

Τριγωνομετρία

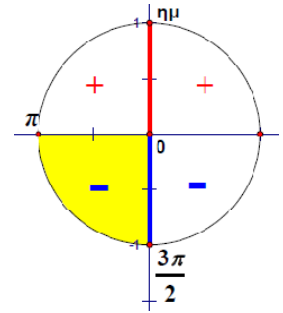
1. Αν $\sin x = \frac{-2}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Απάντηση: Για $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, όπως είναι γνωστό, έχουμε $\eta\mu x < 0$.

$$\text{Έτσι, } \eta\mu^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\text{και επομένως } \eta\mu x = -\sqrt{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

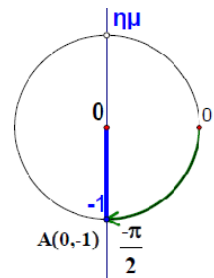
$$\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{-2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\phi x = \frac{1}{\varepsilon\phi x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



2. Να λύσετε την εξίσωση: $(1 + \eta\mu x)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$.

$$\textbf{Λύση: } (1 + \eta\mu x)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \eta\mu x = 0 \\ \text{ή} \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = -1 \\ \text{ή} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ή} \\ \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$



Σχόλιο: Για την εξίσωση $\eta\mu x = -1$, όπως φαίνεται στον τριγωνομετρικό κύκλο, λύσεις της είναι μόνο τόξα που τελειώνουν στο σημείο $A(0, -1)$. Ένα από αυτά είναι το $-\frac{\pi}{2}$ και επομένως όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι της μορφής: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, δηλαδή $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ (1).

Είναι προφανές, ότι το σύνολο των λύσεων, δε μπορεί να εξαρτάται από την αρχική επιλογή μιας λύσης. Έτσι, αν αντί για το $-\frac{\pi}{2}$, είχαμε επιλέξει το $\frac{3\pi}{2}$, που επίσης τελειώνει στο σημείο $A(0, -1)$, όλες οι λύσεις της εξίσωσης θα ήταν της μορφής: $x = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{2}, (\lambda \in \mathbb{Z})$ (2).

Επειδή $2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2k\pi = 2\lambda\pi + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2k\pi = 2\lambda\pi + 2\pi \Leftrightarrow 2\pi k = 2\pi(\lambda + 1) \Leftrightarrow k = \lambda + 1 \Leftrightarrow k - 1 = \lambda$, κάθε λύση που προκύπτει από τον τύπο (2) για κάποιο ακέραιο λ , προκύπτει και από τον τύπο (1), αρκεί ο ακέραιος k να είναι ο επόμενος του λ ($k = \lambda + 1$) και ομοίως κάθε λύση του τύπου (1) για κάποιο ακέραιο k , προκύπτει και από τον τύπο (2), αρκεί ο λ να είναι ο προηγούμενος του k ($\lambda = k - 1$).

Αν είχαμε χρησιμοποιήσει τους τύπους της θεωρίας, για να λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu x = -1$, θα είχαμε:

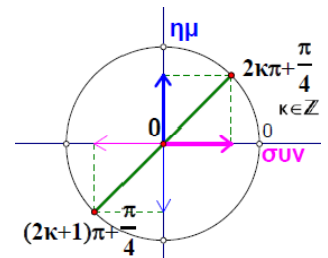
$$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ x = 2k\pi + \left[\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$, μόνο που τώρα δε μας προκαλεί εντύπωση το ότι «κρατάμε» μόνο τον ένα τύπο, αφού τώρα γνωρίζουμε ότι οι δύο τύποι δίνουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

3. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$.

1^η Λύση: $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ x = 2k\pi + \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 0 \cdot x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$$



Η εξίσωση $0 \cdot x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι αδύνατη, αφού δεν υπάρχει ακέραιος k , για τον οποίο να έχουμε

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0, \text{ αφού } 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow 2k\pi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}.$$

2^η Λύση: Δεν υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$, για τις οποίες να ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = 0$, αφού

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \text{ και } \eta\mu\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0, \eta\mu\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, δε χάνουμε λύσεις.

Έτσι για $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, έχουμε:

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$$

Σχόλια: (1) Γνωρίζαμε ότι δεν υπάρχουν τόξα που να μηδενίζουν και το ημίτονο και το συνημίτονο, αφού από τον τριγωνομετρικό κύκλο προκύπτει, ότι το ημίτονο μηδενίζεται για τόξα που τελειώνουν στα κοινά σημεία του κύκλου με τον άξονα των x , ενώ το συνημίτονο στα κοινά σημεία του κύκλου με τον άξονα των y .

(2) Εντελώς φυσιολογικά, λύσεις είναι τα τόξα που τελειώνουν στα κοινά σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου με τις διχοτόμους του 1^{ου} και του 3^{ου} τεταρτημορίου. Τα σημεία αυτά, ισαπέχουν από τους άξονες και επομένως δίνουν ίσα μέτρα στο ημίτονο και το συνημίτονο και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι στο 1^ο και το 3^ο τεταρτημόριο το ημίτονο και το συνημίτονο είναι ομόσημα, εξασφαλίζεται η ισότητα ημιτόνου και συνημιτόνου.