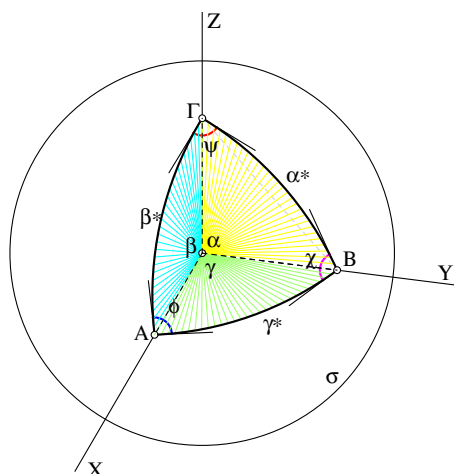
Πρόταση 8.13.1 Η γωνία μιάς διέδρου που σχηματίζεται από τα επίπεδα α και β ισούται με την γωνία της σφαιρικής ατράκτου που αυτή αποτελεί από σφαίρα που έχει το κέντρο της επί της ακμής AB της διέδρου. Επιπλέον η γωνία αυτή ισούται με την γωνία των μεγίστων κύκλων που ορίζονται από τα δύο επίπεδα.

Άσκηση 8.13.1 Πόσες σφαιρικές ατράκτους ορίζουν τρία επίπεδα ανά δύο μη ταυτιζόμενα και διερχόμενα από το κέντρο της σφαίρας;

Άσκηση 8.13.2 Από δοθείσα ευθεία που δεν τέμνει την σφαίρα φέρε επίπεδο εφαπτόμενο αυτής.

Υπόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ε που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετο στην δοθείσα ευθεία. Έστω κ ο μέγιστος κύκλος κατά τον οποίον το ε τέμνει την σφαίρα και P το σημείο τομής του ε με την δοθείσα ευθεία. Θεώρησε τις εφαπτόμενες η_1, η_2 από το P προς τον κ και τα δύο επίπεδα που καθένα τους περιέχει την δοθείσα ευθεία και μία από τις η_1, η_2 .

8.14 Σφαιρικά τρίγωνα



Σχήμα 691: Σφαίρα και τριέδρος

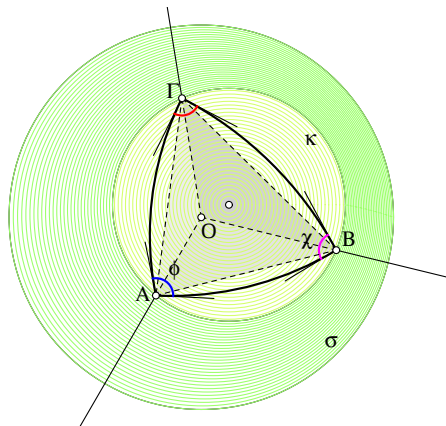
Τοποθετώντας την κορυφή μιάς τριέδρου στο κέντρο O μιάς σφαίρας παίρνουμε επί της σφαίρας ένα σχήμα που θυμίζει το τρίγωνο του επιπέδου και λέγεται **Σφαιρικό τρίγωνο**. Το σχήμα αποτελείται από τόξα μεγίστων κύκλων που αποτέμνουν επί της σφαίρας οι έδρες της τριέδρου. Το μήκος αυτών των τόξων συνδέεται με το μέτρο των εδρών της τριέδρου. Αν οι έδρες της τριέδρου έχουν μέτρα αντίστοιχα α, β και γ (σε ακτίνια), τότε τα μήκη των τόξων αυτών είναι αντίστοιχα

$$\alpha^* = \alpha\rho, \quad \beta^* = \beta\rho, \quad \gamma^* = \gamma\rho,$$

όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας. Τα τόξα αυτά ονομάζονται **Πλευρές του σφαιρικού τριγώνου**. Τα μήκη αυτά λέγονται **Μήκη των πλευρών του σφαιρικού τριγώνου**. Τα άκρα τους A, B και Γ είναι τα κοινά σημεία της σφαίρας και των ακμών της τριέδρου και λέγονται **Κορυφές του σφαιρικού τριγώνου**. Από την προηγούμενη παράγραφο ξέρουμε ότι οι διέδρες γωνίες της τριέδρου ϕ, χ και ψ σχηματίζονται αντίστοιχα στις κορυφές A, B και Γ από τις εφαπτόμενες εκεί των μεγίστων κύκλων που ορίζουν οι έδρες της τριέδρου. Οι γωνίες αυτές ονομάζονται **Γωνίες του σφαιρικού τριγώνου**. Δύο σφαιρικά τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ λέγονται **Ίσα** όταν έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές και ίσες γωνίες. Η αναλογία προς τα τρίγωνα του επιπέδου είναι προφανής. Πολλές προτάσεις της επιπεδομετρίας που αφορούν σε ιδιότητες τριγώνων μεταφέρονται και στα σφαιρικά τρίγωνα. Υπάρχουν ωστόσο και διαφορές, κάποιες από τις οποίες θα δούμε στις επόμενες παραγράφους. Η προηγούμενη αντιστοίχιση μεταξύ τριέδρων και σφαιρικών τριγώνων δείχνει ότι κάθε ιδιότητα των τριέδρων μεταφράζεται σε ιδιότητα των σφαιρικών τριγώνων και τούμπαλιν, κάθε ιδιότητα των σφαιρικών τριγώνων μεταφράζεται σε μία ιδιότητα των τριέδρων. Ένα δείγμα αυτού του συσχετισμού δίνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.14.1 Κάθε σφαιρικό τρίγωνο σφαίρας σ εγγράφεται σε κύκλο περιεχόμενο στην σ .

Απόδειξη: Έστω το σφαιρικό τρίγωνο $OAB\Gamma$ και ας συμβολίζουμε με τα ίδια γράμματα την αντίστοιχη τριέδρο γωνία. Στην Πρόταση 8.9.6 κατασκευάζεται ο περιγεγραμμένος κώνος



Σχήμα 692: Περιγεγραμμένος κύκλος σφαιρικού τριγώνου

της τριέδρου γωνίας $OAB\Gamma$ με βάση τον περιγεγραμμένο κύκλο κ του τριγώνου $AB\Gamma$. Τα σημεία αυτού του κύκλου απέχουν από το O την ίδια απόσταση που απέχουν και τα A, B και Γ , άρα είναι επί της σφαίρας σ , ο.ε.δ.

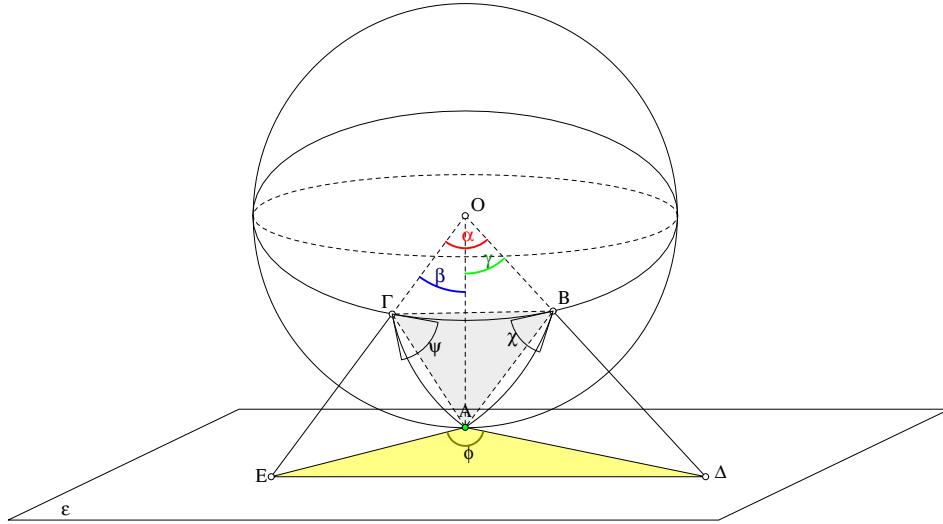
Άσκηση 8.14.1 Δείξε ότι η τομή σφαίρας και ορθού κυκλικού κώνου με κορυφή στο κέντρο της σφαίρας είναι παράλληλος κύκλος της σφαίρας.

Σχόλιο-1 Όπως οι τριέδρες έτσι και οι πολυεδρικές γωνίες, (Παράγραφος 8.3) τοποθετώντας την κορυφή τους στο κέντρο O μιάς σφαίρας, ορίζουν, μέσω των τομών των εδρών τους με την σφαίρα, ένα **Σφαιρικό πολύγωνο**, δηλαδή ένα σχήμα στην σφαίρα που περιορίζεται από διαδοχικά τόξα μεγίστων κύκλων. Αυτό είναι το ανάλογο των πολυγώνων πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Όπως και στις τριέδρες έτσι και στις πολυεδρικές γωνίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την αντιστοιχεία για να μελετήσουμε ιδιότητες των σφαιρικών πολυγώνων ανάγοντάς τις σε αντίστοιχες ιδιότητες των πολυεδρικών γωνιών. Περισσότερα για τα ενδιαφέροντα αυτά σχήματα της σφαίρας θα δούμε στην Παράγραφο 9.3. Η επόμενη πρόταση δείχνει πως εξαρτώνται οι διέδρες γωνίες μιάς τριέδρου από τις έδρες της. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε (Πρόταση 8.15.3) ότι και αντίστροφα οι έδρες προσδιορίζονται πλήρως από τις διέδρες της τριέδρου.

Πρόταση 8.14.2 Έστω τριέδρος γωνία $OAB\Gamma$ με έδρες $\alpha = BO\Gamma$, $\beta = GOA$, $\gamma = AOB$ και διέδρες γωνίες $\phi(OA)$, $\chi(OB)$, $\psi(O\Gamma)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε ισχύει

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \sin(\gamma) + \eta\mu(\beta) \eta\mu(\gamma) \sin(\phi).$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη τοποθετούμε την τριέδρο με την κορυφή της O στο κέντρο σφαίρας σ ακτίνας ρ και παίρνουμε τα A, B, Γ να είναι τα σημεία τομής των ακμών της με την σφαίρα. Επίσης θεωρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο ε της σφαίρας στο σημείο A . Έστω ότι οι OB και $O\Gamma$ τέμνουν το ε αντίστοιχα στα Δ και E (την απλούστερη περίπτωση που αυτό δεν συμβαίνει θα εξετάσουμε παρακάτω). Εφαρμόζουμε στα τρίγωνα $O\Delta E$ και $A\Delta E$ τον τύπο του συνημιτόνου



Σχήμα 693: Σφαιρικό θεώρημα συνημιτόνου

$$\begin{aligned}
 |E\Delta|^2 &= |OE|^2 + |OD|^2 - 2|OE||OD|\cos(\alpha) \\
 |OE| &= \frac{\rho}{\sin(\beta)}, \quad |OD| = \frac{\rho}{\sin(\gamma)}, \Rightarrow \\
 |E\Delta|^2 &= \rho^2 \left(\frac{1}{\sin(\beta)^2} + \frac{1}{\sin(\gamma)^2} - 2 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)} \right) \\
 &= \rho^2 ((1 + \varepsilon\phi(\beta)^2) + (1 + \varepsilon\phi(\gamma)^2) - 2 \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)}).
 \end{aligned}$$

Έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
 |E\Delta|^2 &= |AE|^2 + |AD|^2 - 2|AE||AD|\cos(\phi) \\
 |AE| &= \rho \varepsilon\phi(\beta), \quad |AD| = \rho \varepsilon\phi(\gamma), \Rightarrow \\
 |E\Delta|^2 &= \rho^2 (\varepsilon\phi(\beta)^2 + \varepsilon\phi(\gamma)^2 - 2\varepsilon\phi(\beta)\varepsilon\phi(\gamma)\cos(\phi)).
 \end{aligned}$$

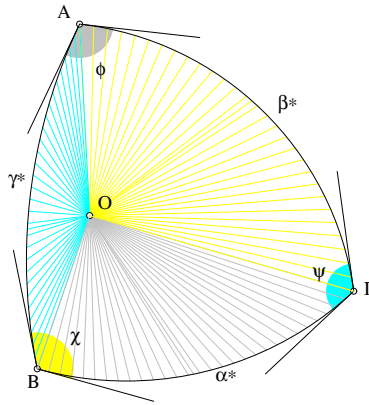
Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις για το $|E\Delta|^2$ και απλοποιώντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)} &= -\varepsilon\phi(\beta)\varepsilon\phi(\gamma)\cos(\phi) \Rightarrow \\
 \sin(\beta)\sin(\gamma) - \sin(\alpha) &= -\eta\mu(\beta)\eta\mu(\gamma)\cos(\phi),
 \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμη με την ζητούμενη σχέση. Στην περίπτωση που ένα εκ των δύο σημείων Δ και Ε δεν υπάρχει λ.χ. το Δ, αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη ακμή OB είναι παράλληλη προς το επίπεδο ε, συνεπώς η γωνία γ είναι ορθή. Τότε $\sin(\gamma) = 0$, $\eta\mu(\gamma) = 1$ και ο τύπος γίνεται

$$\sin(\alpha) = \eta\mu(\beta)\cos(\phi) \Leftrightarrow |OE|\sin(\alpha) = |AE|\cos(\phi),$$

που αληθεύει λόγω της παραλληλίας των AΔ και OB. Όταν και τα δύο σημεία δεν υπάρχουν, τότε οι OΓ και OB είναι αντίστοιχα παράλληλες προς τις AE και AΔ και οι γωνίες β και γ είναι ορθές. Αυτό συνεπάγεται ότι οι γωνίες α και φ είναι ίσες και η σχέση γίνεται $\sin(\alpha) = \sin(\phi)$. Σε όλες συνεπώς τις περιπτώσεις ισχύει ο αναφερόμενος τύπος, ο.ε.δ.



Σχήμα 694: Σφαιρικό τρίγωνο

Σχόλιο-2 Η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και σαν πρόταση για σφαιρικά τρίγωνα με χρήση των μηκών των πλευρών $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ που ορίστηκαν στην αρχή της παραγράφου (σχήμα-694). Απλά χρησιμοποιούμε τον αποδειχθέντα τύπο όπου αντικαθιστούμε με τα

$$\alpha = \frac{\alpha^*}{\rho}, \quad \beta = \frac{\beta^*}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\gamma^*}{\rho}.$$

Ο τύπος που προκύπτει λέγεται **Πρώτος σφαιρικός τύπος συνημιτόνου**.

Πρόταση 8.14.3 Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ και αντίστοιχες απέναντι γωνίες ϕ, χ και ψ ισχύει:

$$\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{\rho}\right) = \text{συν}\left(\frac{\beta^*}{\rho}\right) \text{συν}\left(\frac{\gamma^*}{\rho}\right) + \eta\mu\left(\frac{\beta^*}{\rho}\right) \eta\mu\left(\frac{\gamma^*}{\rho}\right) \text{συν}(\phi).$$

Άσκηση 8.14.2 Για κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ και αντίστοιχες απέναντι γωνίες $\phi = 90^\circ, \chi$ και ψ ισχύει:

$$\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{\rho}\right) = \text{συν}\left(\frac{\beta^*}{\rho}\right) \text{συν}\left(\frac{\gamma^*}{\rho}\right).$$

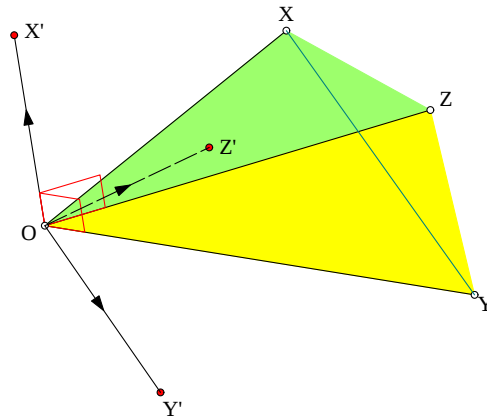
Άσκηση 8.14.3 Δείξε ότι σε μία σφαίρα υπάρχουν άπειρα ισόπλευρα τρίγωνα, των οποίων τα μήκη α^* των πλευρών και οι γωνίες ϕ ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{2\rho}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 8.14.4 Τοποθέτησε την κορυφή A τετραέδρου ABΓΔ με μήκος ακμής α^* στο κέντρο μιάς σφαίρας ακτίνας α^* και χρησιμοποίησε την προηγούμενη άσκηση για να δείξεις ότι το συνημίτονο της διέδρου γωνίας που σχηματίζουν δύο έδρες του τετραέδρου ισούται με $\frac{1}{3}$. (Δες και την Άσκηση 8.6.2)

Άσκηση 8.14.5 Δείξε ότι οι τρεις ίσες γωνίες των σφαιρικών ισοπλεύρων τριγώνων είναι μεγαλύτερες των 60 μοιρών. (Δες και την Άσκηση 9.3.1)

8.15 Η παραπληρωματική τριέδρος

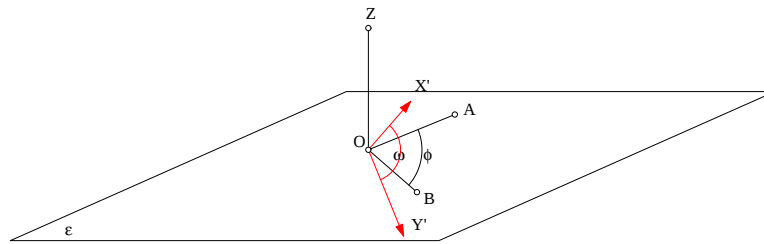


Σχήμα 695: Παραπληρωματική τριέδρος

Δοθείσης τριέδρου $OXYZ$, οι κάθετες στις έδρες της ορίζουν μία νέα τριέδρου $OX'Y'Z'$ που λέγεται **Παραπληρωματική τριέδρος** της $OXYZ$. Ακριβέστερα ο ορισμός αυτής της τριέδρου $OX'Y'Z'$ γίνεται ως εξής. Η ημιευθεία OX' είναι η κάθετη στο επίπεδο OYZ και προς το μέρος της OX , η ημιευθεία OY' είναι η κάθετη στο OZX και προς το μέρος της OY και η ημιευθεία OZ' είναι η κάθετη στο OXY και προς το μέρος της OZ . Οι τρεις αυτές ημιευθείες ορίζουν τις ακμές και επομένως την τριέδρου $OX'Y'Z'$.

Πρόταση 8.15.1 Οι έδρες της παραπληρωματικής $OX'Y'Z'$ της τριέδρου $OXYZ$ είναι οι παραπληρωματικές αντιστοίχων διέδρων γωνιών της $OXYZ$:

$$|X'OY'| + |\hat{Z}| = |Y'OZ'| + |\hat{X}| = |Z'OX'| + |\hat{Y}| = \pi.$$



Σχήμα 696: Παραπληρωματική τριέδρος

Απόδειξη: Στο επίπεδο ϵ το κάθετο στην OZ στο σημείο O περιέχονται αφενός η γωνία AOB που μετρά την διέδρο $\hat{Z}$ και αφ' ετέρου (εξ ορισμού) οι OX' και OY' . Η γωνία $\hat{Z}$ ισούται με την $\varphi = AOB$, όπου η ευθεία OA είναι η τομή του ϵ με το επίπεδο ZOX και OB η τομή του ϵ με το επίπεδο ZOY . Από τον ορισμό λοιπόν προκύπτει ότι οι γωνίες $\omega = X'OY'$ και $\varphi = AOB$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες και ομόρροπες, άρα είναι παραπληρωματικές. Ανάλογα δείχνουμε την σχέση και για τις άλλες γωνίες, ο.ε.δ.

Πρόταση 8.15.2 Η παραπληρωματική $OX''Y''Z''$ της παραπληρωματικής $OX'Y'Z'$ της τριέδρου $OXYZ$ συμπίπτει με την αρχική τριέδρο $OXYZ$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό, η ακμή OZ'' της παραπληρωματικής της $OX'Y'Z'$ θα είναι κάθετη στις OX' , OY' και από την ίδια μεριά με την OZ' . Αυτή όμως την ιδιότητα την έχει και η OZ , ο.ε.δ.

Πόρισμα 8.15.1 Εάν η τριέδρος γωνία $OXYZ$ έχει έδρες $\alpha=YOZ$, $\beta=ZOX$, $\gamma=XOY$ και διέδρες γωνίες $\phi(OX)$, $\chi(OY)$, $\psi(OZ)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε η παραπληρωματική της $OX'Y'Z'$ έχει αντίστοιχα έδρες

$$\alpha' = \pi - \phi, \quad \beta' = \pi - \chi, \quad \gamma' = \pi - \psi$$

και διέδρες

$$\phi' = \pi - \alpha, \quad \chi' = \pi - \beta, \quad \psi' = \pi - \gamma.$$

Απόδειξη: Οι πρώτες τρεις ισότητες αποδείχθηκαν στην Πρόταση 8.15.1. Οι επόμενες τρεις προκύπτουν εφαρμόζοντας την ίδια πρόταση στην παραπληρωματική της παραπληρωματικής που είναι (Πρόταση 8.15.2) η αρχική τριέδρος, ο.ε.δ.

Η ύπαρξη της παραπληρωματικής τριέδρου και ο συσχετισμός εδρών και διέδρων που προκύπτει από τις προηγούμενες πρότασεις δείχνει ότι οι έδρες και οι διέδρες μιάς τριέδρου είναι κατά κάποιο τρόπο ισοδύναμα στοιχεία. Οι μεν προσδιορίζουν τις δε. Σε αυτό τον δυϊσμό οφείλεται και το δεύτερο θεώρημα του συνημιτόνου που προκύπτει από το πρώτο εφαρμόζοντάς το στην παραπληρωματική τριέδρο.

Πρόταση 8.15.3 Έστω τριέδρος γωνία $OAB\Gamma$ με έδρες $\alpha=BO\Gamma$, $\beta=GOA$, $\gamma=AOB$ και διέδρες γωνίες $\phi(OA)$, $\chi(OB)$, $\psi(O\Gamma)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε ισχύει

$$\text{συν}(\phi) = -\text{συν}(\chi)\text{συν}(\psi) + \eta\mu(\chi)\eta\mu(\psi)\text{συν}(\alpha).$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον τύπο του συνημιτόνου (Πρόταση 8.14.2) στην παραπληρωματική διέδρο λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις του Πορίσματος 8.15.1:

$$\begin{aligned} \text{συν}(\alpha') &= \text{συν}(\beta')\text{συν}(\gamma') + \eta\mu(\beta')\eta\mu(\gamma')\text{συν}(\phi') \Leftrightarrow \\ \text{συν}(\pi - \phi) &= \text{συν}(\pi - \chi)\text{συν}(\pi - \psi) + \eta\mu(\pi - \phi)\eta\mu(\pi - \psi)\text{συν}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \\ -\text{συν}(\phi) &= \text{συν}(\chi)\text{συν}(\psi) - \eta\mu(\chi)\eta\mu(\psi)\text{συν}(\alpha), \end{aligned}$$

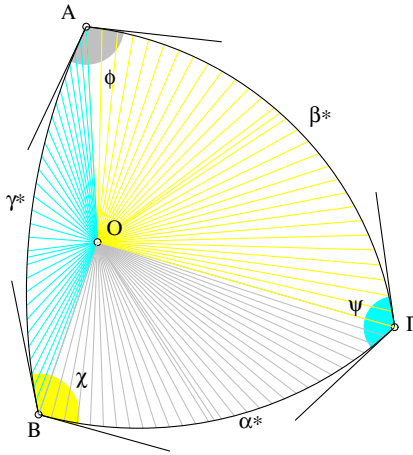
ο.ε.δ.

Και αυτή η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί όπως και ο Πρώτος σφαιρικός τύπος συνημιτόνου (Πρόταση 8.14.3) ως σχέση μεταξύ στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου που αποτελεί η τριέδρος σε μιά σφαίρα. Ακολουθώντας τους συμβολισμούς της Παραγράφου 8.14 μεταφράζουμε την προηγούμενη πρόταση στον λεγόμενο **Δεύτερο σφαιρικό τύπο συνημιτόνου**.

Πρόταση 8.15.4 Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους α^* , β^* , γ^* και αντίστοιχες απέναντι γωνίες ϕ , χ και ψ ισχύει:

$$\text{συν}(\phi) = -\text{συν}(\chi)\text{συν}(\psi) + \eta\mu(\chi)\eta\mu(\psi)\text{συν}\left(\frac{\alpha^*}{\rho}\right),$$

όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας.



Σχήμα 697: Σφαιρικό τρίγωνο

Σχόλιο Ο τύπος αυτός, μεταξύ άλλων, τονίζει και το γεγονός ότι τα σφαιρικά τρίγωνα προσδιορίζονται πλήρως από τις γωνίες τους ϕ, χ και ψ . Πράγματι, αν δοθούν οι γωνίες αυτές τότε λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση ως προς α^* ευρίσκουμε το μήκος της πλευράς του τριγώνου και από τους αντίστοιχους τύπους για τις άλλες πλευρές βρίσκουμε συνολικά όλες τις πλευρές του τριγώνου. Έχουμε εδώ μία ουσιαστική διαφορά από τα συνηθισμένα τρίγωνα του επιπέδου. Εκεί η γνώση των γωνιών δεν αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό του τριγώνου. Εκεί από τις γωνίες συμπεραίνουμε το σχήμα του τριγώνου αλλά όχι το μέγεθος. Υπάρχουν πολλά τρίγωνα με τις ίδιες γωνίες που είναι μεταξύ τους όμοια. Αντίθετα στην σφαίρα δεν υπάρχουν διαφορετικά τρίγωνα με τις ίδιες γωνίες. Εδώ δεν υπάρχει ομοιότητα.

Η αναλογία πάντως των σφαιρικών με τα ευκλείδεια επίπεδα τρίγωνα υφίσταται σε πολλές περιπτώσεις, όπως λ.χ. και στο επόμενο ανάλογο του τύπου του ημιτόνου που αναφέρεται ως **Σφαιρικός τύπος του ημιτόνου**.

Πρόταση 8.15.5 Έστω τριέδρος γωνία $OAB\Gamma$ με έδρες $\alpha = BO\Gamma$, $\beta = \Gamma O A$, $\gamma = AOB$ και διέδρες γωνίες $\phi(OA)$, $\chi(OB)$, $\psi(O\Gamma)$ (εντός παρένθεσης η αντίστοιχος ακμή). Τότε ισχύει

$$\frac{\eta\mu(\phi)}{\eta\mu(\alpha)} = \frac{\eta\mu(\chi)}{\eta\mu(\beta)} = \frac{\eta\mu(\psi)}{\eta\mu(\gamma)}.$$

Απόδειξη: Μία απλή απόδειξη προκύπτει τετραγωνίζοντας τον τύπο του συνημιτόνου (Πρόταση 8.14.2):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(\phi) \Rightarrow \\ (\cos(\alpha) - \cos(\beta)\cos(\gamma))^2 &= (\sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(\phi))^2 \Rightarrow \\ \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2\cos(\gamma)^2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) &= \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2\cos(\phi)^2 \\ &= \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2(1 - \sin(\phi)^2) \\ &= 1 - \cos(\beta)^2 - \cos(\gamma)^2 + \cos(\beta)^2\cos(\gamma)^2 - \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2\sin(\phi)^2 \Rightarrow \\ \cos(\alpha)^2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) &= 1 - \cos(\beta)^2 - \cos(\gamma)^2 - \sin(\beta)^2\sin(\gamma)^2\sin(\phi)^2. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}\eta\mu(\beta)^2 \eta\mu(\gamma)^2 \eta\mu(\phi)^2 &= 1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 - \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 - \sigma\upsilon\nu(\gamma)^2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma) \Leftrightarrow \\ \eta\mu(\phi)^2 &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 - \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 - \sigma\upsilon\nu(\gamma)^2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma)}{\eta\mu(\beta)^2 \eta\mu(\gamma)^2} \Leftrightarrow \\ \frac{\eta\mu(\phi)^2}{\eta\mu(\alpha)^2} &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(\alpha)^2 - \sigma\upsilon\nu(\beta)^2 - \sigma\upsilon\nu(\gamma)^2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha)\sigma\upsilon\nu(\beta)\sigma\upsilon\nu(\gamma)}{\eta\mu(\alpha)^2 \eta\mu(\beta)^2 \eta\mu(\gamma)^2}.\end{aligned}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι συμμετρικός ως προς τα α, β και γ , συνεπώς θα είναι ο ίδιος και για τα άλλα πηλικά $\frac{\eta\mu(\chi)^2}{\eta\mu(\beta)^2}, \frac{\eta\mu(\psi)^2}{\eta\mu(\gamma)^2}$, ο.ε.δ.

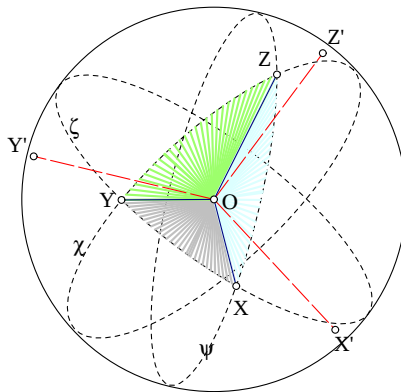
Η μετάφραση του προηγούμενου τύπου για σφαιρικά τρίγωνα δίδεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.15.6 Για κάθε σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές μήκους $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ και αντίστοιχες απέναντι γωνίες ϕ, χ και ψ ισχύει:

$$\frac{\eta\mu(\phi)}{\eta\mu(\frac{\alpha^*}{\rho})} = \frac{\eta\mu(\chi)}{\eta\mu(\frac{\beta^*}{\rho})} = \frac{\eta\mu(\psi)}{\eta\mu(\frac{\gamma^*}{\rho})},$$

όπου ρ η ακτίνα της σφαίρας.

Η επόμενη εικόνα δείχνει την παραπληρωματική τριέδρου $OX'Y'Z'$ μιάς τριέδρου $OXYZ$ που η κορυφή της έχει τοποθετηθεί στο κέντρο της σφαίρας. Κάθε έδρα της τριέδρου $OXYZ$ ορίζει ένα επίπεδο διά του O και αυτό τέμνει την σφαίρα κατά ένα μέγιστο κύκλο. Έτσι το επίπεδο XOY τέμνει στην σφαίρα τον μέγιστο κύκλο ζ και το Z' είναι ο πόλος του ζ από την μεριά που είναι και το Z . Ανάλογα και τα άλλα σημεία X' και Y' είναι οι πόλοι των μεγίστων κύκλων που ορίζουν οι έδρες της τριέδρου λαμβανόμενοι από την μεριά της έδρας που ευρίσκεται και ολόκληρη η αρχική τριέδρος.



Σχήμα 698: Η παραπληρωματική τριέδρος

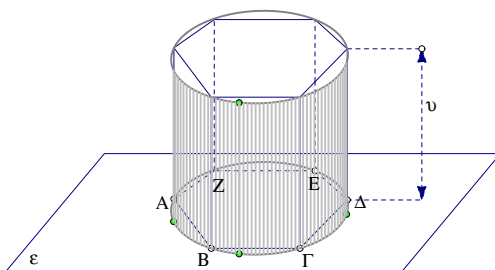
Άσκηση 8.15.1 Δείξε ότι το σφαιρικό ισόπλευρο τρίγωνο, του οποίου και οι τρεις γωνίες είναι ορθές, είναι ίσο με το παραπληρωματικό του.

Κεφάλαιο 9

Εμβαδά στο χώρο, όγκοι

9.1 Εμβαδά στο χώρο

Το εμβαδόν πολυεδρικών επιφανειών στηρίζεται στους ορισμούς και τις ιδιότητες του εμβαδού επιπέδων σχημάτων. Έτσι το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές μήκους α , β και γ είναι $2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$, το εμβαδόν της επιφάνειας του κύβου πλευράς δ είναι $6\delta^2$ και ανάλογα υπολογίζονται τα εμβαδά όλων των πολυέδρων προσθέτοντας τα εμβαδά των εδρών που τα αποτελούν. Το εμβαδόν των πολυέδρων λοιπόν δεν παρουσιάζει δυσκολίες και επομένως θεωρητικό ενδιαφέρον (δες ωστόσο τις ασκήσεις παρακάτω). Εκεί που παρουσιάζονται δυσκολίες είναι στα εμβαδά καμπύλων επιφανειών, όπως ο κύλινδρος, ο κώνος, η σφαίρα, καθώς και τμημάτων αυτών των επιφανειών. Ο ορισμός του εμβαδού αυτών των επιφανειών ή/και τμημάτων τους με έναν γενικό τρόπο, παρόμοια με τον ορισμό μήκους γενικών καμπυλών είναι αντικείμενο της *Διαφορικής γεωμετρίας* (εμβαδόν χωρίων επιφάνειας [dC76, σ. 114], στοιχείο όγκου υποπολλαπλότητας [Σπί94, σελ. 130]) και ξεπερνά τα πλαίσια αυτού του μαθήματος. Αποδεικνύεται ωστόσο ότι το εμβαδόν του κώνου, του κυλίνδρου και της σφαίρας μπορεί να ορισθεί ως όριο εμβαδών πολυέδρων εγγεγραμμένων σε αυτές τις επιφάνειες. Η διαδικασία είναι, στην ουσία, η ίδια με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό του μήκους και του εμβαδού του κύκλου (Παράγραφος 6.5). Το **Εμβαδόν κώνου** ορίζεται ως το όριο των εμβαδών κανονικών πυραμίδων εγγεγραμμένων στον κώνο. Παρόμοια το **Εμβαδόν του κυλίνδρου** ορίζεται ως όριο κανονικών πρισμάτων εγγεγραμμένων στον κύλινδρο. Σε αυτά τα δύο σχήματα το εμβαδόν των βάσεων είναι αυτό του κύκλου, επομένως το ενδιαφέρον εστιάζεται στον υπολογισμό του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας. Ως **Παράπλευρο εμβαδόν** του κυλίνδρου θεωρούμε το όριο των



Σχήμα 699: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου

παράπλευρων εμβαδών των κανονικών πρισμάτων των εγγεγραμμένων στον κύλινδρο καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών τους. Ας συμβολίζουμε πάλι με $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην Παράγραφο 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο (Π_1) εγγεγραμμένο στον κύκλο κ και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον κ και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Εάν p_ν συμβολίζει την περίμετρο του Π_ν τότε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κανονικού πρίσματος με βάση το Π_ν είναι

$$u \cdot p_\nu,$$

όπου u το ύψος του πρίσματος. Από το Λήμμα 6.2.2 προκύπτει ότι η ακολουθία

$$u \cdot p_1, \quad u \cdot p_2, \quad u \cdot p_3, \dots$$

είναι αύξουσα. Και από το Λήμμα 6.2.3 προκύπτει ότι η ακολουθία είναι και φραγμένη, άρα κατά το Αξίωμα 6.1.1 η ακολουθία θα συγκλίνει. Το όριο ακριβώς αυτής της ακολουθίας ονο-

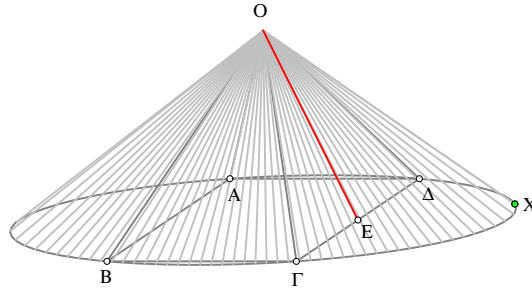
μάζουμε παράπλευρο **Εμβαδόν του κυλίνδρου**. Προκύπτει λοιπόν από τα προηγούμενα (Πόρισμα 6.3.1) η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.1.1 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου είναι ίσο με

$$\epsilon = 2\pi \cdot \rho \cdot \upsilon,$$

όπου ρ η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και υ το ύψος του.

Ο υπολογισμός του παράπλευρου εμβαδού του κώνου γίνεται με ανάλογο τρόπο. Ως **Παρά-**



Σχήμα 700: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κώνου

πλευρο εμβαδόν του κώνου θεωρούμε το όριο των παράπλευρων εμβαδών των κανονικών πυραμίδων των εγγεγραμμένων στον κώνο καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των πλευρών τους. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κανονικού κώνου με βάση το Π_ν είναι

$$\frac{1}{2} \cdot \upsilon_\nu \cdot p_\nu,$$

όπου υ_ν το ύψος της τριγωνικής έδρας του πρίσματος (όχι το ύψος του κώνου, ούτε η γενέτειρα, αλλά το μήκος του τμήματος όπως το ΟΕ στο σχήμα-700). Και πάλι διαπιστώνουμε εύκολα ότι η ακολουθία

$$\frac{1}{2} \cdot \upsilon_1 \cdot p_1, \quad \frac{1}{2} \cdot \upsilon_2 \cdot p_2, \quad \frac{1}{2} \cdot \upsilon_3 \cdot p_3, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη από τον αριθμό

$$\frac{1}{2} \cdot \upsilon \cdot (2\pi\rho),$$

όπου $\upsilon = |OX|$ το μήκος της γενέτειρας του κώνου και ρ η ακτίνα του κύκλου της βάσης του. Και πάλι κατά το Αξίωμα 6.1.1 η ακολουθία θα συγκλίνει. Το όριο ακριβώς αυτής της ακολουθίας ονομάζουμε παράπλευρο **Εμβαδόν του κώνου**.

Πρόταση 9.1.2 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κώνου είναι ίσο με

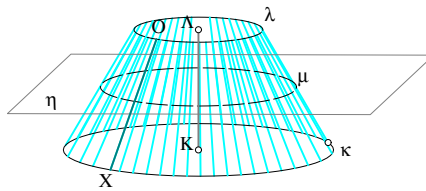
$$\epsilon = \pi \cdot \upsilon \cdot \rho,$$

όπου ρ η ακτίνα της βάσης του κώνου και υ το μήκος της γενέτειράς του.

Απόδειξη: Σκιαγραφώ την απόδειξη γιατί δεν θέλω να μπω στις λεπτομέρειες για τα όρια. Δείχνουμε λοιπόν πρώτα ότι η ακολουθία

$$v_1, v_2, v_3, \dots$$

είναι αύξουσα και φραγμένη άρα συγκλίνει και μάλιστα προς το $v = |OX|$. Για τις περιμέτρους p_ν γνωρίζουμε ήδη ότι συγκλίνουν στο $2\pi\rho$. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης χρειάζεται και ο κανόνας για τα όρια, σύμφωνα με τον οποίο το όριο του γινομένου ακολουθιών που συγκλίνουν είναι το γινόμενο των ορίων. Κατ' αυτόν λοιπόν τον κανόνα το όριο της ακολουθίας $(v_\nu)(p_\nu)$ θα είναι το $v \cdot (2\pi\rho)$ απ' όπου προκύπτει και ο τύπος του εμβαδού, ο.ε.δ.

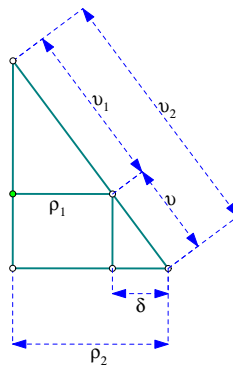


Σχήμα 701: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κόλουρου κώνου

Ο υπολογισμός του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας κόλουρου κώνου ανάγεται στον αντίστοιχο υπολογισμό για κώνους. Η παράπλευρη επιφάνεια του κόλουρου κώνου μπορεί να θεωρηθεί ως η διαφορά της παράπλευρης του κώνου ως προς την μεγάλη βάση (κύκλος κ στο σχήμα-701) μείον την παράπλευρη του κώνου ως προς την μικρή βάση (κύκλος λ στο σχήμα-701). Εφαρμόζοντας τον τύπο έχουμε συνεπώς ότι το εμβαδόν δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon = \pi(v_2\rho_2 - v_1\rho_1),$$

όπου ρ_1, ρ_2, v_1, v_2 είναι τα μήκη γενέτειρας και ακτίνας βάσης των δύο κώνων των οποίων η διαφορά είναι ο κόλουρος κώνος.



Σχήμα 702: Τομή κόλουρου κώνου

Θέτοντας $v = v_2 - v_1$, $\delta = \rho_2 - \rho_1$ και αντικαθιστώντας στον τύπο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v_2\rho_2 - v_1\rho_1 &= (v_1 + v)(\rho_1 + \delta) - v_1\rho_1 \\ &= v\rho_1 + v_1\delta + v\delta \\ &= v\rho_1 + (v\frac{\rho_1}{\delta})\delta + v\delta \\ &= v(\rho_1 + \rho_1 + \delta) \\ &= v(\rho_1 + \rho_2). \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση στην μεσαία ισότητα προκύπτει από την ομοιότητα των αντιστοίχων ορθογωνίων τριγώνων. Το ημιάθροισμα $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ είναι η ακτίνα της μεσαίας τομής του κόλουρου κώνου και έτσι έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.1.3 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κόλουρου κώνου δίδεται από τον τύπο

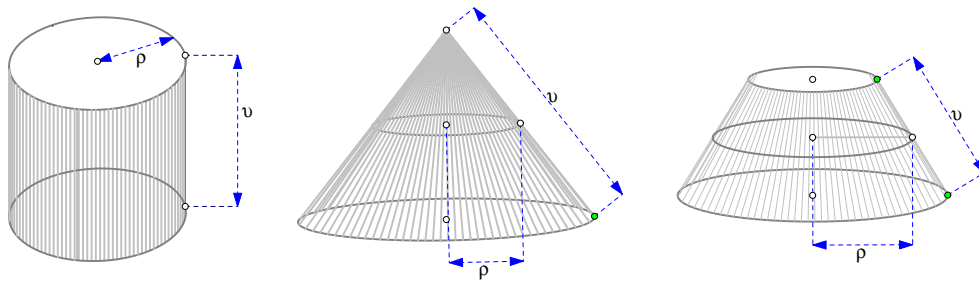
$$\epsilon = 2\pi \cdot \rho \cdot v,$$

όπου ρ η ακτίνα της μεσαίας τομής του και v το μήκος της γενέτειράς του.

Πόρισμα 9.1.1 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου, κώνου καθώς και κόλουρου κώνου δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon = 2\pi\rho v,$$

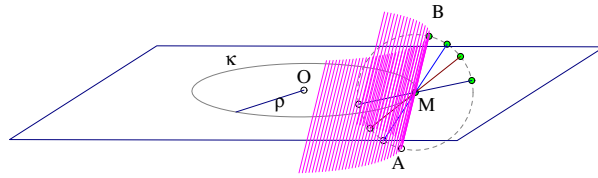
όπου v το μήκος της γενέτειρας και ρ η ακτίνα της μεσαίας τομής του στερεού.



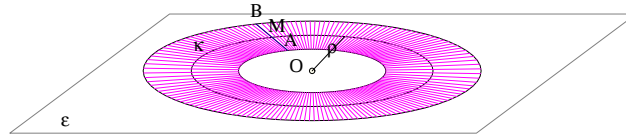
Σχήμα 703: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, εννιαίος τύπος

Απόδειξη: Το πόρισμα απλά ενοποιεί τα επιμέρους αποτελέσματα των τριών προηγούμενων προτάσεων βάσει της παρατήρησης ότι για τον κώνο η μεσαία τομή είναι ο κύκλος με ακτίνα το μισό της ακτίνας της βάσης, ενώ στον κύλινδρο η μεσαία τομή είναι κύκλος ίσος με αυτόν της βάσης, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Ο τελευταίος τύπος δείχνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB περιστρεφόμενο περί το μέσον του M παράγει παράπλευρη επιφάνεια κόλουρου κώνου με τό ίδιο εμβαδόν, ανεξάρτητα της κλίσης του προς το επίπεδο του κύκλου περιστροφής κ (σχήμα-704). Όταν το AB είναι κάθετο στο επίπεδο του κ τότε η παράπλευρη επιφάνεια είναι αυτή ενός κυλίνδρου. Όταν το AB είναι στο επίπεδο του κ και μικρότερο από την ακτίνα του κ , τότε παράγεται ένας επίπεδος κυκλικός δακτύλιος (σχήμα-705).



Σχήμα 704: Εμβαδόν παράπλευρης ανεξάρτητο της κλίσης του AB

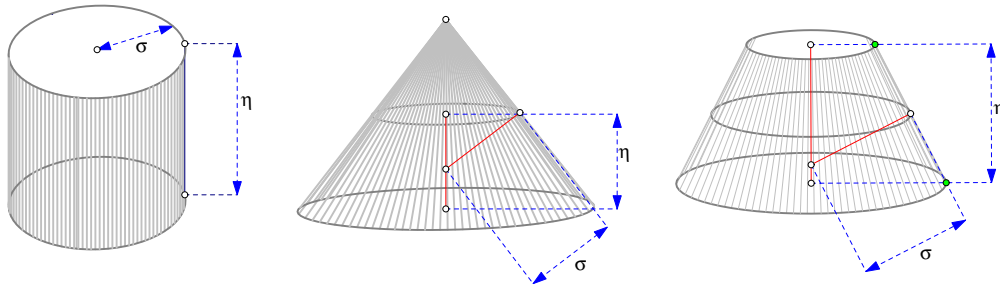


Σχήμα 705: Δακτύλιος όταν το AB περιέχεται στο ε

Πόρισμα 9.1.2 Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου, κώνου καθώς και κολουρου κώνου δίδεται από τον τύπο

$$\epsilon = 2\pi\sigma\eta,$$

όπου σ η απόσταση του μέσου της γενέτειρας από τον άξονα και η το ύψος του στερεού.



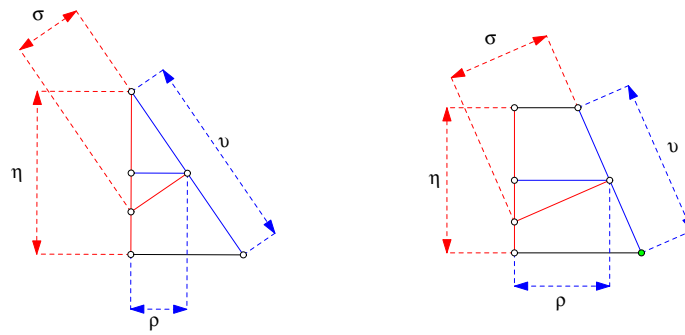
Σχήμα 706: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, εννιαίος τύπος II

Απόδειξη: Απόδειξη διά του σχήματος. Στην περίπτωση του κυλίνδρου το πόρισμα ταυτίζεται με το προηγούμενο. Στις περιπτώσεις του κώνου και του κολουρου κώνου, από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές (ρ, σ) και (η, ν) αντίστοιχα προκύπτει

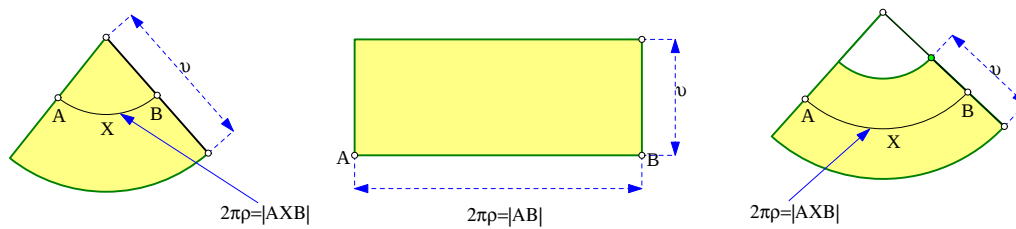
$$\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\eta}{\nu} \Rightarrow \rho\nu = \sigma\eta.$$

Αντικαθιστώντας το $\rho\nu$ στον τύπο του προηγούμενου πορίσματος αποδεικνύουμε το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Αν χρησιμοποιήσουμε τα περί αναπτύγματος που αναφέρθηκαν στις παραγράφους 8.9, 8.8 και ειδικά το ότι η διαδικασία του αναπτύγματος διατηρεί τα μήκη και τα εμβαδά, οι τύποι, που αποδείχθηκαν εδώ με την χρήση ορίων, ανάγονται απ' αυτήν την σκοπιά σε απλούς υπολογισμούς επιπέδων εμβαδών. Το επόμενο σχήμα δείχνει τα αναπτύγματα κώνου, κυλίνδρου και κολουρου κώνου και τα εμβαδά τους. Και στις τρεις περιπτώσεις το



Σχήμα 707: Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας, εννιαίος εναλλακτικός τύπος

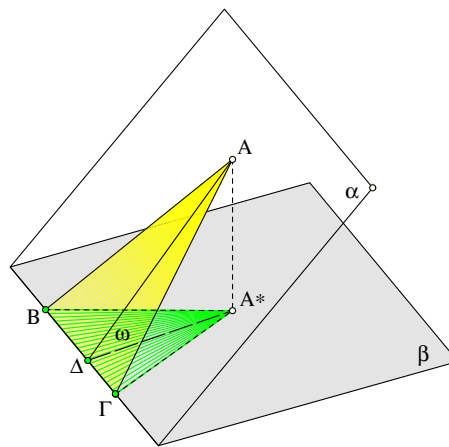


Σχήμα 708: Εμβαδόν μέσω αναπτύγματος

u είναι το μήκος της γενέτειρας και το ρ είναι η ακτίνα της μέσης τομής και ευρίσκεται από την αντίστοιχη ισότητα που αναγράφεται. Σε αυτήν το δεξί μέρος είναι, στις περιπτώσεις του κώνου και του κολουρού κώνου, το μήκος τόξου AXB και στην περίπτωση του κυλίνδρου το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Άσκηση 9.1.1 Δείξε ότι από τα παραλληλεπίπεδα που εγγράφονται σε δεδομένο κύλινδρο ο κύβος έχει την μέγιστη δυνατή παράπλευρη επιφάνεια.

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την Άσκηση 2.13.6.



Σχήμα 709: Προβολή τριγώνου σε άλλο επίπεδο

Άσκηση 9.1.2 Δείξε ότι δοθέντων δύο επιπέδων α και β και τριγώνου $AB\Gamma$ του επιπέδου α , έτσι ώστε η πλευρά του $B\Gamma$ να είναι επί της τομής των α και β , το εμβαδόν της προβολής $A^*B\Gamma$ του $AB\Gamma$ στο β είναι

$$\epsilon(A^*B\Gamma) = \sin(\omega)\epsilon(AB\Gamma),$$

όπου ω η γωνία των επιπέδων α και β .

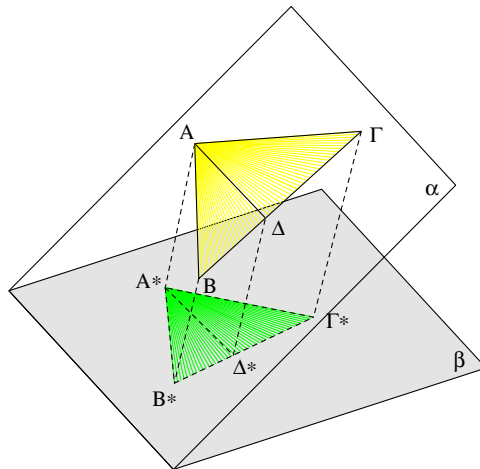
Άσκηση 9.1.3 Δείξε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει και όταν το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει την πλευρά του $B\Gamma$ παράλληλο προς την τομή των α και β .

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το Πρόγραμμα 8.1.2 και μετάφερε το $AB\Gamma$ στο επίπεδο α παράλληλα εαυτώ έτσι ώστε η ακμή του $B\Gamma$ να συμπίπτει με την τομή των α, β .

Άσκηση 9.1.4 Δείξε ότι ο προηγούμενος τύπος ισχύει για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ του επιπέδου α και την προβολή του $A^*B^*\Gamma^*$ σε επίπεδο β . Δηλαδή

$$\epsilon(A^*B^*\Gamma^*) = \sin(\omega)\epsilon(AB\Gamma),$$

όπου ω η γωνία των επιπέδων α και β .



Σχήμα 710: Προβολή τριγώνου σε άλλο επίπεδο

Υπόδειξη: Από μία κορυφή του $AB\Gamma$ λ.χ. την A φέρε παράλληλο $A\Delta$ προς την τομή των α και β . Εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση στα δύο τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ και πρόσθεσε ή αφάιρεσε, ανάλογα με το αν το Δ είναι μέσα ή έξω από το $B\Gamma$.

Άσκηση 9.1.5 Δείξε ότι για κάθε κυρτό πολύγωνο $AB\Gamma\Delta\ldots$ του επιπέδου α και την προβολή του $A^*B^*\Gamma^*\Delta^*\ldots$ στο επίπεδο β ισχύει η σχέση μεταξύ των εμβαδών τους:

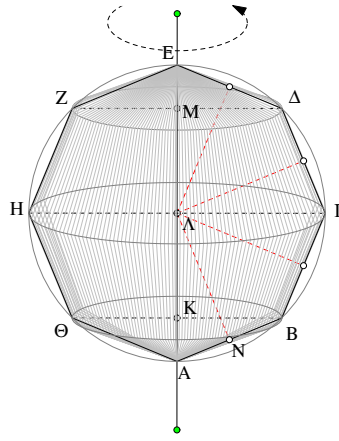
$$\epsilon(A^*B^*\Gamma^*\Delta^*\ldots) = \sin(\omega)\epsilon(AB\Gamma\Delta\ldots),$$

όπου ω η γωνία των επιπέδων α και β .

Υπόδειξη: Φέρε από μία κορυφή του $AB\Gamma\Delta\ldots$ τις διαγώνιες και διαίρεσέ το σε τρίγωνα. Κατόπιν εφάρμοσε την προηγούμενη άσκηση και πρόσθεσε.

9.2 Εμβαδόν της σφαίρας

Το εμβαδόν της σφαίρας υπολογίζεται μέσω των εμβαδών στερεών που προκύπτουν από εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα. Θεωρούμε ότι η σφαίρα παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου κ περί διάμετρο AE αυτού. Μία προσέγγιση της σφαίρας παράγεται από περιστροφή κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο κ . Ας συμβολίζουμε πάλι με $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην Παράγραφο 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο (Π_1) εγγεγραμμένο στον κύκλο κ και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον κ και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Κατά την περιστροφή ενός τέτοιου πολυγώνου περί την διάμετρο AE , που υποθέτουμε ότι συμπίπτει με μία διαγώνιο του πολυγώνου, παράγεται μία επιφάνεια που αποτελείται από κώνους και κόλουργους κώνους. Η παράπλευρη επιφάνεια αυτών των κώνων και κόλουργων κώνων



Σχήμα 711: Προσέγγιση επιφανείας σφαίρας

υπολογίσθηκε στην προηγούμενη παράγραφο και σύμφωνα με τους τύπους που αποδείχθηκαν (Πόρισμα 9.1.2) δίδει μία συνολική επιφάνεια, που στην περίπτωση του οκταγώνου (Π_2 κατά τους συμβολισμούς μας, σχήμα-711) είναι

$$\epsilon_2 = (2\pi \cdot \eta_2) \cdot (|AK| + |K\Lambda| + |\Lambda M| + |ME|) = (2\pi \cdot \eta_2) \cdot |AE| = (2\pi \cdot \eta_2)(2\rho)$$

όπου $\eta_2 = |\Lambda N|$ είναι η απόσταση της πλευράς του οκταγώνου (Π_2) από το κέντρο του κύκλου, που είναι ίση με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου και ρ η ακτίνα του κύκλου κ στον οποίον είναι εγγεγραμμένα τα πολύγωνα. Θεωρούμε λοιπόν ότι το εμβαδόν της επιφανείας της σφαίρας είναι το όριο της ακολουθίας που προκύπτει ανάλογα

$$\epsilon_1 = (4\pi\rho)\eta_1, \quad \epsilon_2 = (4\pi\rho)\eta_2, \quad \epsilon_3 = (4\pi\rho)\eta_3, \dots$$

Το ότι η ακολουθία αυτή συγχλίνει το συμπεραίνουμε από το ότι η ακολουθία των ακτίνων

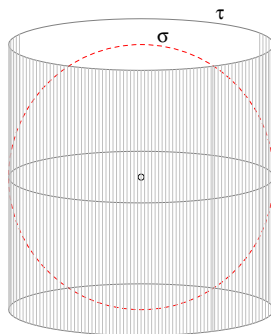
$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$$

των κύκλων των εγγεγραμμένων στα πολύγωνα Π_ν (που με την σειρά τους είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο με διάμετρο $|AE| = 2\rho$) συγχλίνει στο ρ . Συνεπώς το όριο αυτών των εμβαδών ϵ_ν είναι το

$$\epsilon = 4\pi\rho^2.$$

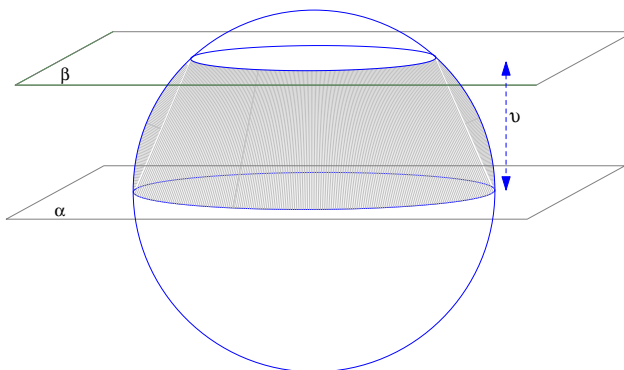
Μετά λοιπό από αρκετές παραδοχές σχετικά με το τί θα ονομάζουμε εμβαδόν της σφαίρας καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.2.1 Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ακτίνας ρ είναι $\epsilon = 4\pi\rho^2$.



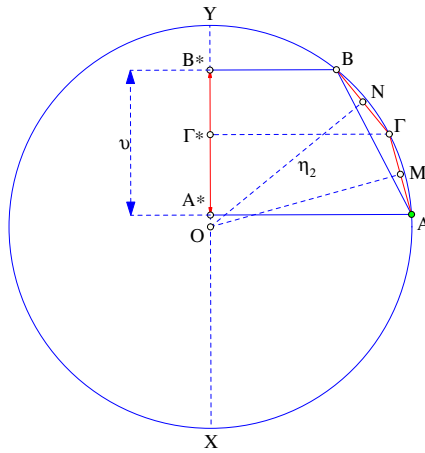
Σχήμα 712: Σφαίρα και περιβάλλον κύλινδρος

Πόρισμα 9.2.1 Η σφαίρα σ έχει το ίδιο εμβαδόν με την παράπλευρη επιφάνεια του περιβάλλοντος αυτήν κυλίνδρου τ .



Σχήμα 713: Εμβαδόν σφαιρικής ζώνης

Ονομάζουμε **Σφαιρική ζώνη** το τμήμα της σφαίρας που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων που την τέμνουν. Η απόσταση ν των επιπέδων λέγεται **Ύψος** της σφαιρικής ζώνης. Το εμβαδόν της σφαιρικής ζώνης ορίζεται, παρόμοια με αυτό της σφαίρας, ως όριο εμβαδών σωμάτων εγγεγραμμένων στην σφαιρική ζώνη. Θεωρούμε την σφαιρική ζώνη ως παραγόμενη από την περιστροφή τόξου AB κύκλου κ περί διάμετρο XY αυτού (σχήμα-714). Το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται ορίζεται ως το όριο του αθροίσματος των παράπλευρων επιφανειών των κόλουργων κώνων που προκύπτουν χωρίζοντας το τόξο σε n ίσα μέρη και θεωρώντας την αντίστοιχη πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα σημεία διαίρεσης. Ως πρώτη πολυγωνική γραμμή P_1 παίρνουμε το ίδιο το ευθύγραμμο τμήμα AB , οπότε κατά την περιστροφή του προκύπτει κόλουργος κώνος. Η δεύτερη πολυγωνική γραμμή προκύπτει παίρνοντας το μέσον Γ του τόξου και θεωρώντας την πολυγωνική γραμμή $A\Gamma B$. Προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο μία ακολουθία πολυγωνικών γραμμών $P_1, P_2, P_3, \dots$ που προσεγγίζει



Σχήμα 714: Ορισμός εμβαδού σφαιρικής ζώνης

το τόξο AB. Κάθε πολυγωνική γραμμή έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από την προηγούμενη. Όπως και στην σφαίρα ορίζεται για κάθε πολύγωνο P_n η αντίστοιχη ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου η_n και η παράπλευρη επιφάνεια του παραγόμενου στερεού προκύπτει ακριβώς όπως και στον κύκλο

$$\epsilon_n = 2(\pi\eta_n) \cdot |A^*B^*| = (2\pi\eta_n)u.$$

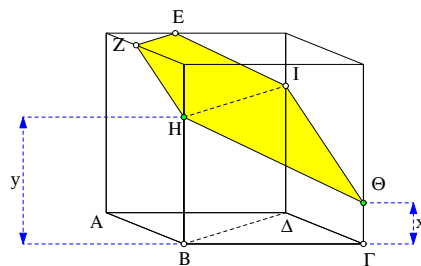
Όπως είδαμε προηγουμένως τα η_n συγκλίνουν στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου και συνεπώς της εξ αυτού παραγόμενης σφαίρας, άρα αποδείξαμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.2.2 Το εμβαδόν σφαιρικής ζώνης ύψους u σε μιά σφαίρα ακτίνας ρ ισούται με

$$\epsilon = 2\pi \cdot \rho \cdot u,$$

συνεπώς είναι ανεξάρτητο της θέσης της ζώνης στην σφαίρα και εξαρτάται μόνον από το ύψος της.

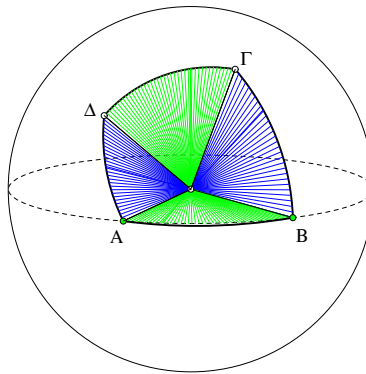
Άσκηση 9.2.1 Δίδεται κύβος με βάση ABΓΔ. Στην κάθετη ακμή από το Γ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΓΘ μήκους x . Από το σημείο Η της κάθετου ακμής στο Β και σε απόσταση $|BH| = y$ φέρνουμε την παράλληλο ΗΙ της διαγωνίου ΒΔ. Το επίπεδο ΘΗΙ τέμνει τον κύβο, για ορισμένες τιμές των x, y , κατά πεντάγωνο. Δοθέντος του x να βρεθεί για ποιές τιμές του y συμβαίνει αυτό. Επίσης να υπολογισθεί το εμβαδόν του προκύπτοντος πενταγώνου.



Σχήμα 715: Πενταγωνική τομή κύβου

9.3 Εμβαδόν σφαιρικών πολυγώνων

Έχοντας το εμβαδόν της σφαίρας μπορούμε να ρίξουμε μία σύντομη ματιά στα στοιχειώδη σχήματα που ορίζονται πάνω στην επιφάνειά της και τα εμβαδά τους. Τα πράγματα είναι ανάλογα με το επίπεδο. Εξ άλλου σε μία τεράστια σφαίρα (ως προς το μέγεθός μας), όπως η γη, είναι δύσκολο να ξεχωρίσουμε την πραγματική ευθεία από τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας. Όπως και στο επίπεδο, το εμβαδόν ορίζεται πρώτα για **Σφαιρικά πολύγωνα**, δηλαδή πολύγωνα πάνω στην σφαίρα, των οποίων οι πλευρές είναι τόξα μεγίστων κύκλων. Τα σφαιρικά πολύγωνα, κατ' αναλογία με τα σφαιρικά τρίγωνα, δημιουργούνται πάνω στην σφαίρα, τοποθετώντας την κορυφή μιάς πολυεδρικής γωνίας στο κέντρο της σφαίρας και θεωρώντας τις τομές των εδρών της με την σφαίρα. Οι τομές αυτές ορίζουν τις πλευρές του σφαιρικού πολυγώνου. Οι διέδρες της πολυεδρικής γωνίας ορίζουν τις γωνίες του σφαιρικού πολυγώνου. Δύο σφαιρικά πολύγωνα λέγονται **Ίσα**, όταν έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές και ίσες αντίστοιχες γωνίες. Για απλότητα περιοριζόμαστε σε **Κυρτά σφαιρικά πολύγωνα**, δηλαδή πολύγωνα των οποίων οι πλευρές (τόξα μεγίστων κύκλων) προεκτεινόμενες αφήνουν όλο το πολύγωνο από την μία μεριά (σε ένα από τα δύο ημισφαίρια που ορίζει ο μέγιστος κύκλος-φορέας της πλευράς). Οι τρεις πρώτες ιδιότητες που απαιτούμε από το



Σχήμα 716: Κυρτό σφαιρικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ

εμβαδόν, είναι οι ίδιες με αυτές του εμβαδού στο επίπεδο (3.1). Την μεγάλη διαφορά κάνει η τελευταία ιδιότητα. Όσο μεγάλη και να είναι η σφαίρα Σ , την ακτίνα της οποίας υποθέτουμε ίση με ρ , έχει πάντως πεπερασμένο εμβαδόν, σε αντίθεση με το Ευκλείδειο επίπεδο.

Ιδιότητα 9.3.1 Δύο ίσα πολύγωνα έχουν ίσα εμβαδά.

Ιδιότητα 9.3.2 Ένα πολύγωνο Π που συντίθεται από άλλα, πεπερασμένα το πλήθος, πολύγωνα $\Pi, \Pi', \Pi'', \dots$ που δεν επικαλύπτονται έχει εμβαδόν το άθροισμα των εμβαδών των πολυγώνων

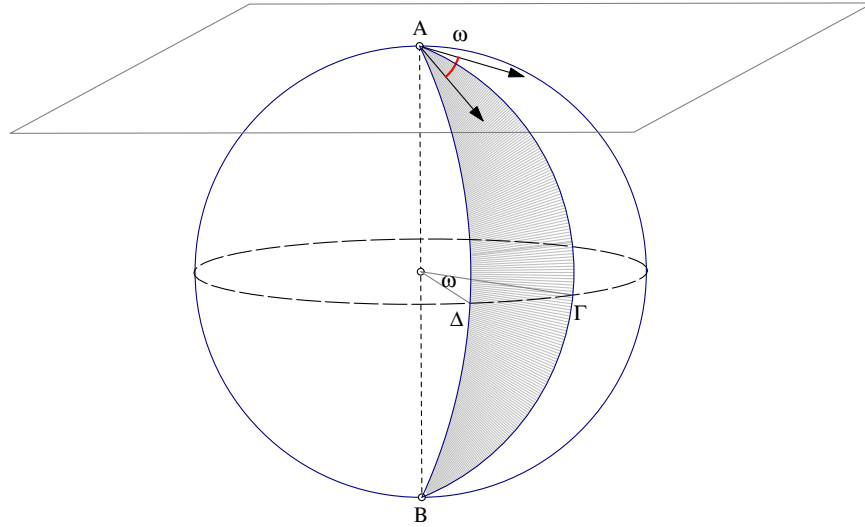
$$\epsilon(\Pi) = \epsilon(\Pi') + \epsilon(\Pi'') + \dots$$

Ιδιότητα 9.3.3 Ένα πολύγωνο Π που περιέχεται μέσα σέ ένα άλλο Π' έχει εμβαδόν

$$\epsilon(\Pi) < \epsilon(\Pi').$$

Ιδιότητα 9.3.4 Το εμβαδόν ολόκληρης της σφαίρας είναι $4\pi\rho^2$.

Σχόλιο-1 Και γι' αυτές τις ιδιότητες Ισχύει το ανάλογο με το σχόλιο που κάναμε και για το εμβαδόν πολυγώνων (Παράγραφος 3.1). Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου θα δείξουν, ότι, όπως και στο Ευκλείδειο επίπεδο, οι ιδιότητες 9.3.1 - 9.3.4 που δεχόμαστε για το εμβαδόν, καθορίζουν πλήρως τον τύπο του εμβαδού για σφαιρικά τρίγωνα (Θεώρημα 9.3.1) και γενικότερα το εμβαδόν κυρτών σφαιρικών πολυγώνων.



Σχήμα 717: Σφαιρική άτρακτος γωνίας ω

Πρόταση 9.3.1 Το εμβαδόν σφαιρικής ατράκτου T γωνίας ω (σε ακτίνια) είναι

$$\epsilon(T) = \omega(2\rho^2).$$

Απόδειξη: Αν η γωνία της σφαιρικής ατράκτου $T=AB\Gamma\Delta$ είναι της μορφής $\omega = \frac{2\pi}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός, τότε η πρόταση ισχύει. Αυτό έπεται από την προσθετική Ιδιότητα 9.3.2 και την Ιδιότητα 9.3.4 που απαιτούμε από το εμβαδόν. Σύμφωνα με αυτές τοποθετώντας ν το πλήθος τέτοιες ατράκτους διαδοχικά καλύπτουμε όλη την σφαίρα και έχουμε

$$4\pi\rho^2 = \epsilon(\Sigma) = \nu\epsilon(T) \quad \Rightarrow \quad \epsilon(T) = \frac{2\pi}{\nu}2\rho^2.$$

Παρόμοια αν η γωνία είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π η πρόταση ισχύει. Ακριβέστερα αν

$$\omega = \frac{\mu}{\nu}(2\pi), \quad \mu \in 0 < \frac{\mu}{\nu} < 1$$

και το κλάσμα των θετικών ακεραίων μ και ν είναι ανάγωγο, τότε ισχύει πάλι

$$\epsilon(T) = \left(\frac{\mu}{\nu}2\pi\right)(2\rho^2).$$

Τούτο διότι η γωνία γράφεται σαν άθροισμα μ γωνιών μέτρου $\frac{2\pi}{\nu}$ και επομένως η αντίστοιχη σφαιρική άτρακτος T γράφεται σαν ένωση μ διαδοχικών σφαιρικών ατράκτων εμβαδού, σύμφωνα με το προηγούμενο βήμα, $\frac{2\pi}{\nu}(2\rho^2)$. Συνεπώς και σ' αυτήν την περίπτωση

$$\epsilon(T) = \mu \frac{2\pi}{\nu}(2\rho^2) = \omega(2\rho^2).$$

Στην γενική περίπτωση, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.2.3 με τον ίδιο τρόπο που το κάναμε για επίπεδα εμβαδά. Έστω λοιπόν ότι η γωνία ω είναι της μορφής

$$\omega = \theta(2\pi), \quad \mu\epsilon \quad 0 < \theta < 1.$$

Κατά το προαναφερθέν λήμμα, για δοθέντα ακέραιο θετικό ν υπάρχει κατάλληλος ακέραιος μ έτσι ώστε

$$\frac{\mu}{\nu} < \theta < \frac{\mu+1}{\nu}.$$

Οι αντίστοιχες σφαιρικές άτρακτοι T_1, T, T_2 με γωνίες

$$\omega_1 = \frac{\mu}{\nu}(2\pi), \quad \omega = \theta(2\pi), \quad \omega_2 = \frac{\mu+1}{\nu}(2\pi),$$

τοποθετώντας τις έτσι ώστε η πρώτη πλευρά τους να ταυτίζεται, θα περιέχονται ο ένας μέσα στον άλλο και θα έχουμε

$$\epsilon(T_1) = \frac{2\pi\mu}{\nu}(2\rho^2) < \epsilon(T) < \epsilon(T_2) = \frac{2\pi(\mu+1)}{\nu}(2\rho^2).$$

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\delta = \epsilon(T) - (2\pi\theta)(2\rho^2),$$

είναι θετικός αριθμός τότε προκύπτει ότι η επόμενη ανισότητα

$$\begin{aligned} \delta = \epsilon(T) - (2\pi\theta)(2\rho^2) &< \epsilon(T) - (2\pi\frac{\mu}{\nu})(2\rho^2) \\ &< \epsilon(T_2) - (2\pi\frac{\mu}{\nu})(2\rho^2) \\ &= (2\pi\frac{\mu+1}{\nu})(2\rho^2) - (2\pi\frac{\mu}{\nu})(2\rho^2) \\ &= \frac{2\pi}{\nu}(2\rho^2). \end{aligned}$$

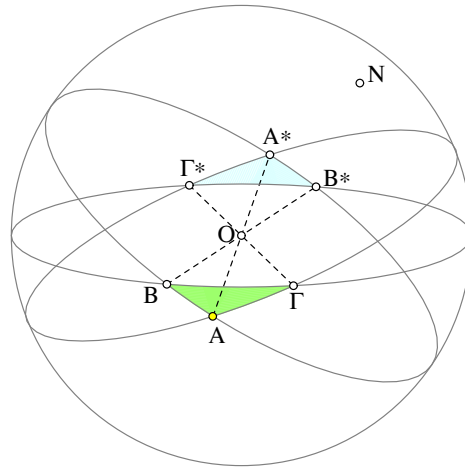
ισχύει για κάθε ν . Τούτο όμως είναι άτοπο διότι ο τελευταίος όρος μπορεί να γίνει μικρότερος του δ , αρκεί να πάρουμε κατάλληλο ν . Παρόμοια δείχνουμε ότι οδηγεί σε άτοπο η υπόθεση $\delta < 0$, άρα πρέπει $\delta = 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης, ο.ε.δ.

Θεώρημα 9.3.1 Το εμβαδόν $\epsilon(T)$ του σφαιρικού τριγώνου T σφαίρας $\Sigma(\rho)$ με (διέδρες) γωνίες α, β και γ ισούται με

$$\epsilon(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\rho^2.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη στηρίζεται στην εξαιρετική συμμετρία της σφαίρας. Το σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ ορίζει μέσω των αντιδιαμετρικών σημείων των κορυφών του ένα ίσο και ε-πομένως ισοεμβαδικό (Ιδιότητα 9.3.1) τρίγωνο $A^*B^*\Gamma^*$. Το ημισφαίριο Σ_N (με πόλο N στο σχήμα-718) που ορίζεται από την πλευρά AB και περιέχει το τρίγωνο ονομάζω περιστασιακά βόρειο (και το άλλο νότιο), καλύπτεται πλήρως από τις σφαιρικές ατράκτους των γωνιών του τριγώνου με κάποιες επικαλύψεις:

- 1) Την άτρακτο $BA\Gamma$ που περιέχει το τρίγωνο.
- 2) Την άτρακτο $AB\Gamma$ που έχει κοινό με τον προηγούμενο το τρίγωνο $AB\Gamma$.



Σχήμα 718: Σφαιρικό τρίγωνο

3) Την άτρακτο $A^*\Gamma^*B^*$ που έχει στο νότιο ημισφαίριο το τρίγωνο $A^*B^*\Gamma^*$ ισοεμβαδικό του $AB\Gamma$. Η κάλυψη λοιπόν του βορείου ημισφαιρίου δίδει την ισότητα των εμβαδών

$$\epsilon(\Sigma_N) = 2\pi\rho^2 = [\alpha(2\rho)^2] + [\beta(2\rho)^2 - \epsilon(AB\Gamma)] + [\gamma(2\rho)^2 - \epsilon(AB\Gamma)].$$

Απλοποιώντας την εξίσωση παίρνουμε την ζητούμενη σχέση, ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.3.1 Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο του π .

Πόρισμα 9.3.2 Το εμβαδόν κυρτού σφαιρικού πολυγώνου Π με γωνίες $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι ίσο με

$$\epsilon(\Pi) = [(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) - (n - 2)\pi] \cdot (\rho^2).$$

Απόδειξη: Αν το πολύγωνο έχει n κορυφές $A_1, A_2, \dots, A_n$, διάλεξε μία λ.χ. την A_1 και παραλείποντας την επόμενη A_2 , ένωσε την A_1 με τις $A_3, \dots, A_n$ σχηματίζοντας $(n-2)$ τρίγωνα. Το εμβαδόν του πολυγώνου είναι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων και κάθε ένα από τα τρίγωνα αυτά έχει εμβαδόν που δίδεται από το Θεώρημα 9.3.1 και είναι της μορφής $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)\rho^2$. Αθροίζοντας όλες τις γωνίες των διαφόρων αυτών τριγώνων παίρνουμε το άθροισμα $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, ενώ από τα $(n-2)$ το πλήθος τρίγωνα έχουμε το αφαιρετέο $(n-2)\pi$, ο.ε.δ.

Σχόλιο-2 Η ισότητα σφαιρικών πολυγώνων οριζομένων στην επιφάνεια μίας σφαίρας Σ ακτίνας ρ περιλαμβάνει την περίπτωση που τα δύο σχήματα είναι αντιδιαμετρικά, δηλαδή μπορούν να τοποθετηθούν έτσι ώστε το ένα να ταυτισθεί με το αντιδιαμετρικό του άλλου. Με αυτήν την έννοια αναφέρονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.3.1 τα $AB\Gamma$ και $A^*B^*\Gamma^*$ ως ίσα.

Άσκηση 9.3.1 Δείξε ότι το εμβαδόν ϵ ενός σφαιρικού ισοπλεύρου τριγώνου σφαίρας ακτίνας ρ και η γωνία του a συνδέονται με τον τύπο

$$a = \frac{\epsilon}{3\rho^2} + \frac{\pi}{3}.$$

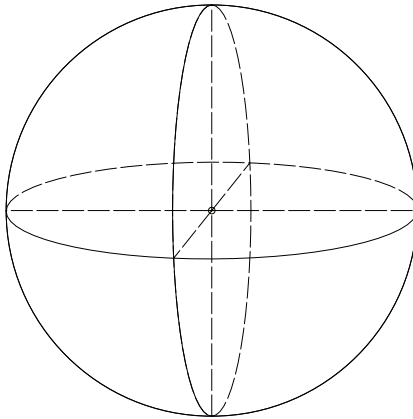
Συμπεράνε ότι η γωνία του σφαιρικού ισοπλεύρου είναι πάντοτε μεγαλύτερη των 60 μοιρών. (Δες και την Άσκηση 8.14.5)

9.4 Χαρακτηριστική του Euler

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μία εφαρμογή του τύπου του εμβαδού των σφαιρικών πολυγώνων συνδεδεμένη με πλακοστρώσεις της σφαίρας. Μία **Πλακόστρωση** της σφαίρας είναι μία πλήρης κάλυψη της με πλακάκια, δηλαδή κυρτά σφαιρικά πολύγωνα. Όπως τα αληθινά πλακάκια, απαιτούμε και εδώ να μην αλληλοκαλύπτονται και επιπλέον να έχουν κοινές κορυφές. Το τελευταίο σημαίνει ότι αν δύο πλακάκια είναι γειτονικά, τότε θα έχουν κοινή ή ολόκληρη ακμή ή κάποια κορυφή. Το θεώρημα του Euler λέει ότι σε μία τέτοια κάλυψη το πλήθος των πλακακιών, το συνολικό πλήθος των ακμών και το συνολικό πλήθος των κορυφών είναι αριθμοί συνδεδεμένοι μεταξύ τους.

Θεώρημα 9.4.1 Σε κάθε πλακόστρωση της σφαίρας με E το πλήθος πλακάκια που έχουν συνολικά A ακμές και συνολικά K κορυφές ισχύει

$$K + E = A + 2.$$



Σχήμα 719: Πλακόστρωση της σφαίρας με οκτώ ίσα πλακάκια

Απόδειξη: Το σχήμα δείχνει μία απλή περίπτωση πλακόστρωσης της σφαίρας με 8 ίσα μεταξύ τους τριγωνικά πλακάκια που είναι τρισσορθογώνια (έχουν και τις τρεις γωνίες τους ορθές). Αντιστοιχούν στον τεμαχισμό της σφαίρας σε 8 κομμάτια από τρία επίπεδα που είναι κάθετα ανά δύο και διέρχονται, και τα τρία, από το κέντρο της. Έχουμε λοιπόν $E = 8$, $K = 6$ και $A = 12$. Ας δούμε τώρα την γενική απόδειξη. Γράφουμε το εμβαδόν της σφαίρας $4\pi\rho^2$ σαν άθροισμα των εμβαδών των πλακακιών

$$4\pi\rho^2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_E.$$

Κάθε πλακάκι, δηλαδή κυρτό σφαιρικό πολύγωνο, έχει εμβαδόν που εκφράζεται με τις γωνίες του και το πλήθος των πλευρών του

$$\epsilon_\nu = ((\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\kappa) - (\kappa - 2)\pi)\rho^2.$$

Και το συνολικό εμβαδόν θα είναι ένα άθροισμα τέτοιων αθροισμάτων

$$4\pi\rho^2 = (\Sigma(\alpha) - \Sigma(\kappa\pi) + E(2\pi))\rho^2 \Leftrightarrow (2\pi)(2 - E) = \Sigma(\alpha) - \pi\Sigma(\kappa).$$

Οι δύο όροι δεξιά παριστάνουν το άθροισμα όλων των γωνιών όλων των πλακακιών ο πρώτος ($\Sigma(\alpha)$) και το άθροισμα όλων των αριθμών κ που δίνουν το πλήθος των πλευρών του πλακακιού ο δεύτερος ($\Sigma(\kappa)$).

Σκεφτόμαστε όλες τις γωνίες όλων των πλακακιών και τις χωρίζουμε σε ομάδες. Στην ίδια ομάδα βάζουμε όλες τις γωνίες από διάφορα πλακάκια που συντρέχουν στην ίδια κορυφή. Το άθροισμα των γωνιών μιάς ομάδας θα είναι 2π , αφού όλες μαζί θα καλύπτουν πλήρως την περιοχή γύρω από την εν λόγω κορυφή. Έχουμε K κορυφές, συνεπώς το άθροισμα $\Sigma(\alpha)$ όλων των γωνιών όλων των πλακακιών θα είναι $K(2\pi)$. Το άθροισμα $\Sigma(\kappa)$ όλων των αριθμών κ που εκφράζουν το πλήθος των πλευρών κάθε πλακακιού θα είναι $2A$, δηλαδή το διπλάσιο του πλήθους των ακμών. Τούτο διότι κάθε ακμή συνορεύει με δύο ακριβώς πλακάκια, συνεπώς θα μετρηθεί δύο φορές στο παραπάνω άθροισμα. Συνεπώς ο τελευταίος τύπος γίνεται

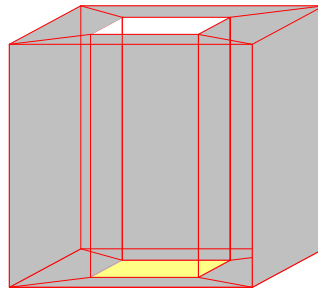
$$(2\pi)(2 - E) = \Sigma(\alpha) - \pi\Sigma(\kappa) = (2\pi)K - \pi(2A) \Leftrightarrow 2 - E = K - A,$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Το θεώρημα του Euler μεταφέρεται σε μιά ανάλογη ιδιότητα για κυρτά πολύεδρα. Η ιδέα είναι να πάρουμε ένα σημείο O στο εσωτερικό του πολυέδρου και να προβάλλουμε το πολυέδρο ακτινικά από το O στην επιφάνεια μιάς μεγάλης σφαίρας που το περιέχει εξ ολοκλήρου. Τότε οι έδρες του πολυέδρου προβάλλονται σε σφαιρικά πολύγωνα τα οποία συνολικά δίνουν μία πλακόστρωση της σφαίρας. Έτσι αν E είναι το πλήθος των εδρών του πολυέδρου, A το πλήθος των ακμών του και K το πλήθος των κορυφών του, προκύπτει μία πλακόστρωση της περιβάλλουσας σφαίρας με αυτά τα στοιχεία για τα πλακάκια της. Εφαρμόζοντας συνεπώς το θεώρημα του Euler έχουμε το

Θεώρημα 9.4.2 Για κάθε κυρτό πολυέδρο με E το πλήθος έδρες, A το πλήθος ακμές και K το πλήθος κορυφές ισχύει

$$K + E = A + 2.$$



Σχήμα 720: Κύβος με μία τρύπα

Για κάθε πολυέδρο Π , κυρτό ή μη, ο αριθμός $\chi(\Pi) = E - A + K$ ονομάζεται **Χαρακτηριστική του Euler** του πολυέδρου. Το προηγούμενο θεώρημα αποφαίνεται ότι για κυρτά πολυέδρα η χαρακτηριστική είναι 2. Αποδεικνύεται ότι για κάθε πολυέδρο η χαρακτηριστική αυτή είναι της μορφής $2-2\gamma$, όπου γ το λεγόμενο *Γένος* του πολυέδρου, που δίνει το πλήθος των τρυπών αυτού. Έτσι στο πολυέδρο της προηγούμενης εικόνας, που είναι ένας κύβος με μία τρύπα μεταξύ δύο απέναντι εδρών του, έχουμε $E = 4+4+4+4 = 16$ έδρες, $A = 12+12+4+4 = 32$ ακμές και $K = 8+8 = 16$ κορυφές. Η χαρακτηριστική λοιπόν $\chi(\Pi) = 0$.

9.5 Όγκοι

Ο Όγκος του πολυέδρου Π είναι ένας αριθμός $o(\Sigma)$ που σχετίζεται με το περιεχόμενο, το μέγεθος του χώρου που περικλείει το Π . Κατ' αναλογία προς τα επίπεδα εμβαδά ορίζεται μέσω τεσσάρων χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του.

Ιδιότητα 9.5.1 Δύο ίσα πολύεδρα έχουν ίσους όγκους.

Ιδιότητα 9.5.2 Ένα πολύεδρο Π που συντίθεται από άλλα, πεπερασμένα το πλήθος, πολύεδρα $\Pi, \Pi', \Pi'', \dots$ που δεν επικαλύπτονται έχει όγκο το άθροισμα των όγκων των πολυέδρων

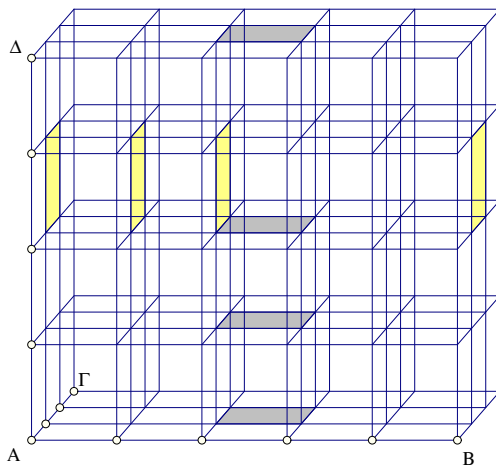
$$o(\Pi) = o(\Pi') + o(\Pi'') + \dots$$

Ιδιότητα 9.5.3 Ένα πολύεδρο Π που περιέχεται μέσα σε ένα άλλο Π' έχει όγκο

$$o(\Pi) < o(\Pi').$$

Ιδιότητα 9.5.4 Ο όγκος του κύβου με πλευρά την μονάδα μήκους είναι ένα.

Από τα αξιώματα συμπεραίνουμε αμέσως τον όγκο των ορθογωνίων παραλληλεπίπεδων. Η διαδικασία της απόδειξης του γνωστού τύπου, βάσει των ιδιοτήτων που εκφράζουν τα αξιώματα, είναι η ίδια ακριβώς με αυτήν της απόδειξης του τύπου για το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (Παράγραφος 3.2).



Σχήμα 721: Διαίρεση κύβου σε μνξ παραλληλεπίπεδα

Λήμμα 9.5.1 Διαιρούμε τις πλευρές του μοναδιαίου (πλευράς μήκους 1) κύβου $AB, A\Gamma, A\Delta$ αντίστοιχα σε μ ίσα μέρη, σε ν ίσα μέρη και σε ξ ίσα μέρη και φέρνουμε από τα διαιρούμενα σημεία παράλληλα επίπεδα προς το επίπεδο των άλλων πλευρών. Σχηματίζονται μνξ παραλληλεπίπεδα έκαστον των οποίων έχει εμβαδόν $\frac{1}{\mu\nu\xi}$.

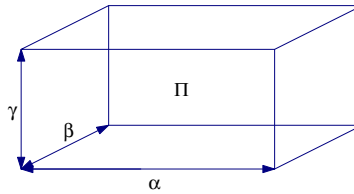
Απόδειξη: Προφανώς προκύπτουν μνξ ίσα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που κατά το αξίωμα 9.5.1 θα έχουν τον ίδιο όγκο O . Κατά το αξίωμα 9.5.2 ο όγκος του κύβου που είναι 1 (Ιδιότητα 9.5.4) θα είναι το άθροισμα των όγκων $1 = \mu\nu\xi O$, ο.ε.δ.

Λήμμα 9.5.2 Ο όγκος $o(\Sigma)$ ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου Σ με πλευρές AB , AG , AD που έχουν μήκος ρητούς αριθμούς ισούται με το γινόμενο των μηκών των πλευρών $o(\Sigma) = |AB||AG||AD|$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι ρητοί

$$|AB| = \frac{\alpha}{\beta}, \quad |AG| = \frac{\gamma}{\delta}, \quad |AD| = \frac{\epsilon}{\zeta}$$

είναι ανάγωγοι και διαιρούμε τον μοναδιαίο κύβο, όπως στο προηγούμενο λήμμα, σε $\beta\delta\zeta$ ίσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έκαστον των οποίων έχει όγκο $\frac{1}{\beta\delta\zeta}$. Εξ υποθέσεως η πλευρά AB διαιρείται σε α το πλήθος ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{\beta}$, η AG σε γ το πλήθος ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{\delta}$ και η AD σε ϵ το πλήθος ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{\zeta}$. Φέρνοντας από τα σημεία διαίρεσης παράλληλα επίπεδα προς τα επίπεδα των άλλων ακμών διαιρούμε το παραλληλεπίπεδο σε (αγε) το πλήθος ίσα παραλληλεπίπεδα έκαστον των οποίων έχει όγκο $\frac{1}{\beta\delta\zeta}$. Το άθροισμα των όγκων αυτών των παραλληλεπιπέδων ισούται με τον όγκο του αρχικού παραλληλεπιπέδου (Ιδιότητα 9.5.2) και είναι $\frac{\alpha\gamma\epsilon}{\beta\delta\zeta}$, ο.ε.δ.



Σχήμα 722: Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $o(\Pi) = \alpha\beta\gamma$

Θεώρημα 9.5.1 Ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου Π με μήκη ακμών α , β και γ είναι

$$o(\Pi) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma.$$

Απόδειξη: Όπως και στα εμβαδά (Παράγραφος 3.2), εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.2.3 στους αριθμούς α, β και γ και έναν αρκετά μεγάλο ακέραιο θετικό αριθμό ν . Κατά το λήμμα λοιπόν θα υπάρχουν ρ , σ και τ έτσι ώστε να ισχύει

$$\left| \alpha - \frac{\rho}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu}, \quad \left| \beta - \frac{\sigma}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu}, \quad \left| \gamma - \frac{\tau}{\nu} \right| < \frac{1}{\nu}.$$

Απ' αυτές έπεται ότι το αρχικό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Π περιέχει στο εσωτερικό του το Π_1 με μήκη πλευρών $\frac{\rho}{\nu}$, $\frac{\sigma}{\nu}$, $\frac{\tau}{\nu}$, και περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Π_2 με μήκη πλευρών $\frac{\rho+1}{\nu}$, $\frac{\sigma+1}{\nu}$, $\frac{\tau+1}{\nu}$. Έπεται ότι τόσο ο όγκος $o(\Pi)$, όσο και το γινόμενο $(\alpha\beta\gamma)$ θα ικανοποιούν τις ίδιες ανισότητες

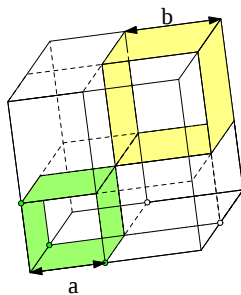
$$\frac{\rho}{\nu} \frac{\sigma}{\nu} \frac{\tau}{\nu} \leq o(\Pi) \leq \frac{\rho+1}{\nu} \frac{\sigma+1}{\nu} \frac{\tau+1}{\nu}, \quad \frac{\rho}{\nu} \frac{\sigma}{\nu} \frac{\tau}{\nu} \leq \alpha\beta\gamma \leq \frac{\rho+1}{\nu} \frac{\sigma+1}{\nu} \frac{\tau+1}{\nu}.$$

Επομένως η διαφορά τους θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$\begin{aligned}
 |o(\Pi) - \alpha\beta\gamma| &\leq \frac{\rho+1}{\nu} \frac{\sigma+1}{\nu} \frac{\tau+1}{\nu} - \frac{\rho}{\nu} \frac{\sigma}{\nu} \frac{\tau}{\nu} \\
 &= \frac{\rho\sigma + \sigma\tau + \tau\rho + \rho + \sigma + \tau + 1}{\nu^3} \\
 &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{\rho\sigma}{\nu} + \frac{\sigma\tau}{\nu} + \frac{\tau\rho}{\nu} \right) + \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\rho}{\nu} + \frac{\sigma}{\nu} + \frac{\tau}{\nu} \right) + \frac{1}{\nu^3} \\
 &\leq \frac{1}{\nu} (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \frac{1}{\nu^2} (\alpha + \beta + \gamma) + \frac{1}{\nu^3} \\
 &\leq \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1}{\nu}.
 \end{aligned}$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι η σταθερή ποσότητα $|o(\Pi) - \alpha\beta\gamma|$ δεν μπορεί να είναι θετική, διότι είναι μικρότερη ενός αριθμού που μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός θέλουμε, αρκεί να εκλέξουμε αρκετά μεγάλο ν . Συνεπώς η ποσότητα αυτή θα είναι μηδέν, ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.5.1 Ο όγκος του κύβου ακμής α ισούται με α^3 .



Σχήμα 723: Ταυτότητα για κύβους

Άσκηση 9.5.1 Δείξε με την βοήθεια ενός κύβου ακμής $\alpha + \beta$ ότι ισχύει η ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.$$

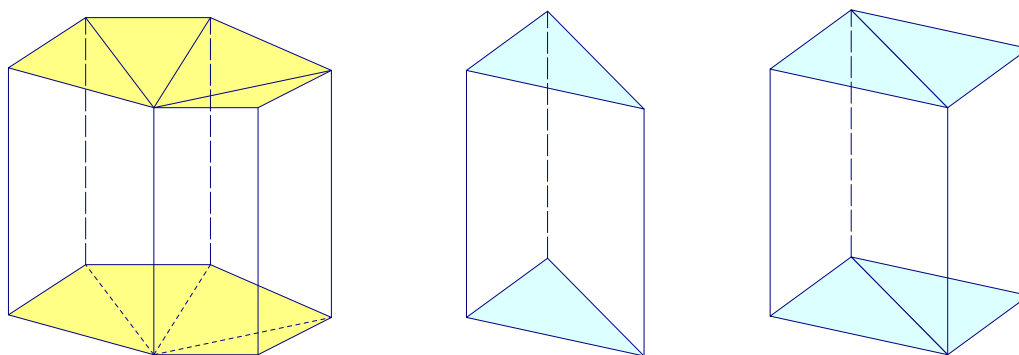
Άσκηση 9.5.2 Δείξε με την βοήθεια του προηγούμενου σχήματος και της ταυτότητας $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ ότι ισχύει η ταυτότητα

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3.$$

9.6 Όγκοι πρισμάτων

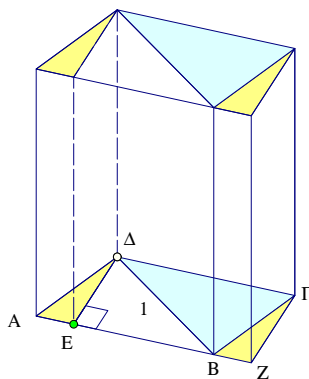
Με την βοήθεια του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και περαιτέρω χρήση των βασικών ιδιοτήτων των όγκων (Παράγραφος 9.5) μπορούμε να βρούμε τον όγκο των ορθών πρισμάτων και κατόπιν και των πλαγίων πρισμάτων.

Πρόταση 9.6.1 Ο όγκος ενός ορθού πρίσματος Π ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος.



Σχήμα 724: Όγκος ορθού πρίσματος = εμβαδόν βάσης $\times$ ύψος

Απόδειξη: Η απόδειξη για το γενικό πρίσμα ανάγεται στο τριγωνικό πρίσμα. Φέρνοντας τις διαγωνίους από μία κορυφή της βάσης του πρίσματος το χωρίζουμε σε τριγωνικά πρίσματα. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για τριγωνικό πρίσμα ο όγκος δίδεται από το γινόμενο του εμβαδού του τριγώνου επί το ύψος. Για να δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πρίσμα με βάση ένα παραλληλόγραμμο ισχύει η αντίστοιχη ιδιότητα, αφού κάθε τριγωνικό πρίσμα είναι το μισό ενός τέτοιου πρίσματος. Όμως το πρίσμα με βάση το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει τον ίδιο όγκο και το ίδιο εμβαδόν βάσης με το άλλο πρίσμα που παράγεται με τον γνωστό τρόπο φέρνοντας λ.χ. από το Δ την κάθετο ΔE και σχηματίζοντας το

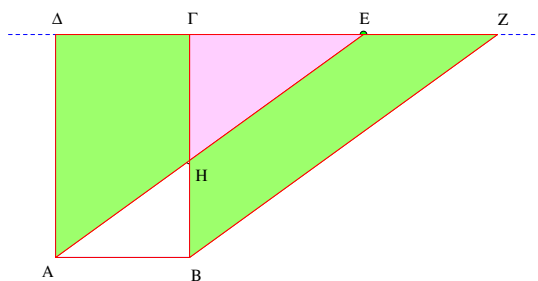


Σχήμα 725: Όγκος τριγωνικού πρίσματος = εμβαδόν βάσης $\times$ ύψος

ορθογώνιο $\Delta EZ\Gamma$. Ο όγκος του πρίσματος πάνω από το τρίγωνο AED μεταφέρεται σε αυτόν του πρίσματος πάνω από το ίσο τρίγωνο $BZ\Gamma$, επομένως ο όγκος του πρίσματος με βάση το $AB\Gamma\Delta$ είναι ό ίδιος με τον όγκο του πρίσματος με βάση το ορθογώνιο $\Delta EZ\Gamma$ και γι' αυτό

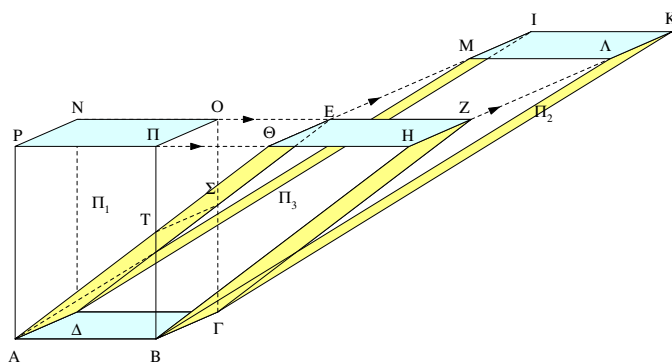
ξέρουμε ήδη ότι ο όγκος του ισούται με το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος, ο.ε.δ. Μιά ανάλογη αναγωγή του υπολογισμού του όγκου μπορεί να γίνει και για πλάγια πρίσματα. Και σ' αυτά μπορούμε να διαιρέσουμε την πολυγωνική βάση σε τρίγωνα, τα τρίγωνα να διπλασιάσουμε σε παραλληλόγραμμα και τα παραλληλόγραμμα να ανάγουμε σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Αυτός ο συλλογισμός δείχνει ότι για να δείξουμε τον τύπο του όγκου για όλα τα πλάγια πρίσματα, αρκεί να το δείξουμε για τα πρίσματα με βάση ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Γι' αυτά όμως ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.6.2 Το πλάγιο πρίσμα με βάση το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και το ορθό με την ίδια βάση και ίδιο ύψος έχουν τον ίδιο όγκο.



Σχήμα 726: Ισοεμβαδικά παραλληλόγραμμα

Απόδειξη: Η απόδειξη χρησιμοποιεί το τέχνασμα που χρησιμοποιούμε και στα εμβαδά. Συγκρίνουμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου και ενός παραλληλογράμμου με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος χρησιμοποιώντας την ισότητα των τριγώνων (σχήμα-726) $\triangle ADE$ και $\triangle BGZ$, από την οποία προκύπτει η ισότητα των εμβαδών των τετραπλεύρων $AH\Gamma\Delta$ και $BHEZ$. Κάτι ανάλογο κάνουμε και για τους όγκους. Αν $\Pi_1 = AB\Gamma\Delta$ -NOΠΡ είναι το ορθό πρίσμα με βάση το



Σχήμα 727: Πρίσματα ίσου όγκου

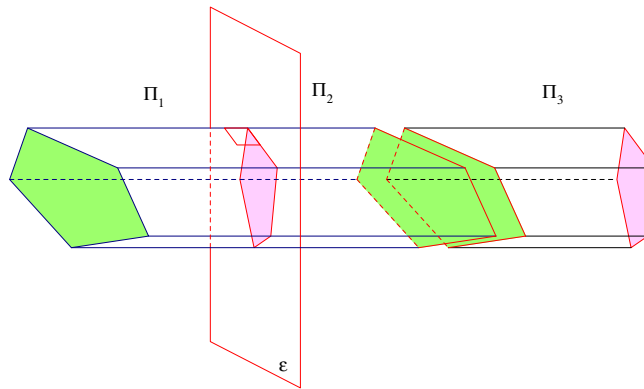
ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και $\Pi_2 = AB\Gamma\Delta$ -IKΛΜ το πλάγιο πρίσμα με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. Τότε λόγω της παραλληλίας των πλευρών (PN,MI) και (NO,IK) ορίζεται ένα είδος ενδιάμεσου πρίσματος $\Pi_3 = AB\Gamma\Delta$ -EZHΘ με την ίδια επίσης βάση. Τα Π_1 και Π_3 έχουν τον ίδιο όγκο, διότι το τριγωνικό πρίσμα με βάση $\triangle A\Theta P$ είναι ίσο με το τριγωνικό πρίσμα με βάση $\triangle B\eta\P$, επομένως αν αφαιρέσουμε από τα δύο ίσα πρίσματα το κοινό μέρος τους που είναι το τριγωνικό πρίσμα $\triangle\Theta\P$ τότε τα πρίσματα που απομένουν με βάσεις

τα τραπέζια ΠΡΑΤ και ΘΤΒΗ έχουν τον ίδιο όγκο. Προσθέτοντας σε αυτά και το τριγωνικό πρίσμα με βάση ΤΒΑ έχουμε την ισότητα των όγκων των Π_1 και Π_3 . Ανάλογα προκύπτει και η ισότητα των όγκων των Π_3 και Π_2 και συνολικά η ισότητα των όγκων των Π_1 και Π_2 , ο.ε.δ.

Πρόταση 9.6.3 Ο όγκος πρίσματος (ορθού ή πλάγιου) ισούται με το εμβαδόν της βάσης του επί το ύψος του.

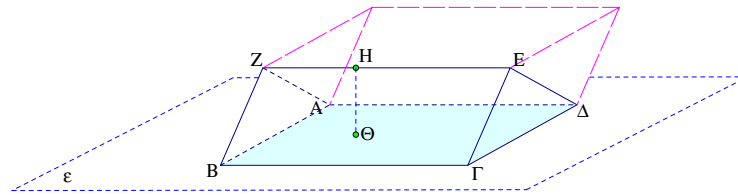
Απόδειξη: Έπεται από τις προηγηθείσες προτάσεις και αναλύσεις, ο.ε.δ.

Πρόταση 9.6.4 Ο όγκος πρίσματος (ορθού ή πλάγιου) ισούται με το εμβαδόν της κάθετης τομής του επί το μήκος της γενέτειράς του.



Σχήμα 728: Χειρουργική πρισματών

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε είδος χειρουργικής του πρίσματος. Το κόβουμε με κάθετο στην γενέτειρά του επίπεδο ϵ και το χωρίζουμε έτσι σε δύο κομμάτια Π_1 και Π_2 . Κατόπιν μεταφέρουμε το Π_1 στην ίδια μεριά με το Π_2 και το προσαρμόζουμε έτσι να συμπίσουν οι παράλληλες έδρες του αρχικού πρίσματος. Προκύπτει ένα ορθό πρίσμα με βάση την κάθετη τομή του αρχικού και μήκος γενέτειρας το ίδιο με το μήκος του αρχικού πρίσματος. Η απόδειξη ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας την Πρόταση 9.6.1, ο.ε.δ.

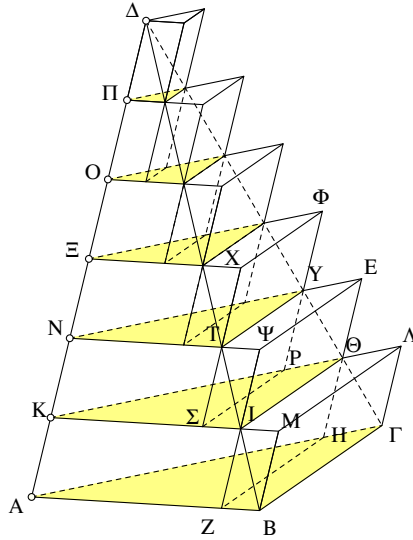


Σχήμα 729: Όγκος τριγωνικού πρίσματος

Άσκηση 9.6.1 Δείξε ότι ο όγκος ενός τριγωνικού πρίσματος ισούται με το γινόμενο $\frac{1}{2}\epsilon(AB\Gamma\Delta)|H\Theta|$, όπου $\epsilon(AB\Gamma\Delta)$ το εμβαδόν μιάς έδρας του πρίσματος και $|H\Theta|$ η απόσταση αυτής από την απέναντι ακμή.

9.7 Όγκοι πυραμίδων

Η απλούστερη πυραμίδα είναι αυτή με την τριγωνική βάση. Και σ' αυτήν ακόμη, όμως, συναντάμε δυσκολίες στην προσπάθεια να εκφράσουμε τον όγκο της με την βοήθεια ενός τύπου. Το επόμενο σχήμα δείχνει πως χρησιμοποιούμε πρίσματα (των οποίων γνωρίζουμε να μετράμε τον όγκο) για να προσεγγίσουμε τον όγκο μίας πυραμίδας.



Σχήμα 730: Προσέγγιση πυραμίδας με πρίσματα

Πρόταση 9.7.1 Έστω τριγωνική πυραμίδα Π με βάση $AB\Gamma$ εμβαδού ϵ και ύψος ν . Τότε για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχουν στερεά Π_1 και Π_2 που είναι ενώσεις πρισμάτων και οι όγκοι τους $o(\Pi_1)$, $o(\Pi_2)$ καθώς και ο όγκος της πυραμίδας $o(\Pi)$ ικανοποιούν την

$$o(\Pi_1) < o(\Pi) < o(\Pi_2), \quad \text{και} \quad o(\Pi_2) - o(\Pi_1) = \frac{\epsilon \nu}{n}.$$

Απόδειξη: Διαιρέσε μία ακμή προς την κορυφή Δ της πυραμίδας λ.χ. την $A\Delta$ σε n ίσα τμήματα και φέρε παράλληλα επίπεδα προς την βάση. Από τα σημεία τομής αυτών των επιπέδων με τις άλλες ακμές φέρε παράλληλες προς την επιλεγείσα ακμή $A\Delta$. Σχηματίζονται πρίσματα με βάσεις τα παράλληλα αυτά επίπεδα εκ των οποίων ορισμένα είναι εξ ολοκλήρου μέσα στην πυραμίδα (όπως το $AZH\Theta IK$) και άλλα που περιλαμβάνουν μέρος της πυραμίδας στο εσωτερικό τους (όπως το $AB\Gamma AKM$). Τα περιεχόμενα στην πυραμίδα πρίσματα ονομάζω *εσωτερικά* και τα άλλα *εξωτερικά* πρίσματα. Το Π_1 είναι η ένωση των εσωτερικών πρισμάτων και το Π_2 είναι η ένωση των εξωτερικών πρισμάτων. Το Π_1 περιέχεται εξ ολοκλήρου στο Π και συνεπώς (Ιδιότητα 9.5.3) έχει

$$o(\Pi_1) < o(\Pi).$$

Το Π_2 περιέχει ολόκληρη την πυραμίδα στο εσωτερικό του και συνεπώς

$$o(\Pi) < o(\Pi_2).$$

Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι τα δύο σώματα αποτελούνται από ίσα πρίσματα πλὴν ενός, που είναι το κάτω-κάτω. Πράγματι κάθε πρίσμα που αποτελεί το Π_1 έχει ένα ίσο του που μετέχει

στην συγκρότηση του Π_2 . Για παράδειγμα (σχήμα-730), το εσωτερικό ΑΖΗΘΚΙ είναι ίσο με το εξωτερικό από πάνω του ΚΙΘΕΝΨ, το εσωτερικό ΚΣΡΥΝΤ είναι ίσο με το εξωτερικό από πάνω του ΝΤΥΦΞΧ κτλ.. Έπεται ότι η διαφορά των όγκων των δύο σωμάτων είναι ο όγκος του κάτω-κάτω πρίσματος με βάση το ΑΒΓ, συνεπώς $o(\Pi_2) - o(\Pi_1) = \frac{\epsilon\nu}{\nu}$, ο.ε.δ.

Μία άλλη κρίσιμη παρατήρηση αφορά στον λόγο δύο σωμάτων όπως το Π_1 που κατασκευάζονται για δύο διαφορετικές τριγωνικές πυραμίδες με το ίδιο ύψος. Ο λόγος των όγκων τους μεταφέρεται στον λόγο των εμβαδών των βάσεων τους.

Πρόταση 9.7.2 Έστω ότι για δοθέντα τριγωνικά πρίσματα $\Pi = AB\Gamma\Delta$ και $\Pi' = A'B'\Gamma'\Delta'$ με το ίδιο ύψος κατασκευάζονται τα αντίστοιχα σώματα Π_1, Π_2 και Π'_1, Π'_2 , όπως στην προηγούμενη πρόταση. Τότε οι λόγοι των όγκων

$$\frac{o(\Pi_1)}{o(\Pi'_1)} = \frac{o(\Pi_2)}{o(\Pi'_2)} = \frac{\epsilon(AB\Gamma)}{\epsilon(A'B'\Gamma')}.$$

Απόδειξη: Ας δούμε την απόδειξη για τον δεύτερο λόγο. Ο πρώτος αποδεικνύεται εξ ίσου εύκολα. Ο όγκος του Π_2 είναι το άθροισμα των όγκων των ν πρισματών που το συγκροτούν. Το πρώτο κάτω-κάτω έχει όγκο $o_1 = \epsilon \cdot \frac{\nu}{\nu}$, όπου $\epsilon = \epsilon(AB\Gamma)$ το εμβαδόν του ΑΒΓ και ν το (κοινό) ύψος των πυραμίδων. Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι το από πάνω πρίσμα έχει βάση που είναι όμοια προς το ΑΒΓ, έστω με λόγο κ . Ο όγκος του δεύτερου πρίσματος συνεπώς θα είναι $o_2 = (\kappa^2\epsilon) \cdot \frac{\nu}{\nu} = \kappa^2 o_1$. Ανάλογα $o_3 = \lambda^2 o_2 = \lambda^2 \kappa^2 o_1$ κτλ. Συνολικά προσθέτοντας τους ν όγκους των πρισματών έχουμε

$$o(\Pi_2) = o_1 + \dots + o_\nu = o_1 + \kappa^2 o_1 + \kappa^2 \lambda^2 o_1 + \dots = (1 + \kappa^2 + \kappa^2 \lambda^2 + \dots) o_1 = \mu \cdot o_1.$$

Το μ που παριστάνει το άθροισμα των συντελεστών ομοιότητας είναι ένας αριθμός που εξαρτάται μόνο από το ν και όχι το τρίγωνο της βάσης. Πράγματι, από την ομοιότητα των τριγώνων (σχήμα-730) ΔAB και $\Delta K\Sigma$ προκύπτει ότι

$$\kappa = \frac{|KI|}{|AB|} = \frac{|\Delta K|}{|\Delta A|} = \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

Ανάλογα προκύπτει ότι

$$\lambda = \frac{|NT|}{|KI|} = \frac{\nu - 2}{\nu - 1} \Rightarrow \lambda\kappa = \frac{\nu - 2}{\nu}.$$

Σκεπτόμενοι ανάλογα βρίσκουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \mu &= (1 + \kappa^2 + \kappa^2 \lambda^2 + \dots) \\ &= 1 + \left(\frac{\nu - 1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{\nu - 2}{\nu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\nu^2} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2), \end{aligned}$$

που δείχνει ότι ο μ εξαρτάται μόνον από το ν και όχι το ειδικό τρίγωνο. Παρεμπιπτόντως, αν και δεν μας χρειάζεται, εν τούτοις δεν βλάπτει να ξέρουμε ότι ([CR96, σ. 14])

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6} \Rightarrow \mu = \frac{(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6\nu}.$$

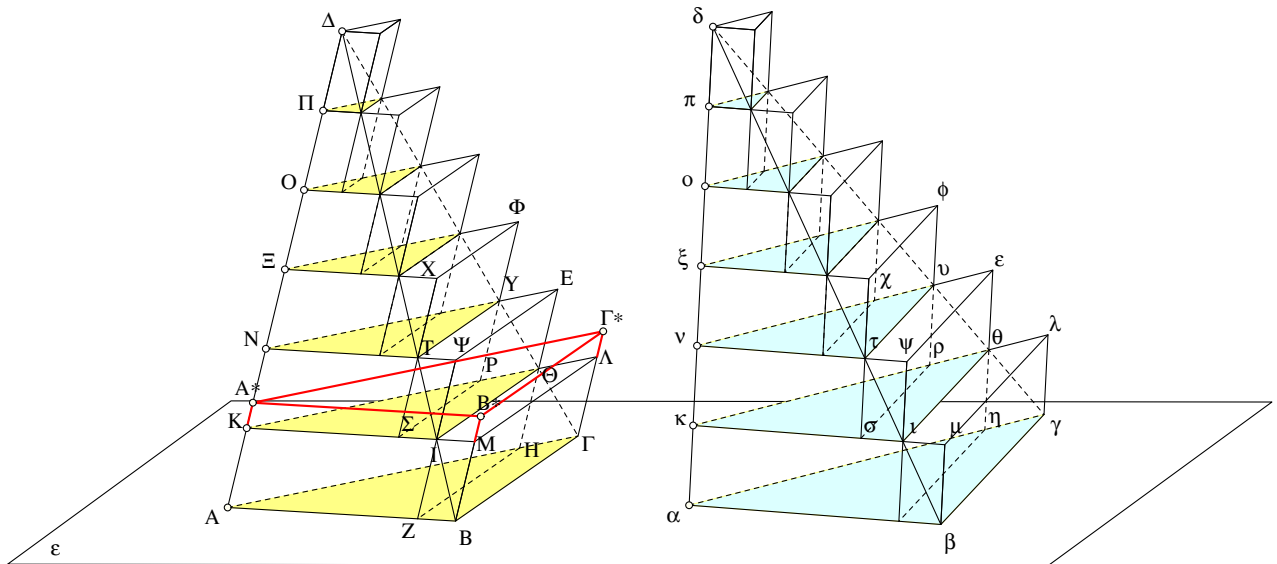
Επιστρέφοντας λοιπόν στην απόδειξη, οι λόγοι των όγκων των δύο σωμάτων θα είναι

$$\frac{o(\Pi_2)}{o(\Pi'_2)} = \frac{\mu \cdot o_1}{\mu \cdot o'_1} = \frac{o_1}{o'_1} = \frac{\epsilon \cdot \frac{\nu}{\nu}}{\epsilon' \cdot \frac{\nu}{\nu}} = \frac{\epsilon}{\epsilon'},$$

ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.7.1 Γιά δύο πρίσματα Π, Π' με βάσεις ίσων εμβαδών και ίσα ύψη ο όγκος των αντίστοιχων σωμάτων $o(\Pi_1) = o(\Pi'_1)$ και $o(\Pi_2) = o(\Pi'_2)$.

Θεώρημα 9.7.1 Δύο τριγωνικές πυραμίδες του ιδίου ύψους και ιδίου εμβαδού βάσης έχουν τον ίδιο όγκο.



Σχήμα 731: Σύγκριση πυραμίδων μέσω των προσεγγίσεων

Απόδειξη: Τοποθέτησε τις δύο πυραμίδες $AB\Gamma\Delta$ και $\alpha\beta\gamma\delta$ με την βάση τους στο ίδιο επίπεδο ϵ . Έστω ότι οι βάσεις τους έχουν το ίδιο εμβαδόν ϵ και ότι έχουν το ίδιο ύψος ν , αλλά η πρώτη $AB\Gamma\Delta$ έχει μεγαλύτερο όγκο: $o(AB\Gamma\Delta) > o(\alpha\beta\gamma\delta)$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Προς τούτο κατασκεύασε πρίσμα $\Pi_\omega = AB\Gamma\Delta - \alpha\beta\gamma\delta$ με βάση $AB\Gamma$ που έχει όγκο ίσο με την διαφορά $\omega = o(AB\Gamma\Delta) - o(\alpha\beta\gamma\delta)$. Κατόπιν κατασκεύασε για τα δύο πρίσματα τα σώματα Π_1, Π_2 της Πρότασης 9.7.1 για ακέραιο ν έτσι ώστε το $\frac{\nu}{\nu}$ να είναι μικρότερο του ύψους του πρίσματος Π_ω . Τότε και ο αντίστοιχος όγκος του βασικού πρίσματος θα είναι

$$o(AB\Gamma\Delta K M) < o(\Pi_\omega).$$

Από την άλλη μεριά η διαφορά των όγκων των δύο πυραμίδων θα είναι

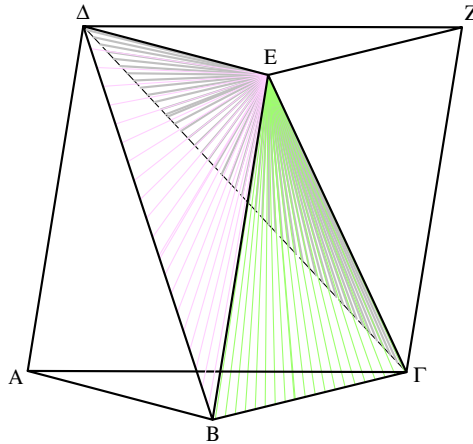
$$o(\Pi_\omega) = o(AB\Gamma\Delta) - o(\alpha\beta\gamma\delta) < o(\Pi_2) - o(\Pi'_1) = o(\Pi_2) - o(\Pi_1) = o(AB\Gamma\Delta K M).$$

Μιά ανισότητα που αντιφάσκει στην προηγούμενη. Ανάλογη αντίφαση παίρνουμε και από την υπόθεση ότι $o(AB\Gamma\Delta) < o(\alpha\beta\gamma\delta)$. Συνεπώς θα πρέπει $o(AB\Gamma\Delta) = o(\alpha\beta\gamma\delta)$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 9.7.2 Ο όγκος τριγωνικής πυραμίδας $AB\Gamma\Delta$ δίδεται από τον τύπο

$$o(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{3}\epsilon(AB\Gamma)v,$$

όπου $\epsilon(AB\Gamma)$ το εμβαδόν της βάσης της και v το ύψος της πυραμίδας.



Σχήμα 732: όγκος πυραμίδας $o(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{3}\epsilon(AB\Gamma)v$

Απόδειξη: Από τις κορυφές B και Γ της βάσης φέρε παράλληλες και ίσες προς την ακμή $A\Delta$ και σχημάτισε το τριγωνικό πρίσμα $AB\Gamma Z\Delta E$. Φέρε κατόπιν την διαγώνιο GE . Το πρίσμα που δημιουργείται χωρίζεται σε τρεις πυραμίδες: την αρχική $AB\Gamma\Delta$, την $B\Gamma\Delta E$ και την $\Gamma\Delta E Z$. Οι τρεις πυραμίδες αυτές έχουν τον ίδιο όγκο. Η $B\Gamma\Delta E$ και $\Gamma\Delta E Z$ με βάσεις τα ίσα τρίγωνα $B\Gamma E$ και $\Gamma E Z$ και κοινή κορυφή στο Δ έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος άρα τον ίδιο όγκο. Αλλά και η $\Delta E Z \Gamma$ έχει ίση βάση με την αρχική και ίσο ύψος. Αφού οι τρεις πυραμίδες έχουν τον ίδιο όγκο, κάθε μία τους θα είναι το $1/3$ του πρίσματος, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε στο τελευταίο σχήμα την θέση της πυραμίδας $B\Gamma\Delta E$ στο τριγωνικό πρίσμα. Οι απέναντι ακμές της $B\Gamma$ και ΔE είναι ασύμβατες και τα επίπεδα $AB\Gamma$ και $\Delta E Z$ είναι τα μοναδικά (Πρόταση 7.4.2) παράλληλα επίπεδα που περιέχουν αυτές τις ασύμβατες. Η κοινή κάθετος αυτών των δύο ασυμβάτων έχει μήκος την απόσταση των δύο επιπέδων δηλαδή το ύψος του πρίσματος $AB\Gamma\Delta E Z$. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 9.7.3 Ο όγκος της πυραμίδας με απέναντι ακμές $B\Gamma$ και ΔE ισούται με

$$\frac{1}{6}|B\Gamma||\Delta E|v\eta\mu(\phi),$$

όπου v το μήκος της κοινής καθέτου των (ασυμβάτων) $B\Gamma$ και ΔE και ϕ η γωνία μεταξύ των $B\Gamma$ και ΔE .

Πόρισμα 9.7.2 Δοθέντων δύο ασυμβάτων ευθειών a και β καθώς και ευθυγράμμων τμημάτων $B\Gamma$ και ΔE σταθερών μηκών και ολισθενόντων αντίστοιχα επ' αυτών των ευθειών, το τετράεδρο $B\Gamma\Delta E$ έχει όγκο ανεξάρτητο της θέσης τους επί των a και β .

Σχόλιο-2 Η παράγραφος αυτή, βασισμένη στην ανάλογη του Legendre [Leg37, σ. 134]), έχει ενδιαφέρον εκτός των άλλων διότι χρησιμοποιεί όλα τα χαρακτηριστικά του ορίου χωρίς να καταφεύγει στον αναλυτικό προσδιορισμό του. Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε όρια η απόδειξη του τύπου του όγκου της πυραμίδας θα είχε τελειώσει σχεδόν αμέσως μετά την πρώτη πρόταση της παραγράφου. Πράγματι η Πρόταση 9.7.1 φανερώνει ότι ο όγκος του σώματος Π_2 (όπως και του Π_1) είναι μιά προσέγγιση του όγκου της πυραμίδας με σφάλμα μικρότερο του $\frac{\epsilon\nu}{\nu}$. Άρα αυξάνοντας το ν και περνώντας στο όριο θα έχουμε τον ζητούμενο τύπο. Ο υπολογισμός στην Πρόταση 9.7.2 δείχνει κατόπιν ότι ο όγκος του Π_2 είναι ίσος με

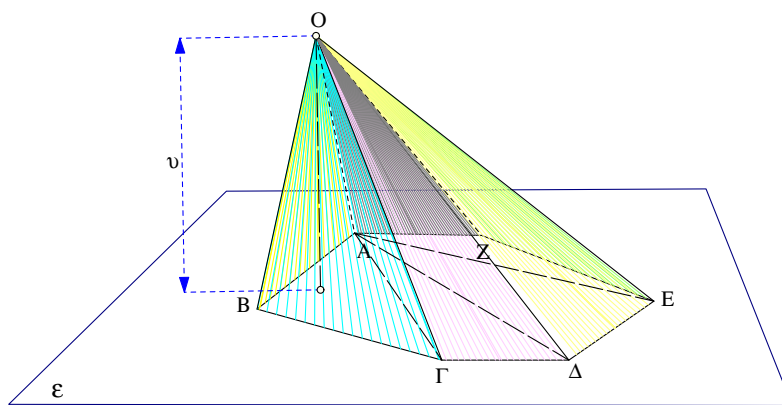
$$o(\Pi_2) = \frac{\mu\epsilon\nu}{\nu} = \frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2}\epsilon\nu.$$

Το συμπέρασμα προκύπτει παίρνοντας το όριο του κλάσματος

$$\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu^2} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\left(2 + \frac{1}{\nu}\right) \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι στην ουσία μεταφορά της μεθόδου της εξάντλησης του Αρχιμήδη στην περίπτωση των απλών αυτών στερεών του χώρου.

Θεώρημα 9.7.3 Ο όγκος μιάς πυραμίδας είναι το ένα τρίτο του γινομένου του εμβαδού της βάσης της επί το ύψος της.

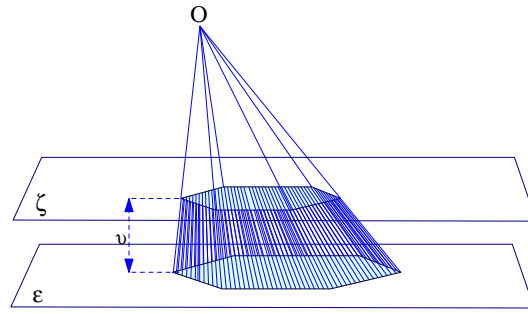


Σχήμα 733: Όγκος πυραμίδας

Απόδειξη: Από μιά κορυφή λ.χ. την A της βάσης ABΓΔ... της πυραμίδας φέρε όλες τις διαγώνιες προς τις άλλες κορυφές. Το πρίσμα χωρίζεται σε τριγωνικά πρίσματα με το ίδιο ύψος και το συμπέρασμα βγαίνει αθροίζοντας τους όγκους των τριγωνικών πυραμίδων βάσει του προηγούμενου θεωρήματος, ο.ε.δ.

Πόρισμα 9.7.3 Ο όγκος κόλουρης πυραμίδας ύψους ν με μεγάλη βάση εμβαδού ϵ_1 και μικρή βάση εμβαδού ϵ_2 είναι ίσος με

$$o = \frac{1}{3}\nu \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}).$$



Σχήμα 734: Όγκος κόλουρης πυραμίδας

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα, θεωρώντας την κόλουρη πυραμίδα ως διαφορά (ως προς τον όγκο) των δύο πυραμίδων με βάσεις τις δύο βάσεις της κόλουρης πυραμίδας. Έτσι, αν η είναι το ύψος της πυραμίδας με την μικρή βάση, ο ζητούμενος όγκος θα είναι

$$o = \frac{1}{3}(\eta + v)\epsilon_1 - \frac{1}{3}(\eta\epsilon_2) = \frac{1}{3}(v\epsilon_1 + \eta(\epsilon_1 - \epsilon_2)).$$

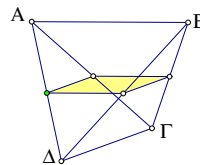
Όμως τα πολύγωνα στα δύο παράλληλα επίπεδα είναι όμοια (Πόρισμα 7.7.1), συνεπώς ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των πλευρών τους, που με την σειρά του ισούται με τον λόγο των τετραγώνων

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\eta^2}{(v + \eta)^2} \Rightarrow \eta = \frac{v\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}.$$

Αντικαθιστώντας το η στον προηγούμενο τύπο και κάνοντας πράξεις προκύπτει το ζητούμενο, ο.ε.δ.

Άσκηση 9.7.1 Δείξε ότι η τριγωνική πυραμίδα με που έχει μιά τρισσορθογώνιο τρίεδρο (κορυφή της οποίας και οι τρεις έδρες είναι ορθογώνια τρίγωνα) με ακμές μήκους δ έχει όγκο $\frac{\delta^3}{6}$.

Άσκηση 9.7.2 Δείξε ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μιάς πυραμίδας είναι μεγαλύτερο του εμβαδού της βάσης της.

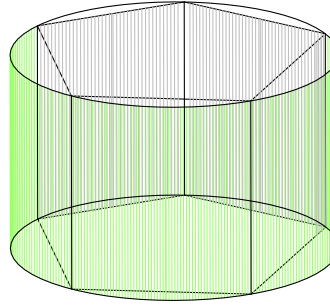


Σχήμα 735: Τομή τριγωνικής πυραμίδας κατά παραλληλόγραμμο

Άσκηση 9.7.3 Δείξε ότι ένα επίπεδο παράλληλο προς δύο απέναντι ακμές AB και $\Gamma\Delta$ τετραέδρου το τέμνει κατά παραλληλόγραμμο. Δείξε επίσης ότι υπάρχει ένα ακριβώς τέτοιο επίπεδο που τέμνει το τετράεδρο κατά ρόμβο. Πότε ο ρόμβος αυτός είναι τετράγωνο;

9.8 Όγκοι κυλίνδρων

Ο όγκος ενός κυλίνδρου δεν μπορεί να μετρηθεί άμεσα και σύμφωνα με τις βασικές ιδιότητες του όγκου (Παράγραφος 9.5), αφού αυτές καθορίζουν πλήρως τον όγκο, αλλά μόνο για πολύεδρα. Έτσι καταφεύγουμε, για μία ακόμη φορά, στα όρια και προσεγγίζουμε τον κύλινδρο με εγγεγραμμένα σε αυτόν πρίσματα του ίδιου ύψους $υ$ με αυτό του κυλίνδρου. Περιοριζόμαστε σε κανονικά πρίσματα εγγεγραμμένα στον κύλινδρο και ορίζουμε τον **Όγκο του κυλίνδρου** ως όριο των όγκων των κανονικών εγγεγραμμένων στον κύλινδρο πρισμάτων καθώς αυξάνονται οι έδρες τους.



Σχήμα 736: Όγκος κυλίνδρου

Πρόταση 9.8.1 Ο όγκος κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του.

Απόδειξη: Για τον υπολογισμό του εμβαδού χρησιμοποιούμε την παλιά καλή γνωστή ακολουθία κανονικών πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ (6.2) που εγγράφονται στην βάση του κυλίνδρου, αρχίζοντας από το εγγεγραμμένο τετράγωνο (Π_1) και διπλασιάζοντας σε κάθε βήμα το πλήθος των κορυφών. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς μας (Λήμμα 6.5.1), το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στον κύκλο ακτίνας ρ πολυγώνου με μ το πλήθος πλευρές είναι

$$\mu \left(\frac{\rho^2}{2} \eta \mu \left(\frac{2\pi}{\mu} \right) \right).$$

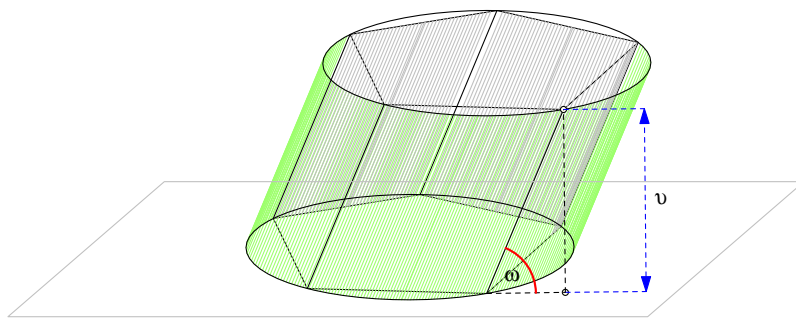
Συνάγεται (Πρόταση 9.6.1) ότι ο όγκος του πρίσματος πάνω από αυτό το πολύγωνο με ύψος $υ$ είναι

$$υ \mu \left(\frac{\rho^2}{2} \eta \mu \left(\frac{2\pi}{\mu} \right) \right).$$

Επειδή το ύψος παραμένει σταθερό συνάγεται ότι το όριο της προηγούμενης παράστασης καθώς αυξάνεται το μ ($= 2^n$) θα είναι το γινόμενο του ύψους επί το εμβαδόν του κύκλου, ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η απόδειξη ισχύει και όταν οι γενέτειρες είναι όχι κάθετες στο επίπεδο του κύκλου της βάσης αλλά πλάγιες. Το μόνο που αλλάζει σε αυτήν την περίπτωση είναι το ύψος του κυλίνδρου, που δεν ταυτίζεται πλέον με το μήκος της γενέτειρας, αλλά δίδεται από τον τύπο

$$υ = \delta \eta \mu(\omega),$$



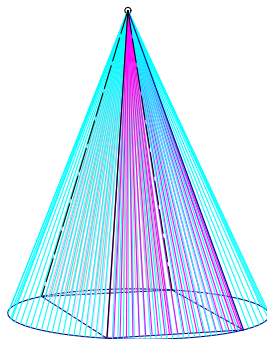
Σχήμα 737: Όγκος πλάγιου κυκλικού κυλίνδρου

όπου δ το μήκος της γενέτειρας του πλάγιου κυλίνδρου και ω η γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα με το επίπεδο του κύκλου της βάσης. Έτσι η προηγούμενη πρόταση, όπως διατυπώθηκε, ισχύει τόσο για ορθούς κυκλικούς κυλίνδρους όσο και για πλάγιους.

Σχόλιο-2 Η κάθετη τομή (με επίπεδο ορθογώνιο στις γενέτειρες) ενός πλάγιου κυλίνδρου με βάση κύκλο δεν είναι κύκλος (είναι έλλειψη).

9.9 Όγκοι κώνων

Όπως στον κύλινδρο έτσι και στον κώνο ο υπολογισμός του όγκου του γίνεται προσεγγίζοντας τον κώνο με εγγεγραμμένες κανονικές πυραμίδες. Το σενάριο το έχουμε συναντήσει αρκετές φορές. Στον κύκλο της βάσης εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ αρχίζοντας με το τετράγωνο και διπλασιάζοντας διαδοχικά τις κορυφές από το ένα στο επόμενο πολύγωνο. Ορίζουμε τον **Όγκο του κώνου** ως το όριο των όγκων των πυραμίδων με βάση τα πολύγωνα Π_n και ύψος το ύψος του κώνου.

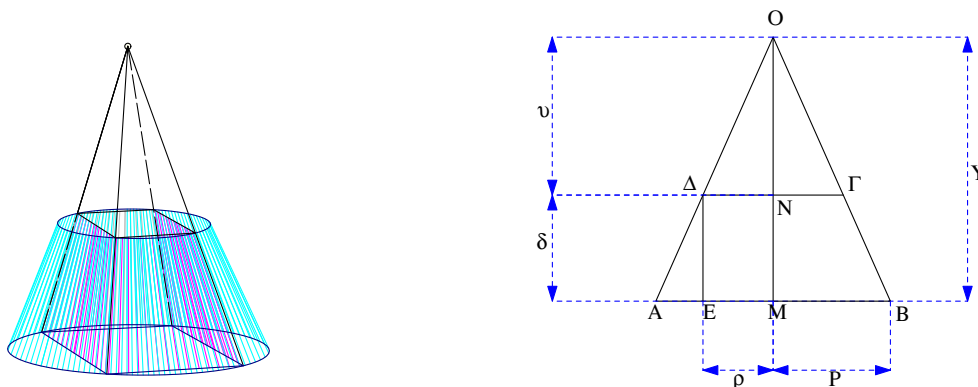


Σχήμα 738: Όγκος κώνου

Πρόταση 9.9.1 Ο όγκος κώνου ισούται με το $1/3$ του το γινομένου του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν της Πρότασης 9.8.1, ο.ε.δ.

Σχόλιο Η πρόταση ισχύει και για πλάγιους κώνους και όχι μόνον ορθούς. Η διατύπωση της προηγούμενης πρότασης είναι αρκετά γενική ώστε να συμπεριλαμβάνει και αυτούς. Η απόδειξη για τους πλάγιους είναι η ίδια με αυτήν για τους ορθούς. Ο όγκος κόλουρου



Σχήμα 739: Όγκος κόλουρου κώνου

κώνου υπολογίζεται αφαιρώντας από τον όγκο του κώνου με την μεγάλη βάση τον όγκο του κώνου με την μικρή βάση.

Πρόταση 9.9.2 Ο όγκος του κόλουρου κώνου ισούται με το

$$\frac{1}{3}(1 - \kappa^3)\epsilon\upsilon,$$

όπου ϵ είναι το εμβαδόν της μεγάλης βάσης, υ το ύψος του κώνου της μεγάλης βάσης και κ ο λόγος της ακτίνας της μικρής βάσης προς αυτήν της μεγάλης.

Απόδειξη: Αν ο λόγος των ακτίνων είναι κ , τότε ο λόγος των εμβαδών του μικρού κύκλου προς τον μεγάλο είναι κ^2 . Επίσης ο λόγος του ύψους του μικρού κώνου προς το ύψος του μεγάλου είναι (λόγω ομοιότητας τριγώνων) και αυτός κ . Ο τύπος προκύπτει αμέσως γράφοντας το μικρό ύψος $\upsilon' = \kappa\upsilon$ και το μικρό εμβαδόν $\epsilon' = \kappa^2\epsilon$ και αντικαθιστώντας αυτά στον τύπο της διαφοράς των όγκων των δύο κώνων, ο.ε.δ.

Η επόμενη πρόταση δίνει τον όγκο του κόλουρου κώνου συναρτήσει των βασικών στοιχείων του που είναι οι δύο ακτίνες των βάσεων του P , ρ και το ύψος του δ .

Πρόταση 9.9.3 Ο όγκος ο του κόλουρου κώνου με ακτίνα μεγάλης βάσης P , ακτίνα μικρής βάσης ρ και ύψος δ είναι

$$o = \frac{\pi\delta}{3}(P^2 + \rho^2 + P\rho).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη στηρίζεται στον βασικό τύπο του όγκου του κόλουρου κώνου, ως διαφορά των όγκων δύο κώνων

$$o = \frac{\pi}{3}(P^2Y - \rho^2\upsilon),$$

όπου Y και υ τα ύψη του κώνου με την μεγάλη βάση και την μικρή βάση αντίστοιχα. Το σχήμα-739 δείχνει τα στοιχεία του τριγώνου που προκύπτει τέμνοντας τον κόλουρο κώνο με επίπεδο που διέρχεται από τον άξονά του OM . Η τομή αυτή είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, που προεκτείνοντας τις πλευρές του οδηγεί στο ισοσκελές ABO . Από την ομοιότητα των τριγώνων $A\Delta E$ και ΔON έχουμε

$$\frac{P - \rho}{\delta} = \frac{\rho}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{\rho\delta}{P - \rho}.$$

Χρησιμοποιώντας επίσης την

$$Y = \upsilon + \delta,$$

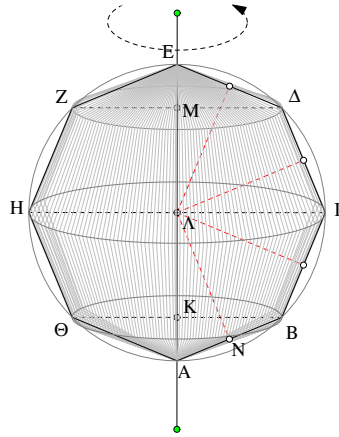
έχουμε

$$\begin{aligned} o &= \frac{\pi}{3}(P^2Y - \rho^2\upsilon) = \frac{\pi}{3}(P^2(\upsilon + \delta) - \rho^2\upsilon) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(P^2\left(\frac{\rho\delta}{P - \rho} + \delta\right) - \rho^2\frac{\rho\delta}{P - \rho}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(P^2\left(\frac{P\delta}{P - \rho}\right) - \rho^2\frac{\rho\delta}{P - \rho}\right) \\ &= \frac{\pi\delta}{3}\left(\frac{P^3 - \rho^3}{P - \rho}\right) \\ &= \frac{\pi\delta}{3}(P^2 + \rho^2 + P\rho), \end{aligned}$$

ο.ε.δ.

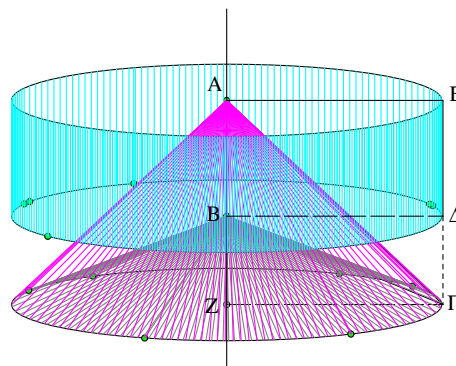
9.10 Όγκος της σφαίρας

Όπως στον κύλινδρο και στον κώνο έτσι και στην σφαίρα ο υπολογισμός του όγκου της γίνεται προσεγγίζοντάς τον με τον όγκο σωμάτων που προκύπτουν από κανονικά πολύγωνα. Μία προσέγγιση της σφαίρας ακτίνας ρ παράγεται από την περιστροφή κανονικού πολυγώνου



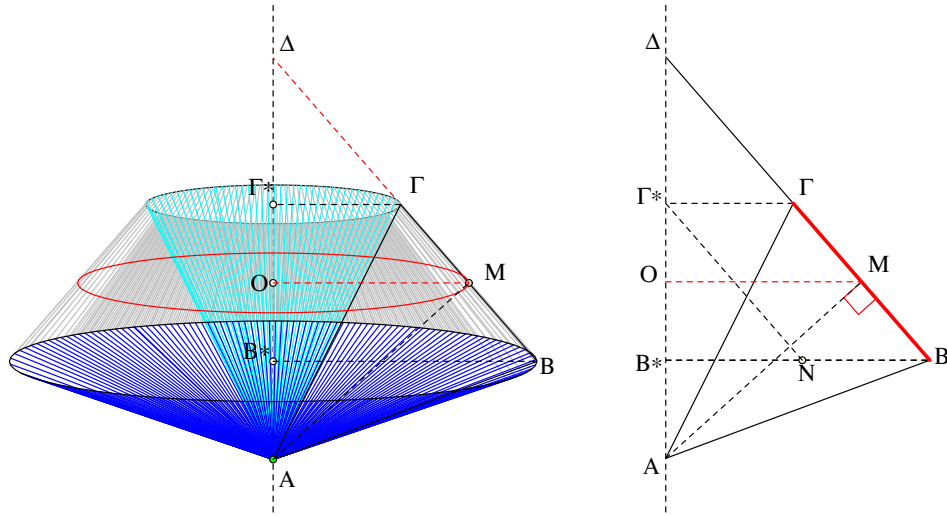
Σχήμα 740: Προσέγγιση της σφαίρας

εγγεγραμμένου σε κύκλο κ ακτίνας ρ . Ας συμβολίζουμε πάλι με $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ τα κανονικά πολύγωνα που χρησιμοποιήσαμε και στην Παράγραφο 6.2. Αρχίζουν από το τετράγωνο (Π_1) εγγεγραμμένο στον κύκλο κ και καθένα από τα επόμενα είναι επίσης εγγεγραμμένο στον κ και έχει διπλάσιο πλήθος πλευρών από το προηγούμενο. Κατά την περιστροφή ενός τέτοιου πολυγώνου περί την διάμετρο AE , που υποθέτουμε ότι συμπίπτει με μία διαγώνιο του πολυγώνου, παράγεται ένα στερεό, ο όγκος του οποίου χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε αυτόν της σφαίρας. Οι επόμενες προτάσεις οδηγούν στον υπολογισμό αυτού του όγκου καθώς και στο όριο που οι όγκοι αυτοί τείνουν καθώς αυξάνονται οι πλευρές τους.



Σχήμα 741: Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής τριγώνου περί πλευράν

Πρόταση 9.10.1 Ο όγκος του στερεού που προκύπτει κατά την περιστροφή τριγώνου $AB\Gamma$ περί την βάση του AB ισούται με το $1/3$ του όγκου του κυλίνδρου που προκύπτει κατά την περιστροφή του ορθογωνίου $AB\Delta E$ με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος με το τρίγωνο.



Σχήμα 743: Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής ισοσκελούς τριγώνου

Πόρισμα 9.10.1 Ο όγκος o του στερεού που προκύπτει κατά την περιστροφή ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ περί άξονα διερχόμενο από την κορυφή του A και μη τέμνοντα την βάση του $B\Gamma$ ισούται με

$$o = \frac{2}{3}\pi|AM|^2|B^*\Gamma^*|,$$

όπου M το μέσον της $B\Gamma$ και B^*, Γ^* οι προβολές των B, Γ στον άξονα περιστροφής.

Απόδειξη: Κατά την προηγούμενη πρόταση ο όγκος του εν λόγω στερεού θα είναι

$$o = \frac{2}{3}\epsilon(AB\Gamma)(2\pi|OM|).$$

Όταν το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($|AB| = |A\Gamma|$), τότε η AM είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και τα ορθογώνια τρίγωνα AMO και NT^*B^* , με N επί της BB^* έτσι ώστε $|BN| = |\Gamma\Gamma^*|$, είναι όμοια. Συνάγεται ότι

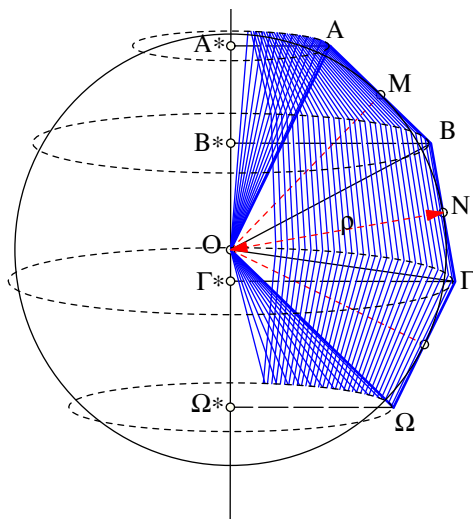
$$\frac{|OM|}{|AM|} = \frac{|B^*\Gamma^*|}{|NT^*|} = \frac{|OM|}{|AM|} = \frac{|B^*\Gamma^*|}{|B\Gamma|} \Rightarrow |OM| = \frac{|AM||B^*\Gamma^*|}{|B\Gamma|}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο ο όγκος του στερεού γράφεται

$$\begin{aligned} o &= \frac{2}{3}\epsilon(AB\Gamma)(2\pi|OM|) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}|B\Gamma||AM|\right)(2\pi|OM|) \\ &= \frac{2}{3}\pi|AM|^2|B^*\Gamma^*|, \end{aligned}$$

ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Είναι εύκολο να δούμε ότι ο τύπος του τελευταίου πορίσματος ισχύει και στην περίπτωση που η $B\Gamma$ δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής, δηλαδή η $B\Gamma$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $A\Delta$.



Σχήμα 744: Υπολογισμός όγκου στερεού εκ περιστροφής

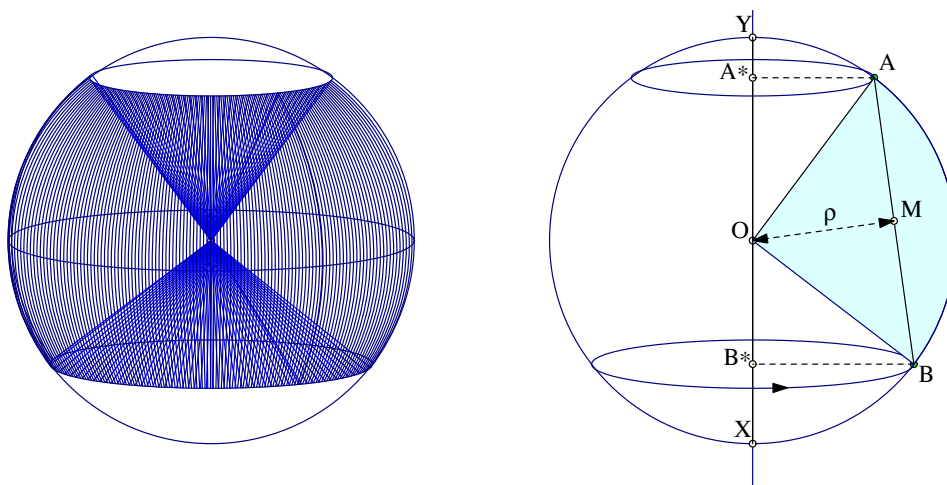
Πρόταση 9.10.3 Έστω ότι το πολύγωνο αποτελούμενο από τις ακτίνες OA , $O\Omega$ και τμήμα άλλου πολυγώνου $AB\Gamma\Delta E \dots \Omega$ με ίσες πλευρές και εγγεγραμμένου σε κύκλο κ , περιστρέφεται περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο O του κ και μή τέμνοντα το τμήμα. Τότε το στερεό που παράγεται έχει όγκο

$$o = \frac{2}{3}\pi\rho^2|A^*\Omega^*|,$$

όπου A^* , Ω^* οι προβολές των A και Ω στον άξονα περιστροφής και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του πολυγώνου.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει εφαρμόζοντας το προηγούμενο πόρισμα σε κάθε ένα από τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$, ... και αθροίζοντας τους τύπους για τους παραγόμενους όγκους, ο.ε.δ.

Σφαιρικός τομέας ονομάζεται το στερεό που παράγεται κατά την περιστροφή ενός κυκλικού τομέα κύκλου κ που περιστρέφεται περί ευθεία XY του επιπέδου του διερχόμενου από το κέντρο O του κύκλου και μη τέμνουσα τον κυκλικό τομέα.



Σχήμα 745: Υπολογισμός όγκου σφαιρικού τομέα

Πόρισμα 9.10.2 Ο όγκος του σφαιρικού τομέα τόξου AB κύκλου κ ακτίνας ρ που περιστρέφεται γύρω από διάμετρο του κ που δεν τέμνει τον τομέα είναι ίσος με

$$o = \frac{2}{3}\pi\rho^2|A^*B^*|,$$

όπου A^* και B^* οι προβολές των άκρων του τόξου AB στον άξονα περιστροφής.

Απόδειξη: Ως όγκο του εν λόγω στερεού θεωρούμε το όριο των όγκων των στερεών που παράγονται με τον τρόπο που περιγράφεται στην προηγούμενη πρόταση από τα πολύγωνα $OAB\Gamma\Delta\ldots\Omega$ τα εγγεγραμμένα στον κύκλο κ , καθώς αυξάνεται το πλήθος των ίσων πλευρών του πολυγώνου $AB\Gamma\ldots\Omega$. Τότε η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο πολύγωνο αυτό κύκλου τείνει προς την ακτίνα ρ του κύκλου κ και ο τύπος προκύπτει από τον τύπο της προηγούμενης πρότασης αντικαθιστώντας στην θέση του ρ την ακτίνα του κύκλου κ , ο.ε.δ.

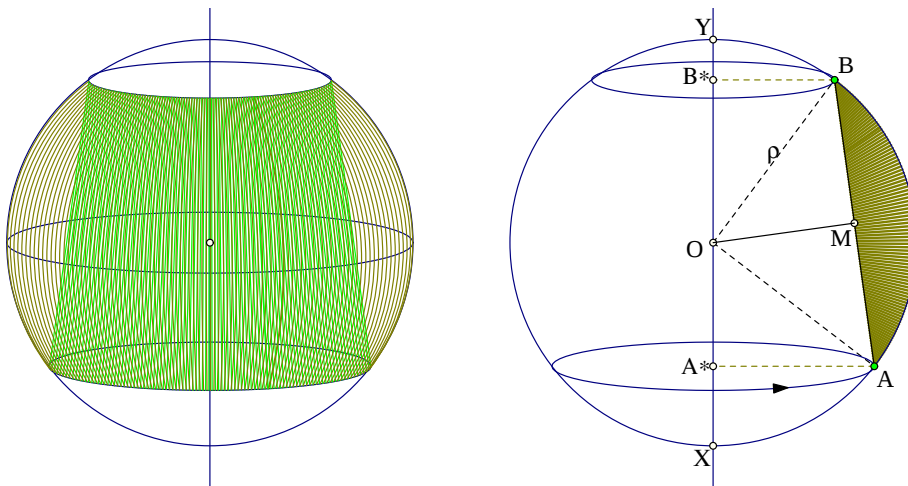
Πόρισμα 9.10.3 Ο όγκος σφαίρας ακτίνας ρ είναι

$$o = \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την σφαίρα παραγόμενη από περιφέρεια ακτίνας ρ που περιστρέφεται περί την διάμετρό της AE . Στον κύκλο αυτό εγγράφουμε τα πολύγωνα $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ έτσι ώστε η AE να είναι διαγώνιός τους. Έστω o_n ο όγκος του στερεού Σ_n που προκύπτει περιστρέφοντας το Π_n περί την διαγώνιο AE και έστω ρ_n η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο Π_n κύκλου. Κατά την Πρόταση 9.10.3 θα έχουμε

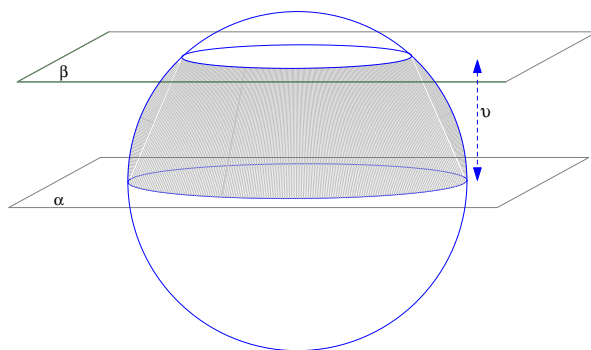
$$o_n = \frac{2}{3}\pi\rho_n^2|A^*E^*| = \frac{2}{3}\pi\rho_n^2|AE| = \frac{4}{3}\pi\rho_n^2.$$

Ο όγκος της σφαίρας είναι το όριο των o_n και αυτό εξαρτάται, σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο, από το όριο των ακτίνων ρ_n των εγγεγραμμένων κύκλων. Καθώς όμως αυξάνει το n η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ρ_n τείνει προς την ακτίνα του περιγεγραμμένου ρ , εξ ου και το συμπέρασμα, ο.ε.δ.



Σχήμα 746: Υπολογισμός όγκου σφαιρικού δακτυλίου

Ο **Σφαιρικός δακτύλιος** είναι το στερεό που περικλείεται μεταξύ ενός κόλουρου κώνου εγγεγραμμένου στην σφαίρα και την σφαίρα. Προκύπτει κατά την περιστροφή ενός κυκλικού τμήματος κύκλου κ περί διάμετρο του κύκλου XY που δεν τέμνει το κυκλικό τμήμα.



Σχήμα 748: Όγκος σφαιρικής ζώνης

όπου $v = |A^*B^*|$ το ύψος του. Χρησιμοποιώντας και το Πόρισμα 9.10.4 βρίσκουμε ότι ο ογκος ο της σφαιρικής ζώνης είναι

$$\begin{aligned}
 o &= o_1 + o_2 = \frac{\pi v}{3}(P^2 + \rho^2 + P\rho) + \frac{1}{6}\pi v|AB|^2 \\
 &= \frac{1}{6}\pi v(2(P^2 + \rho^2 + P\rho) + |AB|^2) \\
 &= \frac{1}{6}\pi v(2P^2 + 2\rho^2 + 2P\rho + (P - \rho)^2 + v^2) \\
 &= \frac{1}{6}\pi v(3P^2 + 3\rho^2 + v^2) \\
 &= \frac{1}{2}\pi v(P^2 + \rho^2) + \frac{1}{6}\pi v^3,
 \end{aligned}$$

ο.ε.δ.

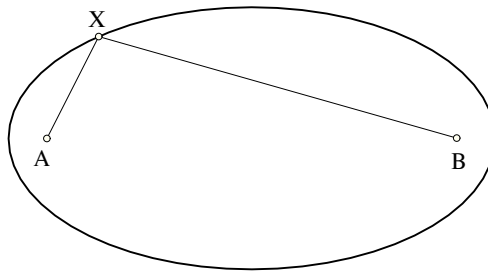
Σχόλιο-2 Ας σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι όλοι αυτοί οι υπολογισμοί όγκων στερεών που παράγονται από περιστροφή, δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις υπολογισμών ολοκληρωμάτων, όπως αυτά ορίζονται στον *Απειροστικό Λογισμό*. Εκεί αναπτύσσεται μία εννιαία μέθοδος υπολογισμού που μπορεί να εφαρμοσθεί σε πολύ περισσότερα στερεά απ' όσα εξετάσαμε εδώ. Στο βιβλίο του Spivak δίδονται όλοι αυτοί οι υπολογισμοί μας και ακόμη περισσότεροι [Σπί04, σελ. 326] ως ασκήσεις εφαρμογής των γενικών μεθόδων του απειροστικού λογισμού. Οι γενικές αυτές μέθοδοι ωστόσο, στηρίζονται στις ιδέες που αναπτύξαμε εδώ και που οφείλονται στον Εύδοξο και κυρίως στον Αρχιμήδη.

Κεφάλαιο 10

Κωνικές Τομές

10.1 Κωνικές τομές

Οι τομές κώνικης επιφάνειας Σ με επίπεδο ε κάθετο στον άξονά της και μη διερχόμενο από την κορυφή της O είναι κύκλοι (Πρόταση 8.9.2). Όταν το επίπεδο δεν είναι κάθετο στον άξονα της Σ οι τομές που προκύπτουν είναι ελλείψεις, παραβολές και υπερβολές. Οι ελλείψεις προκύπτουν, όπως θα δούμε, από τομές με επίπεδα που τέμνουν όλες τις γενέτειρες της Σ . Μιά **Έλλειψη** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X τα οποία έχουν



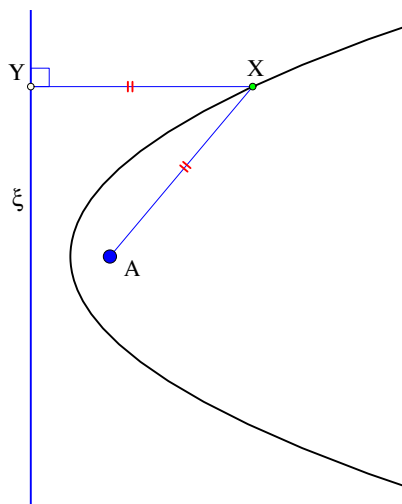
Σχήμα 749: Έλλειψη ($|XA| + |XB| = \lambda$)

σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία A και B .

$$|XA| + |XB| = \lambda.$$

Τα σημεία A και B λέγονται **Εστίες** της έλλειψης. Ελλείψεις προκύπτουν επίσης όταν τμηθεί ορθός κυκλικός κύλινδρος με επίπεδο μη-κάθετο (και μη παράλληλο) στις γενέτειρές του. Οι κύκλοι μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση ελλείψεων, των οποίων τα σταθερά σημεία A και B συμπίπτουν.

Οι παραβολές προκύπτουν από τομές με επίπεδα που είναι παράλληλα προς κάποιο εφαπτόμενο επίπεδο της κωνικής επιφάνειας (Παράγραφος 8.9). Η **Παραβολή** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X τα οποία έχουν την ίδια απόσταση από σταθερό σημείο A και σταθερή ευθεία ξ . Το σημείο A λέγεται **Εστία** της παραβολής και η ευθεία ξ



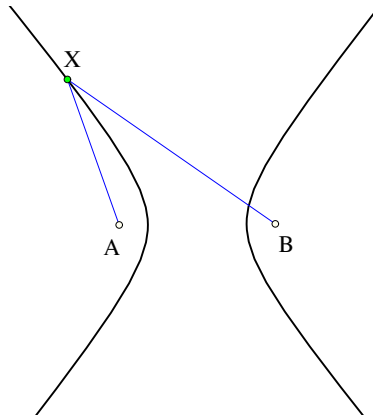
Σχήμα 750: Παραβολή ($|XA| = |XY|$)

λέγεται **Διευθετούσα** της παραβολής.

Τέλος οι υπερβολές προκύπτουν από τομές με επίπεδα που είναι παράλληλα προς δύο ακριβώς γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας. Η **Υπερβολή** χαρακτηρίζεται και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X τα οποία έχουν σταθερή διαφορά αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία A και B .

$$||XA| - |XB|| = \lambda.$$

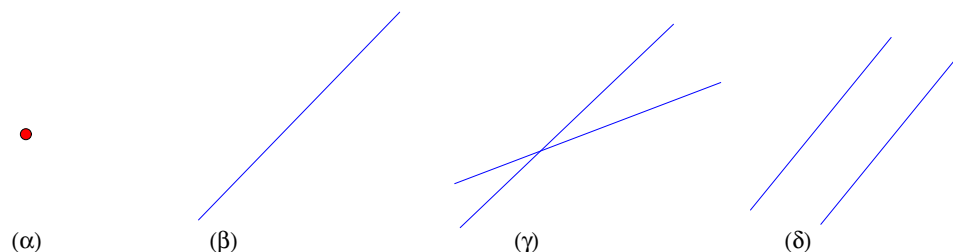
Και πάλι τα σημεία A και B ονομάζονται **Εστίες** της υπερβολής.



Σχήμα 751: Υπερβολή ($||XA| - |XB|| = \lambda$)

Τα τρία αυτά είδη καμπυλών (ελλείψεις, παραβολές, υπερβολές) ονομάζονται συλλογικά **Γνήσιες Κωνικές Τομές** και προκύπτουν ως τομές κωνικής επιφάνειας με επίπεδο μη διερχόμενο διά της κορυφής O . Οι ελλείψεις και οι υπερβολές έχουν, όπως θα δούμε, δύο άξονες συμμετρίας καθώς και κέντρο συμμετρίας και λέγονται **Κωνικές με κέντρο**. Η υπερβολή ωστόσο έχει μόνο άξονα συμμετρίας αλλά όχι κέντρο συμμετρίας.

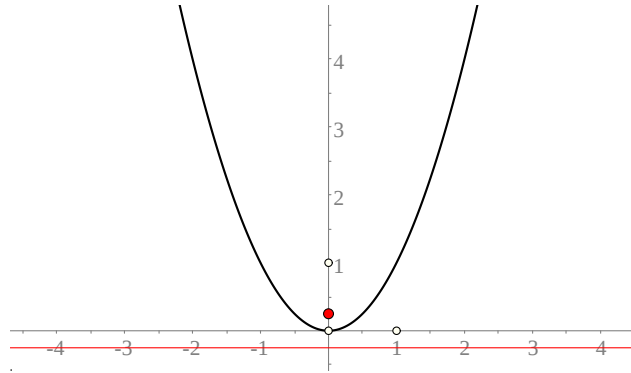
Όταν το επίπεδο, με το οποίο τέμνουμε την κωνική επιφάνεια, ε διέρχεται από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας, τότε προκύπτουν, ανάλογα με την κλίση του ϵ , οι επόμενες καμπύλες, με μία καταχρηστική έννοια του όρου: (α) ένα σημείο (το ϵ περιέχει τότε το O και κανένα άλλο σημείο της Σ), (β) δύο τεμνόμενες ευθείες (το ϵ τέμνει την Σ κατά δύο γενέτειρες) και (γ) μία ευθεία (το ϵ εφαπτεται της Σ). Όπως ανέφερα ήδη, ο όρος **καμπύλη** χρησιμοποιείται, κατ' αρχήν, καταχρηστικά για αυτές τις περιπτώσεις. Συλλογικά αυτές οι ιδιόζουσες περιπτώσεις τομών ονομάζονται **Ιδιόμορφες κωνικές τομές**. Σε αυτές προσμετρώνται και ζεύγη παραλλήλων ευθειών, θεωρούμενα ότι προκύπτουν από τομή κυλίνδρου με επίπεδο παράλληλο προς τις γενέτειρές του.



Σχήμα 752: Τα τέσσερα είδη ιδιόμορφων κωνικών τομών

Σχόλιο Συνήθως ο μαθητής συναντά τις κωνικές τομές, πολύ πριν της γνωρίσει από την γεωμετρική σκοπιά, στην μορφή γραφικών παραστάσεων απλών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, την παραβολή ως γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = x^2,$$

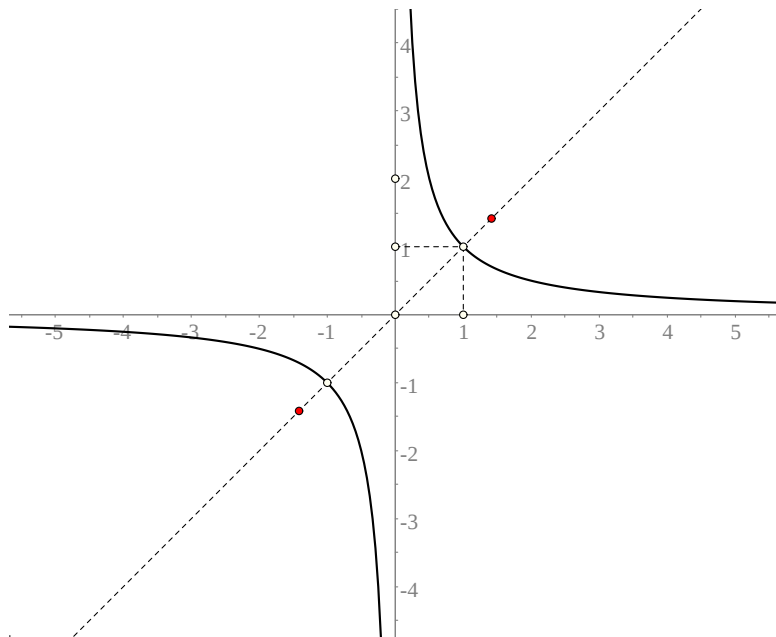


Σχήμα 753: Παραβολή ως γραφική της $y = x^2$

της οποίας η εστία είναι στο σημείο $y = \frac{1}{4}$ του y -άξονα και η διευθετούσα είναι η παράλληλη του x -άξονα από το σημείο του y -άξονα $y = -\frac{1}{4}$.

Συναντά επίσης την υπερβολή ως γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \frac{1}{x},$$



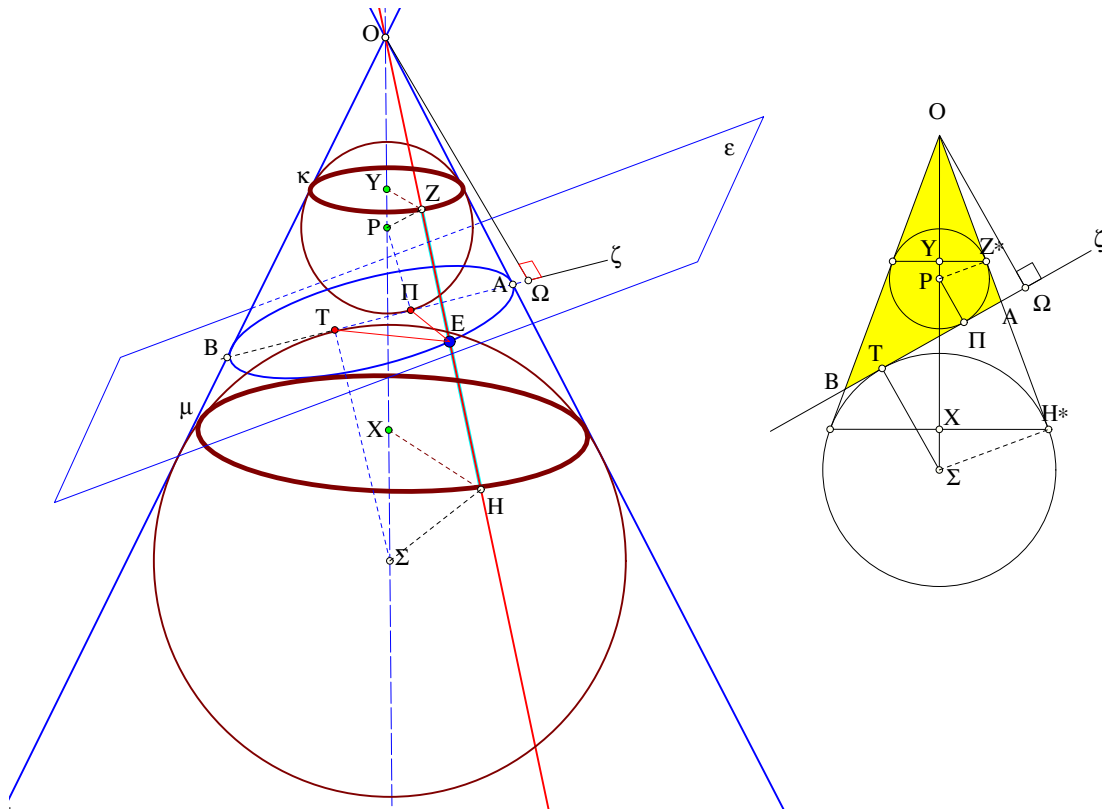
Σχήμα 754: Παραβολή ως γραφική της $y = \frac{1}{x}$

που είναι υπερβολή διερχόμενη από τα σημεία $\pm(1, 1)$ και με εστίες στα σημεία $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

10.2 Οι σφαίρες του Dandelin

Οι **Σφαίρες του Dandelin** (1794-1847) διευκολύνουν τον συσχετισμό των κωνικών τομών με τους γεωμετρικούς τόπους, που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Πρόκειται απλά για σφαίρες εγγεγραμμένες σε κωνικές ή κυλινδρικές επιφάνειες και ταυτόχρονα εφαπτόμενες ενός άλλου επιπέδου ε . Οι επόμενες προτάσεις δείχνουν ότι κάθε επίπεδο ε που τέμνει μία τέτοια επιφάνεια ορίζει δύο (ή μία σε ορισμένες περιπτώσεις που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο) σφαίρες που λέγονται **Σφαίρες Dandelin** του επιπέδου ε . Αποφασιστικής σημασίας σε αυτήν την παράγραφο είναι η Πρόταση 8.9.5, κατά την οποία κάθε επίπεδο ε , μη-διερχόμενο από την κορυφή O κωνικής επιφάνειας, τέμνει (α) ή όλες τις γενέτειρες, (β) ή όλες εκτός από δύο, (γ) ή όλες εκτός από μία. Εδώ θα εξετάσουμε τις δύο πρώτες περιπτώσεις. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε και την τρίτη.

Πρόταση 10.2.1 Έστω επίπεδο ε τέμνον όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας K . Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της κωνικής επιφάνειας και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου ε .



Σχήμα 755: Σφαίρες του Dandelin

Απόδειξη: Θεώρησε το επίπεδο ϑ που ορίζεται από τον άξονα OX της κωνικής επιφάνειας K και την κάθετο $O\Omega$ από την κορυφή O του κώνου προς το επίπεδο ε . Έστω ότι η τομή του ε και του ϑ είναι η ευθεία ζ . Εκ κατασκευής η ζ είναι κάθετη στην $O\Omega$ και τέμνει τις δύο γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας K που περιέχονται στο ϑ στα σημεία A και B . Ορίζεται λοιπόν στο επίπεδο ϑ τρίγωνο OAB και επομένως ο εγγεγραμμένος και παρεγγεγραμμένος κύκλος του στην γωνία AOB με κέντρα αντίστοιχα P και Σ . Οι σφαίρες με κέντρα τα P και Σ

και ακτίνες αυτές του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου, ΡΠ και ΣΤ αντίστοιχα, είναι οι ζητούμενες. Δείχνω ότι η μία από αυτές, η Ρ(ΡΠ) είναι εφαπτόμενη του κώνου. Πράγματι, αν ΟΗ είναι μία άλλη γενέτειρα και Ζ η προβολή του Ρ σε αυτήν, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΡΖΟ και ΡΖ*Ο, όπου Ζ* η προβολή του Ρ στην ΟΑ, είναι ίσα. Τούτο διότι το Ρ είναι επί το άξονος της κωνικής επιφάνειας, άρα έχει την ίδια απόσταση από τις γενέτειρες, συνεπώς $|PZ| = |PZ^*|$. Επίσης τα δύο ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα ΟΡ κοινή, είναι συνεπώς ίσα. Αυτό συνεπάγεται ότι η ΟΗ είναι εφαπτόμενη της σφαίρας στο σημείο Ζ και αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η σφαίρα Σ(ΣΤ) είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Το ότι οι σφαίρες αυτές είναι και εφαπτόμενες στο επίπεδο ε συνάγεται αμέσως λ.χ. για την Ρ(ΡΠ), από το γεγονός ότι η ΡΠ είναι και κάθετος στο επίπεδο ε, ως παράλληλη της ΟΩ, που έχει αυτήν την ιδιότητα. Συνεπώς το επίπεδο ε είναι εφαπτόμενο της σφαίρας Ρ(ΡΠ) ως κάθετο στο άκρο μιάς ακτίνας της, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.2.1 Τα σημεία τομής επιπέδου ε, που τέμνει όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας Κ, αποτελούν μία έλλειψη με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο ε.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Πρόταση 8.11.3). Αν Ε σημείο της τομής του ε και της Κ, τότε η γενέτειρα ΟΕ είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν Π και Τ είναι τα σημεία επαφής των σφαιρών Ρ(ΡΠ) και Σ(ΣΤ) με το επίπεδο ε, τότε και οι ΕΠ και ΕΤ είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι $|ΕΠ| = |ΕΖ|$ και $|ΕΤ| = |ΕΗ|$, όπου Ε και Ζ τα σημεία επαφής της γενέτειρας ΟΕ με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

$$|ΕΤ| + |ΕΠ| = |ΕΖ| + |ΕΗ| = |ΖΗ|,$$

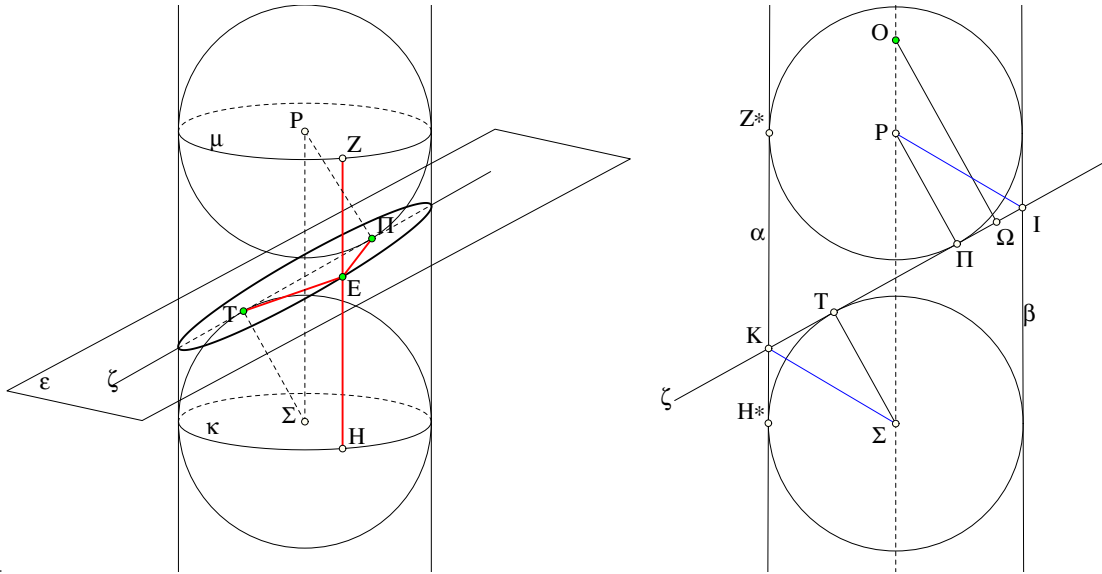
το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κόλουρου κώνου που σχηματίζεται από τους κύκλους κ και μ, κατά τους οποίους εφάπτονται οι δύο σφαίρες με την κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

Πρόταση 10.2.2 Έστω επίπεδο ε τέμνον όλες τις γενέτειρες κυλινδρικής επιφάνειας Κ. Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της Κ και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου ε.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 10.2.1. Το επίπεδο του χαρτιού στο σχήμα-756 είναι το επίπεδο θ που ορίζεται από τον άξονα η της κυλινδρικής επιφάνειας και την κάθετο ΟΩ στο επίπεδο ε από τυχόν σημείο Ο του άξονα. Το επίπεδο θ τέμνει την κυλινδρική επιφάνεια Κ κατά δύο (παράλληλες) γενέτειρες α και β. Τέμνει επίσης το επίπεδο ε κατά ευθεία ζ. Φέρνοντας τις διχοτόμους ΚΣ, ΙΡ των γωνιών που σχηματίζει η ζ με τις α, β και τις τομές αυτών Ρ, Σ με τον άξονα η, ορίζουμε τους κύκλους Ρ(ΡΠ) και Σ(ΣΤ) που εφάπτονται ταυτόχρονα των α, β και ζ. Οι σφαίρες Ρ(ΡΠ) και Σ(ΣΤ) είναι οι ζητούμενες. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της Πρότασης 10.2.1, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.2.2 Τα σημεία τομής επιπέδου ε, που τέμνει όλες τις γενέτειρες κυλινδρικής επιφάνειας Κ, αποτελούν μία έλλειψη με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο ε.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Πρόταση 8.11.3). Αν Ε σημείο της τομής του ε και της Κ, τότε η γενέτειρα ΕΖ είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν Π και Τ είναι τα σημεία επαφής



Σχήμα 756: Σφαίρες του Dandelin για τομή κυλίνδρου με επίπεδο

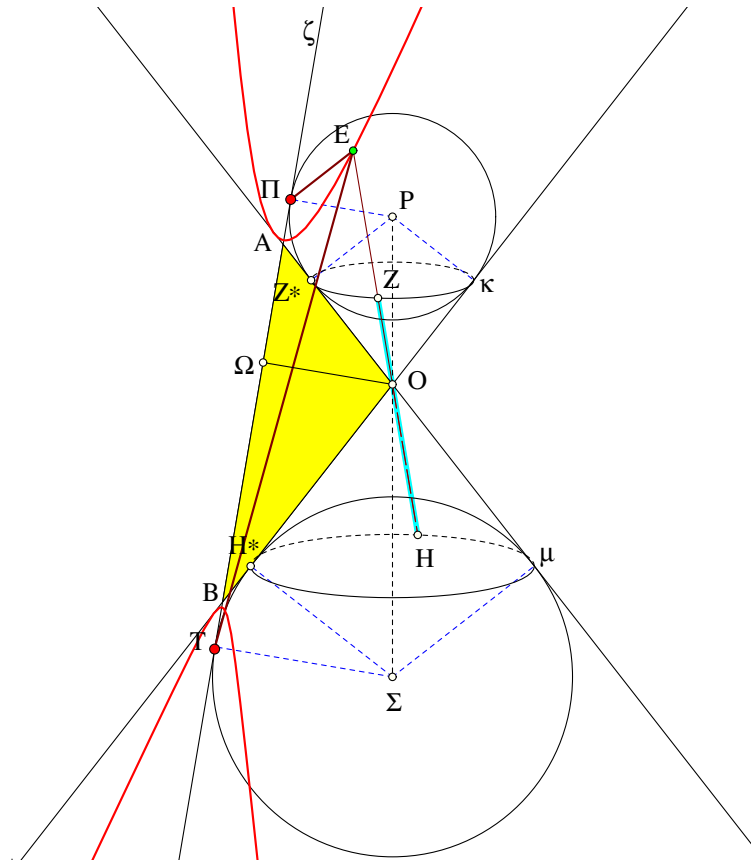
των σφαιρών $P(P\Pi)$ και $\Sigma(\Sigma T)$ με το επίπεδο ε , τότε και οι $E\Pi$ και ET είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι $|E\Pi| = |EZ|$ και $|ET| = |EH|$, όπου E και Z τα σημεία επαφής της γενέτειρας OE με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

$$|ET| + |E\Pi| = |EZ| + |EH| = |ZH|,$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κυλίνδρου που σχηματίζεται από τους κύκλους κ και μ , κατά τους οποίους εφάπτονται οι δύο σφαίρες με την κυλινδρική επιφάνεια επιφάνεια, ο.ε.δ.

Πρόταση 10.2.3 Έστω επίπεδο ε τέμνον όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας K εκτός από δύο. Υπάρχουν τότε δύο σφαίρες εφαπτόμενες της K και ταυτόχρονα εφαπτόμενες του επιπέδου ε .

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της Πρότασης 10.2.1. Το επίπεδο του χαρτιού στο σχήμα-757 είναι το επίπεδο ϑ που ορίζεται από τον άξονα της κωνικής επιφάνειας K και την κάθετο $O\Omega$ από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας προς το επίπεδο ε . Έστω ότι η τομή του ε και του ϑ είναι η ευθεία ζ . Εκ κατασκευής η ζ είναι κάθετη στην $O\Omega$ και τέμνει τις δύο γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας που περιέχονται στο ϑ στα σημεία A και B . Ορίζεται λοιπόν στο επίπεδο ϑ τρίγωνο OAB και επομένως οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι του με κέντρα αντίστοιχα P και Σ . Οι σφαίρες με κέντρα τα P και Σ και ακτίνες αυτές των παρεγγεγραμμένων, $P\Pi$ και ΣT αντίστοιχα, είναι οι ζητούμενες. Δείχνω ότι η μία από αυτές, η $P(P\Pi)$ είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Πράγματι, αν OH είναι μία άλλη γενέτειρα και Z η προβολή του P σε αυτήν, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα PZO και PZ^*O , όπου Z^* η προβολή του P στην OA , είναι ίσα. Τούτο διότι το P είναι επί το άξονος του κώνου, άρα έχει την ίδια απόσταση από τις γενέτειρες, συνεπώς $|PZ| = |PZ^*|$. Επίσης τα δύο ορθογώνια έχουν την υποτείνουσα OP κοινή, είναι συνεπώς ίσα. Αυτό συνεπάγεται ότι η OH είναι εφαπτόμενη της σφαίρας στο σημείο Z και αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η σφαίρα $\Sigma(\Sigma T)$ είναι εφαπτόμενη της κωνικής επιφάνειας. Το ότι οι σφαίρες αυτές είναι και εφαπτόμενες στο επίπεδο ε συνάγεται αμέσως λ.χ. για την $P(P\Pi)$,



Σχήμα 757: Σφαίρες του Dandelin II

από το γεγονός ότι η RP είναι και κάθετος στο επίπεδο ε , ως παράλληλη της $O\Omega$, που έχει αυτήν την ιδιότητα. Συνεπώς το επίπεδο ε είναι εφαπτόμενο της σφαίρας $P(P\Pi)$ ως κάθετο στο άκρο μιάς ακτίνας της, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.2.3 Τα σημεία τομής επιπέδου ε , που τέμνει όλες τις γενέτειρες κωνικής επιφάνειας K εκτός από δύο, αποτελούν μία υπερβολή με εστίες τα σημεία επαφής των σφαιρών του Dandelin με το επίπεδο ε .

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από την ισότητα των εφαπτομένων από σημείο προς σφαίρα (Πρόταση 8.11.3). Αν E σημείο της τομής του ε και της K , τότε η γενέτειρα OE είναι ταυτόχρονα εφαπτόμενη και των δύο σφαιρών. Επίσης, αν Π και T είναι τα σημεία επαφής των σφαιρών $P(P\Pi)$ και $\Sigma(\Sigma T)$ με το επίπεδο ε , τότε και οι $E\Pi$ και ET είναι αντίστοιχα εφαπτόμενες σε αυτές τις σφαίρες. Συνάγεται ότι $|E\Pi| = |EZ|$ και $|ET| = |EH|$, όπου E και Z τα σημεία επαφής της γενέτειρας OE με τις σφαίρες. Τότε όμως το άθροισμα

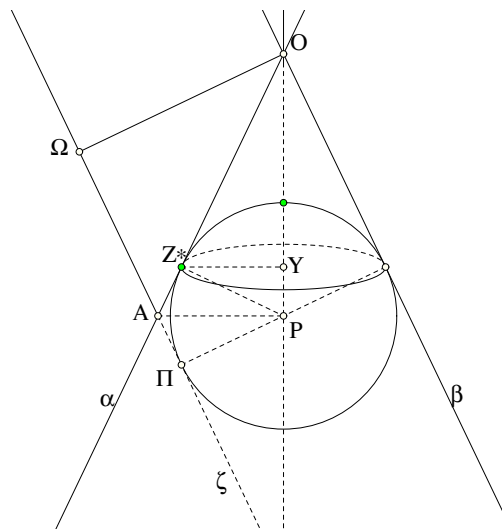
$$|ET| - |E\Pi| = |EH| - |EZ| = |ZH|,$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κόλπου κώνου (ένωση των δύο κώνων με κοινή κορυφή το O) που σχηματίζεται από τους κύκλους κ και μ , κατά τους οποίους εφαπτόνται οι δύο σφαίρες με την κωνική επιφάνεια, ο.ε.δ.

10.3 Διευθετούσες

Εκτός από την παραβολή, στην οποία η διευθετούσα παίζει σημαντικό ρόλο για τον συνηθισμένο χαρακτηρισμό της ως γεωμετρικό τόπο, διευθετούσες ορίζονται και για τα άλλα είδη κωνικών τομών με ιδιότητες παρόμοιες με αυτήν της διευθετούσας της παραβολής. Στην παράγραφο αυτή συσχετίζουμε πρώτα την διευθετούσα της παραβολής με την αντίστοιχη σφαίρα του Dandelin και κατόπιν εξετάζουμε την γενίκευσή της για τις άλλες κωνικές τομές.

Πρόταση 10.3.1 Έστω επίπεδο ε παράλληλο προς εφαπτόμενο επίπεδο κωνικής επιφάνειας K . Υπάρχει τότε μία σφαίρα εφαπτόμενη της K και ταυτόχρονα εφαπτόμενη του επιπέδου ε .



Σχήμα 758: Σφαίρα του Dandelin II

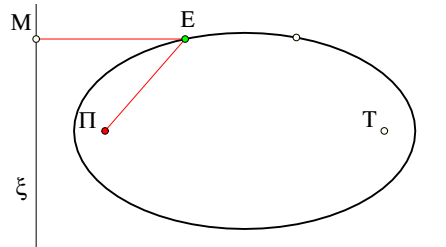
Απόδειξη: Όπως και στις προτάσεις της προηγούμενης παραγράφου, θεωρούμε το επίπεδο ϑ που ορίζεται από τον άξονα της κωνικής επιφάνειας K και την κάθετο $O\Omega$ από την κορυφή O της K στο δοθέν επίπεδο ε (στο σχήμα-758 το ϑ ταυτίζεται με το επίπεδο του χαρτιού). Τα επίπεδα ϑ και ε τέμνονται κατά ευθεία ζ . Η ευθεία αυτή είναι παράλληλος της γενέτειρας β που περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο το παράλληλο του ε . Το ϑ περιέχει επίσης την συμμετρική της β ως προς τον άξονα γενέτειρα α και μάλιστα, λόγω της παραλληλίας των ζ και β , το τρίγωνο με πλευρές τις α , ζ και τον άξονα είναι ισοσκελές. Μεταβαίνοντας λοιπόν στο επίπεδο σχήμα το περιεχόμενο στο ϑ ευρίσκουμε κύκλο $P(P\Pi)$ με κέντρο επί του άξονος και ταυτόχρονα εφαπτόμενο των δύο παραλλήλων ζ και β , καθώς και της άλλης γενέτειρας α της Σ που περιέχεται στο ϑ . Προς τούτο αρκεί να θεωρήσουμε την κάθετο προς τον άξονα OP από το σημείο τομής των α και ζ . Αυτή διχοτομεί την γωνία στο A μεταξύ των α και ζ και ορίζει κύκλο $P(P\Pi)$ ταυτόχρονα εφαπτόμενο των α , β και ζ . Η σφαίρα $P(P\Pi)$ είναι η ζητούμενη. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι η ίδια με αυτήν της Πρότασης 10.2.1, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.3.1 Τα σημεία τομής κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ε , παράλληλου προς εφαπτόμενο επίπεδο της K , αποτελούν μία παραβολή με εστία το σημείο επαφής Π της σφαίρας του Dandelin με το επίπεδο ε και διευθετούσα την ευθεία ξ κατά την οποία το ε τέμνει το επίπεδο η του κύκλου των σημείων επαφής της σφαίρας με την κωνική επιφάνεια.

για κάθε σημείο E της έλλειψης ο λόγος των αποστάσεων

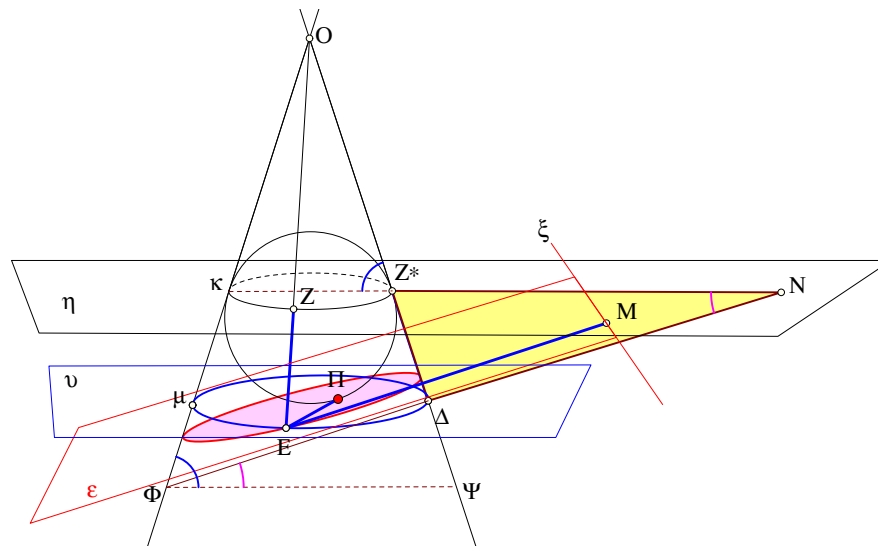
$$\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa < 1,$$

να είναι σταθερός. Το M συμβολίζει εδώ την προβολή του E στην ξ .



Σχήμα 760: Ιδιότητα έλλειψης $\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa < 1$

Απόδειξη: Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τον ορισμό της έλλειψης ως τομής κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ϵ και μία από τις σφαίρες του Dandelin. Η εστία Π είναι το σημείο επαφής του ϵ με την σφαίρα και το τυχόν σημείο E της έλλειψης ορίζει μία γενέτειρα EO της K καθώς και ένα επίπεδο ν διερχόμενο διά του E και κάθετο στον άξονα της K , το οποίο τέμνει την K κατά κύκλο μ . Επίσης τα σημεία επαφής της σφαίρας και της κωνικής



Σχήμα 761: Η διευθετούσα ξ της έλλειψης

επιφάνειας ορίζουν κύκλο κ περιεχόμενο σε επίπεδο η παράλληλο του ν . Τα δύο επίπεδα ν και η αποτεμνουν έναν κόλouro κώνου από την κωνική επιφάνεια. Η $E\Pi$ ισούται με την γενέτειρα EZ του κόλουρου κώνου. Έστω τώρα ξ ή ευθεία κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα ϵ και η και M η προβολή του E στην ξ . Θεωρούμε το επίπεδο ϑ που παράγεται από τον άξονα της K και την κάθετο από το O στο επίπεδο ϵ . Το ϑ τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά δύο γενέτειρες $O\Phi$ και $O\Psi$ συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα. Το ϑ ορίζει επίσης και την γενέτειρα ΔZ^* του προηγούμενου κόλουρου κώνου, της οποίας το μήκος

$$|\Delta Z^*| = |EZ| = |E\Pi|.$$

Φέρουμε από το Δ παράλληλο της EM μέχρι να τμήσει το επίπεδο η στο σημείο N . Ισχύει και $|EM| = |\Delta N|$ διότι αυτά είναι τμήματα παραλλήλων περιοριζόμενα από παράλληλα επίπεδα (Πρόταση 7.2.6). Το τρίγωνο $Z^*\Delta N$ εξαρτάται από την θέση του σημείου E , εν τούτοις παραμένει όμοιο εαυτώ, συνεπώς ο λόγος των πλευρών του

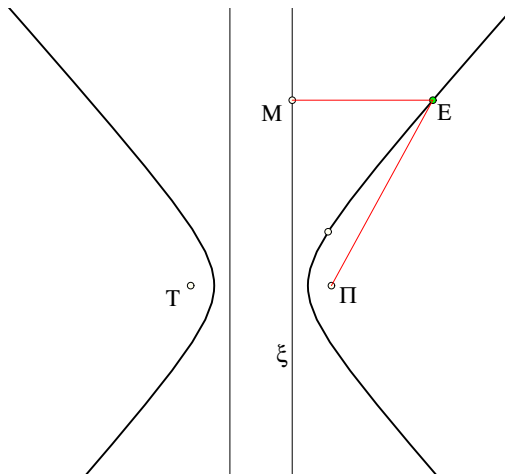
$$\kappa = \frac{|\Delta Z^*|}{|\Delta N|} = \frac{|E\Pi|}{|EM|}$$

παραμένει σταθερός. Το ότι το $\kappa < 1$ έπεται εύκολα από το ότι η γωνία $|\Delta N Z^*| < |\Delta Z^* N|$, ο.ε.δ.

Θεώρημα 10.3.3 Δοθείσης υπερβολής, σε κάθε εστία της Π αντιστοιχεί ευθεία ξ , έτσι ώστε γιά κάθε σημείο E της υπερβολής ο λόγος των αποστάσεων

$$\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa > 1,$$

να είναι σταθερός. Το M συμβολίζει εδώ την προβολή του E στην ξ .

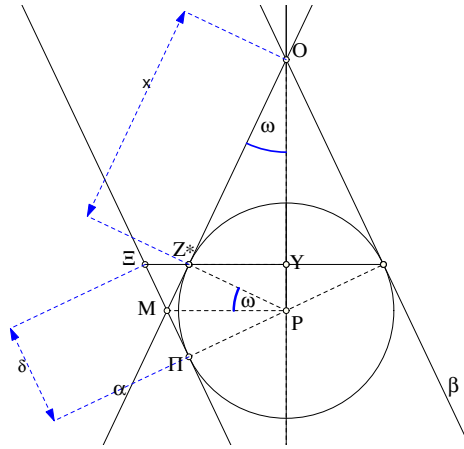


Σχήμα 762: Ιδιότητα υπερβολής $\frac{|E\Pi|}{|EM|} = \kappa > 1$

Απόδειξη: Γιά την απόδειξη χρησιμοποιούμε τον ορισμό της υπερβολής ως τομής κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ϵ και μία από τις σφαίρες του Dandelin. Η εστία Π είναι το σημείο επαφής του ϵ με την σφαίρα και το τυχόν σημείο E της υπερβολής ορίζει μιά γενέτειρα EO της K καθώς και ένα επίπεδο υ διερχόμενο διά του E και κάθετο στον άξονα της K , το οποίο τέμνει την K κατά κύκλο μ . Επίσης τα σημεία επαφής της σφαίρας και της κωνικής επιφάνειας ορίζουν κύκλο χ περιεχόμενο σε επίπεδο η παράλληλο του υ . Τα δύο επίπεδα υ και η αποτέμνουν έναν κόλouro κώνου από την κωνική επιφάνεια. Η $E\Pi$ ισούται με την γενέτειρα EZ του κόλουρου κώνου. Έστω τώρα ξ ή ευθεία κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα ϵ και η και M η προβολή του E στην ξ . Θεωρούμε το επίπεδο ϑ που παράγεται από τον άξονα της K και την κάθετο από το O στο επίπεδο ϵ . Το ϑ τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά δύο γενέτειρες $O\Phi$ και $O\Psi$ συμμετρικά κείμενες ως προς τον άξονα. Το ϑ ορίζει επίσης και την γενέτειρα ΔZ^* του προηγούμενου κόλουρου κώνου, της οποίας το μήκος

$$|\Delta Z^*| = |EZ| = |E\Pi|.$$

με τό άνοιγμά της και με την σφαίρα που καθορίζει την θέση της εστίας της. Αναφερόμενοι στο σχήμα της Πρότασης 10.3.1, θεωρούμε την τομή του με το επίπεδο θ , ως προς το οποίο το όλο σχήμα αυτής της πρότασης είναι συμμετρικό. Προσδιορίζουμε το δ συναρτήσει του



Σχήμα 766: Παραβολή ως κωνική τομή

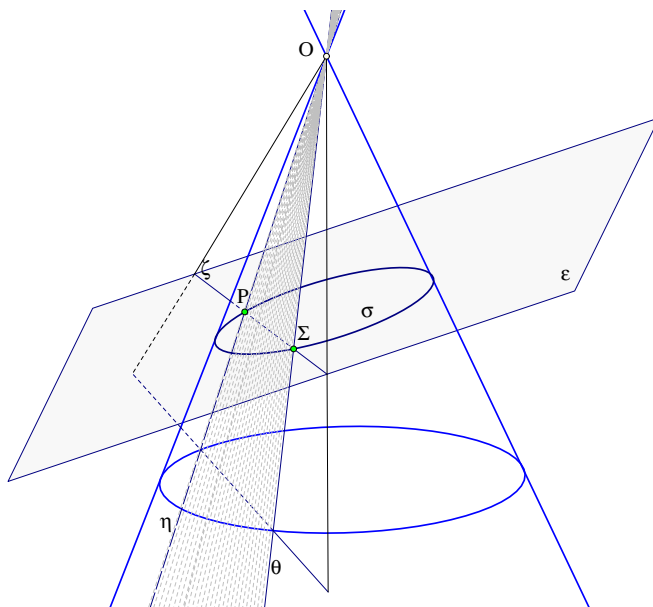
ανοίγματος ω της κωνικής επιφάνειας και του μήκους x της εφαπτόμενης από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας προς την σφαίρα του Dandelin. Προφανώς ισχύει

$$\delta = 2|EM| = 2|MP| = 2|MZ^*| = 2|PZ^*|\epsilon\phi(\omega) = 2x\epsilon\phi(\omega)^2.$$

Συνεπώς, για κάθε κωνική επιφάνεια (άνοιγμα ω), δοθέντος του δ ευρίσκομε, λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση, την θέση x στην γενέτειρα, στην οποία θα εφάπτεται η σφαίρα που ορίζει το επίπεδο ϵ και την αντίστοιχη κωνική τομή που θα συμπίπτει με την παραβολή.

10.4 Γενικά χαρακτηριστικά κωνικών

Υπάρχουν ορισμένα χαρακτηριστικά των κωνικών τομών που είναι κοινά για ελλείψεις, παραβολές και υπερβολές. Άλλα πάλι εξαρτώνται από την ειδική φύση της κωνικής τομής, που προσδιορίζεται από την εκκεντρότητά της κ . Στην παραγραφο αυτή θα εξετάσουμε κάποιες ιδιότητες κοινές, που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό αυτών των καμπυλών ως τομών κωνικής επιφάνειας με επίπεδο. Και τα τρία είδη κωνικών έχουν μία τουλάχιστον εστία, μία αντίστοιχη διευθετούσα και εκκεντρότητες: $\kappa < 1$, $\kappa = 1$ και $\kappa > 1$, που χαρακτηρίζουν αντίστοιχα την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή. Σε ορισμένες ιδιότητες η εκκεντρότητα παίζει ρόλο γενικό, χωρίς να υπεισέρχεται σε αυτές το μέγεθός της. Απλά χρησιμοποιείται τότε το ότι, ο λόγος της απόστασης από την εστία, προς την απόσταση από την αντίστοιχο διευθετούσα, είναι σταθερός. Στα επόμενα θεωρούμε την κωνική σ που ορίζεται από την τομή κωνικής επιφάνειας K και επιπέδου ε , μη διερχομένου διά της κορυφής O της κωνικής επιφάνειας. Μία θεμελιώδης ιδιότητα των κωνικών τομών εκφράζεται με το επόμενο θεώρημα.



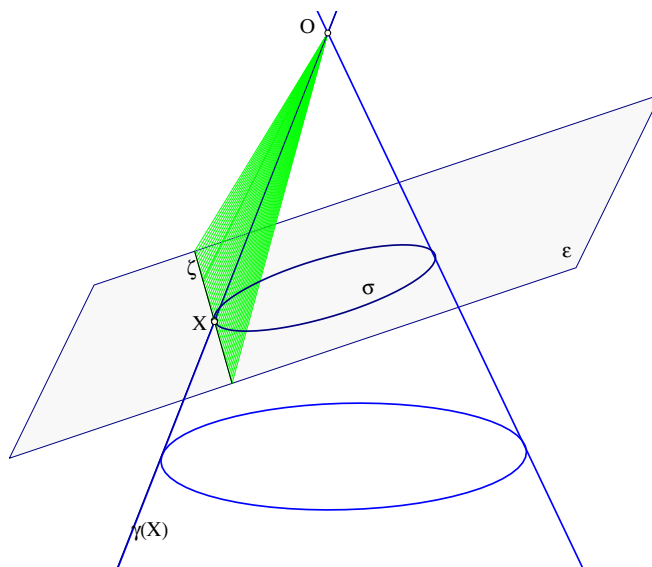
Σχήμα 767: Τομή κωνικής και ευθείας

Θεώρημα 10.4.1 Κάθε ευθεία ζ στο επίπεδο ε της κωνικής την τέμνει, το πολύ, σε δύο σημεία.

Απόδειξη: Κάθε ευθεία ζ στο επίπεδο της κωνικής ορίζει, μαζί με την κορυφή O του κώνου, ένα επίπεδο το οποίο αποτελείται από την κωνική επιφάνεια δύο το πολύ γενέτειρες η , θ . Τα κοινά σημεία της κωνικής και της ευθείας ζ θα είναι πάνω σ' αυτές τις γενέτειρες, συνεπώς δεν μπορεί να είναι περισσότερα από δύο, ο.ε.δ.

Εφαπτόμενη της κωνικής σ σε ένα σημείο της X λέγεται η ευθεία ζ που αποτελείται στο επίπεδο ε της κωνικής το εφαπτόμενο επίπεδο της κωνικής επιφάνειας, το οποίο εφάπτεται αυτής κατά μήκος της γενέτειρας $\gamma(X)$ που ορίζεται από το X .

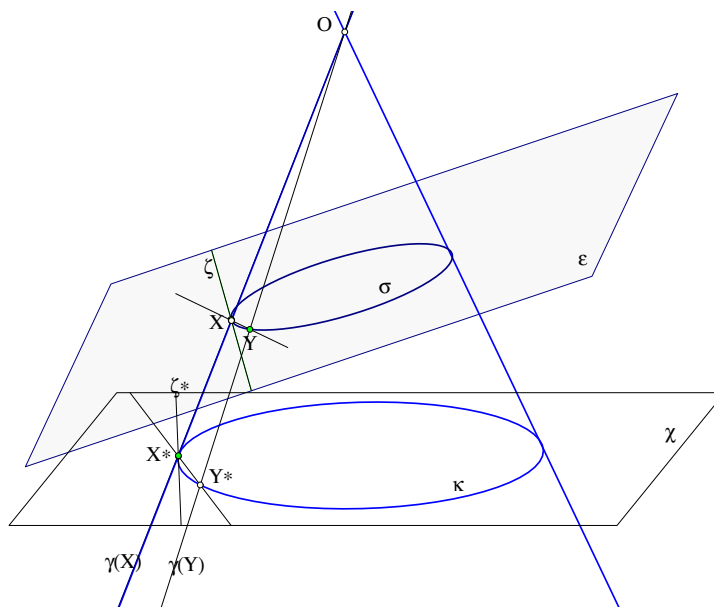
Θεώρημα 10.4.2 Σε κάθε σημείο X της κωνικής υπάρχει μία ακριβώς εφαπτόμενη αυτής.



Σχήμα 768: Εφαπτόμενη ζ κωνικής στο X

Απόδειξη: Η απόδειξη ανάγεται στην αντίστοιχη ιδιότητα της κωνικής επιφάνειας. Κάθε σημείο X της κωνικής που είναι τομή του επιπέδου ϵ και της κωνικής επιφάνειας K , περιέχεται σε μία ακριβώς γενέτειρα $\gamma(X)$ του κώνου η οποία είναι κοινή με ένα ακριβώς εφαπτόμενο επίπεδο ϑ του κώνου (Παράγραφος 8.9). Η τομή των επιπέδων ϑ και ϵ ορίζει την μία και μοναδική ευθεία ζ διά του X που έχει την ιδιότητα της εφαπτόμενης, ο.ε.δ.

Πρόταση 10.4.1 Η εφαπτόμενη ζ κωνικής σ σε σημείο X αυτής συμπίπτει με την οριακή θέση ευθείας XY διερχομένης από το X και ένα δεύτερο σημείο Y της κωνικής, καθώς το Y τείνει να συμπίπτει με το X .

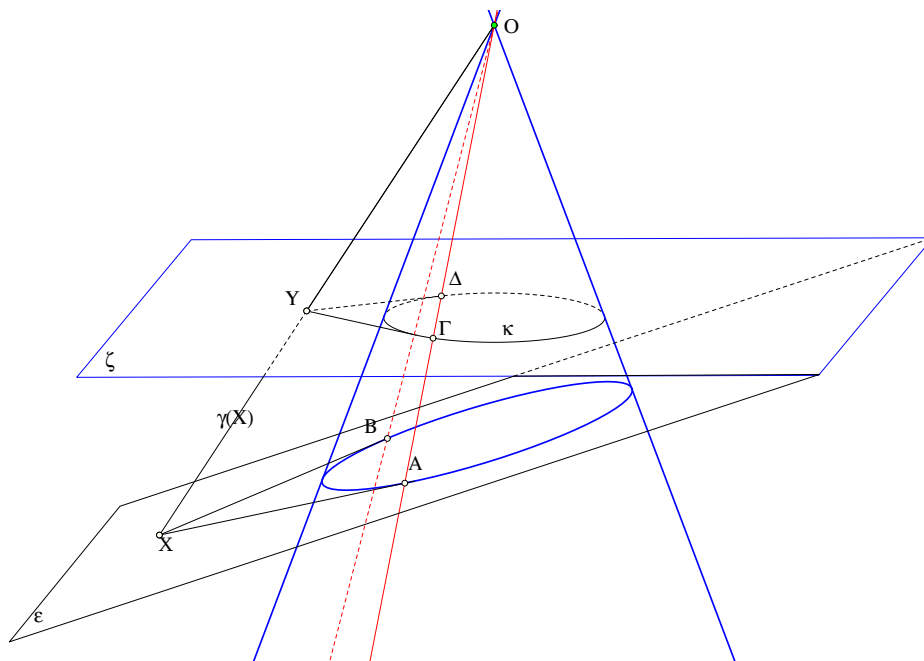


Σχήμα 769: Εφαπτόμενη ως οριακή θέση τέμνουσας

Απόδειξη: Η απόδειξη ανάγεται στην αντίστοιχη ιδιότητα του κύκλου. Κάθε σημείο X της κωνικής, που είναι τομή του επιπέδου ϵ και της κωνικής επιφάνειας K , περιέχεται σε μία ακριβώς γενέτειρα $\gamma(X)$. Δύο σημεία X, Y της κωνικής και οι αντίστοιχες γενέτειρες $\gamma(X), \gamma(Y)$ ορίζουν επίπεδο θ που τέμνει το ϵ κατά την ευθεία XY . Ένα επίπεδο χ κάθετο στον άξονα της κωνικής επιφάνειας την τέμνει κατά κύκλο κ και το θ τέμνει τον κύκλο αυτό στα σημεία X^* και Y^* . Καθώς το Y τείνει στο X , στον κύκλο κ , το Y^* τείνει προς το X^* και η X^*Y^* τείνει προς την εφαπτόμενη ζ^* του κύκλου κ στο σημείο X^* . Το θ τείνει τότε να συμπίσει με το εφαπτόμενο επίπεδο της κωνικής επιφάνειας που διέρχεται από το X^* και επομένως η τομή του με το ϵ τείνει να συμπίσει με την τομή του εφαπτομένου επιπέδου κατά μήκος της $\gamma(X)$ με το ϵ , που είναι η εφαπτόμενη ζ στο X , ο.ε.δ.

Τα κοινά σημεία του εσωτερικού της κωνικής επιφάνειας και του επιπέδου ϵ που αποτεμνει την κωνική κ λέγονται **Εσωτερικά σημεία** της κωνικής, τα δε υπόλοιπα **Εξωτερικά σημεία** της κωνικής. Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ορίζεται από δύο σημεία τομής κωνικής κ με ευθεία ϵ λέγεται **Χορδή** της κωνικής.

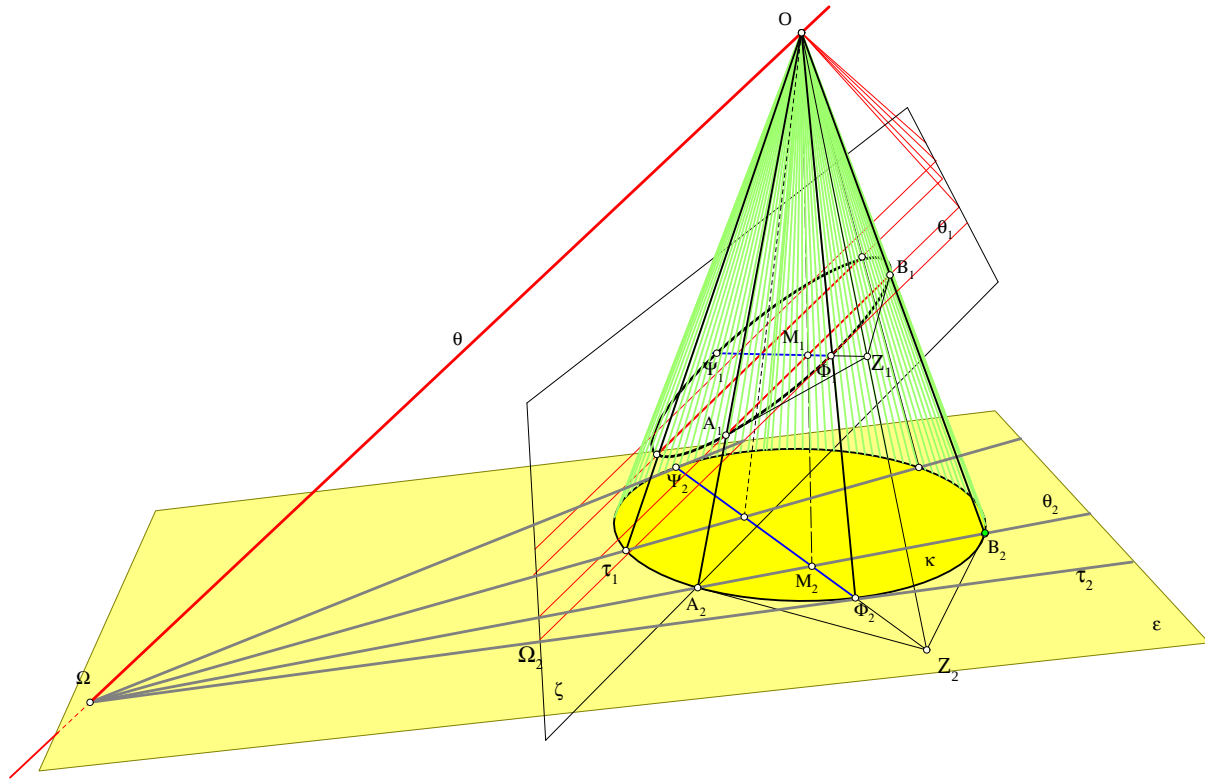
Πρόταση 10.4.2 Από κάθε εξωτερικό σημείο της κωνικής άγονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς αυτήν.



Σχήμα 770: Εφαπτόμενες κωνικής από εξωτερικό σημείο

Απόδειξη: Αν το X είναι εξωτερικό σημείο στο επίπεδο ϵ της κωνικής, τότε η γενέτειρα $\gamma(X)$ ορίζει σε ένα κάθετο επίπεδο ζ ένα αντίστοιχο σημείο Y . Το ζ τέμνει την κωνική επιφάνεια κατά κύκλο κ και το Y είναι εκτός του κύκλου, συνεπώς άγονται δύο εφαπτόμενες $Y\Gamma$ και $Y\Delta$ προς τον κύκλο. Οι εφαπτόμενες αυτές μαζί με το O ορίζουν δύο επίπεδα που τέμνουν το ϵ κατά δύο ευθείες XA, XB της κωνικής. Επειδή κάθε εφαπτόμενη της κωνικής ορίζει με παρόμοιο τρόπο, αυτές είναι οι μοναδικές εφαπτόμενες από το X , ο.ε.δ.

Πρόταση 10.4.3 Τα μέσα των χορδών κωνικής τομής που είναι παράλληλες προς ευθεία θ περιέχονται σε ευθεία ξ . Εάν η κωνική έχει εφαπτόμενες παράλληλες προς την θ , τότε η ξ διέρχεται και από τα σημεία επαφής αυτών των εφαπτομένων.

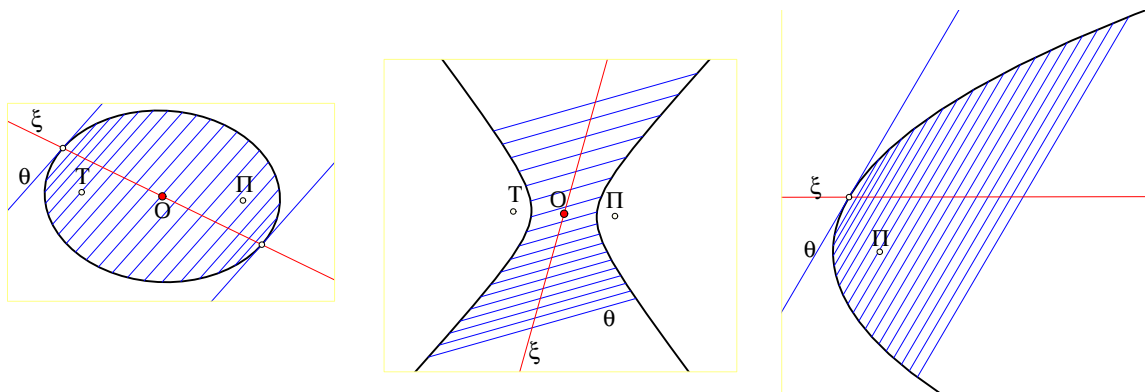


Σχήμα 771: Τα μέσα παραλλήλων χορδών κωνικών

Απόδειξη: Έστω ότι η κωνική προκύπτει ως τομή κωνικής επιφάνειας K με επίπεδο ζ . Παράλληλες χορδές A_1B_1 της κωνικής, ορίζουν, μαζί με την κορυφή O , επίπεδα η_1 . Τα επίπεδα αυτά θα τέμνονται κατά ευθεία θ , διερχόμενη από το O και παράλληλο όλων αυτών των χορδών (Πρόταση 7.1.8). Έστω Ω το σημείο τομής της θ και επιπέδου ε , καθέτου στον άξονα της κωνικής επιφάνειας, που αποτελείται από αυτήν κύκλο κ . Τα επίπεδα η_1 που στο ζ ορίζουν τις παράλληλες χορδές, τέμνουν το επίπεδο ε κατά ευθείες, που συντρέχουν στο σημείο Ω . Κάθε μία τέτοια ευθεία ορίζει και μία αντιστοιχη χορδή του κύκλου κ . Έτσι στις αρχικές χορδές A_1B_1 της κωνικής αντιστοιχούμε χορδές A_2B_2 του κύκλου, οι προεκτάσεις των οποίων είναι ευθείες διερχόμενες διά του Ω . Έστω $\Phi_2\Psi_2$ η πολική του Ω ως προς τον κύκλο κ . Οι ευθείες $\Omega\Phi_2, \Omega\Psi_2$ είναι οι εφαπτόμενες του κύκλου κ από το Ω και η τομή των επιπέδων τους (με το O) ορίζει τις εφαπτόμενες της κωνικής που είναι παράλληλες προς τις χορδές A_1B_1 . Επίσης, για κάθε ευθεία διά του Ω , που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A_2, B_2 , και την πολική στο M_2 , έχουμε ότι $(A_2B_2M_2\Omega) = -1$, συνεπώς και η δέσμη των ευθειών $OA_2, OB_2, OM_2, O\Omega$ του επιπέδου η_1 , που διέρχεται από αυτά τα σημεία θα είναι αρμονική, άρα θα τέμνει και κάθε άλλη ευθεία του επιπέδου αυτών των ευθειών σε ζεύγη αρμονικών συζυγών σημείων. Όμως η ευθεία θ_1 είναι παράλληλη προς την $\theta = O\Omega$ άρα οι άλλες τρεις θα τέμνουν την θ_1 σε δύο ίσα τμήματα και το M_1 θα είναι το μέσον του A_1B_1 . Όμως τα σημεία M_2 και M_1 περιέχονται στο επίπεδο των τριών σημείων O, Φ_2, Ψ_2 , που τέμνει το επίπεδο ζ κατά την ευθεία $\Phi_1\Psi_1$. Συνεπώς τα μέσα όλων αυτών των χορδών A_1B_1 περιέχονται στην ευθεία $\xi = \Phi_1\Psi_1$. Επιπλέον οι εφαπτόμενες της κωνικής στα Φ_1, Ψ_1 είναι και αυτές

παράλληλες προς τις χορδές A_1B_1 , ο.ε.δ.

Σχόλιο-1 Η απόδειξη της τελευταίας πρότασης μπορεί να γίνει με την βοήθεια εξισώσεων σε δύο γραμμές. Ωστόσο το σχήμα 771 έχει ενδιαφέρον από πολλές απόψεις. Η ευθεία θ είναι παράλληλος προς το επίπεδο της κωνικής τομής. Παρόμοια οι ανάλογες της θ ευθείες, που ορίζουν χορδές A_1B_1 της κωνικής παράλληλες προς διάφορες διευθύνσεις, περιέχονται όλες σε ένα επίπεδο ζ' παράλληλο του ζ και διερχόμενο από την κορυφή O της κωνικής επιφάνειας. Το επίπεδο αυτό τέμνει το επίπεδο ϵ του προηγούμενου σχήματος, που περιέχει τον κύκλο κ , κατά ευθεία ν . Ορίζεται συνεπώς ο πόλος N της ν ως προς τον κύκλο κ . Ανάλογα με την κλίση του επιπέδου ζ της κωνικής, ο πόλος N είναι ή εσωτερικό σημείο του κύκλου ή επί του κύκλου ή εξωτερικό σημείο του. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην έλλειψη, η δεύτερη στην παραβολή και η τρίτη στην υπερβολή. Η ευθεία ON αποδεικνύεται εύκολα ότι τέμνει το επίπεδο της κωνικής στο κέντρο της M ή στο άπειρο στην περίπτωση της παραβολής. Οι λεγόμενες **Διάμετροι** της κωνικής, δηλαδή οι χορδές της διά του κέντρου της M , αντιστοιχούν σε παράλληλες των ευθειών θ που διέρχονται διά του M . Έτσι, στην περίπτωση της υπερβολής, στην οποία υπάρχουν δύο γενέτειρες σ και τ της κωνικής επιφάνειας παράλληλες προς το επίπεδο ζ , οι γενέτειρες αυτές θα ορίζουν το επίπεδο ζ' . Τότε η ευθεία ν της τομής των ζ' και ϵ θα τέμνει τον κύκλο κ σε δύο σημεία Γ και Δ και ο πόλος N της ν ως προς κ θα είναι εκτός του κύκλου. Θα άγονται λοιπόν από το N δύο εφαπτόμενες προς τον κ , οι οποίες, μαζί με το O θα ορίζουν δύο επίπεδα διά του O . Τα επίπεδα αυτά θα τέμνουν το ζ κατά δύο ευθείες που δεν συναντούν την κωνική (εφάπτονται της κωνικής στα σημεία που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής Γ και Δ του κύκλου με τις εφαπτόμενες από το N . Στα Γ και Δ όμως αντιστοιχούν τα σημεία της κωνικής στο άπειρο). Αυτές είναι οι λεγόμενες **ασύμπτωτες** της υπερβολής, για τις οποίες θα μιλήσουμε παρακάτω. Παρόμοιοι συσχετισμοί μεταξύ επιπέδων χαρακτηριστικών των κωνικών και χαρακτηριστικών που συνδέονται με τον χώρο και την κωνική επιφάνεια, μέσω της οποίας ορίζεται η κωνική, μπορούν να γίνουν σε πολλές περιπτώσεις. Συνήθως η περιγραφή των χαρακτηριστικών αυτών μέσω εξισώσεων είναι πολύ απλούστερη από την περιγραφή μέσω σχημάτων του χώρου, για τα οποία έχουμε μιά σχετική αδυναμία σχεδιασμού και πρέπει περισσότερο να τα φανταζόμαστε παρά να τα σχεδιάζουμε.

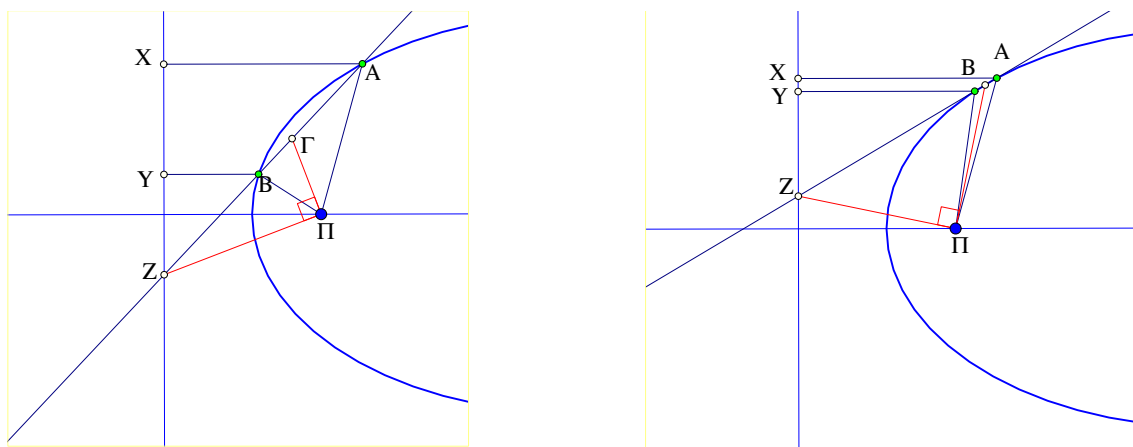


Σχήμα 772: Συζυγείς κατευθύνσεις θ και ξ

Σχόλιο-2 Το σχήμα 772 δίνει την εικόνα στο επίπεδο των χορδών κωνικής που είναι παράλληλες προς ευθεία θ . Τα μέσα τους περιέχονται σε χορδή ξ . Στην έλλειψη, για κάθε ευθεία θ υπάρχουν εφαπτόμενες της παράλλλης της θ και η χορδή ξ διέρχεται από τα ση-

μεία επαφής αυτών των εφαπτομένων. Στην υπερβολή, όπως φαίνεται και από το σχήμα, δεν υπάρχουν πάντοτε εφαπτόμενες προς δοθείσα κατεύθυνση (της θ στο σχήμα). Στην παραβολή, εκτός της κατεύθυνσης του άξονα συμμετρίας της (Πρόταση 10.5.2), για όλες τις άλλες κατευθύνσεις υπάρχει μία ακριβώς εφαπτόμενη παράλληλη προς αυτήν. Το σχήμα δείχνει επίσης, ότι για κωνικές που έχουν κέντρο συμμετρίας, το οποίο λέγεται **Κέντρο της κωνικής** (τέτοιο έχουν μόνο οι ελλείψεις (Πρόταση 10.6.1) και οι υπερβολές (Πρόταση 10.7.1)), οι χορδές ξ που διέρχονται από τα μέσα παραλλήλων χορδών διέρχονται και από το κέντρο της κωνικής. Αποδεικνύεται ότι οι κατευθύνσεις των θ και ξ έχουν πανομοιότυπες ιδιότητες: Εάν οι χορδές οι παράλληλες προς την κατεύθυνση θ έχουν τα μέσα τους σε χορδή παράλληλη προς κατεύθυνση ξ , τότε και οι χορδές οι παράλληλες προς την ξ έχουν τα μέσα τους σε χορδή παράλληλη προς την κατεύθυνση θ . Τέτοια ζευγάρια κατευθύνσεων, όπως τα θ και ξ , λέμε ότι αποτελούν ζεύγη **Συζυγών κατευθύνσεων** της κωνικής. Η παραβολή παρουσιάζει την ιδιομορφία να έχει την ειδική κατεύθυνση του άξονα συμμετρίας της, συζυγή προς κάθε άλλη κατεύθυνση. Στον κύκλο, που είναι ειδική περίπτωση έλλειψης, για κάθε κατεύθυνση θ , η συζυγής της συμπίπτει με την κάθετο προς την θ κατεύθυνση ξ , καθώς τα μέσα παραλλήλων χορδών του κύκλου περιέχονται σε διάμετρο κάθετο προς τις χορδές (Πόρισμα 2.1.3).

Πρόταση 10.4.4 Το τμήμα AZ της εφαπτομένης κωνικής μεταξύ του σημείου επαφής της A και της τομής της Z με την διευθετούσα φαίνεται από την αντίστοιχη εστία υπό ορθή γωνία.



Σχήμα 773: Ιδιότητα τέμνουσας κωνικής

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε δύο γειτονικά σημεία A, B κωνικής, τις προβολές τους X, Y στην διευθετούσα της εστίας Π και το σημείο τομής Z της AB με την διευθετούσα. Λόγω της βασικής σχέσης

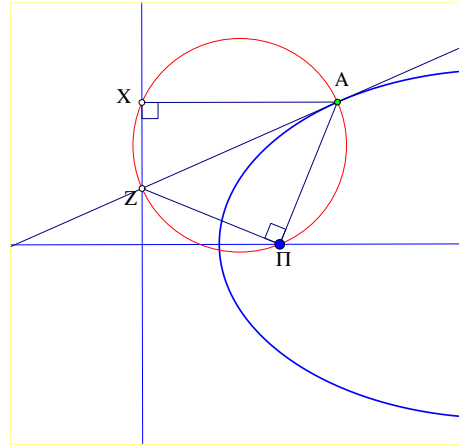
$$\frac{|A\Pi|}{|AX|} = \frac{|B\Pi|}{|BY|} = \kappa,$$

όπου κ η εκκεντρότητα της κωνικής και του ότι τα τρίγωνα ZAX και ZBY είναι όμοια, έπεται ότι

$$\frac{|A\Pi|}{|B\Pi|} = \frac{|ZA|}{|ZB|}.$$

Συνεπώς η ΠZ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας ΑΠΒ . Η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας ΑΠΒ είναι κάθετη στην εξωτερική και περιέχεται μεταξύ των ΠA και ΠB . Επομένως,

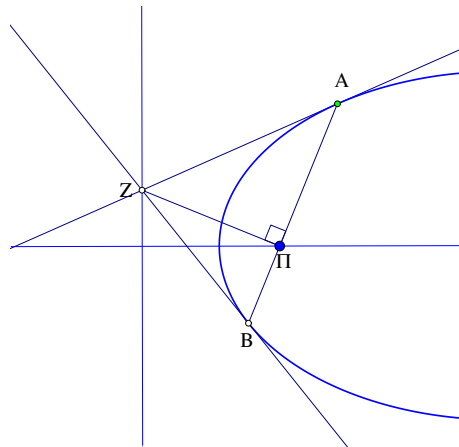
όταν το B τείνει να συμπίψει με το A , το ίδιο θα συμβαίνει και με το ίχνος Γ της εσωτερικής διχοτόμου και στην οριακή θέση, κατά την οποία η AZ γίνεται η εφαπτόμενη στο A (Πρόταση 10.4.1), η γωνία $Z\Pi A$ θα είναι ορθή, ο.ε.δ.



Σχήμα 774: Κύκλος με διάμετρο την AZ

Πόρισμα 10.4.1 Ο κύκλος που διέρχεται από σημείο A κωνικής, την προβολή του X σε διευθετούσα και την αντίστοιχη εστία Π , διέρχεται και από το σημείο τομής Z της εφαπτόμενης στο A και της διευθετούσας.

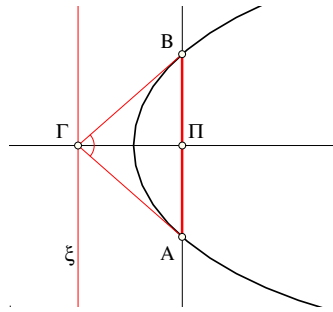
Απόδειξη: Κατά την προηγούμενη πρόταση το τετράπλευρο $AXZ\Pi$ θα είναι εγγράψιμο, ως έχον δύο απέναντι γωνίες ορθές, ο.ε.δ.



Σχήμα 775: Εφαπτόμενες στα άκρα εστιακής χορδής

Πόρισμα 10.4.2 Οι εφαπτόμενες κωνικής στα άκρα χορδής της AB , που διέρχεται από την εστία Π , τέμνονται επί της αντίστοιχης διευθετούσας.

Απόδειξη: Κατά το προηγούμενο πόρισμα, το σημείο τομής της διευθετούσας και της εφαπτόμενης στο A , αλλά και στο B , θα συμπίπτει με το σημείο τομής Z της διευθετούσας και της καθέτου ΠZ της AB στο Π , ο.ε.δ.



Σχήμα 776: Παράμετρος της κωνικής

Άσκηση 10.4.1 Δείξε ότι η χορδή AB που διέρχεται από την εστία Π κωνικής και είναι παράλληλη της αντίστοιχης διευθετούσας ξ , ορίζει μέσω των εφαπτομένων στα άκρα της ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή Γ στην διευθετούσα ξ . Δείξε ότι η γωνία στο Γ είναι ορθή για την παραβολή, οξεία για την έλλειψη και αμβλεία για την υπερβολή.

Το μήκος $|\Pi A|$ στην προηγούμενη άσκηση λέγεται **Ημιπαράμετρος εύρους** της κωνικής (Semi latus rectum της κωνικής). Η απόσταση $p = |\Pi \Gamma|$ λέγεται **Εστιακή παράμετρος** της κωνικής.

10.5 Η Παραβολή

Η παραβολή μπορεί να θεωρηθεί ως η απλούστερη περίπτωση κωνικής τομής. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο (Άσκηση 10.3.1), το σχήμα της προσδιορίζεται πλήρως από έναν θετικό αριθμό δ , που δίδει την απόσταση ΠΜ της εστίας της από την διευθετούσα. Η σταθερά δ συμπίπτει με την εστιακή παράμετρο και συχνά αναφέρεται ως **Παράμετρος της παραβολής**.

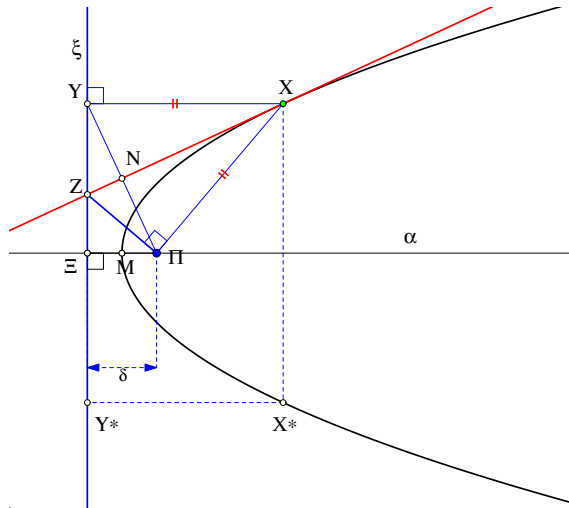
Πρόταση 10.5.1 Δύο παραβολές είναι ίσες τότε και μόνον, όταν έχουν την ίδια παράμετρο.

Απόδειξη: Εδώ η ισότητα πρέπει να νοηθεί ως τοποθέτηση των δύο σχημάτων ώστε να συμπίσουν. Η απόδειξη είναι προφανής και ανάγεται στο ότι ένα σύστημα από μία ευθεία ξ και ένα σημείο Π εκτός αυτής μπορεί να τοποθετηθεί πάνω σε ένα άλλο παρόμοιο, έτσι ώστε τα δύο συστήματα να συμπίσουν, τότε και μόνον, όταν η απόσταση των σημείων από τις αντίστοιχες ευθείες είναι η ίδια, ο.ε.δ.

Στα επόμενα το Π συμβολίζει την εστία και το ξ την διευθετούσα της παραβολής. Επίσης θεωρούμε και τον **Άξονα της παραβολής** που είναι η ευθεία α η διερχόμενη διά του Π και κάθετη στην διευθετούσα ξ . Μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα λέγεται **Διάμετρος της παραβολής**.

Πρόταση 10.5.2 Έστω Π η εστία και ξ η διευθετούσα μίας παραβολής.

- (1) Η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονά της.
- (2) Γιά κάθε σημείο X της παραβολής και την προβολή του Y επί της διευθετούσας, το X ευρίσκεται στην μεσοκάθετο XN του τμήματος PY .
- (3) Η XN είναι εφαπτόμενη της παραβολής στο X .



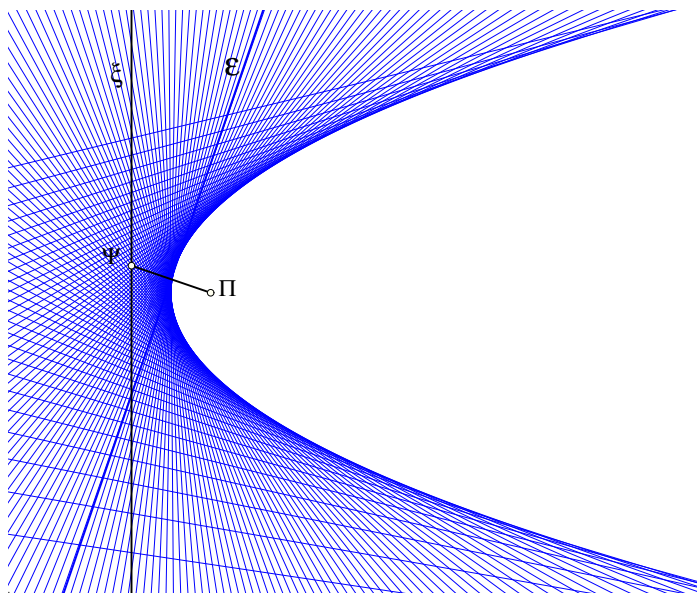
Σχήμα 777: Παραβολής πρώτες ιδιότητες

Απόδειξη: Το (1) προκύπτει αμέσως από τον ορισμό της παραβολής. Αν X είναι σημείο της παραβολής και X^* το συμμετρικό του ως προς τον άξονά της α θα ικανοποιεί τον ορισμό της ίδιας παραβολής.

Το (2) προκύπτει αμέσως από το ότι, εξ ορισμού, το τρίγωνο PXY είναι ισοσκελές.

Το (3): Λόγω του ότι η XN είναι μεσοκάθετος της PY , τα τρίγωνα ZPX και ZYX είναι ίσα, άρα η γωνία ZPX είναι ορθή και συνεπώς η ZX θα συμπίπτει με την εφαπτόμενη από το X (Πρόταση 10.4.4), ο.ε.δ.

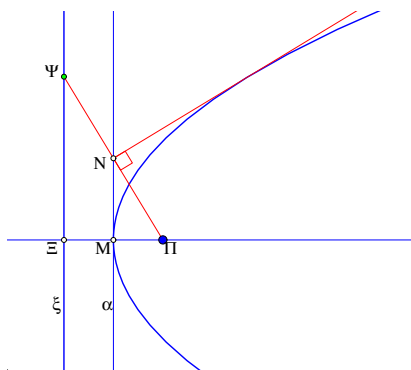
Μία συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι το ότι η παραβολή είναι, ως λέγεται, η **Περιβάλλουσα** των μεσοκαθέτων ευθειών ε των τμημάτων $\Pi\Psi$, όπου το Π είναι σταθερό και το Ψ κινείται επί ευθείας ξ . Τούτο σημαίνει ότι, όλες αυτές οι ευθείες, που παράγονται για τις διάφορες θέσεις του Ψ , είναι εφαπτόμενες της παραβολής που έχει εστία το Π και διευθετούσα την ξ . Το μέσον M της καθέτου $\Pi\Xi$, από την εστία Π στην διευθετούσα ξ



Σχήμα 778: Παραβολή ως περιβάλλουσα

παραβολής, είναι σημείο της παραβολής και λέγεται **Κορυφή της παραβολής**.

Άσκηση 10.5.1 Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων N των τμημάτων $\Pi\Psi$, από την εστία προς σημείο Ψ της διευθετούσας είναι η εφαπτόμενη της παραβολής στην κορυφή της M .



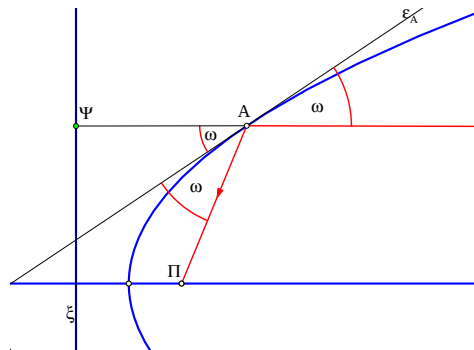
Σχήμα 779: Παραβολή περιβάλλουσα πλευράς ορθής γωνίας

Θεώρημα 10.5.1 (Τετραγωνισμός παραβολής του Αρχιμήδη) Το τμήμα της παραβολής που περιέχεται σε ένα Αρχιμήδειο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν τα $2/3$ του εμβαδού $\epsilon(AB\Gamma)$ του τριγώνου.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης. Πράγματι, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι μέσα στο χωρίο της παραβολής και το $A'B'\Gamma$ είναι έξω και έχει εμβαδόν $\epsilon(A'B'\Gamma) = \epsilon(AB\Delta)/2$. Μπορώ να θεωρήσω ότι πετώ το τρίγωνο $A'B'\Gamma$ και κρατώ το $AB\Delta$. Κατόπιν επαναλαμβάνω την ίδια διαδικασία με τα νέα Αρχιμήδεια τρίγωνα $A\Delta A'$ και $BB'\Delta$ πετώντας πάλι το μισό εμβαδόν αυτού που κρατώ. Τα τρίγωνα που πετώ είναι αυτά που δεν συνεισφέρουν στο εμβαδόν του χωρίου. Τα τρίγωνα που κρατώ είναι αυτά που συνεισφέρουν και συνεχίζω επ' άπειρον με ολοένα μικρότερα τρίγωνα πετώντας ένα μέρος τους $\epsilon(\pi)$ και κρατώντας ένα άλλο $\epsilon(\kappa)$, πάντοτε όμως στην αναλογία $\epsilon(\pi) = \epsilon(\kappa)/2$. Στο όριο της άπειρης διαδικασίας θα έχω εξαντλήσει όλο το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου πετώντας το $\epsilon(\Pi) = \epsilon(K)/2$ του μέρους που κρατώ. Το εμβαδόν $\epsilon(K)$ που θα έχει απομείνει θα είναι ακριβώς το εμβαδόν του χωρίου της παραβολής που με ενδιαφέρει. Επειδή $\epsilon(\Pi) + \epsilon(K) = \epsilon(AB\Gamma)$, έπεται ότι $\frac{1}{2}\epsilon(K) + \epsilon(K) = \epsilon(AB\Gamma)$, ο.ε.δ.

Άσκηση 10.5.3 Δείξε ότι τα μέσα M παραλλήλων χορδών AB παραβολής περιέχονται σε ευθεία ϵ παράλληλη του άξονος και ότι η ϵ τέμνει την παραβολή σε σημείο Δ , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλος προς αυτές τις χορδές.

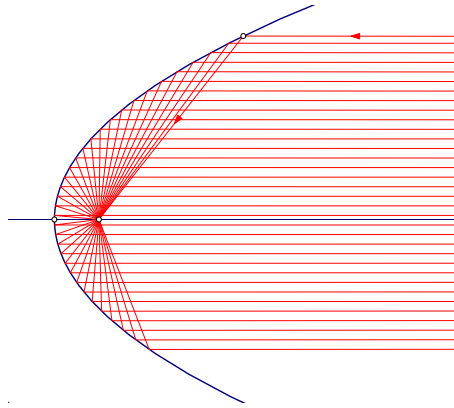
Υπόδειξη: Άμεση συνέπεια της Πρότασης 10.5.3, κατά την οποία το μέσον M της χορδής είναι στην διάμεσο ΓM του Αρχιμήδειου τριγώνου που ορίζεται από την χορδή, η δε διάμεσος αυτή είναι παράλληλος του άξονος και διέρχεται από το σημείο Δ στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλος της χορδής. Επομένως όλες οι χορδές θα έχουν το μέσον τους επί της παραλλήλου του άξονος που διέρχεται από το σημείο Δ , στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη της χορδής. Τώρα ότι υπάρχει ένα τέτοιο Δ , δηλαδή ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτόμενη έχει μία δεδομένη κατεύθυνση, έπεται από το ότι, εξ ορισμού, η παραβολή έχει όλα τα σημεία της από την ίδια μεριά κάθε εφαπτομένης της.



Σχήμα 781: Παραβολικό κάτοπτρο

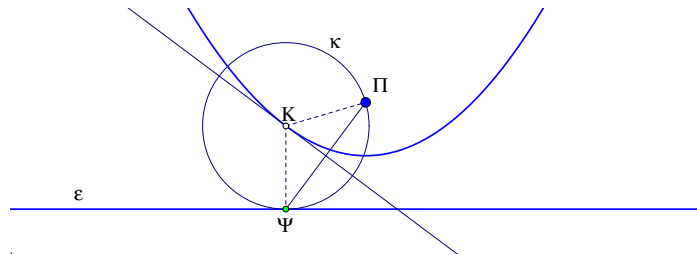
Άσκηση 10.5.4 Δείξε ότι μία ακτίνα προσπίπτουσα σε παραβολή παράλληλα προς τον άξονά της, ανακλώμενη, διέρχεται από την εστία της.

Υπόδειξη: Άμεση συνέπεια του ορισμού, κατά τον οποίο το ίχνος Ψ της ακτίνας επί της διευθετούσης και το τμήμα AP στο σημείο ανάκλασης A σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο $AP\Psi$, του οποίου η διχοτόμος στο A συμπίπτει με την εφαπτόμενη ϵ_A στο A .



Σχήμα 782: Παραβολικό κάτοπτρο II

Άσκηση 10.5.5 Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων κύκλων, εφαπτομένων δοθείσης ευθείας ε και διερχομένων από δοθέν σημείο Π εκτός της ε , είναι η παραβολή με εστία στο Π και διευθετούσα την ευθεία ε .

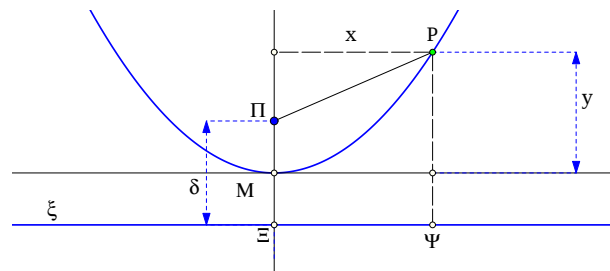


Σχήμα 783: Παραβολή ως τόπος κέντρων κύκλων

Άσκηση 10.5.6 Δείξε ότι οι αποστάσεις x, y ενός σημείου P της υπερβολής, από τον άξονά της και την εφαπτόμενη στην κορυφή της αντίστοιχα, ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 = 2\delta \cdot y,$$

όπου δ η παράμετρος της παραβολής.

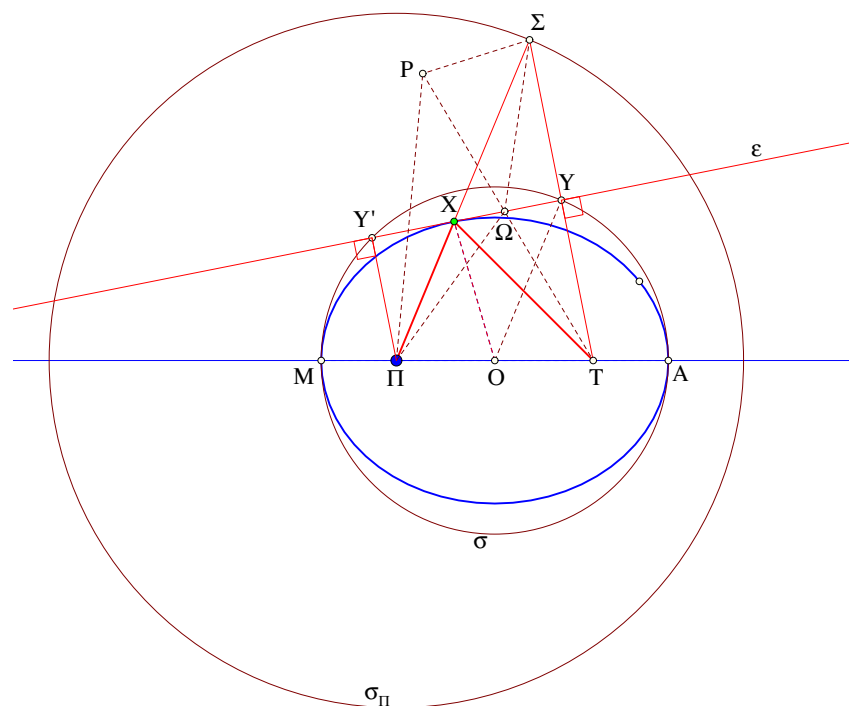


Σχήμα 784: Παραβολή μέσω εξίσωσης

Υπόδειξη: $|P\Pi| = |P\Psi| \Leftrightarrow (y + \frac{\delta}{2})^2 = x^2 + (y - \frac{\delta}{2})^2$.

Βοηθητικός ή και **Μείζων κύκλος** της έλλειψης λέγεται ο κύκλος με κέντρο το κέντρο O της έλλειψης και ακτίνα τον μεγάλο άξονα a . Οι κύκλοι με κέντρα τις εστίες της έλλειψης και ακτίνα $2a$ ονομάζονται **Διευθετούντες κύκλοι** της έλλειψης.

- Πρόταση 10.6.4** (1) Έστω Σ τυχόν σημείο του διευθετούντος κύκλου σ_{Π} της έλλειψης με κέντρο στην εστία Π και δεύτερη εστία στο T . Η μεσοκάθετος ε του τμήματος ΣT τέμνει την $\Sigma\Pi$ σε σημείο X της έλλειψης.
 (2) Η ε είναι εφαπτόμενη της έλλειψης και το X είναι το σημείο επαφής της ε .
 (3) Η έλλειψη περιέχεται ολόκληρη στην μεριά της εφαπτομένης της που περιέχει και τις εστίες της έλλειψης.
 (4) Η έλλειψη περιέχεται ολόκληρη στο εσωτερικό του βοηθητικού κύκλου της σ .
 (5) Η εφαπτόμενη ε στο X διχοτομεί την παραπληρωματική της γωνίας ΠXT .
 (6) Οι προβολές Y και Y' των εστιών στην εφαπτόμενη ε περιέχονται στον βοηθητικό κύκλο της έλλειψης.
 (7) Το γινόμενο $|TY||\Pi Y'|$ είναι σταθερό και ίσο με b^2 .



Σχήμα 787: Βοηθητικός και διευθετών κύκλος έλλειψης

Απόδειξη: Το (1) είναι συνέπεια του ορισμού αφού $|\Pi X| + |XT| = |\Pi X| + |X\Sigma| = 2a$.

Γιά το (2) ας θεωρήσουμε σημείο Ω της ε , διαφορετικό του X . Λόγω της μεσοκαθέτου

$$|\Omega\Pi| + |\Omega T| = |\Pi\Omega| + |\Omega\Sigma| > |\Pi\Sigma| = 2a.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι η τριγωνική για το τρίγωνο $\Pi\Sigma\Omega$. Η ανισότητα δείχνει ότι το Ω δεν ανήκει στην έλλειψη, άρα το X είναι το μοναδικό σημείο της ε κοινό με την έλλειψη.

Γιά το (3) ας θεωρήσουμε τυχόν σημείο P από την άλλη μεριά της ε αυτής που περιέχει τις εστίες. Έστω Ω το σημείο τομής της PT με την ε . Ισχύει

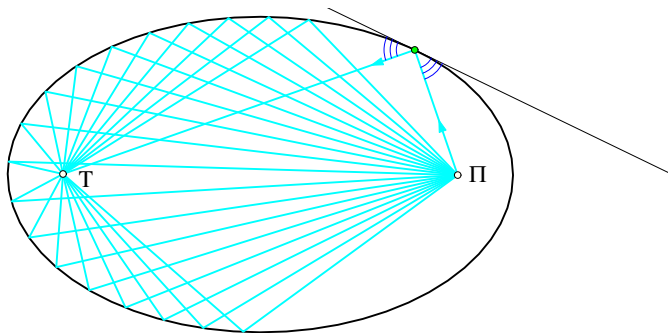
$$|P\Pi| + |PT| = |P\Pi| + |P\Omega| + |\Omega T| = |P\Pi| + |P\Omega| + |\Omega\Sigma| > |P\Pi| + |P\Sigma| > |\Pi\Sigma| = 2a.$$

Άρα το P δεν ανήκει στην έλλειψη. Οι δύο τελευταίες ανισότητες είναι οι τριγωνικές για τα τρίγωνα $P\Sigma\Omega$ και $\Pi P\Sigma$.

Το (4) οφείλεται στο ότι η OX είναι διάμεσος του τριγώνου PXT και συνεπώς $|OX| < \frac{1}{2}(|XP| + |XT|) = a$ (Άσκηση 1.14.3).

Το (5) οφείλεται στο ότι το τρίγωνο $TX\Sigma$ είναι ισοσκελές, άρα η μεσοκάθετος ε της ΣT διχοτομεί την γωνία στην κορυφή του.

Το (6), για το σημείο Y οφείλεται στο ότι η OY συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\Sigma\Pi T$, άρα $|OY| = \frac{|\Pi\Sigma|}{2} = a$. Ανάλογα αποδεικνύεται η ιδιότητα και για την προβολή Y' του Π πάνω στην ε . Το (7) προκύπτει προεκτείνοντας την TY έως ότου τμήσει τον κύκλο σ σε σημείο Y^* . Λόγω της συμμετρίας της έλλειψης ως προς O , οι TY^* και PY' είναι ίσες και το γινόμενο $|TY||PY'| = |TY||TY^*|$ είναι ίσο (εκτός προσήμου) με την δύναμη της εστίας T ως προς τον μέζονα κύκλο σ , ο.ε.δ.



Σχήμα 788: Ανακλαστική ιδιότητα εστιών έλλειψης

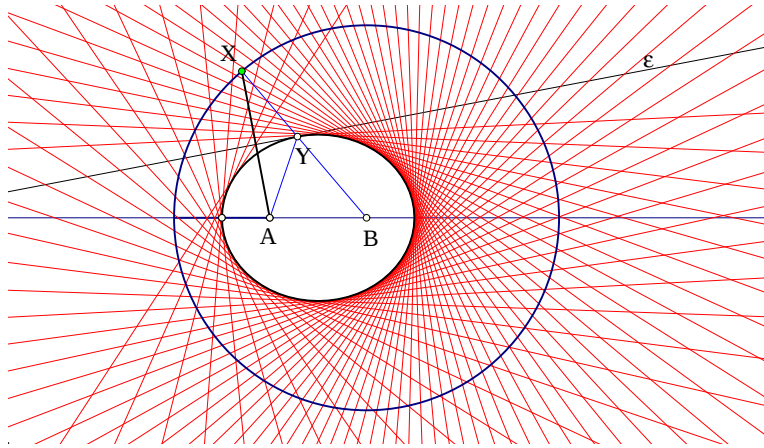
Σχόλιο Από την ιδιότητα (5) προκύπτει ότι οι ακτίνες φωτός, που εκπέμπονται από μία εστία της έλλειψης, προσπίπτουσες στην έλλειψη και ανακλώμενες στα σημεία της, έτσι ώστε προσπίπτουσα και ανακλώμενη ακτίνα να σχηματίζουν την ίδια γωνία με την εφαπτόμενη, διέρχονται από την άλλη εστία.

Άσκηση 10.6.1 Δείξε ότι η μεσοκάθετος ενός τμήματος AX , με A σταθερό και X μεταβαλλόμενο επί κύκλου $\kappa(B, \rho)$, είναι εφαπτόμενη έλλειψης με εστίες στο A και στο κέντρο του κύκλου B και μεγάλο άξονα την ακτίνα ρ του κύκλου.

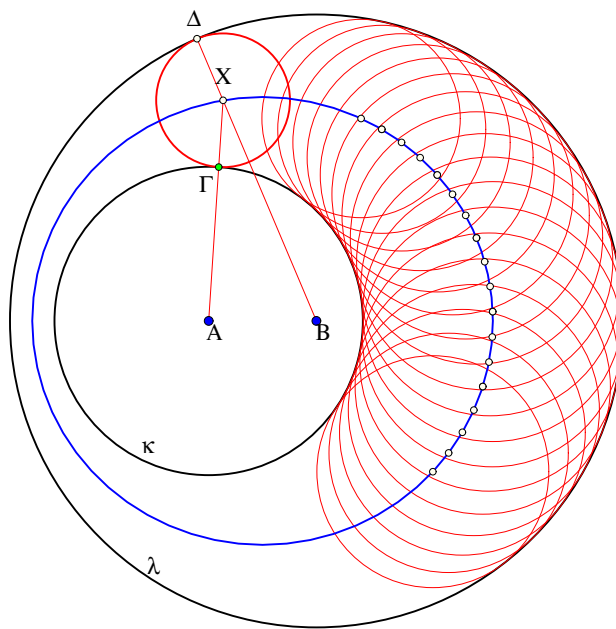
Υπόδειξη: Θεώρησε την τομή Y της μεσοκαθέτου με την BX . Το άθροισμα $|XA| + |XB|$ είναι σταθερά ίσο με ακτίνα ρ του κύκλου κ .

Άσκηση 10.6.2 Δίδονται δύο μη συγκεντρικοί κύκλοι $\kappa(A, \rho)$ και $\lambda(B, \rho')$, εκ των οποίων ο πρώτος περιέχεται ολόκληρος εντός του δεύτερου. Δείξε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων X κύκλων που εφάπτονται ταυτόχρονα των κ και λ είναι έλλειψη με εστίες τα A και B και μεγάλο άξονα το ημιάθροισμα των ακτίνων των δύο κύκλων.

Υπόδειξη: Το σημείο επαφής Γ ενός κύκλου που εφάπτεται του κ είναι επί της διακέντρου $ΑΓ$. Το ίδιο συμβαίνει και με το σημείο επαφής Δ του κύκλου με τον άλλο κύκλο λ . Τότε



Σχήμα 789: Περιβάλλουσα των μεσοκαθέτων των τμημάτων AX



Σχήμα 790: Έλλειψη ως τόπος κέντρων κύκλων εφαπτομένων δύο άλλων

το μήκος

$$|XA| + |XB| = |A\Gamma| + |\Gamma X| + |XB| = |A\Gamma| + |XB| + |X\Delta| = \rho + \rho'.$$

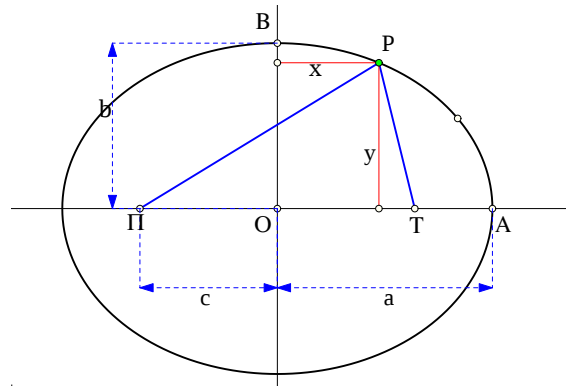
Άσκηση 10.6.3 Δείξε ότι αν x, y είναι οι αποστάσεις σημείου P έλλειψης από τον μικρό και μεγάλο άξονα αντίστοιχα, τότε ισχύει η εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

όπου a, b αντίστοιχα ο μεγάλος και ο μικρός άξονας της έλλειψης.

Υπόδειξη: Η εξίσωση $|PP| + |PT| = 2a$ εκφράζεται συναρτήσει των x και y με την

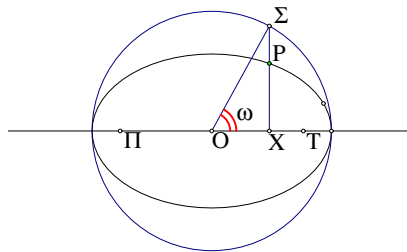
$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a.$$



Σχήμα 791: Έλλειψη μέσω εξίσωσης

Υψώνοντας τα δύο μέλη στο τετράγωνο, απομονώνοντας την ρίζα και ξαναυψώνοντας ώστε αυτή να εξαλειφθεί, οδηγούμεθα στον αναφερόμενο τύπο, λαμβανομένου υπόψη και του $a^2 = b^2 + c^2$.

Άσκηση 10.6.4 Δείξε ότι η ημιπαράμετρος εύρους της έλλειψης είναι $\frac{b^2}{a} = \kappa \cdot p$, όπου κ η εκκεντρότητα της έλλειψης και p η εστιακή παράμετρος αυτής.



Σχήμα 792: Εκκεντρική γωνία

Εκκεντρική γωνία στο σημείο P έλλειψης ονομάζεται η γωνία $\omega = |\angle XOS|$ που σχηματίζεται από τον μεγάλο άξονα και την ακτίνα OS του βοηθητικού κύκλου στο σημείο Σ, στο οποίο η κάθετη από το P στον μεγάλο άξονα τέμνει την έλλειψη.

Άσκηση 10.6.5 Έστω P σημείο της έλλειψης ε και X η προβολή του P στον μεγάλο άξονα. Έστω επίσης Σ το σημείο τομής της XP με την έλλειψη και από την ίδια μεριά με το P ως προς τον μεγάλο άξονα. Δείξε ότι:

$$(1) \frac{|PX|}{|SX|} = \frac{b}{a},$$

$$(2) y = |PX| = b \eta \mu(\omega), \text{ όπου } \omega \text{ η εκκεντρική γωνία του } P.$$

Πρόταση 10.7.3

$$a = |OA| = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2a = |AM|, \quad (10.7)$$

$$c = \frac{|\Pi T|}{2}, \quad b = |MB| \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2, \quad (10.8)$$

$$|M\Pi| = c - a, \quad |A\Pi| = c + a \Rightarrow |M\Xi| = \frac{c - a}{\kappa}, \quad |A\Xi| = \frac{c + a}{\kappa}, \quad (10.9)$$

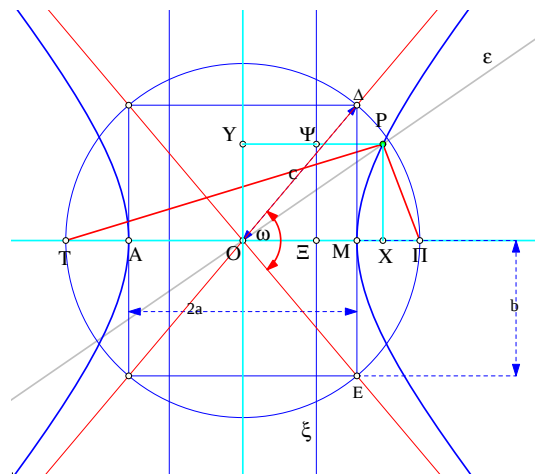
$$|\Pi\Xi| = |\Pi M| + |M\Xi| = (c - a) + \frac{c - a}{\kappa} = \frac{1 + \kappa}{\kappa}(c - a), \quad (10.10)$$

$$\kappa = \frac{c}{a} \Rightarrow |\Pi\Xi| = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa}a = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}, \quad (10.11)$$

$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2 - 1}p, \quad c = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1}p, \quad p = |\Pi\Xi|. \quad (10.12)$$

Απόδειξη: Τετριμμένες συνέπειες των ορισμών. Η πρώτη της (9.11) προκύπτει από τον λόγο $\kappa = \frac{|A\Pi|}{|A\Xi|}$, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες. Οι τελευταίες δύο σειρές δίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ζευγών αριθμών $(|\Pi\Xi|, \kappa)$ και $(\lambda, |\Pi T|)$ που ορίζουν την υπερβολή με τους δύο συνήθεις τρόπους, ο.ε.δ.

Ένα χαρακτηριστικό της υπερβολής που δεν συναντάμε στα άλλα είδη κωνικών τομών είναι οι **Ασύμπτωτες** της υπερβολής. Αυτές είναι δύο ευθείες που χωρίζουν όλες τις ευθείες διά του κέντρου O της υπερβολής σε δύο ομάδες. Οι ευθείες της πρώτης ομάδας τέμνουν την υπερβολή, ενώ οι ευθείες της δεύτερης ομάδας δεν τέμνουν την υπερβολή.



Σχήμα 795: Ασύμπτωτες της υπερβολής

Πρόταση 10.7.4 *Γιά κάθε υπερβολή υπάρχει μία γωνία ω με κορυφή στο κέντρο της O , έτσι ώστε κάθε ευθεία διά του O και περιεχόμενη σε αυτήν την γωνία να τέμνει την υπερβολή, ενώ κάθε ευθεία διά του O και μη περιεχόμενη στην γωνία να μην την τέμνει.*

Απόδειξη: Γιά την απόδειξη χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.8.6, σύμφωνα με την οποία, τα σημεία P μίας ευθείας ε δια του O χαρακτηρίζονται από έναν σταθερό λόγο $\mu = \frac{|PX|}{|PY|}$, όπου

X και Y οι προβολές του P στους κάθετους άξονες της υπερβολής. Για ένα σημείο μιάς τέτοιας ευθείας, λοιπόν, η απαίτηση να περιέχεται και στην ύπερβολή οδηγεί στην εξίσωση

$$\kappa = \frac{|P\Pi|}{|P\Psi|} = \frac{\sqrt{|PX|^2 + |X\Pi|^2}}{|PY| - |Y\Psi|} \Leftrightarrow |PX|^2 + |X\Pi|^2 = \kappa^2(|PY| - |Y\Psi|)^2.$$

Αν θέσουμε $|PY| = x$, τότε ισχύουν και οι

$$|PX| = \mu \cdot x, \quad |X\Pi|^2 = (c - x)^2, \quad |Y\Psi| = \frac{a}{\kappa}$$

και η προηγούμενη εξίσωση μεταφράζεται σε μία εξίσωση του x .

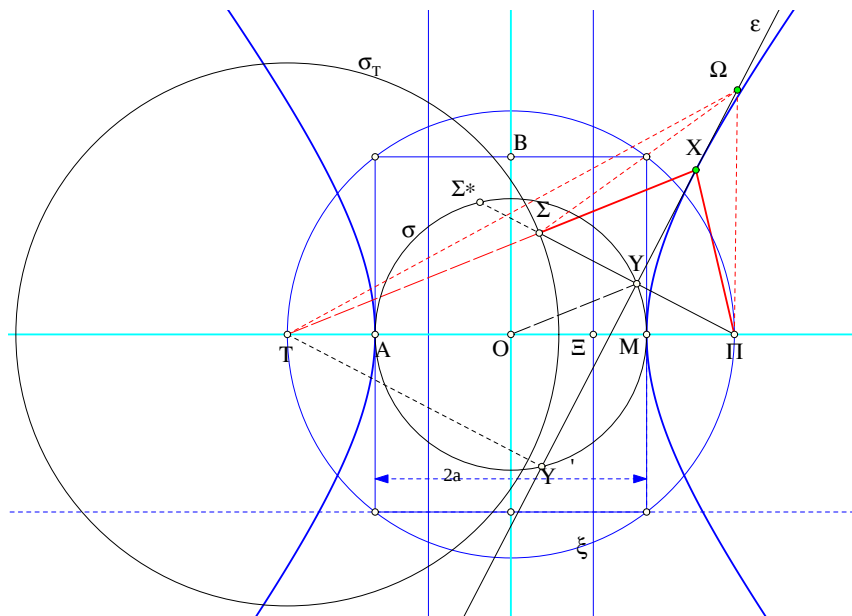
$$x^2(\mu^2 + 1 - \kappa^2) = b^2.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τότε ακριβώς λύση, όταν ισχύει

$$\mu^2 + 1 - \kappa^2 > 0 \Leftrightarrow \mu^2 < \frac{b^2}{a^2},$$

που ισοδυναμεί με το ότι η ευθεία ε τέμνει την κάθετο ΔE της AM σε απόσταση από το M μικρότερη του β , ο.ε.δ.

Η σταθερά a , συχνά και το ευθύγραμμο τμήμα OM ή/και η ίδια η ευθεία OM ονομάζονται **Εγκάρσιος άξονας** της υπερβολής. Αντίστοιχα το μήκος b ή/και ο άξονας συμμετρίας ο κάθετος στον προηγούμενο ονομάζεται **Συζυγής άξονας** της υπερβολής. **Διευθετούντες κύκλοι** της υπερβολής λέγονται οι δύο κύκλοι με κέντρα τις εστίες της και ακτίνα $2a$, όπου a ο μεγάλος άξονας της υπερβολής. Ο κύκλος με κέντρο το κέντρο O της υπερβολής και ακτίνα a λέγεται **Βοηθητικός κύκλος** ή και **Μείζων κύκλος** της υπερβολής.



Σχήμα 796: Βασικές ιδιότητες υπερβολής

Πρόταση 10.7.5 (1) Εστω Σ τυχόν σημείο του βοηθητικού κύκλου σ_T της υπερβολής με κέντρο στην εστία T και δεύτερη εστία στο Π . Η μεσοκάθετος ε του τμήματος $\Sigma\Pi$ τέμνει την $\Sigma\Pi$ σε σημείο X της υπερβολής.

(2) Η ε είναι εφαπτόμενη της υπερβολής και το X είναι το σημείο επαφής της ε .

(3) Η υπερβολή περιέχεται ολόκληρη στο εξωτερικό του μείζονα κύκλου της σ .

(4) Η εφαπτόμενη ε στο X διχοτομεί την γωνία ΠXT .

(5) Οι προβολές Y και Y' των εστιών στην εφαπτόμενη ε περιέχονται στον μείζονα κύκλο της υπερβολής.

(6) Το γινόμενο $|\Pi Y||TY'|$ είναι σταθερό και ίσο με b^2 .

Απόδειξη: Το (1) είναι συνέπεια του ορισμού αφού $|TX| - |X\Pi| = |TX| + |X\Sigma| = 2a$.

Για το (2) ας θεωρήσουμε σημείο Ω της ε , διαφορετικό του X . Λόγω της μεσοκαθέτου

$$|\Omega T| - |\Omega\Pi| = |\Omega T| - |\Omega\Sigma| < |T\Sigma| = 2a.$$

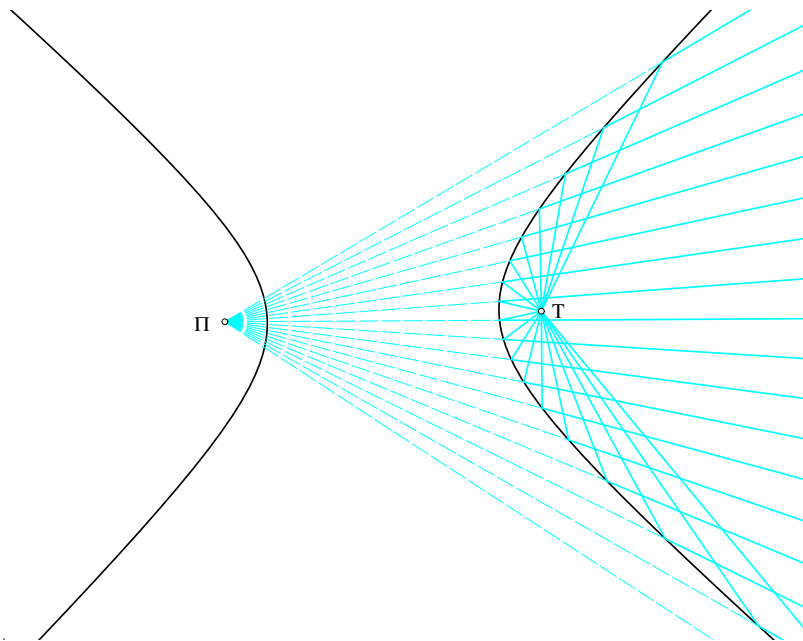
Η τελευταία ανισότητα είναι η τριγωνική για το τρίγωνο $T\Sigma\Omega$. Η ανισότητα δείχνει ότι το Ω δεν ανήκει στην υπερβολή, άρα το X είναι το μοναδικό σημείο της ε κοινό με την υπερβολή.

Το (3) οφείλεται στο ότι η OX είναι διάμεσος του τριγώνου ΠXT και συνεπώς $|OX| > \frac{1}{2}(|XT| - |X\Pi|) = a$ (Άσκηση 1.14.3).

Το (4) οφείλεται στο ότι το τρίγωνο $\Pi X\Sigma$ είναι ισοσκελές, άρα η μεσοκάθετος ε της $\Sigma\Pi$ διχοτομεί την γωνία στην κορυφή του.

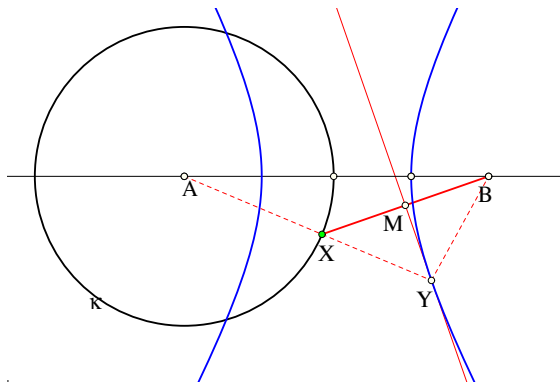
Το (5), για το σημείο Y οφείλεται στο ότι η OY συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\Sigma\Pi T$, άρα $|OY| = \frac{|T\Sigma|}{2} = a$. Ανάλογα αποδεικνύεται η ιδιότητα και για την προβολή Y' του T πάνω στην ε .

Το (6) προκύπτει προεκτείνοντας την ΠY έως ότου τμήσει τον κύκλο σ σε σημείο Y^* . Λόγω της συμμετρίας της υπερβολής ως προς O , οι ΠY^* και TY' είναι ίσες και το γινόμενο $|\Pi Y||TY'| = |\Pi Y||\Pi Y^*|$ είναι ίσο με την δύναμη της εστίας Π ως προς τον μείζονα κύκλο σ , ο.ε.δ.



Σχήμα 797: Ανακλαστική ιδιότητα υπερβολής

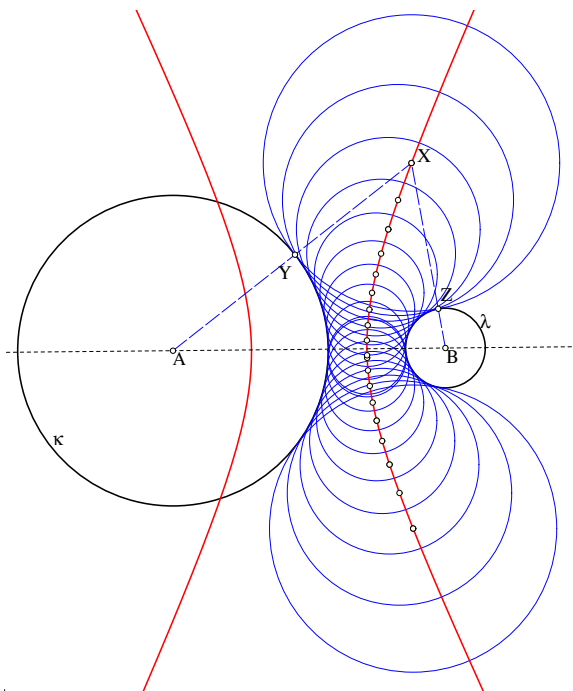
Η τελευταία εικόνα δείχνει την συνέπεια του (4) της προηγούμενης πρότασης, κατά το οποίο ακτίνες κατευθυνόμενες προς μία εστία Π της υπερβολής και ανακλώμενες επ' αυτής συγκεντρώνονται στην άλλη εστία Γ της υπερβολής.



Σχήμα 798: Υπερβολή ως περιβάλλουσα μεσοκαθέτων του BX

Άσκηση 10.7.1 Δοθέντος κύκλου $\kappa(A, \rho)$ και σημείου B εκτός αυτού, δείξε ότι οι μεσοκάθετοι των τμημάτων BX , όπου X σημείο του κύκλου είναι εφαπτόμενες υπερβολής με εστίες τα σημεία A και B και εγκάρσιο άξονα ρ .

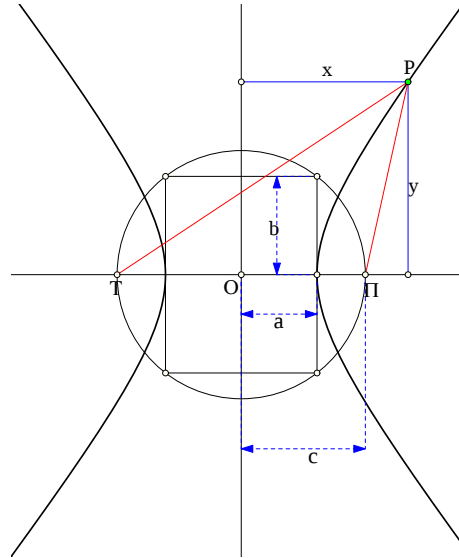
Υπόδειξη: Προέκτεινε την AX έως ότου τμήσει την μεσοκάθετο στο Y . Τότε $|YA| - |YB| = |YA| - |YX| = \rho$.



Σχήμα 799: Υπερβολή ως τόπος κέντρων κύκλων

Άσκηση 10.7.2 Δοθέντων κύκλων $\kappa(A, \rho)$ και $\lambda(B, \rho')$ δείξε ότι τα κέντρα τρίτων κύκλων που εφάπτονται και των δύο δοθέντων ευρίσκονται επί υπερβολής με εστίες τα κέντρα A, B των κύκλων και εγκάρσιο άξονα την διαφορά $|\rho - \rho'|$ των ακτίνων.

Υπόδειξη: Έστω Y, Z τα σημεία επαφής ενός τρίτου κύκλου που εφάπτεται των δύο δοθέντων. Τα X, Y και A είναι επ' ευθείας και παρόμοια, τα X, Z, B είναι επ' ευθείας. Ισχύει συνεπώς $||XA| - |XB|| = |(|XY| + |YA|) - (|XZ| + |ZB|)| = ||YA| - |ZB|| = |\rho - \rho'|$.



Σχήμα 800: Υπερβολή μέσω εξίσωσης

Άσκηση 10.7.3 Δείξε ότι αν x, y είναι οι αποστάσεις σημείου P υπερβολής από τον συζυγή και τον εγκάρσιο άξονα αντίστοιχα, τότε ισχύει η εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

όπου a, b αντίστοιχα ο εγκάρσιος και ο συζυγής άξονας της υπερβολής.

Υπόδειξη: Η εξίσωση $|PT| - |P\Pi| = 2a$ εκφράζεται συναρτήσει των x και y με την

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Υψώνοντας τα δύο μέλη στο τετράγωνο, απομονώνοντας την ρίζα και ξαναυψώνοντας ώστε αυτή να εξαλειφθεί, οδηγούμεθα στον αναφερόμενο τύπο, λαμβανομένου υπόψη και του $c^2 = a^2 + b^2$.

Άσκηση 10.7.4 Δείξε ότι αν $u = |P\Sigma|, v = |P\Phi|$ είναι τα μήκη των πλευρών παραλληλογράμμου $P\Sigma O\Phi$ που ορίζεται από το σημείο P υπερβολής, φέρνοντας παράλληλες προς τις ασύμπτωτες, τότε ισχύει:

$$u \cdot v = \frac{1}{4}c^2,$$

όπου $2c$ η εστιακή απόσταση της υπερβολής.

Βιβλιογραφία

- [M52] Μ, Φ Γ: *Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών)*. Εκδόσεις Καραβία, Αθήναι, 1952.
- [Καν76] Κανέλλος, Σπύρος: *Ευκλείδειος Γεωμετρία*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, 1976.
- [Παπ81] Παπανικολάου, Χρ: *Ευκλείδειος Γεωμετρία γιά την Β' Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, 1981.
- [Ντε91] Ντεργιαδής, Νικόλαος: *Μιά απλή γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος του Morley*. Διάσταση, 1:37–38, 1991.
- [Σπί94] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.
- [Καπ96] Καπέτης, Γεώργιος: *Γεωμετρία του Τριγώνου, τομ. Α, Β*. Εκδόσεις Ζητη, Θεσσαλονίκη, 1996.
- [Σπί04] Σπίβακ, Μιχαήλ: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2004.
- [AB83] A. Bruen, J. Fisher, J. Wilker: *Apollonius by inversion*. Mathematics Magazine, 56:97–103, 1983.
- [Alp00] Alperin, Roger: *A mathematical theory of origami constructions and numbers*. New York Journal of Mathematics, 6:119–133, 2000.
- [AP88] Agazzi, Evandro and Dario Palladino: *Le Geometrie non Euclidee e i Fondamenti della Geometria*. La scuola, Brescia, 1988.
- [Aud02] Audin, Michele: *Geometry*. Springer Verlag, 2002.
- [Bac73] Bachmann, Friedrich: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer Verlag, Heidelberg, 1973.
- [Bai88] Bailey, David: *The computation of π to 29,360,000 decimal digits using borweins' quartically convergent algorithm*. Mathematics of Computation, 50:283–296, 1988.
- [Bel07] Belyaev, Oleg: *Fundamentals of Geometry*. Preprint (Internet), 2007.
- [Ber87] Berger, Marcel: *Geometry vols I, II*. Springer Verlag, Heidelberg, 1987.

- [Ber02] Berger, Marcel: *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer Verlag, Heidelberg, 2002.
- [BH07] Barker, William and Roger Howe: *Continuous Symmetry, From Euclid to Klein*. American Mathematical Society, 2007.
- [Bir32] Birkhoff, George: *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor*. *Annals of Mathematics*, 33:329–345, 1932.
- [Bol82] Bold, Benjamin: *Famous Problems of Geometry*. Dover Publications, Inc., New York, 1982.
- [Bon12] Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*. The Open Court Publishing Company, Chicago, 1912.
- [Bot07] Bottema, Oene: *Topics in Elementary Geometry*. Springer Verlag, Heidelberg, 2007.
- [Cai33] Cairns, Stewart: *An axiomatic basis for plane geometry*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 35:234–244, 1933.
- [CG67] Coxeter, H and L Greitzer: *Geometry Revisited*. Math. Assoc. Amer. Washington DC, 1967.
- [Cha65] Chasles, M.: *Traite de Sections Coniques*. Gauthier-Villars, Paris, 1865.
- [Coo16] Coolidge, Julian Lowell: *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford University Press, Oxford, 1916.
- [Cou80] Court, Nathan Altshiller: *College Geometry*. Dover Publications Inc., New York, 1980.
- [Cox61] Coxeter, H: *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1961.
- [Cox68] Coxeter, H S M: *The problem of apollonius*. *American Math. Monthly*, 75:5–15, 1968.
- [CR96] Courant, Richard and Herbert Robbins: *What is Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [Dan55] Dantzig, Tobias: *The bequest of the Greeks*. George Allen and Unwin Ltd., London, 1955.
- [dC76] Carmo, Manfredo do: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [Der07] Dergiades, Nikolaos: *The soddy circles*. *Forum Geometricorum*, 7:191–197, 2007.
- [Doe65] Doerrie, Heinrich: *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications, Inc. New York, 1965.

- [eJPL99] Jean-Pierre Lafon, Pierre Eymard et: *Autour du nombre π* . Hermann Editeurs, Paris, 1999.
- [Eve63] Eves, Howard: *A survey of Geometry*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.
- [Fou05] Fourrey, E.: *Curiosites Geometriques*. Vuibert et Nony editeurs, Paris, 1905.
- [Fur37] Fursenko, V.B.: *Lexicographical account of constructional problems of triangle geometry*. Mathematics in school (in Russian), 5:4–30, 1937.
- [Gal13] Gallatly, William: *The modern geometry of the triangle*. Francis Hodgsonn, London, 1913.
- [Gla20] Glaser, Robert: *Stereometrie*. Walther de Gruyter, 1920.
- [GR04] Gisch, David and Jason Ribando: *Apolloniu's problem: A study of solutions and their connections*. American Journal of Undergraduate Research, 3:15–26, 2004.
- [Hea08] Heath, T: *The thirteen books of Euclid's elements vol. I, II, III*. Cambridge University Press, Cambridge, 1908.
- [Hei85] Heiberg, Johan: *Euclidis Elementa*. Teubner Verlag, 1885.
- [Hil03] Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie*. Teubner Verlag, Leipzig, 1903.
- [Hon95] Honsberger, Ross: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. The Mathematical Association of America, New Library, Washington, 1995.
- [Joh16] Johnson, Roger: *Relating to the simson line or wallace line*. American Math. Monthly, 23:61–62, 1916.
- [Joh60] Johnson, Roger: *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications, New York, 1960.
- [Kaz70] Kazarinoff, Nicholas: *Ruler and the Round*. Dover, New York, 1970.
- [KF70] Kolmogorov, A. and S. Fomin: *Introductory Real Analysis*. Dover, New York, 1970.
- [Kle97] Klein, Felix: *Famous Problems of Elementary Geometry*. Ginn and Company, Boston, 1897.
- [Lac93] Lachlan, R.: *Modern Pure Geometry*. Macmillan and Co., London, 1893.
- [Lal52] Lalesco, Trajan: *La Geometrie du triangle*. Librairie Vuibert, Paris, 1952.
- [Leg37] Legendre, Adrien Marie: *Elements de Geometrie, suivis d' un traite de Trigonometrie*. Langlet et compagnie, Bruxelles, 1837.
- [Loo68] Loomis, Elisha Scott: *The Pythagorean Proposition*. The National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1968.

- [McI91] Mclelland, William: *A treatise on the Geometry of the Circle*. Macmillan and Co, London, 1891.
- [MP77] Millman, Righard and George Parker: *Elements of differential geometry*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1977.
- [MP94] Mironescu, P. and L. Panaitopol: *The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths*. Amer. Math. Monthly, 101:58–60, 1994.
- [Mui95] Muirhead, R.: *On the number and nature of the solutions of the apollonian contact problem*. Proc. Edinburgh Math. Society, 14:135–147, 1895.
- [Nie11] Niemeyer, Jo: *A simple construction of the golden section*. Forum Geometricorum, 11:53, 2011.
- [Oxm08] Oxman, Victor: *A purely geometric proof of the uniqueness of a triangle with prescribed angle bisectors*. Forum Geometricorum, 8:197–200, 2008.
- [Ped90] Pedoe, D: *A course of Geometry*. Dover, New York, 1990.
- [PS88] Posamentier, Alfred and Charles Salkind: *Challenging Problems in Geometry*. Dover, New York, 1988.
- [Row17] Row, Sundara: *Geometric Exercises in Paper Folding*. The open court publishing company, Chicago, 1917.
- [sH94] Hahn, Liang shin: *Complex Numbers and Geometry*. Mathematical Association of America, 1994.
- [ST76] Singer, I and J Thorpe: *Lecture notes on Elementary Topology and Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Ste71] Steiner, Jacob: *Gesammelte Werke vol. I, II*. Chelsea Publishing Company, New York, 1971.
- [VY10] Veblen, Oswald and John Young: *Projective Geometry vol. I, II*. Ginn and Company, New York, 1910.
- [Wei03] Weisstein, Eric: *CRC concise encyclopedia of mathematics*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2003.
- [Wel91] Wells, David: *Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin Books, 1991.

Ευρετήριο

- (ABΓ), 76
Bachmann, 13
Birkhoff, 12
Bolyai, 54
Brahmagupta, 292, 298
Brianchon, 338
Cairns, 13
Ceva, 319
Dandelin, 489
Desargues, 328
Euler, 276, 280
Fagnano, 306
Fermat, 304
Feuerbach, 278
Gauss, 119, 424
Gergonne, 323
Hilbert, 12
Legendre, 53, 472
Lemoine, 337
Lindemann, 353
Lobatsevski, 54
Malfatti, 275
Morley, 308
Newton, 103
Pascal, 335
Pasch, 27
Saccheri, 52, 53
Simson, 300
Soddy, 287
Steiner, 37, 214
Stewart, 209
Viète, 286
Wallace, 300
- Αόριστες έννοιες, 12
Αθροισμα, 22
Αθροισμα γωνιών τριγώνου, 53, 55
Ακμές της πολυεδρικής γωνίας, 403
Ακμές της πυραμίδας, 403
Ακμές του πολυέδρου, 410
Ακμές τριέδρου, 397
Ακμή της διέδρου, 392
Ακολουθία, 344, 347
Ακρο, 18
Ακτίνα, 74
Ακτίνα σφαίρας, 426
Ακτίνα του κυλίνδρου, 417
Ακτίνα, 354
Αμβλεία, 24, 40
Αμβλυγώνιο, 107
Ανάλυση, 89
Ανάλυση, Σύνθεση, Διερεύνηση, 89
Ανάπτυγμα του κώνου, 425
Ανάπτυγμα του κυλίνδρου, 417
Ανάπτυγμα τριέδρου, 398
Ανοιγμα κώνου, 420
Αντίρροπες, 59
Αντίστροφα σημεία, 255
Αντίστροφη δέσμη, 260
Αντιδιαμετρικά, 428
Αντικέντρο, 139
Αντικείμενες, 18
Αντιομόλογα σημεία, 249
Αντιομοιόθετα, 190
Αντιστροφή, 255
Αντισυμπληρωματικό τρίγωνο, 107
Απέναντι, 26, 324, 414
Απόλυτη Γεωμετρία, 51, 53
Απόσταση, 18
Απόσταση ασυμβάτων, 381
Απόσταση παράλληλης από επίπεδο, 381
Απόσταση παραλλήλων, 98, 149, 180
Απόσταση σημείου από επίπεδο, 380
Απόσταση σημείου από ευθεία, 49
Απόσταση των δύο επιπέδων, 381
Απολλώνιοι κύκλοι, 230
Απολλώνιος, 230, 282
Απολλώνιος κύκλος, 230

- Αριθμοί του Fermat, 119
 Αρμονικά συζυγή, 70
 Αρμονική δέσμη τεσσάρων ευθειών, 315
 Αρμονική Τετράδα, 70
 Αρμονική τετράδα, 183
 Αρνητικό ημιάξονα, 311
 Αρχή, 18, 311
 Αρχιμήδειο αξίωμα, 147
 Αρχιμήδειο τρίγωνο, 510
 Αρχιμήδης, 130, 147, 346
 Ασύμβατα κάθετες, 376, 382, 389, 401
 Ασύμβατες ευθείες, 367, 375, 381, 383
 Ασύμπτωτες υπερβολής, 521
 Ασυμβάτων απόσταση, 381
 Ατρακτος, 436
 Αυτοπολικό τρίγωνο, 327
 Αυξουσα ακολουθία, 344
 Αξίωμα, 12, 15, 18, 20, 27, 55, 147, 344
 Αξίωμα πληρότητας, 344
 Αξίωμα των παραλλήλων, 55, 171
 Αξονας Προοπτικότητας, 328
 Αξονας συμμετρίας, 63
 Αξονας του κώνου, 419
 Αξονας των κέντρων, 235
 Αξονες συμμετρίας έλλειψης, 513
 Αξονες συμμετρίας υπερβολής, 519
 Αξονική συμμετρία, 63

 Βάσεις του κόλουρου κώνου, 424
 Βάσεις του κυλίνδρου, 417
 Βάσεις του πρίσματος, 414
 Βάση της πυραμίδας, 403
 Βάση του κώνου, 419
 Βασικά σημεία, 235
 Βοηθητικός, 515
 Βοηθητικός κύκλος, 522

 Δέσμη ευθειών, 179
 Δέσμη κύκλων, 232, 234
 Δέσμη παραγόμενη από δύο κύκλους, 236
 Διέδρες, 414
 Διέδρες ίσες, 392
 Διέδρες της τριέδρου, 397
 Διέδρες του πολυέδρου, 410
 Διέδρο γωνία, 392
 Διέδρος αμβλεία, 393
 Διέδρος ορθή, 393

 Διέδρος οξεία, 393
 Διέδρος παραπληρωματική, 393
 Διέδρος συμπληρωματική, 393
 Δύναμη της αντιστροφής, 255
 Δύναμη ως προς κύκλο, 218
 Δεύτερο, 22
 Δελτοειδές, 301
 Δευτερεύοντα στοιχεία, 29
 Διάκεντρος, 82
 Διάμεσοι, 409
 Διάμεσος, 28, 36, 54, 61, 105, 145, 150, 154, 210, 221
 Διάμετρο σφαίρας, 426
 Διάμετροι της έλλειψης, 513
 Διάμετροι της υπερβολής, 519
 Διάμετρος, 74, 77
 Διάμετρος της παραβολής, 508
 Διαγώνιο, 324
 Διαγώνιος, 94, 115, 117, 145
 Διαγώνιος παραλληλεπίπεδου, 414
 Διαμέσων τρίγωνο, 106
 Διερεύνηση, 89
 Διευθετούντες κύκλοι, 515, 522
 Διευθετούσα, 486
 Διευθετούσες της έλλειψης, 497
 Διευθετούσες της υπερβολής, 497
 Διπλό λόγο, 314
 Διπλός λόγος τεσσάρων ευθειών, 315
 Διχοτόμος, 28, 36, 52, 62, 72, 79, 88, 121, 128, 151, 166, 211, 212, 308
 Διχοτομούνται επίπεδα της διέδρου, 394

 Εδρα, 414
 Εδρες διέδρου, 392
 Εδρες του πολυέδρου, 410
 Εδρες τριέδρου, 397
 Εφαπτόμενη, 78, 88, 219
 Εφαπτόμενη δέσμη, 234
 Εφαπτόμενη της κωνικής, 500
 Εφαπτόμενη της σφαίρας, 429
 Εφαπτόμενο επίπεδο, 421
 Εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας, 427
 Εφαπτόμενοι κύκλοι, 82
 Εφαπτόμενος κώνος, 430
 Εφαπτομενικό τρίγωνο, 267, 337
 Εφεξής, 22
 Εγγεγραμμένη γωνία, 124

- Εγγεγραμμένη κωνική επιφάνεια, 423
 Εγγεγραμμένο τετράπλευρο, 134
 Εγγεγραμμένος, 80
 Εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου, 80
 Εγγράψιμο σε σφαίρα, 434
 Εγκάρσιος άξονας, 522
 Εγκεντρο, 271
 Εγκεντρο του τριγώνου, 280
 Εγκεντρο τριγώνου, 80
 Εις άτοπον απαγωγή, 12, 17, 40, 53
 Εκκεντρότητα, 497, 518
 Εκκεντρα τριγώνου, 270
 Εκκεντρική γωνία, 518
 Ελάσσονες κύκλοι, 427
 Ελλειψη, 486
 Εμβαδόν, 361
 Εμβαδόν κώνου, 446
 Εμβαδόν πολυγώνου, 144
 Εμβαδόν του κώνου, 447
 Εμβαδόν του κυλίνδρου, 446, 447
 Επίκεντρος, 124
 Επίπεδο, 12, 366
 Επιπεδομετρία, 12
 Εστία, 486
 Εστίες, 486, 487
 Εστιακή απόσταση, 513, 519
 Εστιακή παράμετρος, 507, 513, 518
 Εσωτερικά σημεία, 502
 Εσωτερικό, 15, 20
 Εσωτερικό κέντρο, 249
 Εσωτερικό κύκλου, 74
 Εσωτερικό της σφαίρας, 426
 Εσωτερικό της τριέδρου, 397
 Ευθύγραμμο τμήμα, 15
 Ευθεία, 12, 15
 Ευθεία γωνία, 20
 Ευθεία στο Άπειρο, 267, 329, 333, 497
 Ευθεία στο άπειρο, 322
 Ευθεία του Lemoine, 337
 Ευθεία του Newton, 153
 Ευθεία του Simson, 300
 Ευθεία του Euler, 191
 Ευθεία του Newton, 103
 Ευθεία του Pascal, 336
 Εξωτερικά σημεία, 502
 Εξωτερική διχοτόμος, 29, 151
 Εξωτερική γωνία, 29, 39, 56
 Εξωτερικό κέντρο, 249
 Εξωτερικό κύκλου, 74
 Εξωτερικό της σφαίρας, 426
 Φορέας, 16
 Φράγμα, 344
 Γενέτειρες της επιφανείας, 417
 Γενέτειρες του κώνου, 419
 Γεωμετρικός τόπος, 36, 61, 77, 127, 140, 159, 166, 183, 193, 225, 230, 239, 242
 Γνήσιες Κωνικές Τομές, 487
 ΓΠΓ-κριτήριο, 34, 36, 61, 94, 112, 116
 Γωνία, 20
 Γωνία της ατράκτου, 436
 Γωνία του κώνου, 420
 Γωνία των ασυμβάτων, 376
 Γωνία των μεγίστων κύκλων, 436
 Γωνίες πολυγώνου, 115
 Γωνίες του σφαιρικού τριγώνου, 437
 Γωνίες του τριγώνου, 26
 Ημίχωροι, 366
 Ημιεπίπεδα, 15
 Ημιευθεία, 78, 120
 Ημιευθείες, 18, 59
 Ημιπαράμετρος εύρους, 507, 518
 Ημιπεριφέρεια, 120
 Ημιτόνου σφαιρικού τύπος, 443
 Ηρων, 289
 Ιδιόμορφες κωνικές τομές, 487
 Ιπποκράτης, 362
 Ισόπλευρο, 59, 86, 95, 108, 118, 130, 295, 308
 Ισότητα, 12
 Ισα ευθύγραμμα τμήματα, 18
 Ισα πολύγωνα, 115
 Ισα πρίσματα, 414
 Ισα σφαιρικά πολύγωνα, 456
 Ισα σφαιρικά τρίγωνα, 437
 Ισα τρίγωνα, 26
 Ισες Άτρακτοι, 436
 Ισες διέδρες, 392
 Ισες γωνίες, 22
 Ισες σφαίρες, 426
 Ισοί κόλouroι κώνοι, 424

- Ισοί κύκλοι, 74
 Ισοί κύλινδροι, 417
 Ισοί κώνοι, 419
 Ισοσκελές, 32, 35, 36, 41, 42, 66, 74, 75, 129, 161, 165, 223
 Ισοσκελές τραπέζιο, 111

 Θαλής, 173
 Θεώρημα ημιτόνων, 204
 Θεώρημα συνημιτόνου, 205
 Θεώρημα του Ήρωνα, 289
 Θεώρημα του Ceva, 319
 Θεώρημα του Euler, 280
 Θεώρημα του Stewart, 209
 Θεώρημα του Απολλώνιου, 230
 Θεώρημα του Θαλή, 173, 176
 Θεώρημα του Μενελάου, 318
 Θεώρημα του Ναπολέοντος, 307
 Θεώρημα του Πάππου, 157
 Θεώρημα του Πτολεμαίου, 292, 296
 Θεώρημα του Πυθαγόρα, 155, 156, 171
 Θετικό ημιάξονα, 311

 Κάθετα επίπεδα, 393
 Κάθετες, 24, 33
 Κάθετες πλευρές, 32, 43
 Κάθετη στο επίπεδο, 378, 382, 386
 Κάθετος από σημείο, 48, 87
 Κέντρα Ομοιότητας, 248
 Κέντρο βάρους, 105, 190
 Κέντρο δέσμης, 179
 Κέντρο ομοιοθεσίας, 190
 Κέντρο Προοπτικότητας, 328
 Κέντρο σφαίρας, 426
 Κέντρο συμμετρίας, 100
 Κέντρο της έλλειψης, 513
 Κέντρο της αντιστροφής, 255
 Κέντρο της κωνικής, 505
 Κέντρο της συμμετρίας, 65
 Κέντρο της υπερβολής, 519
 Κόλουρη πυραμίδα, 404
 Κόλουρος κώνος, 424
 Κύβος, 415
 Κύκλος, 74
 Κύκλος αντιστροφής, 255
 Κύκλος ομοιότητας, 252
 Κύκλος του Euler, 276
 Κύκλος των εννέα σημείων, 276
 Κύλινδρος, 417
 Κώνος, 419
 $\kappa(O, \rho)$, 74
 Κανονικά πολύεδρα, 410
 Κανονικές πολυεδρικές γωνίες, 408
 Κανονική πυραμίδα, 407
 Κανονικό, 414
 Κανονικό πεντάγωνο, 116, 223
 Κανονικό πολύγωνο, 115, 131, 137
 Κατά κορυφήν, 24
 Κατασκευή τριγώνου, 89, 92, 132, 139, 152, 161, 186, 194, 195, 216, 223, 273, 277, 279, 281
 Κατεύθυνση δέσμης, 179
 Κεντρική προβολή, 390
 Κεντροειδές, 105, 409
 Κοινή κάθετος των ασυμβάτων, 383
 Κολοβό πρίσμα, 415
 Κορυφές, 94
 Κορυφές του πολυέδρου, 410
 Κορυφές του σφαιρικού τριγώνου, 437
 Κορυφές του τριγώνου, 26
 Κορυφή, 20, 324
 Κορυφή της παραβολής, 509
 Κορυφή της πυραμίδας, 403
 Κορυφή του ισοσκελούς, 32
 Κορυφή του κώνου, 419
 Κυκλικό τμήμα, 362, 482
 Κυκλικό τομέας, 481
 Κυκλικός τομέας, 361
 Κυλινδρική επιφάνεια, 417
 Κυρτά σφαιρικά πολύγωνα, 456
 Κυρτή Γωνία, 20
 Κυρτή πυραμίδα, 403
 Κυρτό, 97, 115, 135
 Κυρτό πολύεδρο, 410
 Κυρτό πρίσμα, 414
 Κωνικές με κέντρο, 487
 Κωνικές τομές, 340
 Κωνική επιφάνεια, 419

 Λόγο της χρυσής τομής, 223
 Λόγος ομοιοθεσίας, 190
 Λεπτό, 22

 Μέγιστος κύκλος, 427

- Μέσον, 18, 86
 Μέσος ανάλογος, 164
 Μέτρα, 145
 Μέτρο διέδρου, 392
 Μέτρο της γωνίας σε μοίρες, 21
 Μήκος, 18
 Μήκος πλευράς σφαιρικού τριγώνου, 437
 Μήκος τόξου, 354
 Μήκος τεθλασμένης, 46
 Μείζων κύκλος, 515, 522
 Μεγάλος άξονας, 513
 Μεριά, 15
 Μεσαία τομή, 424
 Μεσοκάθετο επίπεδο, 379, 383
 Μεσοκάθετος, 33, 35, 75, 86, 121, 379
 Μεσοπαράλληλο επίπεδο, 389
 Μεσοπαράλληλος, 101
 Μεταξύ, 12, 15, 16
 Μη κυρτή Γωνία, 20
 Μη τεμνόμενη δέσμη, 234
 Μη-κυρτή γωνία, 20
 Μηδενική γωνία, 20
 Μηνίσκος, 362
 Μικρός άξονας, 513
 Μικροί κύκλοι, 427

 Ο(ρ), 74, 79, 83
 Ογκος, 462
 Ογκος κώνου, 476
 Ογκος κυλίνδρου, 474
 Ογκος σφαιρικής ζώνης, 483
 Ομόλογα, 190, 328
 Ομόλογα σημεία, 249
 Ομόλογες, 328
 Ομόρροπες, 59
 Ομοιόθετα τρίγωνα, 189
 Ομοια τρίγωνα, 162, 187
 Ομοκυκλικά, 219
 Οριακά σημεία, 235
 Οριο ακολουθίας, 344, 347, 350, 354
 Ορθή, 24, 128
 Ορθή κυκλική κυλινδρική επιφάνεια, 417
 Ορθό, 414
 Ορθόκεντρο, 107, 108, 401
 Ορθός κυκλικός κώνος, 419
 Ορθικό τρίγωνο, 166
 Ορθοδιαγώνια, 160
 Ορθογώνια δέσμη, 245
 Ορθογώνιο, 109, 146
 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, 415, 463
 Ορθογώνιο τρίγωνο, 32, 36, 40, 61, 155, 162, 168
 Ορθογώνιοι κύκλοι, 243
 Ορθοκεντρική τετράδα, 133
 Ορος ακολουθίας, 344, 347
 Οξεία, 24, 40

 π, 352
 Πάππος, 35, 157
 Πόλος της ευθείας, 267
 Πόλους του κύκλου, 428
 Παράκεντρα του τριγώνου, 270
 Παράλληλα, 16
 Παράλληλα επίπεδα, 367
 Παράλληλες, 16, 18, 41, 51, 55, 57, 87
 Παράλληλη προβολή, 390
 Παράλληλοι κύκλοι, 427
 Παράμετρος της παραβολής, 508
 Παράπλευρες έδρες, 403
 Παράπλευρες ακμές, 403, 414
 Παράπλευρη επιφάνεια, 419
 Παράπλευρο εμβαδόν, 446
 Παραβολή, 486
 Παραλληλόγραμμο, 94, 95, 97, 98, 103, 109, 145, 149
 Παραλληλεπίπεδο, 414
 Παραπληρωματικές, 24, 39, 57, 60
 Παραπληρωματική τριέδρος, 441
 Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι, 270, 274
 Πεπλατυσμένη γωνία, 20
 Περίκεντρο, 76, 108
 Περίκυκλος, 76, 221
 Περίμετρος, 26, 91, 131, 350, 352
 Περιγεγραμμένη κωνική επιφάνεια, 423
 Περιγεγραμμένη σφαίρα, 434
 Περιγεγραμμένη σφαίρα του τετραέδρου, 434
 Περιγεγραμμένος κύκλος, 76, 110, 136
 ΠΓΠ-κρίτήριο, 34, 36, 44, 53, 83
 Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος, 418
 Πλήρες τετράπλευρο, 324
 Πλήρης στροφή, 21
 Πλακόστρωση, 460
 Πλατωνικά σώματα, 411

- Πλευρές, 94, 324
 Πλευρές πολυγώνου, 115
 Πλευρές της γωνίας, 20
 Πλευρές του σφαιρικού τριγώνου, 437
 Πλευρές του τριγώνου, 26
 Πολύεδρο, 410
 Πολύγωνο, 115
 Πολική του σημείου Σ , 264
 Πολυεδρικές γωνίες του πολυέδρου, 410
 Πολυεδρική γωνία, 403
 ΠΠΠ-κριτήριο, 27, 34, 36
 Πρίσμα, 414
 Πρώτο, 22
 Πρισματική επιφάνεια, 414
 Προβολή, 49, 77
 Προβολή σημείου, 380
 Προβολή σχήματος, 380
 Προβολή της ευθείας α , 395
 Προοπτικά ως προς ευθεία, 328
 Προοπτικά ως προς σημείο, 328
 Προσανατολισμός, 35
 Προσημασμένη απόσταση, 311
 Προσημασμένος Λόγος, 310
 Προσημασμένος λόγος, 212
 Προσθετικότητα εμβαδών, 145
 Πτολεμαίος, 292
 Πυθαγόρας, 155
 Πυραμίδα, 403

 Χώρος, 12, 366
 Χαρακτηριστική του Euler, 461
 Χορδή, 74, 120, 121, 124, 161
 Χορδή κωνικής, 502
 Χορδή σφαίρας, 426
 Χρυσή τομή, 222

 Ρόμβος, 111, 122
 Ριζικό κέντρο, 227, 338
 Ριζικός άξονας, 225
 Ριζικός άξονας της δέσμης, 235

 Σύνθεση, 89
 Σφαίρα κέντρου O και ακτίνας ρ , 426
 Σφαίρες Dandelin, 489
 Σφαιρικά πολύεδρα, 434
 Σφαιρικά πολύγωνα, 456
 Σφαιρική ζώνη, 454
 Σφαιρικό πολύγωνο, 438

 Σφαιρικό τρίγωνο, 437
 Σφαιρικός δακτύλιος, 482
 Σφαιρικός τομέας, 481
 Σφαιρικού ημιτόνου τύπος, 443
 Σφαιρικού συνημιτόνου 1ος τύπος, 440
 Σφαιρικού συνημιτόνου 2ος τύπος, 442
 Σημείο, 12, 15
 Σημείο επαφής, 78, 82, 427, 429
 Σημείο της ευθείας στο άπειρο, 267, 321, 322, 333
 Σημείο του Miquel, 302
 Σημείο του Brianchon, 338
 Σημείο του Feuerbach, 279
 Σημειακή δέσμη, 179
 Σημειακή συμμετρία, 65
 Σχήμα, 12
 Σταθερά σημεία της αντιστροφής, 255
 Σταθερά σημεία της αξονικής συμμετρίας, 63
 Σταθερό σημείο της σημειακής συμμετρίας, 65
 Στερεά γωνία, 403
 Στρεβλό Τετράπλευρο, 377
 Συγκεντρικοί, 82, 122
 Συμμετρικά ως προς άξονα, 63
 Συμμετρικά ως προς σημείο, 65
 Συμμετρικό ως προς άξονα, 63
 Συμμετρικό ως προς σημείο, 65, 67, 95
 Συμπληρωματικά τόξα, 120, 127
 Συμπληρωματικές, 24
 Συμπληρωματικό, 190
 Συνημιτόνου σφαιρικού 1ος τύπος, 440
 Συνημιτόνου σφαιρικού 2ος τύπος, 442
 Συζυγής άξονας, 522
 Συζυγείς κατευθύνσεις, 505

 Τόξο, 120
 Τόξο αντίστοιχο επίκεντρης, 120
 Τεθλασμένη, 46
 Τεμνόμενη δέσμη, 234
 Τεταρτημόρια, 392
 Τετμημένη, 311
 Τετράεδρο, 405
 Τετράγωνο, 110, 148, 154
 Τετράπλευρο, 97, 153, 171
 Τετραγωνισμός του κύκλου, 353
 Τρίεδρες της πυραμίδας, 403

Τρίγωνο, 26
Τραπέζιο, 111, 150, 182
Τριγραμμική πολική, 320, 329
Τριγραμμικός πόλος, 320
Τριγωνική ανισότητα, 46, 75, 83
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, 167
Τριγωνομετρικός κύκλος, 170

Υπερβατικός, 353
Υπερβολή, 487
Υπερβολική Γεωμετρία, 51, 52, 54
Υποτείνουσα, 32, 41, 91
Υψος, 29, 37, 42
Υψος κόλουρου κώνου, 424
Υψος κώνου, 419
Υψος κυλίνδρου, 417
Υψος πρίσματος, 414
Υψος σφαιρικής ζώνης, 454

Ωοειδές, 363

