

Μονοτονία Συνάρτησης

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = -3x + 2$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

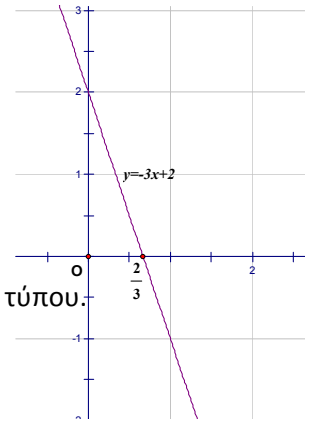
(1^η) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

Έχουμε: $x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Αφού αποδείχθηκε ότι για **τυχαίο** ζευγάρι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$, άρα

για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.



Σχόλια: (i) Για τη συνάρτηση f , δόθηκε μόνο ο **τύπος** της και εμείς

θεωρήσαμε προφανές, ότι το **πεδίο ορισμού (Π.Ο.)** της είναι το σύνολο $\mathbb{R}$,

αφού στις δικές μας συναρτήσεις όταν δε δίνεται το **(Π.Ο.)**, εννοείται το

ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, σε σχέση πάντα με τις **δυνατότητες** του τύπου.

Στην περίπτωση μας ο τύπος έχει τη δυνατότητα να «παντρέψει» όλους τους πραγματικούς αριθμούς, κάτι που δε συμβαίνει με τον τύπο π.χ. $g(x) = \sqrt{x}$,

που προφανώς δε μπορεί να παντρέψει τους αρνητικούς. Έτσι, αν μας έλεγαν

«δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$ » εμείς θα θεωρούσαμε **(Π.Ο.)** το διάστημα $[0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, αφού αυτό είναι το **ευρύτερο δυνατό**, για το συγκεκριμένο τύπο.

(ii) Μια συνάρτηση γνησίως φθίνουσα, «**ανατρέπει τη διάταξη**» **παντού**. Δηλαδή για κάθε ζευγάρι άνισων **αρχετύπων** $x_1 < x_2$, οι **εικόνες** τους $f(x_1) > f(x_2)$, είναι ανομοίως άνισες.

Με άλλα λόγια, «σε κάθε ζευγάρι, το **μικρότερο** αρχέτυπο x , έχει τη **μεγαλύτερη** εικόνα $f(x)$ ».

(iii) Όταν λέμε να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, εννοούμε στο **(Π.Ο.)** της.

(iv) Εμείς, θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις, των οποίων το **(Π.Ο.)** θα είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Στην άσκησή μας το **(Π.Ο.)** είναι διάστημα, αφού $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

(v) Στη **γνησίως φθίνουσα** συνάρτησή μας, η γραφική παράσταση, που είναι ευθεία, **κατέρχεται** (κατηφοριά), αν την παρατηρήσουμε από αριστερά προς τα δεξιά.

(2^η) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και επομένως $x_2 - x_1 > 0$. **Αρκεί** να αποδείξουμε ότι

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \text{ αφού τότε } f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ και συνεπώς } f(x_2) < f(x_1).$$

$$\text{Έχουμε: } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-3x_2 + 2) - (-3x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{-3x_2 + 2 + 3x_1 - 2}{x_2 - x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = -3 < 0$$

Αφού αποδείχθηκε ότι για **τυχαίο** ζευγάρι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, άρα

για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, συνεπώς $f(x_1) > f(x_2)$

και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Σχόλιο: Ο $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, για τα παιδιά της «κατεύθυνσης»,

είναι ο **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $\Gamma(x_2, f(x_2))$ (Η ε είναι η γραφική παράσταση.)

Παρατηρήσεις: (i) Η γωνία φ , είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που έχει εξίσωση $y = -3x + 2$, με τον άξονα των x .

Η **αρνητική** γωνία ω , στην κορυφή Δ , τελειώνει στο 4^ο τεταρτημόριο, επομένως έχει αρνητική εφαπτομένη ($\varepsilon\phi\omega < 0$) και επειδή $\varphi = \pi + \omega$,

θα έχουμε $\varepsilon\phi\varphi = \varepsilon\phi(\pi + \omega) = \varepsilon\phi\omega$.

(Για να τα «δούμε» τα παραπάνω, θα πρέπει να φανταστούμε το σημείο Δ , σαν αρχή κάποιων αξόνων. Το διπλανό σχήμα βοηθάει.)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\text{BA}\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) έχουμε:

$$\varepsilon\phi\hat{\text{BA}\Gamma} = \frac{(\text{B}\Gamma)}{(\text{AB})} = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = \frac{-(f(x_2) - f(x_1))}{x_2 - x_1}.$$

Έχουμε $\left(\hat{\text{BA}\Gamma}\right) = |\hat{\omega}|$, προφανώς $\varepsilon\phi\hat{\text{BA}\Gamma} > 0$ και αφού $\varepsilon\phi\omega < 0$, επομένως $\varepsilon\phi\omega = -\varepsilon\phi\hat{\text{BA}\Gamma}$

και συνεπώς $\varepsilon\phi\varphi = \varepsilon\phi\omega = -\varepsilon\phi\hat{\text{BA}\Gamma} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Έτσι τελικά $\varepsilon\phi\varphi = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -3$.

(ii) Ο (-3) , που είναι συντελεστής του x στην εξίσωση της ευθείας $y = -3x + 2$, είναι ο λεγόμενος **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας ή αλλιώς η **κλίση** της ευθείας και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας φ . (Της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία $y = -3x + 2$, με τον άξονα των x .)

Σχόλιο: Στη (2^η) απόδειξη θα μπορούσαμε να πούμε: «Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ ».

Επειδή $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -3 < 0$, ο αριθμητής είναι ετερόσημος του παρονομαστή.

Έτσι $\{f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0\}$, δηλαδή $\{f(x_2) < f(x_1) \text{ και } x_2 > x_1\}$

ή $\{f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ και } x_2 - x_1 < 0\}$, δηλαδή $\{f(x_2) > f(x_1) \text{ και } x_2 < x_1\}$

και επειδή αυτό ισχύει για κάθε τέτοιο ζευγάρι, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

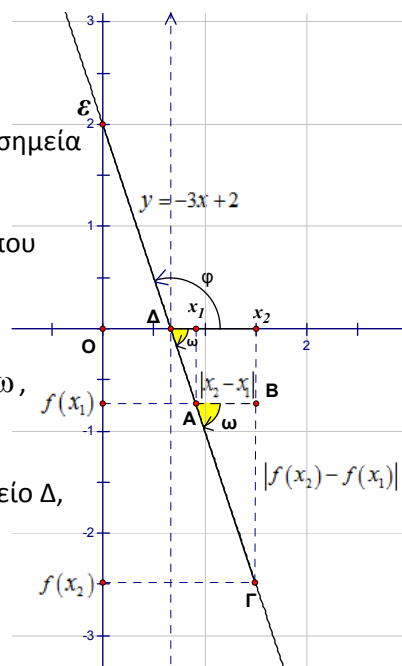
Θα μπορούσαμε τώρα δικαιολογημένα να πούμε, ότι η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε και μόνο τότε αν, ο **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας με εξίσωση $y = ax + \beta$ είναι αρνητικός ($a < 0$) και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αν $a > 0$.

Επεξηγήσεις: (α) Η γωνία $\hat{\text{BA}\Gamma}$ είναι γωνία τριγώνου και έτσι προφανώς είναι «θετική», η γωνία $\hat{\omega}$ είναι προσανατολισμένη γωνία και την έχουμε ορίσει αρνητική, όμως έχουν το ίδιο μέτρο.

(β) $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$,

$f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| = -(f(x_2) - f(x_1))$

(γ) Η γωνία φ που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα των x , «μετριέται» κατά τη θετική φορά, από τον άξονα των x προς την ευθεία και ισχύει πάντα η σχέση $0 \leq \varphi < \pi$.



2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

(1^η) Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$.

Έχουμε: $x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \geq 0 \Rightarrow |x_1| > |x_2| \Rightarrow |x_1|^2 > |x_2|^2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Αφού αποδείχθηκε ότι για τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$,

άρα για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

και επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

(2^η) Αρκεί να αποδείξουμε, ότι για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 \neq x_2$, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.

Πράγματι αν $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, τότε οι $f(x_2) - f(x_1)$ και $x_2 - x_1$ θα είναι ετερόσημες και έτσι

θα έχουμε $\{f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0\}$, δηλαδή $\{f(x_2) < f(x_1) \text{ και } x_2 > x_1\}$

ή $\{f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ και } x_2 - x_1 < 0\}$, δηλαδή $\{f(x_2) > f(x_1) \text{ και } x_2 < x_1\}$

και επομένως η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 \neq x_2$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 < 0.$$

Αφού αποδείχθηκε ότι για τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$,

άρα για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ και επομένως η f

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. $\boxed{f \searrow (-\infty, 0]}$

Επεξηγήσεις: (i) $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] \Rightarrow \{x_1 \leq 0 \text{ και } x_2 \leq 0\} \Rightarrow \{|x_1| = -x_1 \text{ και } |x_2| = -x_2\}$

(ii) Αν $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, τότε $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2$. Έτσι $|x_1| > |x_2| \Rightarrow |x_1|^2 > |x_2|^2$

(iii) $|x|^2 = x^2$

(iv) Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $x_1 < x_2 \leq 0$, δηλαδή $\{x_1 < 0 \text{ και } x_2 \leq 0\}$ και συνεπώς $x_2 + x_1 < 0$ ή $x_2 < x_1 \leq 0$ και ομοίως $x_2 + x_1 < 0$.

Σχόλιο: Στην άσκηση αυτή, μας ζητήθηκε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα, που προφανώς είναι υποσύνολο του **(Π.Ο.)** της.

3. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(1^η) Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Έχουμε: $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Αφού αποδείχθηκε ότι για τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$,

άρα για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$\boxed{f \nearrow [0, +\infty)}$

(2^η) **Αρκεί** να αποδείξουμε, ότι για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

Πράγματι αν $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, τότε οι $f(x_2) - f(x_1)$ και $x_2 - x_1$ θα είναι ομόσημες και έτσι

θα έχουμε $\{f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ και } x_2 - x_1 < 0\}$, δηλαδή $\{f(x_2) < f(x_1) \text{ και } x_2 < x_1\}$

ή $\{f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ και } x_2 - x_1 > 0\}$, δηλαδή $\{f(x_2) > f(x_1) \text{ και } x_2 > x_1\}$

και επομένως η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έστω λοιπόν ότι $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 > 0.$$

Αφού αποδείχθηκε ότι για τυχαίο ζευγάρι $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$,

άρα για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Σχόλιο: (i) Η ευθεία ΑΓ είναι μια τέμνουσα της γραφικής παράστασης και όπως είδαμε παραπάνω έχει **συντελεστής διεύθυνσης**

$$\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \text{ Στη (2}^{\eta}\text{) απόδειξη είδαμε ότι, για να είναι}$$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, **αρκεί** $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$,

για κάθε ζευγάρι $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$. Επειδή για κάθε

τέτοιο ζευγάρι προκύπτει και μια τέμνουσα της γραφικής παράστασης, μπορούμε να «μεταφράσουμε» τα παραπάνω ως εξής:

«Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

αρκεί κάθε ευθεία που ορίζεται από δύο διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης στο διάστημα αυτό, να έχει **θετικό συντελεστή διεύθυνσης**».

Γενικεύοντας, θα λέγαμε ότι: «Για να είναι μια συνάρτηση **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της, αρκεί όλες οι τέμνουσες της γραφικής της παράστασης στο διάστημα αυτό, σε δύο διαφορετικά σημεία, να έχουν **αρνητική κλίση** («κατηφορικές»), δηλαδή να έχουν **αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης**».

Η διατύπωση αυτή, όπως θα δούμε στο μέλλον, ανοίγει το δρόμο για μια νέα έννοια, που θα μας δώσει ένα ισχυρό εργαλείο μελέτης της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

(ii) Μετά τις ασκήσεις αυτές, γίνεται φανερό ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2$

δεν είναι γνησίως μονότονη (εννοείται στο πεδίο ορισμού της), αφού στο $\mathbb{R}$ δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα, ούτε γνησίως φθίνουσα. Όμως όπως είδαμε, είναι «**κατά τμήματα μονότονη**», αφού είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(-\infty, 0]$

(κατηφορική γραφική παράσταση), ενώ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0, +\infty)$

(ανηφορική γραφική παράσταση).

