# IV

## Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη

Ο Ευκλείδης, κι άλλος κανείς
είδε γυμνή την Ομορφιά. Τυχεροί εκείνοι
που από μακριά, για μια στιγμή,
άκουσαν το σανδάλι της στην πέτρα να χτυπά.

Edna St. Vincent Millay

Στην αρχαία Ελλάδα τα μαθηματικά έφτασαν στην ακμή τους μέσα σε μια σχετικά σύντομη χρονική περίοδο. Μέσα σε μερικές γενιές παρουσιάστηκε μια εκπληκτική πλειάδα σοφών- ανάμεσα τους ο Θαλής, ο Πυθαγόρας, ο Εύδοξος, ο Απολλώνιος κι ο Ευκλείδης- που δημιούργησαν ένα ανυπέρβλητο σώμα μαθηματικών πρώτης ποιότητας. Αμέτρητοι μαθητές συγκεντρώνονταν γύρω απ' αυτούς τους περίφημους άνδρες που είχαν γίνει ξακουστοί απ' άκρη σε άκρη του μεσογειακού κόσμου. Μαθητές και δάσκαλοι ζούσαν δίπλα δίπλα στις Σχολές τους που δεν είχαν ούτε Πανεπιστημιουπόλεις για να τις εξυπηρετούν ούτε καν αρκετές αίθουσες, κι όμως ήταν τα πιο ιδανικά κέντρα μόρφωσης. Απ' αυτές τις ταπεινές Σχολές ξεκίνησαν διδαχές που κυριάρχησαν στην πνευματική ζωή του ελληνικού πολιτισμού, και ιδέες που θα μας δοθεί η ευκαιρία να τις αναφέρουμε σε σύνδεση με πολλές διαφορετικές περιπτώσεις.

Η Σχολή των Πυθαγορείων ήταν εκείνη που καθόρισε με τον πιο αποφασιστικό τρόπο τη φύση και το περιεχόμενο των ελληνικών μαθηματικών. Ο ιδρυτής της, ο θρυλικός Πυθαγόρας, γεννήθηκε στη Σάμο γύρω στα 569 π.Χ. Ταξίδεψε πολύ στην Αίγυπτο και στην Ινδία, όπου και μελέτησε με επιμέλεια τα μαθηματικά και τις μυστικιστικές δοξασίες αυτών των πολιτισμών. Αργότερα ίδρυσε μια φιλοσοφική κοινότητα στον Κρότωνα, που ήταν μια από τις πιο ανθηρές αποικίες των Ελλήνων στη Νότια Ιταλία. Εμπνεύσθηκε ένα ιδιότυπο μείγμα δογμάτων, άλλων μυστικιστικών και άλλων ορθολογιστικών. Οι Πυθαγόρειοι, όσον αφορά τη μυστικιστική τους πλευρά, ανέτρεχαν στην ελληνική θρησκεία και πίστευαν στον απαραίτητο εξαγνισμό της ψυχής από το μίασμα της φυσικής υπόστασης και στην απελευθέρωσή της από τη φυλακή του σώματος. 'Ετσι έπρεπε να περάσουν μια ολόκληρη διαδικασία μύησης μέσα από διάφορες τελετουργικές καθάρσεις και ιερουργίες και να απαρνηθούν τελείως τις ερωτικές σχέσεις. Επιπλέον το θεωρούσαν αναγκαίο να μη παραβαίνουν ορισμένα ταμπού: δε φορούσαν μάλλινα ρούχα, δεν έτρωγαν κρέας ή όσπρια παρά μόνο στις ιερές μέρες των τελετών τους, δεν άγγιζαν άσπρο πετεινό, δεν καθόντουσαν πάνω σε βαρέλια, δεν περπατούσαν σε κεντρικούς δρόμους, δεν ανασκάλευαν τη φωτιά με σιδερένιες μασιές και φρόντιζαν πάντα να καθαρίζουν καλά τα τσουκάλια τους από τις στάχτες. Πίστευαν πως η ψυχή μόλις απελευθερώνεται από ένα σώμα, αμέσως μεταπηδά σε κάποιο άλλο. Ο Ξενοφάνης αφηγείται πως μια μέρα ο Πυθαγόρας βλέποντας κάποιον να δέρνει ένα σκυλί, ώρμησε φωνάζοντας έξαλλος:"Σταμάτα! Μη το χτυπάς! Είναι η ψυχή ενός φίλου μου. Τον γνώρισα απ'το παράπονό του."

Η κοινότητα ήταν αφιερωμένη κύρια στη μελέτη της φιλοσοφίας, της επιστήμης και των μαθηματικών. Οι μυημένοι σαν να είχαν προφητέψει από τότε με τι τρομερούς τρόπους θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η γνώση, έβαζαν τα νέα μέλη να ορκιστούν πως θα μείνουν ισόβια μέλη και θα κρατούν ζηλότυπα τα μυστικά της Σχολής. Παρόλο που μέλη μπορούσαν να γίνουν μόνο οι άνδρες, επιτρεπόταν και στις γυναίκες να παρακολουθούν τις συζητήσεις, γιατί ο Πυθαγόρας δίδασκε πως κι αυτές άξιζαν αρκετά. Ο εσωτερικός χαρακτήρας της Σχολής και τα απόκρυφα και μυστικιστικά της έθιμα ξεσήκωσαν τις υποψίες των Κροτωνιατών που δεν άργησαν να διώξουν από την πόλη τους τους Πυθαγόρειους και να πυρπολήσουν τα κτήριά τους. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας δραπέτευσε στο Μεταπόντιο της Νότιας Ιταλίας και σύμφωνα με μια παράδοση δολοφονήθηκε εκεί. Οι οπαδοί του ωστόσο σκορπίστηκαν στις διάφορες πόλεις της Ελλάδας και κράτησαν ζωντανές τις διδασκαλίες του.

Για τα μυστικιστικά δόγματα των Πυθαγορείων και τις άλλες θεωρίες τους θα πούμε περισσότερα σε ένα από τα επόμενα κεφάλαια. Αυτό που μας ενδιαφέρει προς το παρόν είναι πως απ'ό,τι φαίνεται, οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που έδωσαν στα μαθηματικά μια ξεχωριστή κι ανεξάρτητη υπόσταση. Πρώτοι αυτοί μεταχειρίστηκαν τις μαθηματικές έννοιες σαν αφαιρέσεις. Ο Θαλής κι ορισμένοι άλλοι Ίωνες βέβαια είχαν αποδείξει με παραγωγικό τρόπο μερικά θεωρήματα, αλλά οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποίησαν αυτή τη μέθοδο αποκλειστικά και με συστηματικό τρόπο. Ξεχώρισαν τη μαθηματική θεωρία από τις τέχνες, όπως η τοπογραφία και η λογιστική, και απέδειξαν τα θεμελιακά θεωρήματα της επιπεδομετρίας, της στερεομετρίας και της **αριθμητικής**, της θεωρίας των αριθμών. Επίσης προς μεγάλη τους σύγχυση ανακάλυψαν και απέδειξαν το ασύμμετρο της τετραγωνικής ρίζας του 2.

Η Σχολή των Πυθαγορείων ξεπεράστηκε από την Ακαδημία του Πλάτωνα, που ανάμεσα στους μαθητές της ο πιο περίφημος ήταν ο Αριστοτέλης (ίδρυσε κι αυτός τη δική του Σχολή, το Λύκειο, όταν εγκατέλειψε την Ακαδημία μετά το θάνατο του δασκάλου του). Έχουμε αναφέρει ήδη πως μαθητές του Πλάτωνα ήταν οι μεγαλύτεροι φιλόσοφοι, μαθηματικοί και αστρονόμοι εκείνης της εποχής. Κάτω από τη δική του επίδραση το βάρος των αναζητήσεων μετατοπίστηκε προς τα θεωρητικά μαθηματικά, φτάνοντας μάλιστα μέχρι την υπερβολή να αγνοηθούν όλες οι πιθανές πρακτικές εφαρμογές τους. Με το έργο του εγκαινιάστηκε μια χρυσή εποχή που στη διάρκειά της οι γνώσεις της ανθρωπότητας αυξήθηκαν με πρωτόφαντο ρυθμό. Η Ακαδημία εξάλλου διατήρησε την πρωτοκαθεδρία της στο χώρο της φιλοσοφίας ακόμη κι όταν η πρωτοπορία στα μαθηματικά και στις επιστήμες είχε περάσει από πολύν καιρό στην Αλεξάνδρεια. Μέχρι τον καιρό που διακόπηκε βίαια η λειτουργία της από τον αυτοκράτορα του Βυζαντίου Ιουστινιανό τον έκτο αιώνα μ.Χ. κατάφερε να συμπληρώσει εννιά ολόκληρους αιώνες πνευματικής ζωής.

Το μαθηματικό έργο όλων των Σχολών και των απομονωμένων σοφών που είχαν βλαστήσει σε όλο το μήκος και το πλάτος των παραλίων της Μεσογείου, από τη Μικρά Ασία μέχρι τη Σικελία και τη Νότια Ιταλία το σύνθεσε ο μεγάλος Ευκλείδης και το παρουσίασε μέσα σε ένα και μοναδικό έξοχο σύγγραμμα, τα *Στοιχεία* του. Αυτή η περίφημη καταγραφή αποτέλεσε ταυτόχρονα την ιστορία των μαθηματικών μιας ολόκληρης εποχής και την παρουσίαση της γεωμετρίας σύμφωνα με τις αρχές του ορθού λόγου. Ξεκινώντας από μερικά αξιώματα διαλεγμένα με εξαιρετικά εύστοχο τρόπο, ο Ευκλείδης έφτασε σε όλα τα βασικά συμπεράσματα των δασκάλων της κλασικής περιόδου, δηλαδή κάπου πεντακόσια θεωρήματα. 'Ομως τα αξιώματα,η διευθέτηση του έργου, ο τρόπος της παρουσίασης και η ολοκλήρωση των θεμάτων που η ανάπτυξή τους δεν είχε ολοκληρωθεί μέχρι την εποχή του, ήταν ολότελα δικά του.

Το μεγαλύτερο μέρος των *Στοιχείων* μας είναι πολύ γνωστό, αφού το έχουμε διαβάσει και ξαναδιαβάσει στο Γυμνάσιο. Ωστόσο προτού προχωρήσουμε στην αξιολόγηση της σημασίας που είχαν για τον πολιτισμό μας αυτοί οι μαθηματικοί συλλογισμοί, θα θέλαμε να ανασκοπήσουμε ορισμένα σημεία αυτού του τόσο βαρυσήμαντου και τόσο αποκρουστικού για μερικούς εκπαιδευτικού συγγράμματος. Είναι η δομή του που μας ενδιαφέρει προς το παρόν.

Η γεωμετρία, όπως ξέρουμε βέβαια, ασχολείται με σημεία, γραμμές, επίπεδα, γωνίες, κύκλους, τρίγωνα και τα παρόμοια. Για τον Ευκλείδη και τους αρχαίους 'Ελληνες που το έργο τους παρουσίασε ο Ευκλείδης, αυτοί οι όροι δεν αντιπροσώπευαν κάποια φυσικά αντικείμενα καθαυτά, αλλά έννοιες που συνάγονται από αυτά τα αντικείμενα με τη χρήση της δύναμης της αφαίρεσης. Στην πραγματικότητα μερικές μόνον ιδιότητες των φυσικών αντικειμένων ανακλώνται στις αφηρημένες μαθηματικές ιδέες που βασίζονται σ' αυτά. Στον τεντωμένο σπάγγο βασίστηκε η ευθεία γραμμή των μαθηματικών, όμως το χρώμα και το υλικό του σπάγγου δεν είναι ιδιότητες της ευθείας. Ο Ευκλείδης, για να μη αφήσει αμφιβολίες σχετικά με το τι περιλάμβαναν και τι δεν περιλάμβαναν οι αφηρημένοι όροι του, ξεκίνησε με μερικούς ορισμούς. Σαν ευθεία γραμμή ώρισε *εκείνη που κείται ίσια ανάμεσα στις άκρες της* (είναι φανερή εδώ η αφαίρεση από την τεντωμένη κλωστή και το αλφάδι του χτίστη). Το *σημείο*, είπε, είναι εκείνο που δεν έχει μέρη. Με τον ίδιο τρόπο συνέχισε και για τα τρίγωνα, τους κύκλους, τα πολύγωνα κλπ.

Στους ορισμούς του ο Ευκλείδης προχώρησε πολύ σε μήκος, σε βαθμό περιττό κι ασύμφορο. 'Ενα λογικό ολοκληρωμένο σύστημα πρέπει βέβαια να ξεκινά από κάπου. Δε μπορεί να ορίσει όλες τις έννοιες που χρησιμοποιεί -ούτε καν να ελπίζει για κάτι τέτοιο-, γιατί ο ορισμός πάντοτε περιγράφει μια έννοια χρησιμοποιώντας κάποιες άλλες, οι οποίες πάλι δε μπορούν να περιγραφούν παρά χάρη σε κάποιες άλλες. Είναι φανερό πως αν δε θέλει κανείς να καταλήξει σε φαύλο κύκλο, πρέπει να αρχίσει από κάποιες έννοιες χωρίς να τις ορίσει, και με βάση αυτές να καθορίσει τις υπόλοιπες. Για παράδειγμα στον ορισμό του Ευκλείδη για το σημείο πως είναι εκείνο που δεν έχει μέρη, θα μπορούσε κανείς να μας ζητήσει να ορίσουμε το μέρος. 'Αλλοι συγγραφείς προσπαθώντας να βελτιώσουν τον Ευκλείδη, όρισαν το σημείο σαν "αυτό που είναι καθαρή θέση". Και τι είναι τότε η θέση; Αν κάναμε αυτή την ερώτηση σε μερικούς κοινωνικούς κύκλους, θα μας έδιναν μια απάντηση, πως "θέση είναι το παν που μετράει στη ζωή", αλλά κάτι τέτοιο δε μας διευκρινίζει και πολύ την έννοια του σημείου.

Ξαναλέμε λοιπόν πως όλες οι έννοιες δε μπορούν να οριστούν μέσα σε ένα κλειστό σύστημα. Είναι αλήθεια πως όλες οι έννοιες ξεπηδούν από συγκεκριμένα φυσικά αντικείμενα, κι ακόμη πως τέτοια αντικείμενα αντιπροσωπεύουν. 'Ομως το φυσικό τους υπόβαθρο και νόημα δε μας βοηθά στο να δώσουμε τον τυπικό ορισμό τους, γιατί αυτό δεν αποτελεί μέρος των μαθηματικών. Κι όμως, όσο παράδοξο κι αν φαίνεται, η αδυναμία να ορισθούν μερικές από τις έννοιες της γεωμετρίας δεν μας είναι πρόβλημα, όπως θα δούμε σε κάποια στιγμή.

'Εχοντας ορίσει, τουλάχιστο με τρόπο που να ικανοποιεί τον ίδιο, τις έννοιες με τις οποίες θα ασχοληθεί στη συνέχεια, ο Ευκλείδης προχώρησε στο επόμενο βήμα, στο να προσδιορίσει τις σχέσεις ανάμεσά τους, στα θεωρήματα. Αυτό το τόσο βαρυσήμαντο έργο, η παραγωγική διαδικασία, χρειαζόταν κάποιες βάσεις, γιατί, όπως είχε παρατηρήσει και ο Αριστοτέλης:

> "Δε μπορούν να αποδειχτούν τα πάντα· αλλιώς η αλυσίδα των συλλογισμών θα ήταν ατέλειωτη. Πρέπει να ξεκινήσεις από κάπου, και ξεκινάς από πράγματα που είναι μεν παραδεκτά, αλλά δε μπορούν να αποδειχτούν. Αυτές είναι οι πρώτες αρχές που τις βρίσκουμε σ' όλες τις επιστήμες, που ονομάζονται **αξιώματα** ή κοινά αποδεκτές αντιλήψεις..."

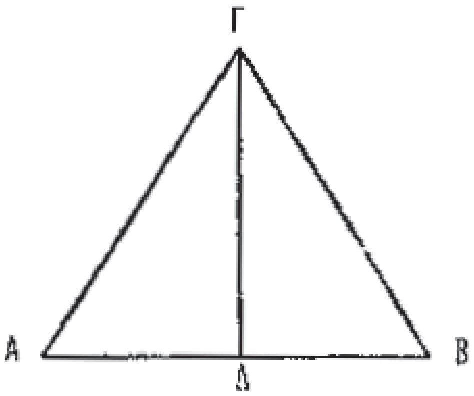
Στην επιλογή των αξιωμάτων του ο Ευκλείδης έδειξε μεγάλη διορατικότητα και κρίση. Πριν από την εποχή του οι μαθηματικοί των μεγάλων Σχολών ξεκινούσαν από αξιώματα που όριζαν οι ίδιοι για τον εαυτό τους. 'Οσο πλήθαιναν αυτοί και πολλαπλασιαζόταν το έργο τους, μεγάλωναν, όπως ήταν φυσικό, οι πιθανότητες να χρησιμοποιηθούν αξιώματα απαράδεκτα για ορισμένους από τους μαθηματικούς. Επιπλέον η περιττή υπεραφθονία των αξιωμάτων δημιουργούσε μια κατάσταση απαράδεκτη από τη σκοπιά της λογικής, αφού είναι πάντοτε καλύτερο να θεωρούμε σαν δεδομένα, σαν αξιώματα, όσο λιγότερα γίνεται κι από αυτά να συνάγουμε όσα περισσότερα είναι δυνατό να αποδείξουμε. Ο Ευκλείδης λοιπόν έβαλε για στόχο να βρει ένα σύνολο αξιωμάτων για τη γεωμετρία που να είναι επαρκές και ταυτόχρονα αποδεκτό από όλους. Και μάλιστα καθώς για τους 'Ελληνες οι αναζητήσεις στο χώρο της γεωμετρίας δεν ήταν παρά βήματα στο μονοπάτι που οδηγεί προς την καθολική αλήθεια, και τα αξιώματα θα έπρεπε να εκφράζουν αναμφισβήτητες, απόλυτες αλήθειες.

Τα αξιώματα του Ευκλείδη αφορούσαν ιδιότητες των σημείων, των γραμμών και των υπόλοιπων γεωμετρικών σχημάτων που ίσχυαν εξίσου και για τα φυσικά τους αντίστοιχα. Ιδιότητες τόσο ολοφάνερα αληθινές γι' αυτά τα φυσικά αντικείμενα που κανείς δεν είχε αντίρρηση να τις δεχτεί σαν βάση για τους παραπέρα συλλογισμούς. Η εκλογή του Ευκλείδη υπήρξε εξαιρετική, γιατί οι ιδιότητες που διάλεξε, αν και άμεσα αποδεκτές, δεν είναι καθόλου επιφανειακές, αλλά αντίθετα οδηγούν σε βαθύτατα συμπεράσματα. Επιπλέον κατάφερε να περιοριστεί σε ελάχιστες τέτοιες ιδιότητες, δέκα συνολικά, που όμως ήταν αρκετές για να υψωθεί πάνω τους ολόκληρο το οικοδόμημα, το σύστημα της γεωμετρίας.

Μόνο και μόνο για να μη μας μείνει καμιά αμφιβολία σχετικά με τη σοφία της επιλογής του Ευκλείδη, ας ξαναθυμηθούμε ένα - δυο από τα αξιώματά του: 1) Είναι δυνατό να φέρουμε μια ευθεία, που να ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία, 2)Είναι δυνατό να χαράξουμε, με κέντρο ένα δεδομένο σημείο, έναν κύκλο, που να περνά από ένα δεδομένο σημείο, και 3) Το όλο είναι μεγαλύτερο από οποιοδήποτε από τα μέρη του.

Αυτές τις αλήθειες κανείς δε μπορούσε να τις αμφισβητήσει· ήταν αποδεκτές για όλους τους ανθρώπους.

Αφού ξεχώρισε τις έννοιες, με τις οποίες θα ασχολούνταν στο εξής η γεωμετρία, κι αφού διάλεξε ορισμένες βασικές αλήθειες σχετικά μ' αυτές τις έννοιες, ο Ευκλείδης προχώρησε στα συμπεράσματα, στα θεωρήματα. Η μέθοδος που χρησιμοποιούσε στις αποδείξεις του βέβαια ήταν αυστηρά η παραγωγική. Για να καταλάβουμε καλά γιατί όλες οι κατοπινές γενιές θαύμαζαν τόσο τα ακατάλυτα συμπεράσματα του Ευκλείδη, ας ανασκοπήσουμε μια απ' τις αποδείξεις του.




Σχ. 4 'Ενα ισοσκελές τρίγωνο

Σύμφωνα με ένα από τα πρώτα θεωρήματά του, οι γωνίες της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Αυτό το θεώρημα μάλιστα έχει ένα ξεχωριστό ενδιαφέρον· παρόλο που συγκαταλέγεται ανάμεσα στα θεμελιακά θεωρήματα, στα Πανεπιστήμια του Μεσαίωνα αποτελούσε το έσχατο όριο της μελέτης της γεωμετρίας, το αποκορύφωμά της. Είχε πάρει το όνομα pons asinorum (γέφυρα των γαϊδάρων), επειδή εκείνοι που τους έλειπε το απαιτούμενο μυαλό, δε μπορούσαν να συλλάβουν την απόδειξή του και, σαν τους γαϊδάρους μπροστά στην κρεμαστή γέφυρα, κάρφωναν τα πόδια στο έδαφος κι αρνιόταν να προχωρήσουν άλλο.

Προτού περάσουμε στην απόδειξη, ας εξετάσουμε στα γρήγορα την έννοια του θεωρήματος. Αν το ΑΒΓ (σχ. 4) είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο, τότε δύο πλευρές του, ας πούμε η ΑΓ και η ΒΓ, είναι ίσες. Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε είναι πως οι γωνίες της βάσης Α και Β, δηλαδή οι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές, είναι κι αυτές ίσες.

Για να αρχίσουμε την απόδειξη, φέρουμε τη γραμμή ΓΔ που διχοτομεί τη γωνία Γ του τριγώνου. Αυτό το πρώτο βήμα δικαιολογείται με τον ακόλουθο τρόπο: κάθε γωνία μπορεί να διχοτομηθεί, όπως έδειξε ο Ευκλείδης ήδη από τα προηγούμενα. Εφόσον η Γ είναι γωνία, σημαίνει πως κι αυτή μπορεί να διχοτομηθεί. Ο παραγωγικός συλλογισμός εδώ είναι της μορφής: Όλα τα μήλα είναι κόκκινα· αυτό είναι μήλο· άρα αυτό το μήλο πρέπει να είναι κόκκινο.

Η γραμμή ΓΔ χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ στα δύο μικρότερα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ. Γι αυτά τα τρίγωνα ξέρουμε πρώτα πρώτα πως η ΑΓ είναι ίση με τη ΒΓ, αφού από την αρχή κατασκευάσαμε το τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές. Δεύτερο πως η γωνία ΑΓΔ είναι ίση με τη γωνία ΔΓΒ, αφού η ΓΔ είναι διχοτόμος. Τρίτο πως τα δύο μικρότερα τρίγωνα έχουν ακόμη μια πλευρά ίση, τη ΓΔ, που είναι κοινή και για τα δυο τους. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε πως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ίσο με το ΔΓΒ, επειδή σύμφωνα με ένα προηγούμενο θεώρημα, αν δύο οποιαδήποτε τρίγωνα έχουν ίσες δύο πλευρές και τη γωνία που σχηματίζεται απ' αυτές τις πλευρές, τότε είναι ίσα. Αφού τα παραπάνω στοιχεία στα δύο τρίγωνά μας είναι ίσα, τότε και τα τρίγωνα θα είναι ίσα. Από εδώ μπορούμε άνετα να συμπεράνουμε πως και η γωνία Α είναι ίση με τη γωνία Β, επειδή σύμφωνα με τον ίδιο ορισμό των ίσων τριγώνων τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα και φυσικά οι γωνίες Α και Β είναι αντίστοιχα στοιχεία.

Αποδείξαμε λοιπόν το θεώρημα που θέλαμε με μια σειρά παραγωγικών συλλογισμών, που ο καθένας τους στηρίζεται σε ακλόνητες βάσεις και γίνεται με τη σειρά του βάση κάποιου συμπεράσματος που επίσης δε μπορεί να αμφισβητηθεί. Οπωσδήποτε δεν ήταν τόσο απλές οι αποδείξεις του Ευκλείδη. Όλες τους όμως, όσο σύνθετες κι αν φαίνονται, δεν αποτελούνταν από τίποτε παραπάνω παρά από μια ακολουθία τέτοιων απλών παραγωγικών συλλογισμών.

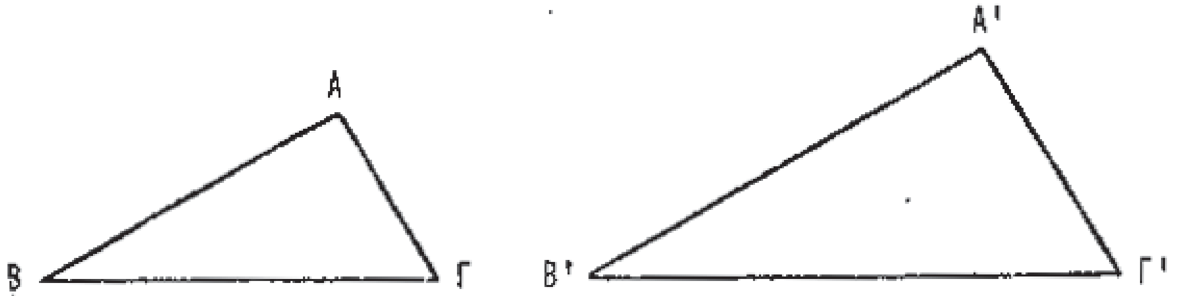
Δεν είναι ανάγκη να πάρουμε από την αρχή όλα τα θεωρήματα του Ευκλείδη. Αρκεί να αναφέρουμε πως από τα αξιώματά του συνάγονται με το πρώτο ορισμένα απλά θεωρήματα, κι αυτά γίνονται σκαλοπάτια για τα πιο περίπλοκα θεωρήματα, έτσι που ολόκληρο το σύστημα είναι συνταιριασμένο με θαυμαστή τελειότητα. Μένει κατάπληκτος κανείς, όταν μελετά κι ανακαλύπτει πως αυτά τα ελάχιστα αυταπόδεικτα αξιώματα μπορούν να οδηγήσουν σε τόσα και τόσα θεωρήματα, φαινομενικά τόσο μπερδεμένα και περίπλοκα.

Ας περάσουμε τώρα σε ένα άλλο θέμα: ο Ευκλείδης ασχολείται, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, με τις θεμελιώδεις ιδιότητες των αντικειμένων, με το σχήμα και το μέγεθός τους. Αυτό που τον ενδιέφερε ιδιαίτερα ήταν κάτω από ποιές συνθήκες δύο αντικείμενα έχουν το ίδιο μέγεθος και σχήμα, με άλλα λόγια ποιές είναι οι προϋποθέσεις που απαιτούνται, για να είναι ίσα. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα πως ένας τοπογράφος έχει μπροστά του δύο κομμάτια γης τριγωνικά. Πώς μπορεί να διαπιστώσει, αν είναι ίσα; Πρέπει να μετρήσει όλες τις γωνίες τους κι όλες τις πλευρές τους ή μήπως και το εμβαδό τους; 'Οχι, αρκεί να ξέρει τα θεωρήματα του Ευκλείδη. 'Ολα απολύτως τα στοιχεία δύο τριγώνων είναι ίσα, αν για παράδειγμα όλες οι πλευρές του ενός απ'αυτά είναι αντίστοιχα ίσες με όλες τις πλευρές του άλλου. Αυτή η πρόταση ίσως να φαίνεται πως απλά δηλώνει το προφανές και τίποτα παραπάνω·όμως δεν είναι ακριβώς έτσι τα πράγματα, κι αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς, αν ρωτήσει τον εαυτό του κάτω από ποιές προϋποθέσεις μπορεί να είναι βέβαιος πως δύο τετράπλευρα, δηλαδή δύο σχήματα με τέσσερις πλευρές το καθένα, είναι απολύτως ίσα. Αυτό το ερώτημα και τα άλλα σαν κι αυτό θα μπορούσαν να διατυπωθούν σχετικά με όλα τα γεωμετρικά σχήματα.

Στη συνέχεια ο Ευκλείδης έκανε την ακόλουθη ερώτηση: αν δύο σχήματα δεν είναι ίσα, υπάρχει μήπως καμιά άλλη αξιοπρόσεκτη σχέση που μπορεί να τα συνδέει, και σ'αυτή την περίπτωση ποιές μπορεί να είναι οι κοινές τους ιδιότητες; Η σχέση που διάλεξε, αφορούσε το σχήμα. Τα σχήματα που έχουν διαφορετικό μέγεθος, αλλά ίδιο σχήμα, δηλαδή τα όμοια σχήματα,έχουν πολλές κοινές γεωμετρικές ιδιότητες. 'Οσον αφορά τα τρίγωνα για παράδειγμα, η ομοιότητά τους σημαίνει πως και οι τρεις γωνίες του ενός είναι ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του άλλου. Απ'αυτή την καθοριστική ιδιότητα συνάγεται επίσης πως και ο λόγος δύο οποιωνδήποτε αντίστοιχων πλευρών τους είναι σταθερός. 'Ετσι αν το ΑΒΓ και το Α΄Β΄Γ΄είναι όμοια τρίγωνα (σχ.5), τότε το ΑΒ/Α΄Β΄ θα είναι ίσο με το ΒΓ/Β΄Γ΄. Επιπλέον αν υποθέσουμε πως ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών τους είναι $\lambda$, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\lambda^2$.

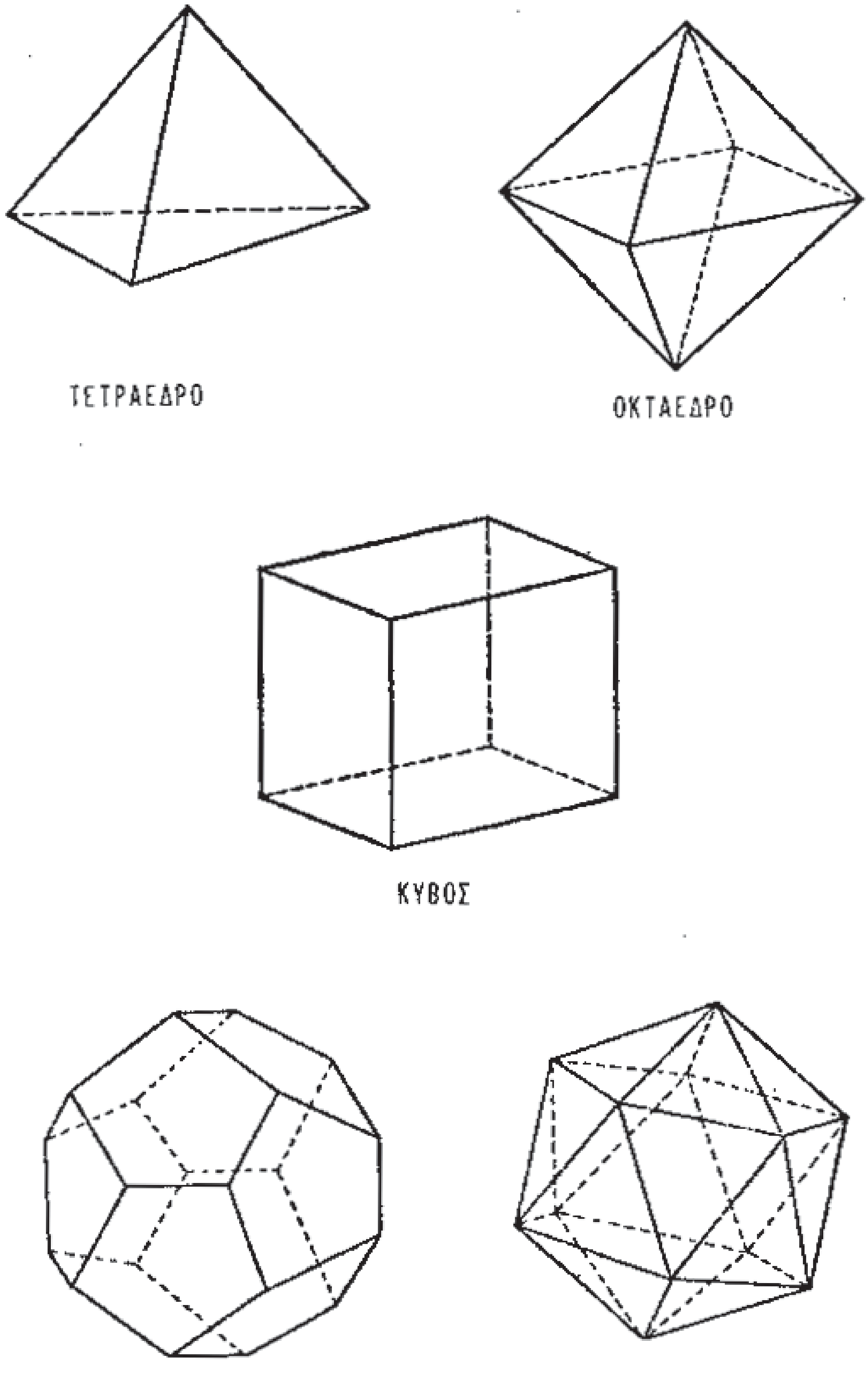
Αν κάποια σχήματα δεν έχουν ούτε το ίδιο μέγεθος ούτε σχήμα κοινό, τότε υπάρχει τίποτε που να μπορούμε να πούμε γι αυτά; Είναι πιθανό να έχουν το ίδιο εμβαδό, να είναι δηλαδή ισεμβαδικά, όπως τα ονομάζουμε στη γλώσσα της γεωμετρίας. 'Η μπορεί να είναι εγγράψιμα στον ίδιο κύκλο. Είναι ατέλειωτες οι πιθανές σχέσεις, το ίδιο και τα προβλήματα που μπορούμε να θέσουμε για κάθε μια απ'αυτές. Ο Ευκλείδης όμως διάλεξε τις πιο βασικές.

Τις έννοιες που μελέτησε, ο Ευκλείδης τις εξέτασε όχι μονάχα στα σχήματα που αποτελούνται από ευθείες γραμμές, αλλά και στους κύκλους και τις σφαίρες. Για τα τελευταία μάλιστα έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον- για τους αρχαίους 'Ελληνες ο κύκλος και η σφαίρα ήταν τα τέλεια σχήματα.



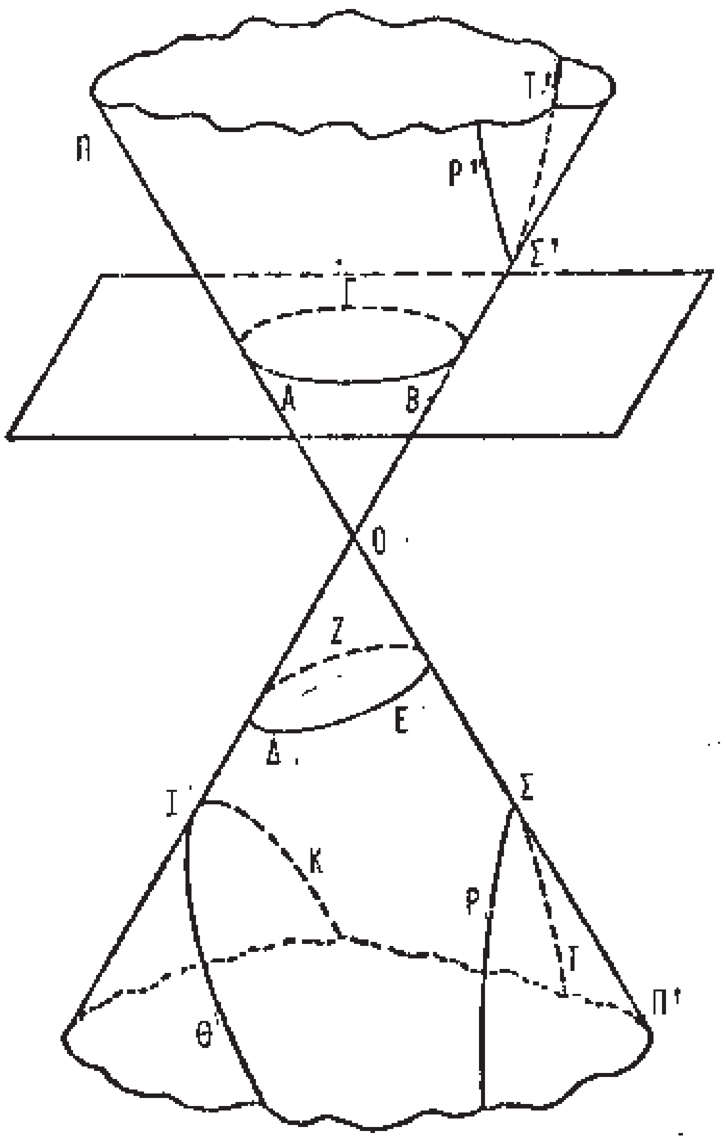

Σχ. 5 Δυο όμοια τρίγωνα

Από αισθητική άποψη άλλη μια κατηγορία σχημάτων ασκούσε ανάλογη γοητεία στους 'Ελληνες. Ανάμεσα στα τρίγωνα θεωρούσαν αξιοπρόσεκτο το ισόπλευρο που όλες οι πλευρές του έχουν το ίδιο μήκος και όλες οι γωνίες του το ίδιο άνοιγμα. Από τα τετράπλευρα σχήματα το τετράγωνο τους εντυπωσίαζε για τους ίδιους λόγους. Ακόμη μπορούσαν να κατασκευάσουν επίπεδα σχήματα με πέντε, έξι ή και περισσότερες πλευρές, έτσι ώστε όλες οι πλευρές και οι γωνίες τους να είναι ίσες. Αυτά τα σχήματα, που τα ονόμασαν κανονικά πολύγωνα, τα μελέτησαν με την μεγαλύτερη προσοχή. Με αυτά μπόρεσαν να κατασκευάσουν πλήρεις επιφάνειες, την κάθε μια τους από ένα και μόνο είδος πολυγώνου. Για παράδειγμα μια τέτοια πλήρης επιφάνεια κατασκευασμένη από έξι τετράγωνα ενωμένα κατά μήκος των πλευρών τους ήταν ο κύβος. Σήμερα αυτές οι επιφάνειες, που θεωρούνται στερεες, γιατί ορίζονται στον τρισδιάστατο χώρο κι όχι στο διοδιάστατο επίπεδο, λέγονται κανονικά πολύεδρα.




Σχ. 6  Τα πέντε κανονικά πολύεδρα

Από τα πρώτα ερωτήματα που τέθηκαν σχετικά με τα κανονικά πολύεδρα, ήταν πόσοι διαφορετικοί τύποι τους υπάρχουν. Με έξοχους συλλογισμούς ο Ευκλείδης έδειξε πως πρέπει να υπάρχουν ακριβώς πέντε τύποι κανονικών πολύεδρων και μόνον αυτοί. Είναι εκείνοι που φαίνονται στο σχήμα 6. Ο Πλάτωνας έτρεφε έναν τόσο απέραντο θαυμασμό απέναντι σ' αυτά τα σχήματα και




Σχ. 7 'Ενας κώνος και οι τομές που γίνονται από τέμνουσες επιφάνειες

δε μπορούσε να φαντασθεί πως ο θεός θα τα είχε αφήσει αχρησιμοποίητα. Στο κοσμολογικό του σύστημα λοιπόν, σύμφωνα με το οποίο όλα τα αντικείμενα αποτελούνταν από τέσσερα στοιχεία- τη γη, τον αέρα, τη φωτιά και το νερό- τα στοιχειώδη σωματίδια της φωτιάς είχαν σχήμα τετράεδρου, του αέρα οχτάεδρου, του νερού δωδεκάεδρου και της γης κύβου. Το πέμπτο σχήμα, το εικοσάεδρο, ο θεός το είχε κρατήσει για σχήμα του ίδιου του Σύμπαντος.

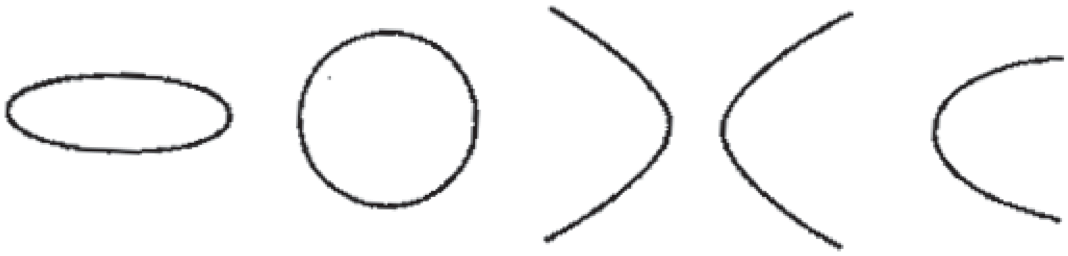
Οι 'Ελληνες είχαν μελετήσει με τον πιο εξαντλητικό τρόπο και μια κατηγορία καμπυλών. 'Ολοι μας γνωρίζουμε ένα σχήμα που σχετίζεται μ' αυτές τις καμπύλες-το κωνικό χωνάκι του παγωτού. Αν πάρουμε δυο πολύ μεγάλα τέτοια χωνάκια και τα τοποθετήσουμε,όπως δείχνει το σχήμα 7, έχουμε αυτό που οι μαθηματικοί ονομάζουν κωνική επιφάνεια ή απλά κώνο. Αυτή η κωνική επιφάνεια αποτελείται από δύο μέρη που εκτείνονται σε άπειρη απόσταση προς αντίθετες πλευρές από το Ο. Η τομή μιας κωνικής επιφάνειας κι ενός επιπέδου (που είναι απλά μια επίπεδη επιφάνεια σαν του τραπεζιού, χωρίς πάχος, η οποία εκτείνεται άπειρα προς όλες τις κατευθύνσεις) σχηματίζει μια καμπύλη που το σχήμα της εξαρτάται από τη θέση του επιπέδου σε σχέση με τον κώνο. 'Ετσι όταν το επίπεδο τέμνει μόνο το ένα μέρος του κώνου, η καμπύλη που σχηματίζεται από την τομή, είναι μια έλλειψη (ΔΕΖ στο σχ. 7), ή ένας κύκλος (ΑΒΓ στο σχ.7). Αν το επίπεδο έχει τέτοια κλίση ώστε να τέμνει και τα δύο μέρη του κώνου, τότε η καμπύλη της τομής που αποτελείται κι αυτή από δύο μέρη, ονομάζεται υπερβολή (ΡΣΤ και Ρ΄Σ΄Τ΄ στο σχ. 7). Αν τέλος το επίπεδο είναι παράλληλο σε κάποια απ' τις ευθείες που κείτονται ολόκληρες πάνω στον κώνο, όπως είναι η ευθεία ΠΟΠ΄, η τομή ονομάζεται παραβολή (ΘΙΚ στο σχ. 7).

Ο Ευκλείδης συγκέντρωσε τα βασικά στοιχεία σχετικά με τις κωνικές τομές και τα οργάνωσε με τρόπο παρόμοιο με εκείνο των Στοιχείων˙όμως το έργο του αυτό χάθηκε και δεν έφτασε σε μας. Αργότερα ένας άλλος ξακουστός μαθηματικός, ο Απολλώνιος, έγραψε μια εξαιρετική διατριβή πάνω στο θέμα των κωνικών τομών, για την οποία έγινε διάσημος σχεδόν όσο και ο Ευκλείδης για τα Στοιχεία του. Πολλά εκπληκτικά μαθηματικά έργα δημιουργήθηκαν εκείνη την εποχή, όμως ελάχιστα σώθηκαν. Και πάλι αν κρίνουμε από τα βιβλία και τα αποσπάσματα που έχουν διασωθεί μέχρι τις μέρες μας, μπορούμε με σιγουριά να βεβαιώσουμε πως ένα ανεπανάληπτο δημιουργικό πνεύμα αξεπέραστης λαμπρότητας χαρακτήριζε εκείνη την εποχή, ένα βαθύτατο ενδιαφέρον για τα μυστικά των μαθηματικών.

Τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων είναι πολύ σημαντικά όχι μόνο για τα ερωτήματα στα οποία απάντησαν, αλλά και για εκείνα που έθεσαν χωρίς να απαντήσουν. Ανάμεσα στα τελευταία είναι και τα τρία περίφημα *άτοπα*, που είναι σε όλους μας γνωστά. Λέγονται ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου και η τριχοτόμηση της γωνίας. Ο τετραγωνισμός του κύκλου σημαίνει να κατασκευασθεί ένα τετράγωνο που το εμβαδό του να είναι ίσο με το εμβαδό ενός ορισμένου κύκλου. Ο διπλασιασμός του κύβου σημαίνει να βρεθεί η πλευρά ενός κύβου που ο όγκος του να είναι διπλάσιος από τον όγκο ενός ορισμένου κύβου. Η τριχοτόμηση της γωνίας τέλος σημαίνει να χωριστεί μια τυχαία γωνία σε τρία ίσα μέρη. Τα όργανα με τα οποία πρέπει να γίνουν αυτές οι κατασκευές είναι ένας κανόνας, δηλαδή ένας απλός χάρακας χωρίς ενδείξεις μήκους, κι ένας διαβήτης. Κανένα άλλο όργανο δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί.

Οι λόγοι για τους οποίους επιβλήθηκε αυτός ο περιορισμός φωτίζουν με τον καλύτερο τρόπο την κλασική αντίληψη για τα μαθηματικά. Ο κανόνας κι ο διαβήτης δημιουργούν τα φυσικά αντίστοιχα της ευθείας και του κύκλου, και οι αρχαίοι Έλληνες σε γενικές γραμμές είχαν περιορίσει τη γεωμετρία τους στη μελέτη ακριβώς αυτών των δύο σχημάτων και των σχημάτων που μπορούν να συναχθούν άμεσα απ' αυτά. Ακόμη και οι κωνικές τομές, όπως θα δούμε, θεωρούνταν ότι σχηματίζονται από την τομή ενός κώνου κι ενός επιπέδου, δύο σχημάτων που δημιουργούνται από την κίνηση κάποιας ευθείας. Αυτός ο περιορισμός στην ευθεία και στον κύκλο, εκούσιος και αυθαίρετος, πήγαζε από τη βούληση να μείνει η γεωμετρία απλή κι αρμονική και κατά συνέπεια αισθητική.

Ορισμένοι Έλληνες και ανάμεσά τους πρώτος και καλύτερος ο Πλάτωνας, δικαιολογούσαν αυτό τον περιορισμό και με άλλους λόγους, που τους θεωρούσαν εξίσου σημαντικούς. Το να χρησιμοποιηθούν όργανα πιο εκλεπτυσμένα και πιο περίπλοκα και να γίνουν έτσι ευκολότερες οι γεωμετρικές κατασκευές, απαιτούσε μια χειρωνακτική επιδεξιότητα υποτιμητική, όπως πίστευαν, για τους πραγματικούς στοχαστές. Ο ίδιος ο Πλάτωνας υπερθεμάτιζε ότι με τη χρήση των πολύπλοκων οργάνων η αρετή της γεωμετρίας παραμερίζεται και καταστρέφεται, γιατί μ' αυτά την υποβιβάζουμε και πάλι στον κόσμο των αισθήσεων αντί να την εξαίρουμε και να την οδηγούμε στη μέθεξη με τις αιώνιες και ασώματες εικόνες της σκέψης με τον τρόπο που τη χρησιμοποιεί ο θεός, που γι αυτό το λόγο Αυτός παραμένει πάντοτε θεός".




Σχ. 8 Οι κωνικές τομές

Αυτά τα τρία κατασκευαστικά προβλήματα ήταν πολύ αγαπητά στους αρχαίους 'Ελληνες. Η πρώτη σχετική ιστορική μαρτυρία λέει πως ο περίφημος φιλόσοφος Αναξαγόρας, όταν είχε βρεθεί για κάποιο λόγο στη φυλακή, πέρασε χρόνια ολόκληρα προσπαθώντας να βρει τη λύση αυτών των προβλημάτων. Παρά τις αδιάκοπες προσπάθειες όχι μόνο τις δικές του, αλλά και όλων των μεγάλων Ελλήνων μαθηματικών, τα προβλήματα αυτά δε λύθηκαν. Κι ήταν γραφτό να μη λυθούν στα επόμενα δυο χιλιάδες χρόνια. Μόλις στις αρχές του δικού μας αιώνα, του εικοστού αιώνα μ.Χ. αποδείχτηκε τελικά πως αυτές οι κατασκευές είναι αδύνατο να εκτελεστούν σύμφωνα με τις συνθήκες που αναφέραμε προηγούμενα. Και όμως υπάρχει ακόμα πολύς κόσμος που προσπαθεί να τα λύσει και μάλιστα από καιρό σε καιρό εμφανίζονται διάφοροι που αναγγέλλουν θριαμβευτικά πως τα κατάφεραν. Χωρίς να κάνουμε καν τον κόπο να δούμε τι έχουν κάνει, μπορούμε να βεβαιώσουμε με απόλυτη σιγουριά πως είτε δεν κατάλαβαν καλά το πρόβλημα είτε έκαναν κάπου κάποιο λάθος.

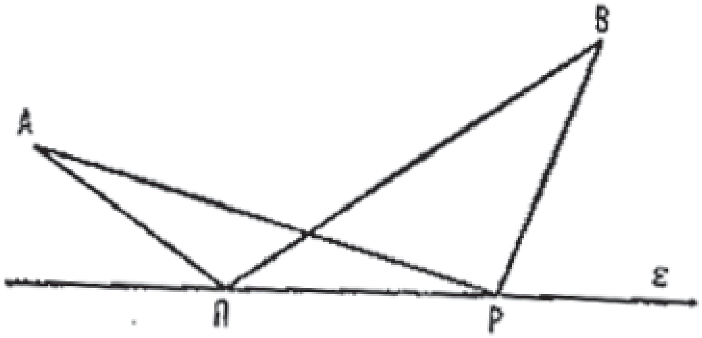
Τι μπορεί να δείξει καλύτερα το σθένος, την προσοχή, την επιμονή και την υπομονή των μαθηματικών, αν όχι τα αμέτρητα χρόνια των κόπων που αφιερώθηκαν σε τούτα τα προβλήματα; Αυτές οι ατέρμονες αναζητήσεις δεν είχαν την ελάχιστη πρακτική χρησιμότητα, αφού οι λύσεις βρίσκονται αμέσως, αν χρησιμοποιήσουμε κάποια όργανα ελάχιστα πιο περίπλοκα απ' τον κανόνα και το διαβήτη. Κι όμως υπήρξαν άνθρωποι με τόσο ακατανίκητο πάθος για τις προκλήσεις του πνεύματος, που επιχειρούσαν απτόητοι να πετύχουν με θεωρητικό τρόπο αυτές τις κατασκευές.

Πολλές φορές εκείνοι που έσκαβαν για σίδερο, βρήκαν χρυσάφι! Οι κωνικές τομές, που άνοιξαν το δρόμο για τη σύγχρονη αστρονομία, ανακαλύφθηκαν χάρη στις προσπάθειες για να λυθούν αυτά τα άτοπα· κι όχι μόνο αυτές, αλλά και αμέτρητα άλλα μαθηματικά πορίσματα κι ανάμεσά τους μερικά απ'τα πιο κομψά και χρήσιμα. Αν φέρναμε στο νου μας όλες τις μεγαλειώδεις μαθηματικές ιδέες που σαν αφετηρία είχαν τη μελέτη προβλημάτων ανάξιων, χωρίς πρακτική σημασία, θα μπορούσαμε πολύ καλά να πούμε πως τα ίδια τα μαθηματικά είναι η εμβάθυνση στο ασήμαντο (πολλοί από τους σημερινούς "εκπαιδευτικούς" βέβαια, μολονότι αγνοούν τα μαθηματικά και την ιστορία τους, δε διστάζουν να διατυπώνουν την ίδια άποψη κάθε φορά που βρίσκουν την ευκαιρία). Αρκεί να μελετήσουμε την ιστορία αυτών των αδύνατων κατασκευών, για να καταλάβουμε πόσο άδικες είναι οι επιθέσεις ενάντια στους "μη πρακτικούς" Έλληνες. Ας θυμόμαστε πάντα πως αυτοί με τα οράματά τους συντέλεσαν στην πρόοδο και την ανάπτυξη του δικού μας Αιώνα της Επιστήμης πολύ περισσότερο από τους λεγόμενους "πρακτικούς" λαούς.

Μέχρις εδώ λοιπόν έχουμε μοιράσει απλόχερα τους επαίνους για τους Έλληνες που έκαναν τα μαθηματικά αφηρημένα. Θα άξιζε, για να καταλάβουμε καλύτερα το πνεύμα των μαθηματικών, να δούμε τι ακριβώς σημαίνει αυτή η αφαίρεση τουλάχιστον όσο αφορά την ευκλείδεια γεωμετρία.

Ας θεωρήσουμε μια από τις πιο απλές περιπτώσεις. Ας υποθέσουμε πως έχουμε δυο ορισμένα σημεία $A$ και $B$, και μια ευθεία $\varepsilon$ που δεν διέρχεται από κανένα απ' αυτά, αλλά βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο μαζί τους (σχ.9). Ας υποθέσουμε παραπέρα πως θέλουμε να βρούμε το σημείο $\Pi$ της ευθείας $\varepsilon$, για το οποίο το άθροισμα των αποστάσεων $\Pi A$ και $\Pi B$ να είναι το ελάχιστο δυνατό· με άλλα λόγια, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο $P$ της ευθείας $\varepsilon$, να είναι το $A\Pi + \Pi B$ μικρότερο από το $AP + PB$. Το πρόβλημα αυτό είναι καθαρά γεωμετρικό. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε πως αν πάρουμε το $\Pi$ έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Pi$ και $\Pi B$ να σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ευθεία $\varepsilon$, τότε το άθροισμα των αποστάσεων $A\Pi + B\Pi$ είναι το ελάχιστο.

Ας θεωρήσουμε δεδομένη την απόδειξη τούτου του θεωρήματος κι ας δούμε πώς μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στην πράξη. Ας φανταστούμε πως τα σημεία Α και Β δείχνουν τις τοποθεσίες δύο χωριών, και η ε. είναι ένα ποτάμι. Στην όχθη του ποταμιού θέλουμε να χτίσουμε μια αποβάθρα που να εξυπηρετεί και τα δύο χωριά, έτσι ώστε η συνολική απόσταση της από το χωριό

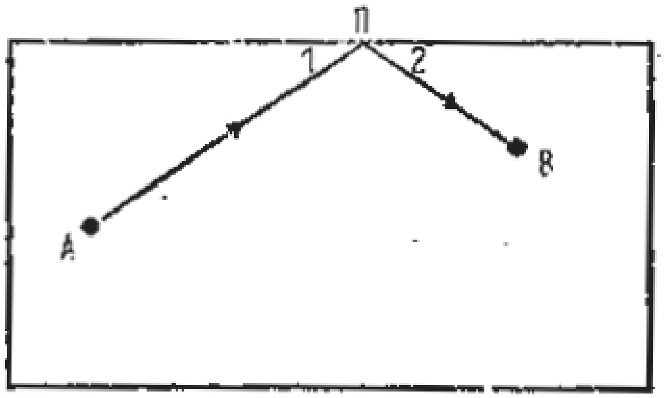



Σχήμα 9

Α κι από το χωριό Β να είναι όσο μικρότερη γίνεται. Σε ποιο σημείο του ποταμιού πρέπει να τη χτίσουμε; Την απάντηση θα μας τη δώσει το γενικό μας θεώρημα: στο σημείο Π, για το οποίο οι ευθείες ΑΠ και ΠΒ σχηματίζουν ίσες γωνίες με το ποτάμι.

Ας δούμε τώρα μια "πρακτική" περίπτωση. Στο σημείο Α ενός μπιλιάρδου βρίσκεται μια μπάλα· πρέπει να τη χτυπήσουμε έτσι ώστε να ανακλαστεί στην πλευρά ε του τραπεζιού και στο γυρισμό της να συγκρουστεί με την άλλη μπάλα Β. Στο μπιλιάρδο η μπάλα, όταν χτυπάει στην πλευρά του τραπεζιού, ανακλάται και αλλάζει διεύθυνση, όπως ξέρουμε όλοι μας. Και μάλιστα οι γωνίες που σχηματίζονται ανάμεσα στη φανταστική ευθεία της πορείας της προς την πλευρά και την ίδια την πλευρά, και ανάμεσα στην πλευρά και την φανταστική ευθεία της πορείας της μετά τη σύγκρουση, είναι ίσες-δηλαδή η γωνία 1 στο σχήμα 10 είναι ίση με τη γωνία 2. 'Ολοι οι παίκτες του μπιλιάρδου το ξέρουν αυτό,τουλάχιστον υποσυνείδητα, και το χρησιμοποιούν. Σκοπεύουν και κατευθύνουν τη μπάλα προς το σημείο Π του πλευρικού τοιχώματος, στο οποίο οι ευθείες ΑΠ και ΠΒ σχηματίζουν ίσες γωνίες με την πλευρά. 'Ομως οι περισσότεροι δεν ξέρουν πως αυτή η πορεία είναι ταυτόχρονα και η συντομότερη πορεία που μπορεί να πάρει η μπάλα, για να πάει από το Α στο Β χτυπώντας στην πλευρά του τραπεζιού.

Από τα σχήματά μας γίνεται φανερό πως το ίδιο μαθηματικό θεώρημα μπορεί να μας βοηθήσει σε δυο περιπτώσεις διαφορετικές και άσχετες μεταξύ τους. Κι ακόμη υπάρχουν αναρίθμητες άλλες εφαρμογές του ίδιου θεωρήματος. Η ιστορία των μαθηματικών ήταν γεμάτη εκπλήξεις γι αυτό το λόγο- θεωρήματα που μελετήθηκαν, για να δώσουν απάντηση στα ερωτήματα κάποιας επιστήμης, συχνά αποδεικνύονται ζωτικά για κάποια άλλη επιστήμη, ολότελα διαφορετική. Βέβαια αυτή η εκπληκτικά πλατιά δυνατότητα εφαρμογής των μαθηματικών δεν κερδίζεται χωρίς κάποιο τίμημα· κι αυτό είναι το τίμημα της αφαίρεσης· ο μαθηματικός που μελετά το αφηρημένο τρίγωνο, για να βρει θεωρήματα που ισχύουν και για όλα τα υπόλοιπα, δεν πασπατεύει κάποιο τρίγωνο φτιαγμένο από ξύλο, αλλά είναι αναγκασμένος να παλέψει, για να υποτάξει με τη σκέψη του ιδέες φευγαλέες κι άπιαστες.



Σχήμα 10

Υπάρχει και κάτι άλλο πολύ σημαντικό που πρέπει πάντοτε να θυμόμαστε όσον αφορά τη σχέση των αφηρημένων μαθηματικών θεωρημάτων με τις πρακτικές εφαρμογές τους, ότι δηλαδή το αφηρημένο θεώρημα αναφέρεται σε μιαν ιδεατή περίπτωση που πιθανότατα διαφέρει από τις φυσικές καταστάσεις, στις οποίες θέλουμε να το εφαρμόσουμε. Ας υποθέσουμε πως έχουμε σχηματίσει ένα τεράστιο τρίγωνο πάνω στην επιφάνεια της γης. Θα ισχύουν γι αυτό το τρίγωνο τα θεωρήματα της γεωμετρίας; Πρέπει να πάρουμε υπόψη μας πρώτα πρώτα πως η γη είναι σφαιρική κι όχι επίπεδη. Επιπλέον πως η επιφάνειά της δεν είναι μια τέλεια σφαίρα, αλλά έχει ανωμαλίες. Αυτό το τρίγωνο λοιπόν για δύο τουλάχιστον λόγους θα διαφέρει από τα ιδεατά τρίγωνα που συναντούμε στη γεωμετρία. 'Αρα μάλλον θα οδηγηθούμε σε σφάλματα, αν βασιστούμε αποκλειστικά στα μαθηματικά θεωρήματα για τη μελέτη του. Τα πορίσματα των μαθηματικών ισχύουν μόνο στο μέτρο που τα φυσικά τρίγωνα προσεγγίζουν τα ιδεατά. Αν δεν το καταλάβουμε καλά αυτό, πολλά λάθη μας περιμένουν στις πρακτικές εφαρμογές.

Η δημιουργία της ευκλείδειας γεωμετρίας δε σήμαινε απλά και μόνο πως έμπαινε λίγη τάξη στο χώρο των μαθηματικών ή πως η ανθρωπότητα απλά πλούτιζε τις γνώσεις της με μερικά κομψά και χρηστικά θεωρήματα. Στην πραγματικότητα από εδώ ξεκίνησε η χιονοστιβάδα του ορθολογιστικού πνεύματος. Οι εκατοντάδες αποδείξεις του Ευκλείδη έδειξαν καλύτερα από οποιοδήποτε άλλο δημιούργημα του ανθρώπου τους αφάνταστους θησαυρούς γνώσης που μπορεί να παράγει η ίδια η σκέψη από μόνη της. Ο τρόπος με τον οποίο ο Ευκλείδης έφτασε στα σοφά πορίσματά του, δίδαξε στους 'Ελληνες και στους κατοπινούς πολιτισμούς πόση δύναμη έχει η λογική και τους έμαθε να έχουν εμπιστοσύνη σ'αυτή τη δύναμη. Αντλώντας θάρρος από τούτη τη μαρτυρία ο δυτικός άνθρωπος θέλησε τελικά να δοκιμάσει κι αλλού τη λογική. Οι φιλόσοφοι, οι θεολόγοι, οι πολιτικοί κι όλοι όσοι γνώρισαν τη λογική και τη μελέτησαν προσπαθώντας να οδηγηθούν στην αλήθεια, μιμήθηκαν τη δομή και τις διαδικασίες της ευκλείδειας γεωμετρίας.

Πρώτοι και καλύτεροι οι ίδιοι οι αρχαίοι 'Ελληνες είχαν ανακηρύξει τα μαθηματικά σαν πρότυπο όλων των επιστημών. Ιδιαίτερα ο Αριστοτέλης επέμενε πως κάθε επιστήμη δε μπορεί παρά να αποτελείται από την παραγωγική απόδειξη των αληθειών με βάση ορισμένες πρώτες αρχές που με τη σειρά τους θα ήταν θεμελιωμένες με κάποια μέθοδο ταιριαστή στη συγκεκριμένη επιστήμη-αρχές δηλαδή που θα έπαιζαν το ρόλο των αξιωμάτων της ευκλείδειας γεωμετρίας. Πάνω από την είσοδο της Ακαδημίας του Πλάτωνα πάλι ήταν χαραγμένο ένα περίφημο ρητό που δείχνει με τον καλύτερο τρόπο σε τι υπόληψη είχαν οι 'Ελληνες τα μαθηματικά:

"Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω"

Ο δυτικός άνθρωπος από τα Στοιχεία του Ευκλείδη διδάχτηκε τη διαδικασία, τα βήματα του τέλειου συλλογισμού. 'Εμαθε να εκτελεί με άνεση τέτοιους συλλογισμούς και να τους ξεχωρίζει από τις νεφελώδεις φράσεις που παρουσιάζονται σαν αποδείξεις χωρίς να είναι τέτοιες. Καθώς ανέπτυσσαν τη γεωμετρία οι 'Ελληνες, έμαθαν να αναγνωρίζουν τις γενικές αρχές του ορθού λόγου. Οι πιο σημαντικές απ' αυτές είναι οι γνωστοί μας "Νόμοι της λογικής". Επίσης ανακάλυψαν γενικές μεθόδους για τη λύση των προβλημάτων. Στον Πλάτωνα για παράδειγμα αποδίδεται η αναλυτική μέθοδος· σύμφωνα μ' αυτήν, ξεκινάμε από το συμπέρασμα στο οποίο θέλουμε να καταλήξουμε, θεωρούμε δηλαδή σαν αποδειγμένη την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε, και απ' αυτήν, με μια σειρά λογικών συλλογισμών προσπαθούμε να οδηγηθούμε πάλι στα αρχικά δεδομένα. Αν το καταφέρουμε αυτό αντιστρέφοντας τα λογικά βήματα της εξερεύνησης, μπορούμε να διατυπώσουμε την καθαυτό απόδειξη. Ο αναγνώστης μας ίσως θυμάται πως στο Γυμνάσιο χρησιμοποιούσε συχνά αυτή τη μέθοδο, για να αποδείξει τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Πάντως η χρήση της με κανένα τρόπο δεν περιορίζεται μόνο στη γεωμετρία. Ακόμη οι 'Ελληνες γεωμέτρες είχαν ανακαλύφει μια άλλη μέθοδο, για την οποία έτρεφαν το μεγαλύτερο θαυμασμό, τη μέθοδο της έμμεσης απόδειξης ή της "εις άτοπον απαγωγής". Αυτή ανιχνεύει τις εναλλακτικές προτάσεις που μπορούν με λογικό τρόπο να συναχθούν από τα αρχικά στοιχεία και ερευνά τις λογικές συνέπειες της κάθε μιας απ' αυτές. Σκοπός της είναι να δείξει πως εκτός απ' τη σωστή, όλες οι άλλες οδηγούν σε λογικές αντιφάσεις και συνεπώς είναι απαράδεκτες και πρέπει να απορριφθούν. Τα λογικά θεμέλια αυτής της μεθόδου, γνωστά σε όσους ασχολούνται με την τυπική λογική σαν Νόμοι της αντίφασης ή του αποκλειόμενου τρίτου, πρωτοδιατυπώθηκαν από τον Αριστοτέλη.

Η μελέτη της γεωμετρίας φανέρωσε στους ανθρώπους πόσο αναγκαία είναι η ακρίβεια των ορισμών, η σαφήνεια των πορισμάτων και η ακλόνητη λογική διαδικασία της απόδειξης. Ο Σωκράτης και ο Πλάτωνας δεν αρκέστηκαν στο να τα επισημάνουν αυτά και να τα τονίσουν, αλλά βοήθησαν όσο μπορούσαν τα μαθηματικά να αποκτήσουν ευκρίνεια, τελειότητα και διαυγή δομή. 'Ετσι χάρη στη θαυμαστή άσκηση στη λογική που πρόσφερε η γεωμετρία στους αρχαίους 'Ελληνες, ο Αριστοτέλης πέτυχε να διατυπώσει και να συστηματοποιήσει εκείνους τους νόμους της σκέψης που σήμερα όλοι μας δεχόμαστε κι εφαρμόζουμε. Από τη γεωμετρία των Ελλήνων γεννήθηκε η επιστήμη της λογικής.

Από κείνη την εποχή και μετά αμέτρητες γενιές μυήθηκαν στον ορθό λόγο μέσα απ'τη μελέτη του Ευκλείδη- κι αυτό θα έπρεπε να το προσέξουν εκείνοι που πιστεύουν πως είναι δυνατό να μάθουμε τη λογική,χωρίς να μελετήσουμε τα μαθηματικά. Πράγματι αυτή η αντίληψη θυμίζει ένα παλιό σόφισμα σύμφωνα με το οποίο, αφού όλοι μας μπορούμε να συλλάβουμε με το μυαλό μας υπέροχα ζωγραφικά αριστουργήματα, δεν υπάρχει κανένας λόγος να κάνουμε τόσο κόπο, για να τα ζωγραφίζουμε- σα να έκανε το ίδιο το να υπάρχουν κάποια οράματα στον κόσμο των ιδεών με το να έχουν φτιαχτεί οι υλικοί πίνακες στην πραγματικότητα. Δυστυχώς όμως η ιδέα ενός πίνακα από μόνη της δε συγκλόνισε ποτέ καμιά ανθρώπινη ψυχή.

Η γεωμετρία του Ευκλείδη έχει τεράστια αξία, κι όχι μόνο σαν λογική άσκηση ή σαν πρότυπο του ορθού λόγου. 'Οπως αναπτυσσόταν η αρμονική δομή και η κομψή συλλογιστική της γεωμετρίας, τα ίδια τα μαθηματικά έπαψαν να αποτελούν ένα απλό εργαλείο αφιερωμένο στην εξυπηρέτηση κάποιων άλλων δραστηριοτήτων, κι έγιναν τέχνη. Οι 'Ελληνες σαν τέχνη τα εκτιμούσαν και τα ερμήνευαν. Η αριθμητική, η γεωμετρία και η αστρονομία ήταν γι αυτούς η μουσική της ψυχής και η τέχνη του πνεύματος.

Πράγματι η αρχαία ελληνική σκέψη ελάχιστη διάκριση έκανε ανάμεσα στο λογικό, το καλαίσθητο και το ηθικό. Επανειλημμένα διαβάζουμε στα κείμενά τους πως η γη πρέπει να είναι σφαιρική, γιατί η σφαίρα είναι το πιο όμορφο σχήμα, και κατά συνέπεια δε μπορεί παρά να είναι και αγαθή και θεϊκή. Για τον ίδιο λόγο ο Πλάτωνας πίστευε πως ο ήλιος, η σελήνη και οι πλανήτες είναι στερεωμένοι σε σφαίρες που περικλείουν τη γη και περιστρέφονται γύρω απ'τους άξονές τους. Επιπλέον οι διαδρομές των ουράνιων σωμάτων έπρεπε να είναι κυκλικές, κατά τη γνώμη του, αφού κι ο κύκλος από αισθητική άποψη είναι θελκτικός εξίσου με τη σφαίρα. Ο κύκλος και η σφαίρα ήταν τα σχήματα των τέλειων τροχιών που αντιπροσώπευαν την αμετάβλητη, αιώνια τάξη του Ουρανού, σε αντίθεση με την ευθύγραμμη κίνηση που επικρατεί στην ατελή γη. Για λόγους αισθητικούς και ηθικούς επίσης οι 'Ελληνες ήταν σίγουροι πως τα ουράνια σώματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα και διανύουν ίσες αποστάσεις σε ίσα χρονικά διαστήματα. Μια τέτοια αξιοπρεπής, κανονική και αβίαστη κίνηση τους ταίριαζε, και καμία άλλη. Πράγματι, έλεγαν οι Πυθαγόρειοι, η μεταβαλλόμενη κίνηση είναι απαράδεκτη για τα ουράνια σώματα· "ακόμα και στη σφαίρα των ανθρώπων η έλλειψη κανονικότητας είναι ασυμβίβαστη με το βάδισμα ενός αξιοπρεπούς άνδρα". Οι αλήθειες της ποίησης και οι αλήθειες της επιστήμης ήταν ένα και το αυτό, ή, για να παραφράσουμε τον Αριστοτέλη, η ίδια η τελεολογία της φύσης κι οι βαθύτατοι νόμοι της φανερώνουν με το χιλιόμορφο έργο τους ότι τείνουν προς τη μια ή την άλλη μορφή του ωραίου.

Στην αρχαία Ελλάδα το ίδιο πνεύμα, η ίδια κοσμοαντίληψη εκφραζόταν μέσα από τη γεωμετρία, τη φιλοσοφία, τη λογική και την τέχνη. Ορισμένοι ιστορικοί προσπάθησαν να ανιχνεύσουν τα κοινά χαρακτηριστικά σε όλες αυτές τις όψεις του κλασικού ελληνικού πολιτισμού, και πράγματι οι έρευνές τους οδήγησαν σε γοητευτικές ιδέες. Για παράδειγμα η τόσο σαφής, διαυγής και απλή δομή της ευκλείδειας γεωμετρίας είναι ο τρόπος με τον οποίο εκδηλώνεται στα μαθηματικά η αγάπη για τη διαύγεια και για το προσεγμένο σχέδιο που εκφράζεται μέσα απ' τη λιτή, απέριττη φόρμα των ελληνικών ναών. Πόσο μπερδεμένοι, αλήθεια, φαίνονται μπροστά σ' αυτούς τους ναούς οι γοτθικοί καθεδρικοί με τα αμέτρητα εσωτερικά και εξωτερικά στολίδια τους, στοιβαγμένα το ένα πάνω στο άλλο! Η ελληνική γλυπτική της κλασικής περιόδου πάλι είναι κι αυτή εξαιρετικά απλή. Πουθενά δεν υπάρχουν επιτηδευμένα φορέματα, στρατιωτικά στολίδια ή οποιουδήποτε είδους άλλα παραφερνάλια που κρύβουν την κορμοστασιά ή αποσπούν την προσοχή από το κεντρικό θέμα.

Παρόμοια κι η λογοτεχνία της περιόδου, που έχει μείνει κλασική ως τις μέρες μας, ήταν γραμμένη σε στυλ απλό, ξεκάθαρο, λαγαρό έστω και θυσιάζοντας τις πολλές εικόνες και τα εντυπωσιακά επίθετα. Για να καταλάβουμε αυτή την ποιότητα του ελληνικού στυλ, δεν έχουμε παρά να συγκρίνουμε το αηδόνι που το τραγούδι του -

με τη γητειά του μαγικά παράθυρα ανοίγει,

στή χώρα όπου κρύβονται του θρύλου οι νεράϊδες,
πέρα απ'του πόντου το φρικτό κι αγριεμένο αχό...

με το ταπεινό μικρό πουλί του Σοφοκλή που
τραγουδά το καθάριο τραγούδι του βαθιά στα πράσινα ξέφωτα
του δάσους προφυλαγμένο απ'τις ηλιαχτίδες και τον άνεμο...

Τα συστατικά του κάλλους ήταν διαύγεια, απλότητα, μέτρο. Η ελληνική τέχνη, η τέχνη του πνεύματος και των μεταρσιωμένων διανοητών, είναι τέχνη λιτή. Κι όμως απ' αυτή την κομψή απλότητα της γεωμετρίας, της αρχιτεκτονικής, της γλυπτικής και της λογοτεχνίας των Ελλήνων διασκορπίζεται η πιο θεσπέσια ομορφιά.

Συχνά λέγεται για την ευκλείδεια γεωμετρία πως είναι κλειστή και πεπερασμένη. Αυτά τα επίθετα μπορούν να εννοηθούν με διάφορους τρόπους. Το υλικό της είναι περιορισμένο, όπως είδαμε- είναι τα σχήματα που μπορούν να χαραχτούν με τον κανόνα και το διαβήτη, και τα θεωρήματα που μπορούν να συναχθούν από έναν προκαθορισμένο αριθμό αξιωμάτων. 'Οσο κι αν επεκτείνεται αυτή η γεωμετρία, νέα αξιώματα δεν εισάγονται. Η ευκλείδεια γεωμετρία είναι και πεπερασμένη με την έννοια πως αποφεύγει το άπειρο. Η ευθεία γραμμή για παράδειγμα δε θεωρείται στην ολότητά της από τον Ευκλείδη. Θεωρείται μάλλον, όπως είχε διευκρινίσει και ο ίδιος, σαν ένα ευθύγραμμο τμήμα, που μπορούμε να το προεκτείνουμε προς οποιαδήποτε κατεύθυνση όσο μας είναι αναγκαίο, σα να δυσαναοχετούσε με την ανάγκη αυτής της προέκτασης. Παρόμοια, όταν ασχολούνταν με τους ακέραιους αριθμούς οι 'Ελληνες, θεωρούσαν το σύνολό τους σαν δυναμικά άπειρο μόνο με την έννοια πως περισσότεροι αριθμοί μπορούν πάντοτε να προστεθούν σε οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολό του. Δεν ασχολήθηκαν ποτέ με όλους μαζί τους ακέραιους αριθμούς, ποτέ δεν τους είδαν σα μια αυτοδύναμη οντότητα.

Τα ίδια χαρακτηριστικά κυριαρχούν και στην ελληνική αρχιτεκτονική˙είναι κι αυτή κλειστή και πεπερασμένη. Οι ελληνικοί ναοί από πάνω μέχρι κάτω φαίνονται με την πρώτη ματιά. Το σύνολό τους είναι περιορισμένο, προσιτό. Δίνουν την εντύπωση της οριστικότητας, της πληρότητας, της σαφήνειας. Το μάτι και το μυαλό αμέσως συλλαμβάνουν και αντιλαμβάνονται τις διαστάσεις και την ατμόσφαιρά τους. Ας τους συγκρίνουμε για άλλη μια φορά με τους γοτθικούς ναούς. Αυτοί οι τελευταίοι είναι αδύνατο να ιδωθούν σα σύνολο. Φαίνονται σα να χάνονται προς όλες τις διευθύνσεις, να δραπετεύουν απ' την καθολική κατανόηση. Υποβάλλουν στο ανθρώπινο μυαλό την ιδέα των τεράστιων αποστάσεων, με τα αμέτρητα τόξα τους που στρέφουν προς τα ουράνια, όπου κατοικεί ο 'Υψιστος. Η φαντασία ερεθίζεται, η ψυχή γεμίζει δέος από τις ατέλειωτες σειρές των αλλεπάλληλων αψίδων κι απ'τους πανύψηλους βωμούς που χάνονται στο μισοσκόταδο, ενώ τα πάντα είναι τεράστια, έτσι ώστε να δημιουργείται η αίσθηση μιας αόρατης παρουσίας. Η αίσθηση του πεπερασμένου γκρεμίζεται καθώς το ουρανοτενές κτήριο καταπίνει το άτομο και το χωνεύει στο θολό εσωτερικό του.

Για την ελληνική επιστήμη η έννοια του άπειρου ήταν ακατανόητη και ποτέ δε φανερώθηκε στο προσκήνιο. Για τους αρχαίους 'Ελληνες η απλούστερη κίνηση δεν ήταν η ευθύγραμμη, όπως είναι για μας, γιατί η ευθεία ήταν αδύνατο να συλληφθεί στην ολότητά της- η ευθύγραμμη κίνηση ποτέ δεν είναι ολοκληρωμένη. Οι 'Ελληνες θεωρούσαν ανώτερη την κυκλική κίνηση. Η έννοια της προόδου δίχως τέλος τους τρόμαζε· ζάρωναν μπροστά στη "σιωπή των αχανών διαστημάτων".

Ακόμα κι η φιλοσοφία τους απέφευγε το άπειρο. Τα παράδοξα του απείρου- στη συνέχεια θα συναντήσουμε μερικά απ'αυτά- τους έθεταν αξεπέραστα εμπόδια, σύνορα που πέρα τους δε μπορούσε να προχωρήσει η ελληνική σκέψη. Ο Αριστοτέλης έλεγε πως το άπειρο είναι εκείνο που είναι ατελές κι ανολοκλήρωτο, και γι αυτούς τους λόγους αδιανόητο. Είναι άμορφο και συγκεχυμένο. Πραγματικά το καλό και το κακό βασιζόταν στις έννοιες του ορισμένου και του πεπερασμένου- το πρώτο-, και του απροσδιόριστου και του άπειρου- το δεύτερο. Οι περιορισμένες και συγκεκριμένες ιδιότητες των αντικειμένων, αυτές ήταν που τους έδιναν τον ίδιο τους το χαρακτήρα και τα προίκιζαν με οριστικότητα, τα έκαναν τέλεια. Μόνο σαν ορισμένα και ευδιάκριτα είχαν νόημα τα αντικείμενα."Ποτέ κάτι το άπειρο δεν εισβάλλει στη ζωή των θνητών χωρίς κατάρα", λέει ο Σοφοκλής.

Υπάρχει κι άλλο ένα χαρακτηριστικό των ελληνικών μαθηματικών που χρωμάτιζε, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, ολόκληρη την κουλτούρα αυτού του λαού. Αν αναλογιστούμε την ευκλείδεια γεωμετρία στο σύνολό της, θα δούμε πως της ταιριάζει ο χαρακτηρισμός στατικός . Αφήνει κατά μέρος τις ιδιότητες των μεταβαλλόμενων σχημάτων, δεν τις ερευνά. Αντίθετα τα σχήματα θεωρούνται δεδομένα και οριστικά, και μελετούνται, όπως είναι. Μια ανάλογη νοοτροπία αντανακλάται και στη γαλήνια ατμόσφαιρα των ελληνικών ναών: εδώ κατοικεί το πνεύμα, η διάνοια. Το ίδιο και στη γλυπτική οι μορφές είναι στατικές, αποστασιοποιημένες, ήρεμες. Οι συγκινήσεις τις ταράζουν όσο θα μπορούσαν να ταράξουν κι ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Ο Δισκοβόλος του Μύρωνα, ενώ η στάση του δείχνει να προετοιμάζεται για μια υπεράνθρωπη σωματική προσπάθεια, είναι ήρεμος και φυσικός σαν Εγγλέζος ευγενής την ώρα που πίνει το τσάι του.

Συχνά γίνεται λόγος επίσης για το στατικό χαρακτήρα της ελληνικής δραματουργίας. Στις τραγωδίες των κλασικών συγγραφέων η δράση είναι υποτυπώδης, όταν υπάρχει. Με το άνοιγμα της αυλαίας συνήθως έχουμε μια περίληψη κάποιων προηγούμενων γεγονότων που θέτουν ένα πρόβλημα, βάζουν τους ήρωες μπροστά σ' ένα σταυροδρόμι. Το έργο περιστρέφεται γύρω από μάχες που τραντάζουν τον κόσμο των ιδεών και των αισθημάτων, για τις οποίες η δράση πάνω στη σκηνή είναι απλά ένα προκάλυμμα, και κορυφώνεται σε συγκρούσεις που την έκβασή τους θα μπορούσε να τη μαντέψει κανείς από τα πριν.

Η στατικότητα του ελληνικού δράματος σχετίζεται και με ένα άλλο χαρακτηριστικό της ευκλείδειας γεωμετρίας. Οι ελληνικές τραγωδίες τονίζουν το ρόλο του πεπρωμένου, της αναγκαιότητας. Οι ήρωές τους δείχνουν να μη έχουν τη δύναμη ή τη βούληση να πάρουν μόνοι τους αποφάσεις, αλλά καθοδηγούνται από δυνάμεις κρυμμένες. Ο Οιδίποδας ακούσια οδηγείται στην αιμομιξία και την πατροκτονία. Δε μπορεί να παρομοιαστεί το έργο της μοίρας, με τον τρόπο που λειτουργεί ο παραγωγικός συλλογισμός; Με τους καταναγκασμούς που δέχεται από την ίδια του τη φύση; Πραγματικά όταν χρησιμοποιεί αυτή τη μέθοδο ο μαθηματικός, δεν είναι ελεύθερος να διαλέξει όποια συμπεράσματα του αρέσουν, αλλά εκείνο που γίνεται δεκτό σαν βάση του συλλογισμού του τον αναγκάζει να παραδεχτεί τα αναπόφευκτα συμπεράσματα.

Και τώρα ας δούμε το τελευταίο γνώρισμα της τέχνης και της φιλοσοφίας, αλλά και της γεωμετρίας, που μολονότι χαρακτηρίζει γενικά την αυθεντική δημιουργία σε τούτα τα πεδία, αναδεικνύεται με τρόπο απαράμιλλο στα δημιουργήματα των αρχαίων Ελλήνων. Στα έργα αυτά καθρεφτίζεται η προσπάθεια του πολιτισμού που τα έπλασε να δει το Σύμπαν sub specie aeternitatis. Ζήτησαν οι 'Ελληνες να γνωρίσουν αυτό που είναι καθολικό κι αιώνιο, κι όχι το ατομικό, το επιμέρους, το φευγαλέο. Η σφαίρα που μελετούν οι μαθηματικοί, είναι αιώνια και οι ιδιότητές της θα ισχύουν το ίδιο. Το ιδανικό αντικείμενο της γνώσης λοιπόν είναι αυτή η σφαίρα. Η φυσαλίδα του νερού και το πολύχρωμο μπαλόνι, όσο κι αν μας γοητεύουν, δεν αξίζουν την προσοχή μας- μέσα σε μια στιγμή εξαφανίζονται. Παρόμοια η κλασική ελληνική τέχνη θέλησε να εκφράσει και να απεικονίσει τις γενικές, τις ουσιαστικές ιδιότητες όχι των ανθρώπων, αλλά του Ανθρώπου. Στον κάθε ξεχωριστό άνθρωπο το πιο σημαντικό ήταν ο τρόπος με τον οποίο φανερωνόταν μέσα απ' αυτόν οι καθολικές ιδιότητες της Ανθρωπότητας. Αντίθετα τα φορέματα, οι προσωπικές σχέσεις κι οι καθημερινές ασχολίες του ήταν πράγματα περιστασιακά κι ασήμαντα. Με τις φιλοσοφικές τους θεωρίες πάλι οι 'Ελληνες θέλησαν να κατανοήσουν και να προσδιορίσουν τις έννοιες και τις ιδιότητες με τη μεγαλύτερη τελειότητα, γιατί το τέλειο είναι και αιώνιο από την ίδια του τη φύση. Σκεφτόταν αδιάκοπα την ιδανική κοινωνία και ήταν περήφανοι γι αυτό·όμως ούτε που τους περνούσε απ' το μυαλό ότι θα μπορούσαν να εκδημοκρατίσουν τη δική τους, την ελληνική κοινωνία.

Τα μαθηματικά που είδαμε μέχρι τώρα και ολόκληρη η κουλτούρα που αντανακλούν και που διαχέεται μέσα απ' αυτά, ανήκαν στην κλασική περίοδο του ελληνικού πολιτισμού. Δεν εξαντλείται όμως σ' αυτά η συμβολή της "χώρας όπου πρωτάνθισε ο πολιτισμός" στα μαθηματικά και στη σύγχρονη σκέψη. Μας περιμένει ακόμη η σημαντική περίοδος 300 π.Χ. έως 600 μ.Χ. Ας φέρουμε και πάλι στο μυαλό μας λοιπόν, προτού γυρίσουμε αυτή τη σελίδα, πως η εποχή που εγκαταλείπουμε, δημιούργησε τα μαθηματικά με την έννοια που τα καταλαβαίνουμε εμείς σήμερα. Ο τρόπος με τον οποίο αυτή η εποχή απέρριψε όλες τις άλλες αποδεικτικές μεθόδους και κράτησε μόνο την παραγωγική, ο ζήλος με τον οποίο προτίμησε πάντα το αφηρημένο και ποτέ το συγκεκριμένο κι η θαυμαστή διεισδυτικότητα που τη βοήθησε να επιλέξει ένα τόσο καρποφόρο και βάσιμο σύνολο αξιωμάτων, όλα αυτά καθόρισαν αποφασιστικά το χαρακτήρα των μαθηματικών, ενώ άνοιξε οριστικά το μονοπάτι για την ανακάλυψη και απόδειξη πολυάριθμων θεμελιακών θεωρημάτων. Κι ακόμη δίπλα δίπλα στα μαθηματικά οικοδομήθηκε ο εκπληκτικός φάρος του ορθού λόγου, που καθοδήγησε τους Έλληνες στις πιο θαυμαστές εξερευνήσεις τους, κι όχι μονάχα στα πελάγη των μαθηματικών. Αλλά η πρώτη φορά που διακηρύχτηκε η προτεραιότητα του πνεύματος στις υποθέσεις των ανθρώπων και που απόχτησε έτσι νέο νόημα ο ίδιος ο όρος πολιτισμός, ήταν με τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων.