

Γραμμικά συστήματα 2x2

1. Να λυθεί το σύστημα.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{array} \right.$$

1^η μέθοδος: «Με αντικατάσταση»

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ \kappa\alpha\iota \\ x + 2y = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ \kappa\alpha\iota \\ x + 2y = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(5 - 2y) + y = 7 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2y + y = 7 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 - 4y + y = 7 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4y + y = 7 - 10 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3y = -3 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{-3}{-3} \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2 \cdot 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 5 - 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Προφανώς το σύστημα έχει μία μόνο λύση, το ζευγάρι $(x, y) = (3, 1)$

ή

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{aligned} x + 2(7 - 2x) &= 5 \\ x + 2 \cdot 7 - 2 \cdot 2x &= 5 \\ x + 14 - 4x &= 5 \\ x - 4x &= 5 - 14 \\ -3x &= -9 \\ x &= \frac{-9}{-3} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 7 - 2x \\ y &= 7 - 2 \cdot 3 \\ y &= 7 - 6 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

2^η μέθοδος: «Των αντίθετων συντελεστών» ή «Απαλοιφής (του Gauss)»

(Με γραμμικό συνδυασμό εξισώσεων)

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \text{και} \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \text{και} \\ -2 \cdot x + (-2) \cdot 2y = (-2) \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2x} + y = 7 \\ \text{και} \\ \cancel{-2x} - 4y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \text{και} \\ -3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \hspace{15em} (+) \quad \underline{-3y = -3} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \text{και} \\ y = \frac{-3}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 7 \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 7 - 1 \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{2} \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Προφανώς το σύστημα έχει μία μόνο λύση, το ζευγάρι $(x, y) = (3, 1)$.

3^η μέθοδος: «Των οριζουσών (του Cramer)»

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ \text{και} \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + 1 \cdot y = 7 \\ \text{και} \\ 1 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \end{cases}, \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Επειδή $D \neq 0$, το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 14 - 5 = 9 \quad \text{και} \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 10 - 7 = 3$$

$$\text{Έτσι} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ \text{και} \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{3} \\ \text{και} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{και} \\ y = 1 \end{cases} \text{ και επομένως η μοναδική λύση είναι } (x, y) = (3, 1).$$

4^η μέθοδος: Γραφική επίλυση.



Όπως είναι γνωστό, εξισώσεις όπως η $2x + y = 7$, έχουν άπειρες λύσεις και αν θελήσουμε να τις «δούμε» απεικονισμένες στο επίπεδο με σημεία, θα δούμε μία **ευθεία γραμμή**. Δεν είναι λοιπόν τυχαίο ότι αυτές οι εξισώσεις ονομάζονται **γραμμικές** και τα συστήματά τους **γραμμικά**. Μάλιστα, επειδή όλα τα σημεία της ευθείας απεικονίζουν λύσεις της εξίσωσης και όλες οι λύσεις της εξίσωσης απεικονίζονται από σημεία της ευθείας, η **εξίσωση** ονομάζεται εξίσωση της συγκεκριμένης **ευθείας**.

Στην περίπτωση μας, βρήκαμε γραφικά την **κοινή λύση** των δύο εξισώσεων, δηλαδή τη λύση του συστήματος, βρίσκοντας τις συντεταγμένες του **κοινού σημείου** των δύο ευθειών.

Αν αυτή η κατασκευή γίνει πρόχειρα «στο χέρι», το αποτέλεσμα θα προσεγγίζει την πραγματικότητα, ανάλογα με την φροντίδα και ικανότητα κατασκευής. Αν όμως η κατασκευή γίνει στο «computer», θα έχουμε ακρίβεια, τουλάχιστο για λύσεις με συντεταγμένες ρητούς αριθμούς.

$$2. \text{ Να λυθεί το σύστημα } \begin{cases} -3y + 2x = 7 \\ \text{και} \\ -x - 6 = 8y \end{cases}.$$

Λύση με τη «μέθοδο Cramer»:

$$\begin{cases} -3y + 2x = 7 \\ \text{και} \\ -x - 6 = 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ \text{και} \\ -x - 8y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + (-3) \cdot y = 7 \\ \text{και} \\ (-1) \cdot x + (-8) \cdot y = 6 \end{cases}$$

Προσαρμόσαμε το σύστημα στη **γενική μορφή** των γραμμικών συστημάτων.

Αλλάξαμε τη σειρά των μονωνύμων και μετατρέψαμε τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις.

Επειδή $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - (-1) \cdot (-3) = -16 - 3 = -19 \neq 0$, το σύστημα έχει μία μόνο λύση.

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-8) - 6 \cdot (-3) = -56 + 18 = -38 \quad \text{και} \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-1) \cdot 7 = 12 + 7 = 19$$

$$\text{Έτσι } \begin{cases} 2x-3y=7 \\ \text{και} \\ -x-8y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{D_x}{D}=\frac{-38}{-19} \\ \text{και} \\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{19}{-19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{και} \\ y=-1 \end{cases} \text{ και επομένως η μοναδική λύση είναι } (x,y)=(2,-1).$$

Υπενθύμιση: Ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους (2x2), έχει τη γενική μορφή:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \text{και} \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \begin{cases} \text{με } \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \\ \text{πραγματικούς} \\ \text{αριθμούς.} \end{cases} \text{ και ορίζουμε } D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}.$$

$$\text{Αν } D \neq 0, \text{ τότε το σύστημα γίνεται } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ \text{και} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases} \text{ και έχει ακριβώς μία λύση: } (x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right).$$

Αν $D = 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Λύση με τη «μέθοδο της αντικατάστασης»:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -3y+2x=7 \\ \text{και} \\ -x-6=8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+2x=7 \\ \text{και} \\ -8y-6=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+2(-8y-6)=7 \\ \text{και} \\ x=-8y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y-16y-12=7 \\ \text{και} \\ x=-8y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -19y=19 \\ \text{και} \\ x=-8y-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ \text{και} \\ x=-8 \cdot (-1)-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ \text{και} \\ x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Λύσαμε ως προς x , επειδή είχε συντελεστή με απόλυτη τιμή 1. Κάθε άλλη επιλογή θα μας υποχρέωνε να «μπλέξουμε» με κλάσματα.

Λύση με τη μέθοδο «των αντίθετων συντελεστών» ή «απαλοιφής (του Gauss)»:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -3y+2x=7 \\ \text{και} \\ -x-6=8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (2x-3y=7) \\ \text{και} \\ 2 \cdot (-x-8y=6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2x}-3y=7 \\ \text{και} \\ \cancel{-2x}-16y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ \text{και} \\ y=\frac{19}{-19} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \cdot (-1)=7 \\ \text{και} \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=7-3 \\ \text{και} \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{2} \\ \text{και} \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{και} \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Σχόλιο: Επιλέξαμε να απαλείψουμε τον x (δημιουργώντας αντίθετους συντελεστές), επειδή είχε συντελεστή με απόλυτη τιμή 1. Αν επιλέγαμε τον y , θα έπρεπε να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές με απόλυτη τιμή το λιγότερο όσο το Ε.Κ.Π.(3,8)=24.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 8 \cdot (2x-3y=7) \\ \text{και} \\ -3 \cdot (-x-8y=6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x-\cancel{24y}=56 \\ \text{και} \\ 3x+\cancel{24y}=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ \text{και} \\ 19x=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ \text{και} \\ x=\frac{38}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2-3y=7 \\ \text{και} \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ \text{και} \\ x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Στη μέθοδο αυτή, βρίσκουμε ισοδύναμο σύστημα του αρχικού, αντικαθιστώντας μία (οποιαδήποτε) από τις δυο εξισώσεις, με αυτήν που προκύπτει σα γραμμικός συνδυασμός τους.

Στην περίπτωση μας, αν ονομάζαμε συμβολικά $(\varepsilon_1): 2x - 3y = 7$ και $(\varepsilon_2): -x - 8y = 6$, τότε η καινούργια εξίσωση θα μπορούσε να ονομαστεί συμβολικά $(8 \cdot (\varepsilon_1) + (-3) \cdot (\varepsilon_2)): 19x = 38$ και ουσιαστικά «**γραμμικός συνδυασμός**».

3. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 5 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 4 = 2(\lambda - 2)$ και $D = 0 \Leftrightarrow 2(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

(α) Για $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$, το σύστημα θα έχει μια ακριβώς λύση.

Επειδή $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 7 = 3$ και $D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 7\lambda - 20$,

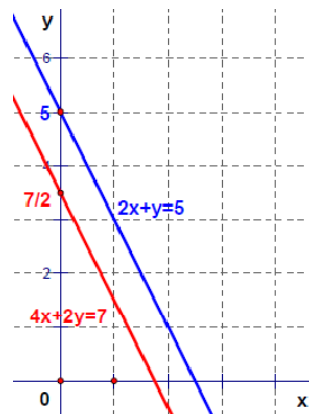
η λύση θα είναι $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{3}{2(\lambda - 2)}, \frac{7\lambda - 20}{2(\lambda - 2)} \right)$, για κάθε πραγματικό $\lambda \neq 2$.

(β) Για $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$, το σύστημα θα είναι **αδύνατο** ή θα έχει **άπειρες λύσεις**.

Για $\lambda = 2$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$ και είναι προφανώς **αδύνατο**.

Σχόλια: (i) Στη γραφική λύση του συστήματος που προκύπτει για $\lambda = 2$, βλέπουμε δυο **παράλληλες ευθείες**, κάτι που ήταν αναμενόμενο για **αδύνατο σύστημα**. Επίσης, λύνοντας τις εξισώσεις του συστήματος ως προς y , παρατηρούμε ότι και οι δύο εξισώσεις έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης **(-2)** κάτι αναμενόμενο

για παράλληλες ευθείες. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ \text{και} \\ 2y = -4x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ \text{και} \\ y = -2x + \frac{7}{2} \end{cases}$



(ii) Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσουμε στο σχήμα, ότι οι ευθείες τέμνουν τον άξονα των y στο σταθερό όρο των εξισώσεων, όταν αυτές είναι λυμένες ως προς y .

(iii) Το σύστημα για $\lambda = 2$, $\begin{cases} -2 \cdot \begin{cases} 2x + y = 5 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 7 \end{cases} \\ 1 \cdot \begin{cases} 4x + 2y = 7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-4x} - \cancel{2y} = -10 \\ \text{και} \\ \cancel{4x} + \cancel{2y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ \text{και} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = -3 \end{cases}$ είναι αδύνατο,
 (αδύνατη)

αφού είναι ισοδύναμο με σύστημα που είναι αδύνατο, επειδή μία εξίσωσή του είναι αδύνατη.

(iv) Η εξίσωση $0 \cdot x + 0 \cdot y = -3$, αφού **είναι αδύνατη**, δεν έχει λύσεις και επομένως **δεν απεικονίζεται** στο επίπεδο και, όπως είναι φυσικό, **δεν είναι εξίσωση ευθείας γραμμής**.

(v) Το σύστημα της άσκησης 3, λέγεται παραμετρικό, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. Πρόκειται για άπειρο πλήθος συστημάτων, «στη συσκευασία του ενός», αφού κάθε φορά που αντικαθιστούμε το λ με ένα πραγματικό αριθμό, προκύπτει και διαφορετικό σύστημα. Άπειροι οι πραγματικοί αριθμοί που μπορούν να μπουν στη θέση του λ και επομένως άπειρα και τα συστήματα. Όταν λέμε να λυθεί ένα τέτοιο σύστημα, εννοούμε να χωριστούν οι πραγματικοί αριθμοί σε τρεις ομάδες (**υποσύνολα του $\mathbb{R}$**). Σε αυτούς που δίνουν σύστημα με μία μόνο λύση, σε αυτούς που δίνουν αδύνατο και σε αυτούς που δίνουν σύστημα με άπειρες λύσεις.

4. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ \text{και} \\ 4x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$ και

$$D = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 0 \\ \text{ή} \\ \lambda + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \text{ή} \\ \lambda = -2 \end{cases}.$$

(α) Για $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 2 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -2 \end{cases}$, το σύστημα θα έχει μια ακριβώς λύση.

Επειδή $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda^2 = -\lambda(\lambda - 2)$ και $D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 4 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)$,

η λύση θα είναι $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{-\lambda(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)}, \frac{(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} \right) = \left(\frac{-\lambda}{\lambda + 2}, \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4}{\lambda + 2} \right)$,

για κάθε πραγματικό $\{\lambda \neq 2 \text{ και } \lambda \neq -2\}$.

(β) Για $D = 0 \Leftrightarrow \{\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2\}$, το σύστημα θα είναι **αδύνατο** ή θα έχει **άπειρες λύσεις**.

Για $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -2x + y = 2 \\ \text{και} \\ 4x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ \text{και} \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$ και είναι προφανώς **αδύνατο**.

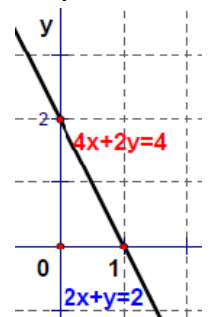
Για $\lambda = 2$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$ και έχει προφανώς **άπειρες λύσεις**.

* $\lambda^3 - 8 = \lambda^3 - 2^3 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda \cdot 2 + 2^2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)$

Σχόλια: (i) Στη γραφική λύση του συστήματος που προκύπτει για $\lambda = 2$, βλέπουμε μια **μαύρη ευθεία**, ενώ εμείς σχεδιάσαμε μία **μπλε** και μία **κόκκινη** που ταυτίζονται, αφού έχουν την «ίδια» (ισοδύναμη) εξίσωση.

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -4 \\ \text{και} \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ \text{και} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

(+) $\frac{0 \cdot x + 0 \cdot y = 0}{\text{ταυτότητα}}$ και έτσι, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, αφού



είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα του οποίου η 1^η εξίσωση έχει **άπειρες λύσεις** και η 2η είναι **ταυτότητα**.

Η 2^η, σαν **ταυτότητα**, δέχεται για λύση **κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών** και επομένως δέχεται για λύσεις της, όλες τις λύσεις της 1^{ης}. Έτσι οι άπειρες λύσεις της 1^{ης} είναι κοινές λύσεις, δηλαδή λύσεις του συστήματος.

(ii) Η εξίσωση $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, αφού είναι ταυτότητα, δέχεται για λύση **κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών**

και επομένως κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζει κάποια λύση της. Έτσι όποιος θέλει να την παραστήσει γραφικά, θα πρέπει να χρωματίσει ολόκληρο το επίπεδο. **Προφανώς δεν είναι εξίσωση ευθείας γραμμής.**

Προσοχή: Στη λύση των ασκήσεων, χρησιμοποιήσαμε αποκλειστικά τα όσα γράφονται στο σχολικό βιβλίο. Στα σχόλια προχωρήσαμε σε μια μικρή «προέκταση», που όμως **υποστηρίχτηκε επαρκώς**. Αυτή θα πρέπει να είναι η ασφαλής συμπεριφορά, όταν συμμετέχουμε σε, επίσημες τουλάχιστον, εξετάσεις.