

(Ολικά) ακρότατα συνάρτησης

Άσκηση A3(i) (σελίδα 38): Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$

παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = 3$.

Απόδειξη: Προφανώς το πεδίο ορισμού της f , είναι το $\mathbb{R}$.

Για να αποδείξουμε ότι η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 3$ (ολικό) ελάχιστο,

«πρέπει και αρκεί» να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq f(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$ και επειδή προφανώς η σχέση $(x-3)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως $f(x) \geq f(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς η f παρουσιάζει

στη θέση $x_0 = 3$ (ολικό) ελάχιστο. Γράφουμε $\min f(x) = f(3) = 1$.

Σχόλια: (i) Όταν μιλάμε για (ολικά) ακρότατα συνάρτησης, εννοούμε (αν υπάρχουν)

το (ολικό) μέγιστο $\max f(x)$ και το (ολικό) ελάχιστο $\min f(x)$.

Η λέξη «ολικά» μπαίνει σε παρένθεση, για να προετοιμαστούμε ότι στο μέλλον θα εννοείται. Έτσι όταν θα λέμε ακρότατα θα εννοούμε τα ολικά, ενώ όταν θα μάθουμε για τα τοπικά ακρότατα ο προσδιορισμός «τοπικά» δε θα παραλείπεται.

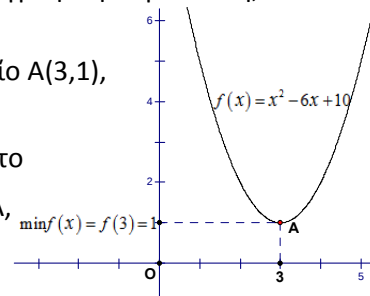
(ii) Το (ολικό) ελάχιστο (όταν υπάρχει), «αποκαλύπτεται» στη γραφική παράσταση, από ένα σημείο που βρίσκεται πιο «χαμηλά» από όλα τα άλλα.

Στην περίπτωσή μας, η γραφική παράσταση διαθέτει το σημείο $A(3,1)$, που βρίσκεται πιο «χαμηλά» από όλα τα άλλα.

Η τετμημένη του A , $x_0 = 3$, μας λέει που βρίσκεται το ελάχιστο

(πάντα σε σχέση με τον άξονα των x), ενώ η τεταγμένη του A ,

$1 = f(3)$, μας λέει ποιο είναι το ελάχιστο. $\min f(x) = 1$



Είναι φανερό, ότι αν υπάρχει ελάχιστο συνάρτησης, αυτό είναι η ελάχιστη εικόνα της.

(iii) Επειδή $x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$, άρα $f(x) = (x-3)^2 + 1$ και έτσι

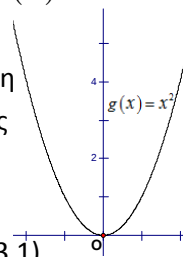
γραφική παράσταση της f , είναι η καμπύλη της γραφικής παράστασης της $g(x) = x^2$ μετατοπισμένη 3 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα επάνω.

Υπενθυμίζουμε ότι, επειδή η σταθερά είναι +1, η «κατακόρυφη» μετατόπιση είναι 1 μονάδα επάνω, ενώ επειδή η ρίζα ($x-3=0 \Leftrightarrow x=+3$) της σχετικής

παράστασης του x είναι +3, η «οριζόντια» μετατόπιση είναι 3 μονάδες δεξιά.

Επίσης, εντελώς φυσιολογικά, η κορυφή της παραβολής, που για τη γραφική

παράσταση της $g(x) = x^2$, βρίσκεται στο $O(0,0)$, για τη f , βρίσκεται στο $A(3,1)$.



(iv) Επειδή $g \searrow (-\infty, 0]$, για κάθε $x < 0$, θα έχουμε: $x < 0 \Rightarrow \underline{g(x) > g(0) = 0}$ και επειδή

$g \nearrow [0, +\infty)$, για κάθε $x > 0$, θα έχουμε: $x > 0 \Rightarrow \underline{g(x) > g(0) = 0}$. Έτσι, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, θα έχουμε $g(x) \geq g(0) = 0$ και συνεπώς η g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο

$x_0 = 0$: $\min g(x) = g(0) = 0$. Επίσης, όπως είδαμε, η f έχει για γραφική παράσταση,

την καμπύλη της γραφικής παράστασης της g , απλά μετατοπισμένη σε νέα θέση. Από τα παραπάνω, εντελώς φυσιολογικά, προκύπτει το συμπέρασμα: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ ($f \searrow (-\infty, 3]$) και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$ ($f \nearrow [3, +\infty)$)

και συνεπώς παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 3$ (ολικό) ελάχιστο. $\min f(x) = f(3) = 1$