

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στις παρακάτω ερωτήσεις 1-11 να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

1. Ο κύκλος $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$

A) εφάπτεται στον $x'x$

B) διέρχεται από το σημείο $A(0, \alpha)$

☐ Γ) εφάπτεται στον $y'y$

Αιτιολόγηση: Ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(\alpha, 0)$, πάνω στον άξονα $x'x$, και ακτίνα $\rho = |\alpha|$. Προφανώς, το κέντρο K απέχει από τον $y'y$, απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

2. Η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$

☐ A) τέμνονται

B) εφάπτονται

Γ) δεν έχουν κοινά σημεία

Αιτιολόγηση: Ο κύκλος έχει για κέντρο το $O(0, 0)$, που έχει από την ευθεία ε , απόσταση

$$d(O, \varepsilon) = \frac{|-0 + 0 - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \text{ μικρότερη από την ακτίνα } \rho = 1. \quad \boxed{\varepsilon: y = x + 1 \Leftrightarrow -x + y - 1 = 0}$$

3. Έστω οι κύκλοι $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ και $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Το σημείο $M(1, 1)$ είναι

A) εσωτερικό του ενός κύκλου και εξωτερικό του άλλου

B) σημείο και των δύο κύκλων

☐ Γ) εσωτερικό και των δύο κύκλων

Δ) εξωτερικό και των δύο κύκλων

Αιτιολόγηση: $C_1: x^2 + (y - 2)^2 = 4$ $\boxed{K_1(0, 2), \rho_1 = 2}$ και $C_2: (x - 2)^2 + y^2 = 4$ $\boxed{K_2(2, 0), \rho_2 = 2}$.

Το M απέχει από τα κέντρα των δύο κύκλων, απόσταση μικρότερη από τις ακτίνες τους $\rho_1 = \rho_2 = 2$.

$$d(M, K_1) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = d(M, K_2) < 2.$$

4. Έστω ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$. Το σημείο $A(1, \sqrt{3})$ είναι

A) εσωτερικό του κύκλου

B) εξωτερικό του κύκλου

☐ Γ) σημείο του κύκλου

Αιτιολόγηση: Το $(1, \sqrt{3})$ είναι λύση της εξίσωσης του κύκλου.

5. Στο διπλανό σχήμα η δ είναι η διευθετούσα και το E είναι η εστία της παραβολής $y^2 = 2px$.

Το μήκος της χορδής AB είναι ίσο με:

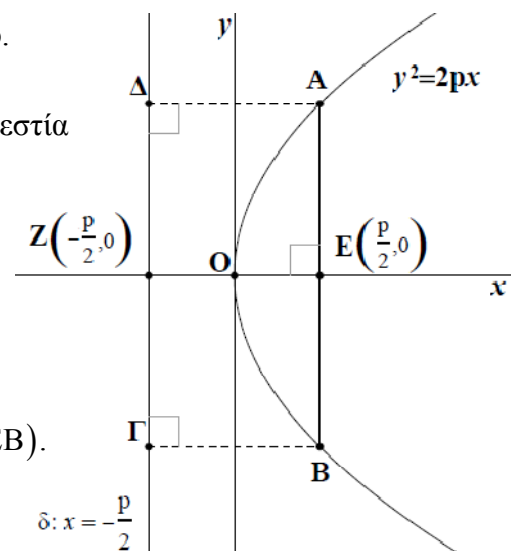
A) $AB = \frac{p}{2}$, B) $AB = p$, ☐ Γ) $AB = 2p$, Δ) $AB = 4p$.

Αιτιολόγηση: Από τον ορισμό της παραβολής $(AE) = (A\Delta)$.

Από το τετράγωνο $A\Delta ZE$, έχουμε $(AE) = (A\Delta) = (ZE) = p$.

Λόγω συμμετρίας των A, B ως προς τον $x'x$, έχουμε $(AE) = (EB)$.

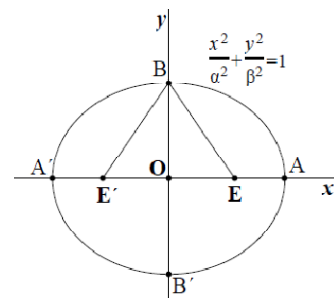
Επομένως, $(AB) = 2(AE) = 2p$.



6. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία E', E είναι οι εστίες της έλλειψης

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \quad \text{Το μήκος του } BE \text{ είναι}$$

A) μεγαλύτερο του α , B) μικρότερο του α , Γ) ίσο με α .



Αιτιολόγηση: Ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της έλλειψης,

και επομένως $(BE) = (BE')$. Επειδή από τον ορισμό της έλλειψης $(BE) + (BE') = 2\alpha$, θα έχουμε $2(BE) = 2\alpha$, δηλαδή $(BE) = \alpha$.

7. Στο ίδιο σχήμα αν το τρίγωνο BEE' είναι ισόπλευρο, τότε η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ίση με Α) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, B) $\varepsilon = 2$, Γ) $\varepsilon = 1$, Δ) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Αιτιολόγηση: $(E'E) = (BE)$, $(E'E) = 2\gamma$ και $(BE) = \alpha$. Επομένως $2\gamma = \alpha$ και συνεπώς $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}$.

8. Αν οι ελλείψεις $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, $\alpha > 2$ είναι όμοιες, τότε

A) $\alpha = 6$, B) $\alpha = 12$, Γ) $\alpha = 3$, Δ) $\alpha = 4$.

Αιτιολόγηση: Επειδή $\alpha > 2$, και οι δύο ελλείψεις έχουν το μεγάλο τους άξονα στον $x'x$.

Αν είναι όμοιες, τότε θα έχουν τον ίδιο λόγο « $\frac{\beta}{\alpha}$ », επομένως $\frac{4}{6} = \frac{2}{\alpha}$, δηλαδή $\alpha = 3$.

9. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Το σημείο $M(7, 0)$ είναι

A) εσωτερικό της έλλειψης, Β) εξωτερικό της έλλειψης, Γ) σημείο της έλλειψης.

Αιτιολόγηση: $\frac{7^2}{25} + \frac{0^2}{16} = \frac{49}{25} > 1$.

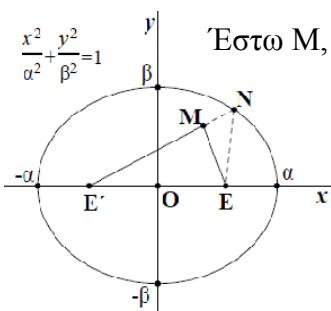
Σχόλια: (1) Έστω έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (ή $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$) και με μεγάλο άξονα 2α , και

έστω Σ , το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου από τις δυο εστίες της έλλειψης.

Τότε: Αν $\Sigma < 2\alpha$ το σημείο είναι **εσωτερικό** της έλλειψης, ενώ αν $\Sigma > 2\alpha$ **εξωτερικό**.

Επίσης, ένα σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι **εσωτερικό** της έλλειψης, «αν και μόνο αν» $\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} < 1$

(αντιστοίχως $\frac{x_1^2}{\beta^2} + \frac{y_1^2}{\alpha^2} < 1$) και ομοίως **εξωτερικό**, «αν και μόνο αν» $\frac{x_1^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} > 1$ (ή $\frac{x_1^2}{\beta^2} + \frac{y_1^2}{\alpha^2} > 1$).



Έστω M , εσωτερικό σημείο της έλλειψης, όπως στο σχήμα. Τότε $(ME') + (ME) < 2\alpha$.

Απόδειξη: Επειδή N σημείο της έλλειψης, θα έχουμε $(NE') + (NE) = 2\alpha$.

$(NE') + (NE) = (NM) + (ME') + (NE)$ και στο τρίγωνο NME , από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε $(NM) + (NE) > (ME)$.

Έτσι, $(ME) < (NM) + (NE) \Rightarrow (ME) + (ME') < (NM) + (ME') + (NE) \Rightarrow$

$\Rightarrow (ME) + (ME') < (NM) + (ME') + (NE) = (NE') + (NE) = 2\alpha \Rightarrow (ME) + (ME') < 2\alpha$.

* Αν το M είναι σημείο του μεγάλου άξονα, η απόδειξη γίνεται εύκολα, χωρίς την τριγωνική ανισότητα.

10. Οι υπερβολές $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ και $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$ έχουν

- A) ίδιες ασύμπτωτες και ίδια εκκεντρότητα,
 B) διαφορετικές ασύμπτωτες και ίδια εκκεντρότητα,
☐ Γ) ίδιες ασύμπτωτες και διαφορετική εκκεντρότητα,
 Δ) διαφορετικές ασύμπτωτες και διαφορετικές εκκεντρότητες.

Αιτιολόγηση: Στην υπερβολή $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, έχουμε $\alpha = 4$, $\beta = 3$ και $\gamma = 5$ ($\gamma^2 = 4^2 + 3^2 = 25$).

Έτσι, έχει ασύμπτωτες $y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{3}{4}x$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$.

Στην υπερβολή $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$, έχουμε $\alpha = 3$, $\beta = 4$ και $\gamma = 5$ ($\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 4^2 = 25$).

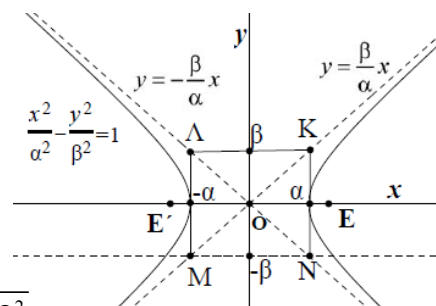
Έτσι, έχει ασύμπτωτες $y = \frac{\alpha}{\beta}x = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{\alpha}{\beta}x = -\frac{3}{4}x$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{3} \neq \frac{5}{4}$.

11. Στο διπλανό σχήμα το ΚΛΜΝ είναι το ορθογώνιο βάσης

της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Το μήκος OK είναι A) μεγαλύτερο του γ ,

☐ B) ίσο με γ , Γ) μικρότερο του γ .



Αιτιολόγηση: Το OK είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη α και β . Έτσι, $(OK) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \gamma$.

12. Έστω κύκλος $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$, με α, β, ρ θετικούς. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα δεδομένα της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχά τους στη δεύτερη στήλη.

(1) Ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων ----- $\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2$

* Το $O(0,0)$ ανήκει στον κύκλο και έτσι $(0 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = \rho^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \rho^2$.

(2) Ο κύκλος έχει το κέντρο του στον άξονα $x'x$ ----- $\beta = 0$

* Το κέντρο $K(\alpha, \beta) \equiv K(\alpha, 0)$, αφού τα σημεία του $x'x$ έχουν τεταγμένη 0.

(3) Ο κύκλος έχει το κέντρο του στον άξονα $y'y$ ----- $\alpha = 0$

* Το κέντρο $K(\alpha, \beta) \equiv K(0, \beta)$, αφού τα σημεία του $y'y$ έχουν τεταγμένη 0.

(4) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $x'x$ ----- $\rho = \beta$ (ο άξονας $x'x$, έχει εξίσωση $y = 0$)

* Η απόσταση του κέντρου $K(\alpha, \beta)$ από την ευθεία $\varepsilon: y = 0$ είναι όσο η ακτίνα.

$$\varepsilon: y = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0 \text{ και } d(K, \varepsilon) = \frac{|0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \rho \quad \boxed{\frac{|0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{|\beta|}{1} = \rho \stackrel{\beta > 0}{\Leftrightarrow} \rho = \beta}$$

(5) Ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $y'y$ ----- $\rho = \alpha$ (ο άξονας $y'y$, έχει εξίσωση $x = 0$)

* Η απόσταση του κέντρου $K(\alpha, \beta)$ από την ευθεία $\varepsilon: x = 0$ είναι όσο η ακτίνα.

$$\varepsilon: x = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0 \text{ και } d(K, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \rho \quad \boxed{\frac{|1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{1} = \rho \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \rho = \alpha}$$

(6) Ο κύκλος εφάπτεται και στους δύο άξονες ----- $\alpha = \rho = \beta$

* Ισχύουν τα (4) και (5)

13. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα δεδομένα της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχά τους στη δεύτερη στήλη.

(1) Εξίσωση: $9x^2 - y^2 = 0$ ----- Κωνική: Ζεύγος ευθειών.

$$* 9x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - y) \cdot (3x + y) = 0 \Leftrightarrow \{ \varepsilon_1 : 3x - y = 0 \text{ ή } \varepsilon_2 : 3x + y = 0 \}$$

(2) Εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$ ----- Κωνική: Κύκλος.

$$* x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 1 + 6 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 11$$

(3) Εξίσωση: $4x^2 + y^2 = 1$ ----- Κωνική: Έλλειψη.

$$* 4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

(4) Εξίσωση: $x^2 - y^2 = 4$ ----- Κωνική: Υπερβολή (Ισοσκελής).

$$* x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

(5) Εξίσωση: $y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ----- Κωνική: Παραβολή.

$$* y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 2x \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 2x \text{ (Εκτός ύλης)}$$

(6) Εξίσωση: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ----- Κωνική: Υπερβολή (Ισοσκελής).

$$* x^2 - y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - (y^2 + 4y + 4) = 1 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)^2}{1^2} - \frac{(y + 2)^2}{1^2} = 1 \text{ (Εκτός ύλης)}$$

(7) Εξίσωση: $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$ ----- Κωνική: Έλλειψη. (Εκτός ύλης)

$$* 4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 1 \Leftrightarrow 4(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{(y + 1)^2}{1^2} = 1$$

14. Να συνδέσετε με μια γραμμή τα δεδομένα της πρώτης στήλης με τα αντίστοιχά τους στη δεύτερη στήλη.

(1) Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ----- Κωνική: Έλλειψη.

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

(2) Εκκεντρότητα: $\varepsilon = 0$ ----- Κωνική: Κύκλος.

(3) Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{4}{5}$ ----- Κωνική: Έλλειψη.

$$\varepsilon = \frac{4}{5} < 1$$

(4) Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{5}{4}$ ----- Κωνική: Υπερβολή.

$$\varepsilon = \frac{5}{4} > 1$$

(5) Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \sqrt{2}$ ----- Κωνική: Ισοσκελής υπερβολή.

$$* \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = 2 \Rightarrow \gamma^2 = 2\alpha^2$$

$$\text{και επομένως } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \xrightarrow[\beta > 0]{\alpha > 0} \alpha = \beta$$