

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΙΣ
ΤΗΝ ΣΙΚΕΛΙΚΗΝ ΔΩΡΙΚΗΝ ΔΙΑΛΕΚΤΟΝ
ΔΕΚΑΠΕΝΤΕ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΣΩΖΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ

Ὑπὸ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ
ἐν Ἀθήναις

Ἀνάτυπον ἐκ τοῦ ΔΕΛΤΙΟΥ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
Νέα Σειρά, Τόμος 6 II, Τεύχος 2, 1965, σελ. 265–297.

Extrait du BULL. DE LA SOC. MATHÉMATIQUE DE GRÈCE
Nouvelle Série, Tome 6 II, Fasc. 2, 1965, pp. 265–297.
ATHÈNES

**ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΡΧΑΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΙΚΕΛΙΚΗΝ
ΔΩΡΙΚΗΝ ΔΙΑΛΕΚΤΟΝ ΔΕΚΑΠΕΝΤΕ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΣΩΖΟΝΤΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗΝ**

Ὑπὸ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Γ. ΣΤΑΜΑΤΗ (ἐν Ἀθήναις)

Εἰς τὸν δεύτερον τόμον τῆς δευτέρας ἐκδόσεως τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους περιέχονται 15 θεωρήματα εἰς τὴν λατινικὴν γλῶσσαν ὑπὸ τὸν τίτλον *Liber Assumptorum* (Βιβλίον Λημμάτων), (*Archimedis opera omnia* vol. II. p. 510–525, J. L. Heiberg, 1913, B.G. Teubner). Ταῦτα δὲν ἐσώθησαν εἰς τὴν ἐλληνικὴν ἀλλὰ εἰς τὴν ἀραβικὴν ἐκ τῆς ὁποίας μετεφράσθησαν εἰς τὴν λατινικὴν καὶ ἐξεδόθησαν τὸ πρῶτον ἐν Λονδίῳ κατὰ τὸ 1659 ὑπὸ τοῦ S. Foster. Βραδύτερον μετεφράσθησαν καὶ εἰς ἄλλας γλώσσας. Ὁ ἀραβικὸς κώδιξ εὑρίσκεται εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Φλωρεντίας. Ἴδου τί γράφει συναφῶς ὁ Heiberg εἰς τὸν δεύτερον τόμον τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους (σελ. 510–511):

Τὸ βιβλιάριον τοῦτο πρῶτος ἐξέδωκε ὁ S. Foster εἰς τὰ Σύμμικτα (Λονδῖνον 1659) ἐκ μεταφράσεως τοῦ I. Gravi, ὅστις εἶχε χρησιμοποιήσει ἀραβικὸν κώδικα, διότι ἐλληνικὸς δὲν ὑπάρχει. Μετὰ ταῦτα αὐτὸ ἐκ τοῦ Μεδικαίου κώδικος μετέφρασεν ἐκ νέου λατινιστὴ ὁ Ἀβραὰμ Ecchellensis, τὴν μετάφρασιν δὲ αὐτὴν μετὰ τῶν βιβλίων V–VII τοῦ Ἀπολλωνίου ἐξέδωκεν ὁ I. A. Borellus (ἐν Φλωρεντίᾳ 1661). Εἰς τὴν ἀραβικὴν ὑπάρχει εἰς τρεῖς Μεδικαίους κώδικας, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ κώδιξ 275 (ἴδε καὶ κατάλογον τῶν Ἀνατολικῶν κωδίκων τῆς Λαυρεντιανῆς Μεδικαίας Βιβλιοθήκης ἐκδόσεως S. E. Assemanus, ἐν Φλωρεντίᾳ 1742, σελὶς 385) μόνον τὸ ἀνωτέρω βιβλιάριον καὶ τὰ βιβλία V–VII τοῦ Ἀπολλωνίου περιέχει, δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αὐτὸν τὸν κώδικα ἐχρησιμοποίησεν ὁ Borellus (παράβαλε πρὸς τούτους Assemanus σελὶς 383 ἀριθ. 271 καὶ σελὶς 392 ἀριθ. 286). Ἐνταῦθα περιέλαβον τὴν ἐκδοθεῖσαν μετάφρασιν τοῦ Borelli. Παρ' αὐτῷ ὁ τίτλος εἶναι Βιβλίον Λημμάτων τοῦ Ἀρχιμήδους κατὰ μετάφρασιν τοῦ Thebit ben Kora καὶ ἐκθεσιν τοῦ Δ^{ος} Almochtasso Abilhasan Hali ben Ahmad Nosuensi. [*Liber Assumptorum Archimedis interprete Thebit ben Kora et exponente Doctore Almochtasso Abilhasan Hali ben Ahmad Nosuensi*]. Προτάσεις 16.

[ὁ Foster ὁμως ἔχει 15 ὅπως καὶ πράγματι εἶναι, διότι κακῶς ὁ Borellus προσέθεσεν (ὡς πρότασιν) τὸ ἀπόσπασμα τοῦ Ἀρχιμήδους τὸ παρ' Εὐτοκίῳ διαφυλαχθέν].

Ὁ Thebit ben Kora προέταξεν τὸν ἑξῆς πρόλογον (Borellus σελ. 385): «Ὁ Δ^ε Almochtasso διαβεβαίωι ὅτι αὐτὸ τὸ βιβλίον ἀναφέρεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ἐν τῷ ὁποίῳ ὑπάρχουσιν ὠραιόταται προτάσεις ὀλίγαι κατὰ τὸν ἀριθμὸν, ἀλλὰ μεγίστης ὠφελείας περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς γεωμετρίας, ἀρισται καὶ κομψόταται, τὰς ὁποίας οἱ καθηγηταὶ αὐτῆς τῆς ἐπιστήμης συγκαταριθμοῦσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν διαμέσων προτάσεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἀναγιγνώσκωνται μεταξὺ τοῦ βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου καὶ τῆς Ἀλμαγέστας (Σημ. Τῆς μεγάλης Μαθηματικῆς Συντάξεως τοῦ Κλ. Πτολεμαίου). Καὶ πράγματι, μερικὰ χωρία τῶν προτάσεων ἐκείνων ἔχουσιν ἀνάγκην ἄλλων προτάσεων, διὰ τῶν ὁποίων ἐκεῖναι αἱ προτάσεις ἀποβαίνουν σαφέστεραι. Καὶ βεβαίως ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης ὑπέδειξεν αὐτὰς τὰς προτάσεις καὶ αὐτὰς ἀναφέρει εἰς ἄλλα ἔργα του, ἐφ' ὅσον εἶπε: καθ' ὃν τρόπον κατελήξαμεν εἰς τὰς προτάσεις. Περὶ ὀρθογωνίων. Ὡσαύτως καί: καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείξαμεν ἐν τῇ ἡμετέρᾳ ἐκθέσει διαπραγματευόμενοι Περὶ τριγώνων· πάλιν, καθ' ὃν τρόπον ἀπεδείξαμεν εἰς τὰς προτάσεις Περὶ τετραπλεύρων· καὶ ἀνέφερεν ἐν τῇ πέμπτῃ προτάσει ἀπόδειξιν περὶ αὐτοῦ τοῦ πράγματος περισσότερον εἰδικήν. Ἐπειτα συνέθεσεν ὁ Abusahal Alkuhi βιβλίον, τὸ ὁποῖον ἐπέγραψε Σύνταξις τοῦ βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους Περὶ Λημμάτων καὶ ἐπραγματεύθη τὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς τῆς προτάσεως δι' ὁδοῦ περισσότερον εἰδικῆς καὶ καλυτέρας καὶ ἰδίως ἐκεῖνα τὰ μέρη τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς συνθέσεως τῆς ἀναλογίας. Τὸ ὁποῖον βεβαίως, ὅταν τοῦτο ἐγὼ κατενόησα, προσέθεσα εἰς τὰ σκοτεινότερα χωρία τοῦ βιβλίου τούτου ἐκθεσιν, εἴ τε κατὰ τόπους σημειώσεις καὶ ἐστερέωσα ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον αὐτὸς εἶχεν ὑποδείξει διὰ τῶν προτάσεων, ὅπως εἶχον κρίνει καὶ ἀνέφερα ἐκ τῶν προτάσεων τοῦ Abusahal δύο προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἀναγκαιοῦσι διὰ τὴν διασαφήνισιν τῆς πέμπτης προτάσεως, παραλείπων τὰ λοιπὰ χάριν συντομίας καὶ ἐπειδὴ ταῦτα δὲν εἶναι ἀναγκαῖα». Παράβαλε Wenrich, Περὶ τῆς αὐθεντίας ἑλληνικῶν μεταφράσεων Ἀράβων σελὶς 192 κ. ἑ.

Ἐκ τῶν σχολίων τούτων τῶν Ἀράβων ἐχρησιμοποίησα ὅσα μοῦ ἐφάνησαν ὠφέλιμα, τὰ ἄλλα δὲ τὰ ἀπέρριψα. Ὅπως δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν προέρχεται ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη, ὅπως τὸ ἔχομεν, οὕτω εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι μερικαὶ

προτάσεις αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἀρκετὰ ἐπιστημονικῶς καὶ ἔχουσιν εὐρεθῆ καὶ ἔχουσιν ἀποδειχθῆ, καθ' ὅσον βαθμὸν ἐξέχουσιν εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους· ἀλλὰ πόσον πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς αὐτὸν δὲν εἶναι ἀρκετὰ ἀκόμη διασαφηνισμένον. Παράβαλε Quaest. Arch. p. 24—25. Ὁ ἐλληνικὸς τίτλος ὑπῆρξε Λήμματα.

* * *

Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὥς παρατηρεῖ ὁ J. L. Heiberg, ὅτι ἡ διατύπωσις τῶν ἐν λόγῳ θεωρημάτων, ὥς αὕτη ὑπάρχει εἰς τὴν ἀραβικὴν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους. Διὰ τὴν γνώμην αὐτὴν συνηγοροῦν οἱ ἐξῆς λόγοι :

1. Εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα ὑπάρχει ἡ φράσις «σχῆμα τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης ὀνομάζει ἄρβηλον» καὶ εἰς τὸ δέκατον τέταρτον θεώρημα ὑπάρχει ἡ φράσις «σχῆμα τὸ ὁποῖον ὁ Ἀρχιμήδης καλεῖ salinon». Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ φράσεις αὗται δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν τεθῇ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους.

2. Εἷς τινὰς ἀποδείξεις ὑπάρχουν διασαφηνίσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποκλείεται νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους. Αὗται ἔχουν τεθῇ μὲ τὸν σκοπὸν ὅπως αἱ ἀποδείξεις γίνουν εὐκόλως κατανοηταὶ ὑπὸ μαθητῶν μὴ προχωρημένων εἰς τὴν γεωμετρίαν.

Ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν 15 θεωρημάτων καὶ τῆς συγκρίσεως αὐτῶν πρὸς τὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους κατελήξαμεν εἰς τὰ ἐξῆς συμπεράσματα :

A. Τὰ 15 θεωρήματα ἀποτελοῦν ἐνιαῖον ὅλον (ἀφορῶν εἰς κύκλους) καὶ εἶναι ὥς ἐκ τούτου, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, ἐπινόησις καὶ δημιουργία ἐνὸς προσώπου δηλ. τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὅμως τὸ 7^{ον} θεώρημα εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι εἶναι παρεμβολή, διότι ὁ Εὐκλείδης εἰς τὸ XII, 2 χρησιμοποιοῖ τὴν πρότασιν ὅτι τὸ εἰς κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου.

B. Αἱ πρὸς εὐκολωτέραν κατανόησιν ὀρισμένων θεωρημάτων διασαφηνίσεις δὲν ἀνήκουν εἰς τὸν Ἀρχιμήδη. Αὗται δέον νὰ ἀποδοθῶν εἰς τὸν ἄγνωστον Ἑλληνα μαθηματικόν, ὁ ὁποῖος εἶχε συντάξει συλλογὴν θεωρημάτων τὰ ὁποῖα εἶχε διαμορφώσει καταλλήλως, ὥστε νὰ εἶναι περισσότερον κατανοητὰ εἰς τοὺς μαθητὰς του. Φρονοῦμεν ὅτι ὁ Ἀραβ μεταφραστὴς Thebit ben Kora δὲν ἐπέφερε μεταβολὰς εἰς τὸ ὑπ' αὐτοῦ χρησιμοποιηθὲν ἐλληνικὸν κείμενον.

Γ. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου θεωρήματος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, διότι ἡ ἰσότης $BZ = ZE$ (σχ. 2 α) συνάγε-

ται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων *AZE, BZΔ*. Θεωροῦμεν Ἀρχιμήδειον ἀποδείξιν τὴν ὑπὸ τοῦ T. L. Heath διατυπωμένην, τὴν ὁποίαν καὶ ἔχομεν ἐνταῦθα ἀποδώσει εἰς τὴν ἑλληνικὴν (σχ. 2) (T. L. Heath, *The works of Archimedes* p. 302, Dover, N. York).

Δ. Φαίνεται πολὺ πιθανὸν ὅτι τὰ θεωρήματα ἀποτελοῦν μέρος μεγαλύτερας πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους, ἡ ὁποία δὲν ἐσώθη ὁλόκληρος καὶ ὅτι ταῦτα ἐπενοήθησαν ὅτε ὁ Ἀρχιμήδης ἦτο πολὺ νέος. Τῆς πραγματείας αὐτῆς προηγήθησαν αἱ πραγματεῖαι *Περὶ τριγώνων* καὶ *Περὶ τετραπλεύρων*, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐσώθησαν. Οὐδεμίαν ἄλλην πληροφορίαν ἔχομεν περὶ τῆς συγγραφῆς τῶν δύο αὐτῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους, πλὴν τῆς διαμνημονεύσεώς των εἰς τὰ Λήμματα (θεωρήματα 5, 6, 12).

Ε. Ἡ διατύπωσις τοῦ 6^{ου} θεωρήματος, φρονοῦμεν, ὅτι εἶναι Ἀρχιμήδειος. Διότι καὶ εἰς τὸ 9^{ον} θεώρημα τῆς πραγματείας *Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν II* καὶ εἰς τὸ 23^{ον} τῆς πραγματείας *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς* σπουδάζονται ἐπίσης εἰδικαὶ περιπτώσεις καὶ ὄχι γενικαί. Ὅτι τὰ θεωρήματα δὲν εἶναι τῆς αὐτῆς δυνάμεως εἶναι ὀρθόν. Ὅτι ὅμως μόνον τὰ δύσκολα ἐκ τούτων εἶναι πιθανὸν νὰ εἶναι τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν εὐσταθεῖ, ὅταν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὴν σκέψιν ὅτι αὐτὰ ἀποτελοῦν ἑνιαῖον ὅλον. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ὀνομασίαν *Salinon* τοῦ σχήματος τοῦ 14^{ου} θεωρήματος, φρονοῦμεν ὅτι πρόκειται περὶ λάθους κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν καὶ ὅτι ἡ ἑλληνικὴ λέξις ἦτο *σελήνιον* (μηνίσκος σελήνης), ὡς ὀρθῶς κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν ἔχει διορθώσει ὁ Ἰσαὰκ Μπάροου (Isaac Barrow), ὁ καθηγητὴς τοῦ Ἰσαὰκ Νεύτωνος (Isaac Newton), (P. ver Eecke, *Les oeuvres complètes d'Archimed*, Tom. II p. 539, ed. Vaillant—Carmanne, Liège 1960).

Διὰ τὴν φραστικὴν διατύπωσιν τοῦ ἀνακατασκευασθέντος ἑλληνικοῦ κειμένου τῶν 15 θεωρημάτων εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον ἐστηρίχθημεν εἰς τὰ εἰς τὴν αὐτὴν διάλεκτον σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους: 1) *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*, 2) *Περὶ ἐλίκων*, 3) *Ἐπιπέδων Ἰσορροπιῶν I καὶ II*, 4) *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς*, 5) *Ὀχουμένων I καὶ II*, τὰ ὁποῖα ἔχομεν ἤδη μεταφράσει εἰς τὴν νέαν ἑλληνικὴν. Μερικὰς διασαφηνίσεις τῶν ἀποδείξεων, διὰ τὰς ὁποίας πιστεύομεν ὅτι εἶναι παρεμβολή, τὰς παρελείψαμεν.

Εἰς τὴν προσεχῇ παρ' ἡμῶν ἔκδοσιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους θὰ παρατεθῇ καὶ ἡ ἀκριβὴς μετάφρασις τῶν 15 θεωρημάτων ἐκ τῆς λατινικῆς (καὶ γαλλικῆς), ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ σύγκρισις τοῦ ἀνα-

κατασκευασθέντος παρ' ἡμῶν ἑλληνικοῦ κειμένου πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Ἀραβος Thebit ben Kora χρησιμοποιηθεῖσαν ἑλληνικὴν διατύπωσιν. (Σημ. Ἡ μετάφρασις εἰς τὴν γερμανικὴν καὶ ἀγγλικὴν δὲν ἔχει γίνεῖ κατὰ λέξιν).

Αἱ παρ' ἡμῶν τεθεῖσαι ἐκφωνήσεις τῶν θεωρημάτων 1, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14 δὲν ὑπάρχουν εἰς τὴν ἀραβικὴν. Φρονοῦμεν ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης θὰ εἶχε θέσει ἐκφωνήσεις εἰς τὰ θεωρήματα αὐτά.

RECONSTRUCTION OF THE ANCIENT TEXT (IN THE SICILIAN — DORIC DIALECT) OF FIFTEEN THEOREMS OF ARCHIMEDES WHICH ARE PRESERVED IN THE ARABIC LANGUAGE

The Greek title of the relative treatise was «Lemmata». In the translation from Arabic into Latin it is «Liber Assumptorum»... There is no doubt, as too I. L. Heiberg observes, that the formulation of the theorems in question, as this exists in Arabic, cannot possibly be attributed to Archimedes. The following reasons plead in support of this opinion :

1. The fourth theorem contains the phrase «figure which Archimedes calls Arvelos» ; the fourteenth theorem, also, contains the phrase «figure which Archimedes calls Salinon». It is obvious that these phrases cannot have been written by Archimedes.

2. There are some elucidations in some proofs which could not possibly come from Archimedes. These have been made with the intention of rendering the proofs easily comprehensible to non advanced geometry students.

From the study of the fifteen theorems and their comparison with the preserved works of Archimedes we have come to the following conclusions :

A. The 15 theorems constitute a single whole (concerning circles) and, owing to this, in all probability, they must be the invention of one person, that is to say of Archimedes. The 7th theorem may, probably, be an interpolation, because Euclid uses in the Elements XII, 2 the proposition, that the square, circumscribed to a circle is double the one which is inscribed.

B. The elucidations, made for an easier understanding of certain theorems, do not belong to Archimedes. These must be attributed to the unknown Greek mathematician who had composed a collection of theorems which he had shaped in a suitable manner so that they could be understood by his students more easily. In our opinion the Arab translator Thebit Ben Kora did not effect any changes in the Greek text which he had used.

C. The proof of the second theorem cannot belong to Archimedes because the equation $BZ = ZE$ (fig. 2 a) is immediately inferred from the equation of the triangles AZE , BZA .

We consider as an Archimedean proof that which was formulated by T. L. Heath, which we also have rendered here in Greek (fig. 2, T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, p. 302, Dover, New York).

D. It seems very probable that the theorems constitute a part of a bigger treatise of Archimedes which has not been preserved in whole and that these were invented when Archimedes was very young. The treatises on the Triangles and on the Quadrilaterals, which have not been preserved, had preceded the above treatise. We have no other information about the composition of these two Works of Archimedes excepting their having been mentioned in the «Lemmata» (theorems 5, 6, 12).

E. We believe that the formulation of the 6th theorem is Archimedean. Because both in the 9th theorem of the treatise on Equilibriums of Planes II and in the 23rd of the treatise on Quadrature of the Parabola, special and not general cases are also studied. It is true that the theorems are not all of the same strength. But it cannot be supported that only the difficult ones among them are belong to Archimedes if we assume that these constitute one single whole.

As regards the name «Salinon» of the figure of the 14th theorem, we believe that this is due to a mistake in copying and that the Greek word was «Selenion» (meniscos of the moon-crescent), as, Isaac Barrow, Newton's teacher has correctly observed (P. ver Eecke, *Les Oeuvres Complètes d' Archimed*, Tom. II, p. 539, ed. Valliant—Carmanne, Liège 1960).

For the linguistic formulation of the reconstructed Greek text of the 15 theorems in the Sicilian Doric dialect we have relied on the preserved works of Archimedes which were written in the same dialect: 1. On Conoids and Spheroids, 2. On Spirals, 3. On the Equilibrium of Planes I and II, 4. On Quadrature of the Parabola, 5. On Floating Bodies I and II, which we have already translated into modern Greek. The formulations of the theorems 1, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14 do not exist in Arabic. We believe that Archimedes would have placed formulations in these theorems. We have left out some elucidations of the proofs which we believe to have been interpolated. In our coming edition of the Works of Archimedes we will also give an exact translation of the 15 theorems from Latin and French, so as to render possible the comparison between our reconstructed Greek text with the one formulated in Greek by the Arab Thebit Ben Kora (the translation into German and English has not been made verbatim).

ΤΟ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΘΕΝ ΑΡΧΑΙΟΝ ΚΕΙΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΤΗΝ
ΣΙΚΕΛΙΚΗΝ ΔΩΡΙΚΗΝ ΔΙΑΛΕΚΤΟΝ ΤΩΝ 15 ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

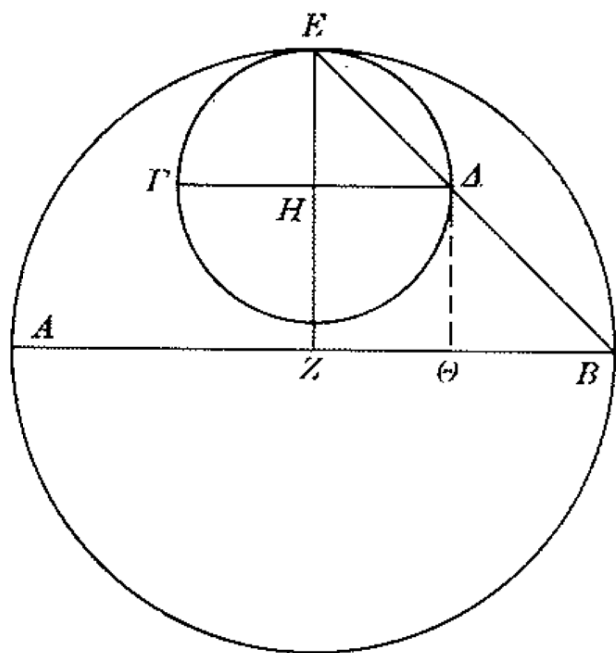
α'

Εἴ κα ἡ δύο κύκλοι ἐπιπαύοντες ἀλλάλων ἐντὸς διαμέτροι
δὲ αὐτῶν παράλληλοι, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ἀπὸ τοῦ σαμεῖον ἀφῆς
καὶ τῶν περάτων τῶν διαμέτρων δύο εὐθεῖαι ἕσσοῦνται ἀλάλ-
λαις ἐπ' εὐθείας.

Ἐστωσαν δύο κύκλοι, ἃν κέντρα τὰ Z, H ἐπιπαύοντες ἀλλάλων
κατὰ τὸ E σαμεῖον, διάμετρος δὲ ἡ AB παρὰ διάμετρον τὰν $ΓΔ$
φαμί δὴ, ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $ΕΔ, ΔΒ$ εὐθεῖαι ἕσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ'
εὐθείας.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ZH
καὶ ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὸ E ,
ἄχθω δὲ ἡ $ΔΘ$ παρὰ τὰν ZH .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖαι αἱ ZB ,
 ZE ἴσαι ἐντὶ καὶ ἡ $HΔ$ τῇ
 $ZΘ$, κοινὰ ἀφαιρήσθω ἡ $ZΘ$,
τουτέστιν ἡ HE . λοιπαὶ ἄρα
εὐθεῖαι αἱ $ΘΔ, ΘΒ$ ἴσαι ἀλ-
λάλαις ἐντὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ
 $ΘΔΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΘΒΔ$,
τουτέστιν τῇ ὑπὸ $ΗΔΕ$ ἔστιν
ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω γωνία
ἡ ὑπὸ $ΗΔΒ$. συναμφοτέρως
ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ $ΗΔΒ, ΔΒΖ$, συναμφοτέρω τῇ ὑπὸ $ΗΔΒ, ΕΔΗ$
ἔστιν ἴσα· ἔστι δὲ συναμφοτέρως ἡ ὑπὸ $ΗΔΒ, ΔΒΖ$ δυσὶν ὀρθαῖς
ἴσα· συναμφοτέρως ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ $ΗΔΒ, ΕΔΗ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἔστιν
ἴσα· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐντὶ εὐθεῖαι αἱ $ΕΔ, ΔΒ$ δέδεικται οὖν τὸ προ-
τεθέν.



β'

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ $ΑΒΓ$ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐπιπαύουσai αὐτοῦ
αἱ $ΔΒ, ΔΓ$, ἡ δὲ $ΒΕ$ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τῇ $ΑΓ$, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ $ΑΔ$
φαμί δὴ, ἡ $ΒΖ$ ἴσα εἶμεν τῇ $ΖΕ$.

1

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς αἱ δὲ διαμέτροι αὐτῶν ληφθῶσι παράλληλοι, αἱ συνδέουσαι τὰ πέρατα τῶν διαμέτρων καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο εὐθεῖαι κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐστῶσαν δύο κύκλοι τῶν ὁποίων κέντρα εἶναι τὰ σημεία Z, H ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ σημεῖον E , παράλληλοι δὲ διαμέτροι αἱ $AB, ΓΔ$ · λέγω, ὅτι αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι $ΕΔ, ΔΒ$ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι ὥς ἀχθῇ ἡ ZH καὶ ὥς προεκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου E καὶ ὥς ἀχθῇ ἡ $ΔΘ$ παράλληλος πρὸς τὴν ZH .

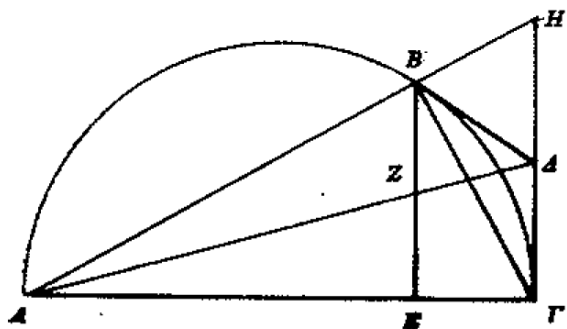
Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι ZB, ZE εἶναι ἴσαι καὶ ἡ $ΗΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$, ὥς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰς δύο (τελευταίας) ἡ $ZΘ$ τουτέστιν ἡ HE · αἱ ὑπόλοιποι ἄρα εὐθεῖαι $ΘΔ, ΘΒ$ εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἡ γωνία ἄρα $ΘΔΒ$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν $ΘΒΔ$ δηλ. τὴν $ΗΔΕ$ · ὥς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ γωνία $ΗΔΒ$ · τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $ΗΔΒ, ΔΒΖ$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν $ΗΔΒ, ΕΔΗ$ · εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $ΗΔΒ, ΔΒΖ$ ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς· καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $ΗΔΒ, ΕΔΗ$ ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς· ἐπ' εὐθείας ἄρα κεῖνται αἱ εὐθεῖαι $ΕΔ, ΔΒ$ · ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

2

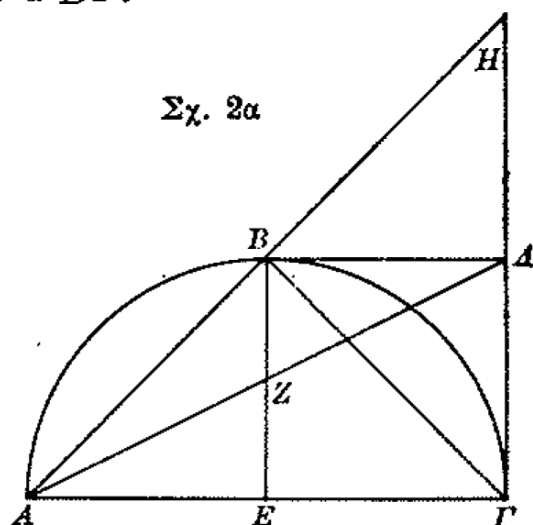
Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ $ΑΒΓ$ καὶ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ αἱ $ΔΒ, ΔΓ$, ἡ δὲ $ΒΕ$ ὥς ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν $ΑΓ$, καὶ ὥς ἀχθῇ ἡ $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι ἡ $ΒΖ = ΖΕ$.

Ἐπεξέχθω γὰρ ἡ AB καὶ ἐκβληθεῖσαι αἱ $AB, ΓΔ$ συμπιπτεύουσαν κατὰ τὸ H σημείον καὶ ἄχθω ἡ $BΓ$.

Σχ. 2



Σχ. 2α

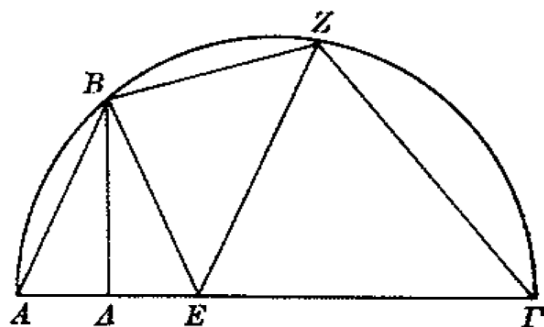


Ἐπεὶ οὖν γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΒΑ$ ὀρθή ἐστιν, ἑσσεῖται καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΒΗ$ ὀρθή· ἔστι δὲ καὶ εὐθεία ἡ $ΒΔ$ τῇ $ΔΓ$ ἴσα· ἑσσεῖται ἄρα καὶ εὐθεία ἡ $ΔΗ$ τῇ $ΔΒ$ τουτέστι τῇ $ΔΓ$ ἴσα. Καὶ ἐπεὶ ἡ $ΒΕ$ παρὰ τὰν $ΗΓ$ ἐστίν, ἑσσεῖται ἄρα καὶ ἡ $ΒΖ$ τῇ $ΖΕ$ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Υ'

Ἐστω τμήμα κύκλου τὸ $ΑΓ$ καὶ ἀπὸ σημείου τινος $Β$ τῆς περιφερείας ἄχθω τῇ $ΑΓ$ ποτ' ὀρθὰς ἡ $ΒΔ$, λελάφθω δὲ εὐθεία ἡ $ΔΕ$ εὐθεία τῇ $ΔΑ$ ἴσα καὶ περιφέρεια ἡ $ΒΖ$ τῇ $ΑΒ$ · φανὶ δὴ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ $ΓΖ$ εὐθεία τῇ $ΓΕ$ ἔστιν ἴσα.

Ἐπεξέχθωσαν γὰρ αἱ AB, BZ, ZE, EB εὐθεῖαι· καὶ ἐπεὶ ἡ ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΔΕ$ ἔστιν ἴσα, κοινὰ δὲ ἡ $ΒΔ$, δύο δὴ αἱ $ΑΔ, ΔΒ$ δυοὶ ταῖς $ΕΔ, ΔΒ$ ἑκατέρα ἑκατέρα ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΔΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΔΒ$ ἴσα· βάσεις ἄρα ἡ $ΕΒ$ βάσει τῇ $ΑΒ$, τουτέστι τῇ $ΒΖ$ ἔστιν



ἴσα· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΕΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΖΕ$ ἔστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον τὸ $ΑΒΖΓ$ ἐν κύκλῳ ἔστιν, γωνίαι αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ $ΓΖΒ, ΓΑΒ$, τουτέστιν αἱ ὑπὸ $ΓΖΒ, ΒΕΑ$ δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ καὶ συναμφοτέρος ἡ ὑπὸ $ΓΕΒ, ΒΕΑ$ δυοὶν ὀρθαῖς ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἡ ὑπὸ $ΒΕΑ$ · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΖΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΕΒ$ ἔστιν ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἡ ὑπὸ $ΒΖΕ$, τουτέστιν ἡ ὑπὸ $ΒΕΖ$ · λοι-

Διότι ὡς ἀχθῇ ἡ AB καὶ ἀφοῦ ἐκβληθῶσιν αἱ AB , $ΓΔ$ ὡς συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον H , καὶ ὡς ἀχθῇ ἡ BF (Σχ. 2).

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εἰς τὸ ἡμικύκλιον γωνία $ΓΒΑ$ εἶναι ὀρθή, εἶναι ὀρθή καὶ ἡ γωνία $ΓΒΗ$. εἶναι δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα $ΒΔ = ΔΓ$. θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΔΗ = ΔΒ = ΔΓ$. (Διότι ἡ $ΓΗ$ εἶναι ἡ διάμετρος κύκλου $ΓΒΗ$, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι τὸ $Δ$). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΒΕ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΗΓ$, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ἡ $ΒΖ = ΖΕ$. ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

3

Ἐστω τμῆμα κύκλου τὸ $ΑΓ$ καὶ ἀπὸ σημείου τινος B τῆς περιφερείας ὡς ἀχθῇ ἡ $ΒΔ$ κάθετος πρὸς τὴν $ΑΓ$, ὡς ληφθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα $ΔΕ = ΔΑ$ καὶ τὸ τόξον $ΒΖ =$ τόξον $ΑΒ$. λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα $ΓΖ$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν $ΓΕ$.

Διότι ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι AB , BZ , ZE , EB . Καὶ ἐπειδὴ ἡ $ΑΔ = ΔΕ$ κοινὴ δὲ ἡ $ΒΔ$, ὑπάρχουσι δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἴσαι πρὸς δύο ἀντιστοιχῶς τὰς $ΕΔ$, $ΔΒ$. εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία $ΑΔΒ = ΕΔΒ$. ἡ βάσις ἄρα $ΕΒ = ΑΒ = ΕΖ$. ἡ γωνία ἄρα $ΒΕΖ = ΒΖΕ$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον $ΑΒΖΓ$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν $ΓΖΒ + ΓΑΒ$ τουτέστι τὸ $ΓΖΒ + ΒΕΑ = 2$ ὀρθάς. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα $ΓΕΒ + ΒΕΑ = 2$ ὀρθάς. ὡς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄθροίσματα ἡ γωνία $ΒΖΕ = ΒΕΖ$. αἱ ὑπόλοι-

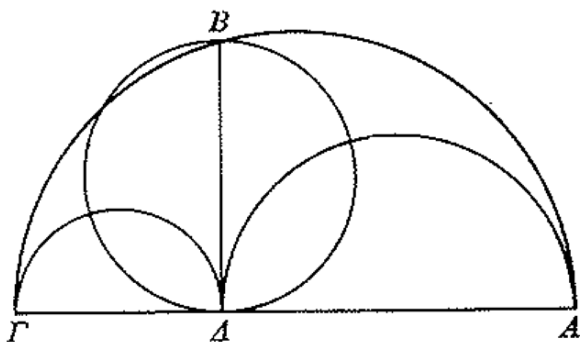
παὶ ἄρα αἱ ποτὶ τῇ βάσει τῇ EZ τριγώνου τοῦ $EΓZ$ γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΓZE$, $ΖΕΓ$ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· πλευρὰ ἄρα ἡ $ZΓ$ πλευρᾷ τῇ $ΕΓ$ ἔστιν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

δ'

Εἴ κα ἐν ἡμικυκλίῳ σαμεῖον τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου ᾗ, γραφέντι δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντός, ἀναστακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λαφθέντος σαμείου εὐθεῖα ποτὶ τῇ περιφερείᾳ τῇ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθὰς, σχᾶμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, ἴσον ἔστι κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ ἀναστακεῖσα κάθετος.

Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ $ΑΒΓ$ καὶ σαμεῖον τι ἐπὶ διαμέτρῳ τῆς $ΑΓ$ τὸ $Δ$, καὶ ἀπὸ διαμέτρων τῶν $ΓΔ$, $ΔΑ$ ἡμικύκλια ἀναγεγράφθων ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ $Δ$ σαμείου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς τῇ $ΑΓ$ ἡ $ΔΒ$ · φαμὶ δὴ, σχᾶμα τὸ ὑπὸ τῶν τριῶν περιφερειῶν περιεχόμενον, τουτέστι τοῦ μείζονος ἡμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντός, ὅπερ ἄρρηλος καλεῖσθω, κύκλῳ οὗ διάμετρος ἡ $ΔΒ$ ἴσον ἔστί.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖαι αἱ $ΔΑ$, $ΔΒ$, $ΔΓ$ ἑξῆς ἀνάλογον ἐντί, ἔσσεῖται τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ ἴσον· κοινὸν ποτικείσθω τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ὅλας τετραγώνου, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$,



τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων, τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις τοῦ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ ἔστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ὥς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγώνου ἐντί, ἔσσεῖται δὴ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ $ΑΓ$ δυοὶ κύκλοις ἂν διάμετρος ἡ $ΔΒ$ καὶ δυοὶ κύκλοις, ἂν διαμέτροι αἱ $ΑΔ$, $ΔΓ$ ἴσος, τουτέστιν ἡμικύκλιον τὸ $ΑΓ$ ἴσον κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ $ΔΒ$, καὶ δυοὶν ἡμικυκλίοις, ἂν διαμέτροι αἱ $ΑΔ$, $ΔΓ$ · κοινὸν ἀφαιρήσθω ἡμικύκλια τὰ $ΑΔ$, $ΔΓ$ · λοιπὸν ἄρα χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ περιφερειῶν τῶν $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΔΓ$, ὅπερ ἄρρηλος καλεῖται, κύκλῳ, οὗ διάμετρος ἡ $ΔΒ$ ἔστιν ἴσον· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ε'

Εἴ κα ἐν ἡμικυκλίῳ σαμεῖόν τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου ᾗ, καὶ γραφέντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντός, ἀναστακῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου εὐθεῖα τῇ διαμέτρῳ ποτ' ὀρθὰς, καὶ δύο κύκλοι γραφέντι ἐπ' ἀμφοτέρω τῆς ἀνεστακούσας

ποι ἄρα παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου EFZ γωνίαι FZE, ZEF εἶναι μεταξύ των ἴσαι· ἡ πλευρὰ ἄρα $ZF =$ πρὸς τὴν πλευρὰν EF ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

4

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡμικυκλίου ληφθῇ σημεῖον τι γραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντός, καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου μέχρι τῆς περιφερείας, τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων, ἰσοῦται μὲ κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ὑψωθείσα κάθετος.

Διότι ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ABF καὶ σημεῖον τι Δ ἐπὶ τῆς διαμέτρου AF καὶ ἄς ἀναγραφῶσιν ἐντὸς ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους τὰς $GA, \Delta A$, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἄς ὑψωθῇ κάθετος πρὸς τὴν AF ἢ AB . λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν τόξων, δηλαδὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἡμικυκλίου καὶ τῶν δύο ἀναγραφέντων ἐντὸς ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἄς κληθῇ ἄρβηλος, εἶναι ἴσον μὲ κύκλον διαμέτρου AB .

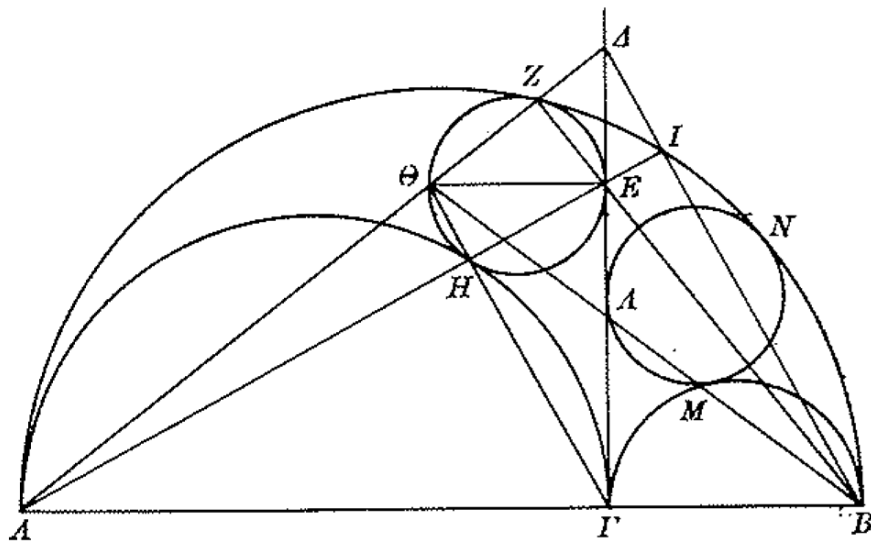
Διότι ἐπειδὴ ἡ AB εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν $\Delta A, \Delta F$, τὸ ὀρθογώνιον $\Delta A \times \Delta F = B\Delta^2$ (Εὐκ. VI, 17)· ἄς προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη τὸ ὀρθογώνιον $\Delta A \times \Delta F$ καὶ τὰ τετράγωνα $A\Delta^2, \Delta F^2$ (ὅποτε θὰ εἶναι $2\Delta A \times \Delta F + A\Delta^2 + \Delta F^2 = B\Delta^2 + \Delta A \times \Delta F + A\Delta^2 + \Delta F^2$)· θὰ εἶναι ἄρα $AF^2 = 2B\Delta^2 + A\Delta^2 + \Delta F^2$ (ἐπειδὴ $\Delta A \times \Delta F = B\Delta^2$). Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι μεταξύ των, ὥς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν (Εὐκλ. XII, 2), ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ AF θὰ εἶναι ἴσος μὲ δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετρος εἶναι ἡ $B\Delta$ καὶ μὲ δύο κύκλους, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ $A\Delta, \Delta F$, καὶ ἐπομένως τὸ ἡμικύκλιον AF εἶναι ἴσον μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ $B\Delta$, καὶ μὲ δύο ἡμικύκλια, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ $A\Delta, \Delta F$. ἄς ἀφαιρεθῶσι ἀπὸ ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἰσότητος τὰ ἡμικύκλια $A\Delta, \Delta F$. τὸ ὑπόλοιπον ἄρα σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τόξων $AF, A\Delta, \Delta F$, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἄρβηλος, ἰσοῦται μὲ κύκλον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ AB . ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

5

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῇ σημεῖον τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου, καὶ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου γραφῶσι δύο ἡμικύκλια ἐντός,

ἐπιψαύοντες αὐτάς καὶ τῶν ἀμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι ἔσσοῦνται ἀλλάλοις ἴσοι.

Ἐστω ἀμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἡ AB σαρμεῖον δέ τι ἐπ' αὐτάς τὸ Γ ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τμαμάτων τῶν $A\Gamma$, ΓB ἀμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σαρμεῖου ἀνεστακέτω ποτ' ὀρθὰς διαμέτρῳ τῇ AB , ἡ $\Gamma\Delta$, γεγράφθων δὲ δύο κύκλοι ἐπ' ἀμφοτέρω τῆς ἀνεστακούσας εὐθείας ἐπιψαύοντες τῆς τε ἀνεστακούσας καὶ τῶν ἀμικυκλίων· φαμὶ δὴ, οἱ γραφέντες κύκλοι ἴσοι ἀλλάλοις ἐντί.



Ἐστω γὰρ πρότερον κύκλος ὁ ἐπιψαύων τῆς $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ E σαρμεῖον καὶ ἀμικυκλίου μὲν τοῦ $A\Gamma$ κατὰ τὸ H , ἀμικυκλίου δὲ τοῦ AB κατὰ τὸ Z , ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΘE · ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ $A\Theta$, ΘZ εὐθεῖαι ἔσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ AZ , ΓE εὐθεῖαι συμβαλέτωσαν κατὰ τὸ Δ σαρμεῖον· ὁμοίως δὴ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ZE , EB ἔσσοῦνται ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, καὶ αἱ ΘH , $H\Gamma$, καὶ αἱ EH , HA , ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ AE ἐπὶ τὸ I σαρμεῖον, ἄχθω δὲ ἡ BI εὐθεῖα καὶ ἡ $I\Delta$. Ἐπεὶ οὖν αἱ $A\Delta$, AB εὐθεῖαι ἐντί καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαρμεῖου τῇ AB ἄκται ποτ' ὀρθὰς ἡ $\Delta\Gamma$, καὶ ἀπὸ τοῦ B ποτ' ὀρθὰς τῇ ΔA ἡ BZ , τεμνέουσα τὰν $\Delta\Gamma$ κατὰ τὸ E , εὐθεῖα δὲ ἡ AEI ποτ' ὀρθὰς τῇ BI ἢ, ἔσσοῦνται ἄρα εὐθεῖαι αἱ BI , $I\Delta$ ἀλλάλαις ἐπ' εὐθείας, ὥς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς *Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων* δέδεικται. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $B\Delta$ παρὰ τὰν ΓH ἐστίν, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ $A\Delta$ ποτὶ τὰν $\Delta\Theta$, ὃν ἔχει ἡ $A\Gamma$ ποτὶ τὰν ΘE , τουτέστιν ἡ AB ποτὶ τὰν $B\Gamma$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB τῷ ὑπὸ τῶν AB , ΘE ἐστὶν ἴσον· ὁμοίως δὴ δείξομες ὅτι ἐν κύκλῳ τῷ ΛMN τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB τῷ ὑπὸ τῶν AB καὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΛMN κύκλου ἴσον ἐστὶ· αἱ διαμέτροι ἄρα κύκλων τῶν EZH , ΛMN ἴσαι ἐντί, τουτέστιν οἱ δύο κύκλοι ἴσοι ἐντί· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ὑψωθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ σημείου κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ γραφῶσι πρὸς ἀμφοτέρω τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι αὐτῆς καὶ τῶν ἡμικυκλίων, οἱ γραφέντες κύκλοι θὰ εἶναι μεταξὺ τῶν ἴσοι.

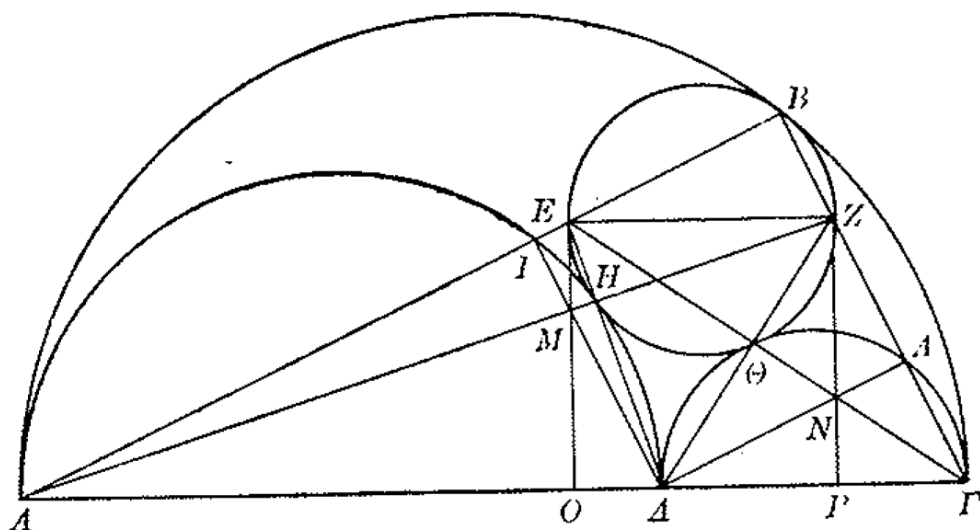
Ἐστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ AB καὶ σημεῖον τι ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ , ἃς ἀναγραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων $A\Gamma$, ΓB ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἃς ὑψωθῇ ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Delta$ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον AB , ἃς ἀναγραφῶσι δὲ δύο κύκλοι πρὸς ἀμφοτέρω τὰ μέρη τῆς ὑψωθείσης καθέτου, ἐφαπτόμενοι καὶ τῆς ὑψωθείσης καὶ τῶν ἡμικυκλίων· λέγω, ὅτι οἱ γραφέντες κύκλοι εἶναι μεταξὺ τῶν ἴσοι.

Διότι ἔστω πρότερον κύκλος ὁ ἐφαπτόμενος τῆς $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ σημεῖον E , καὶ τοῦ μὲν ἡμικυκλίου $A\Gamma$ κατὰ τὸ H , τοῦ δὲ ἡμικυκλίου AB κατὰ τὸ σημεῖον Z , ἃς ἀχθῇ δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΘE · αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι $A\Theta$, ΘZ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (9.1), καὶ αἱ AZ , ΓE ἀφοῦ προεκβληθῶσι ἃς συμπίπτωσι κατὰ τὸ σημεῖον Δ · ὁμοίως αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ZE , EB κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὥς ἐπίσης αἱ ΘH , $H\Gamma$ καὶ αἱ EH , HA , ἃς ἐκβληθῇ δὲ ἡ AE μέχρι τοῦ σημείου I , ἃς ἀχθῇ δὲ ἡ BI καὶ ἡ IA . Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ $A\Delta$, AB εἶναι εὐθεῖαι καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Δ ἔχει ἀχθῇ ἡ $\Delta\Gamma$ κάθετος πρὸς τὴν AB καὶ ἀπὸ τοῦ B κάθετος ἡ ΔA πρὸς τὴν BZ , τέμνουσα τὴν $\Delta\Gamma$ κατὰ τὸ σημεῖον E , ἡ δὲ εὐθεῖα AEI εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BI , αἱ εὐθεῖαι BI , IA θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὥς ἀπεδείχθη παρ' ἡμῶν εἰς τὴν πραγματείαν Περὶ ὀρθογώνιων τριγώνων. Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $B\Delta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓH θὰ εἶναι $A\Delta : \Delta\Theta = A\Gamma : \Theta E = AB : B\Gamma$. τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $A\Gamma \times \Gamma B = AB \times \Theta E$ · καθ' ὁμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι εἰς τὸν κύκλον ΔMN τὸ ὀρθογώνιον $A\Gamma \times \Gamma B = AB$ ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου ΔMN · αἱ διαμέτροι ἄρα τῶν κύκλων EZH , ΔMN , δηλαδή οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

στ'

Εἴ κα ἐν ἀμικυκλίῳ σαμεῖον τι ἐπὶ τᾷς διαμέτρου ῆ, καὶ γραφέντι ἀπὸ τῶν τμαμάτων τᾷς διαμέτρου δύο ἀμικύκλια ἐντός, γραφῇ δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ἐπιπαύων τῶν τριῶν ἀμικυκλίων, τὸν λόγον τᾷς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἀμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εὑρεῖν.

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ $AB\Gamma$, σαμεῖον δὲ τι ἐπὶ τᾷς διαμέτρου τὸ Δ καὶ πεποιήσθω οὕτως, ὥστε τὸ μείζον τμήμα τὸ $A\Delta$ ἐλάσσονος τοῦ $\Delta\Gamma$ ἀμιόλιον εἶμεν, καὶ ἀπὸ τμαμάτων τῶν $A\Delta$, ΔB ἀναγεγράψθων ἀμικύκλια, γεγράψθω δὲ ἐν τῷ ἀρβήλῳ κύκλος ὁ EZ ἐπιπαύων τῶν τριῶν ἀμικυκλίων καὶ ἄχθω διάμετρος αὐτοῦ παρὰ τὰν $A\Gamma$ ὁ EZ . εὑρεῖν τὸν λόγον διαμέτρου τᾷς $A\Gamma$ ποτὶ διάμετρον τὰν EZ .



Ἐπεξεύχθωσαν αἱ AE , EB εὐθεῖαι καὶ αἱ ΓZ , ZB εὐθεῖαι δὴ ἐντὶ αἱ AB , ΓB ὡς ἐν τοῖς πρότερον ἐδείχθη. ἐπεξεύχθωσαν ἔτι αἱ ZHA , $E\Theta\Gamma$. δείκνυνται δὴ αὗται εὐθεῖαι εἶμεν ἔτι δὲ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔE , ΔZ , καὶ αἱ ΔI , ΔA , καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ EM , ZN ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ O , P σαμεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ $AE\Delta$ ὁ AH τῇ $E\Delta$ ποτ' ὀρθὰς ῆ, καὶ ὁ ΔI τῇ AE , τεμνέοντι δὲ ἀλλάλας κατὰ τὸ M σαμεῖον, ὁ EMO τῇ $A\Gamma$ ἑσσεῖται ποτ' ὀρθάς, ὡς παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τριγώνων ἐδείχθη, καὶ τῷ πρότερον ὑπέκειτο διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ZN τῇ ΓA ἑσσεῖται ποτ' ὀρθάς· ἔστι δὲ εὐθεῖα ὁ ΔA παρὰ τὰν AB καὶ ὁ ΔI παρὰ τὰν ΓB · ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ὁ $A\Delta$ ποτὶ τὰν $\Delta\Gamma$, ὃν ἔχει ὁ AM ποτὶ τὰν MZ , τουτέστιν ὁ AO ποτὶ τὰν OP , καὶ ὁ $\Gamma\Delta$ ποτὶ τὰν ΔA τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἔχει ὁ ΓN ποτὶ τὰν NE , τουτέστιν ὁ ΓP ποτὶ τὰν PO · ἣν δὲ ὁ $A\Delta$ ἀμιόλιος τᾷς $\Delta\Gamma$ · καὶ ὁ AO ἄρα τᾷς

6

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῇ σημεῖον τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ γραφῶσιν ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου δύο ἡμικύκλια ἐντὸς γραφῇ δὲ εἰς τὸν ἄρβηλον κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων, νὰ εὕρεθῇ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου.

Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ $AB\Gamma$ σημεῖον δὲ τι ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Δ καὶ ὥς εἶναι τὸ μεγαλύτερον τμήμα τὸ $A\Delta$ τὰ $3:2$ τοῦ μικροτέρου τοῦ $\Delta\Gamma$, καὶ ἀπὸ τῶν τμημάτων $A\Delta$, ΔB ὥς ἀναγραφῶσιν ἡμικύκλια ἐντὸς, ὥς γραφῇ δὲ εἰς τὸν ἄρβηλον ὁ κύκλος EZ ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν ἡμικυκλίων καὶ ὥς ἀχθῇ ἡ διάμετρος αὐτοῦ EZ παράλληλος πρὸς τὴν $A\Gamma$.

Ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι AE , EB , καὶ αἱ ΓZ , ZB . θὰ εἶναι λοιπὸν εὐθεῖαι αἱ AB , ΓB , ὥς ἐδείχθη προηγουμένως (θ.1). Ἄς ἐπιζευχθῶσιν ἀκόμη αἱ ZH , HA καὶ αἱ $E\Theta$, $\Theta\Gamma$. ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι καὶ αὗται κεῖνται ἐπ' εὐθείας· προσέτι δὲ ὥς ἐπιζευχθῶσιν αἱ AE , ΔZ , καὶ αἱ ΔI , ΔA καὶ ἀφοῦ ἀχθῶσιν αἱ EM , ZN ὥς ἐκβληθῶσι μέχρι τῶν σημείων O , P .

Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον AED ἢ AH εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ED καὶ ἡ ΔI ἐπὶ τὴν AE , τέμνονται δὲ κατὰ τὸ σημεῖον M , ἡ EMO εἶναι κάθετος πρὸς τὴν $A\Gamma$, ὥς ἐδείχθη εἰς τὴν πραγματείαν μας περὶ τριγώνων καὶ ὑπετέθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ ἡ $ZN P$ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΓA · εἶναι δὲ ἡ εὐθεῖα ΔA παράλληλος πρὸς τὴν AB καὶ ἡ ΔI παράλληλος πρὸς τὴν ΓB · ὥστε εἶναι

$$A\Delta : \Delta\Gamma = AM : MZ = AO : OP \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad \Gamma\Delta : \Delta A = \Gamma N : NE = \Gamma P : PO. \quad (2)$$

Ἦτο δὲ ἡ $A\Delta = \frac{3}{2}\Delta\Gamma$ · εἶναι ἄρα καὶ ἡ $AO = \frac{3}{2}OP$ · εἶναι ἐπομένως ἡ $OP = \frac{3}{2}\Gamma P$ · αἱ εὐθεῖαι ἄρα AO , OP , OG εὐρίσκονται

εἰς συνεχῇ ἀναλογίαν, ἐν ᾧ ἡ μὲν PF γίνεται 4, ἡ δὲ $OP=6$, ἡ δὲ $AO=9$, ἡ δὲ $\Gamma A=19$. Εἶναι δὲ ἡ $PO=EZ$ · ὥστε $A\Gamma : EZ = 19 : 6$ · καὶ εἶναι ἡ $A\Gamma$ διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου $AB\Gamma$, ἡ δὲ EZ διάμετρος τοῦ κύκλου EBZ · εὕρεθη ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἂν ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγραφέντος κύκλου εἶναι τῆς μορφῆς

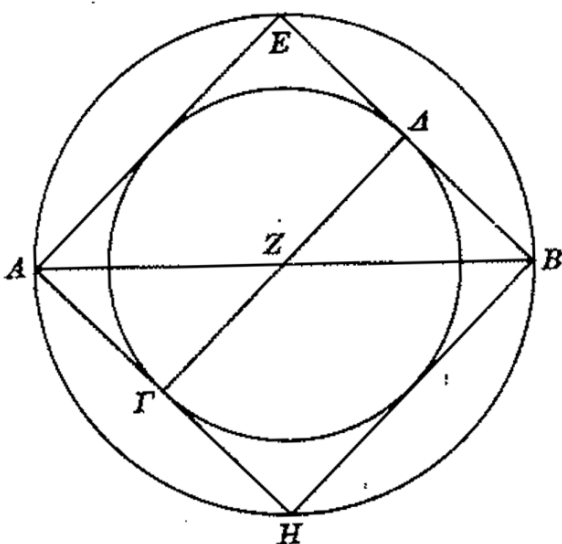
$$\frac{n+1}{n} \cdot \left[\text{Σημ. Ἐκ τῆς (1) ἀφοῦ} \quad A\Delta = \frac{3}{2}\Delta\Gamma \text{ εἶναι καὶ } AO = \frac{3}{2}OP, (3). \right]$$

ΟΡ ἐστὶν ἀμύδιος, καὶ ἡ ΟΡ τῆς ΓΡ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΑΟ, ΟΡ, ΡΓ ἐξῆς ἀνάλογον ἐντί, ἃν ἡ μὲν ΡΓ ἴσα γίνεται τέσσαρα, ἡ δὲ ΟΡ ἐξ, ἡ δὲ ΑΟ ἐννέα, ἡ δὲ ΓΑ ἐννεακαίδεκα. ἔστι δὲ ἡ ΡΟ τῇ ΕΖ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ΑΓ ποτὶ τὰν ΕΖ, ὃν ἔχει τὰ ἐννεακαίδεκα ποτὶ τὰ ἐξ· καὶ ἔστι ἡ ΑΓ διάμετρος ἀμικυκλίου τοῦ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΕΖ κύκλου τοῦ ΕΒΖ· εὐρέθη ἄρα ὁ αἰτούμενος λόγος. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται εἴ καὶ ὁ λόγος τῆς διαμέτρου τοῦ δοθέντος ἀμικυκλίου ποτὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐπιμόριος ᾗ.

< ζ'

Ὁ τετραγώνῳ περιγεγραμμένος κύκλος διπλασίῳ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ.

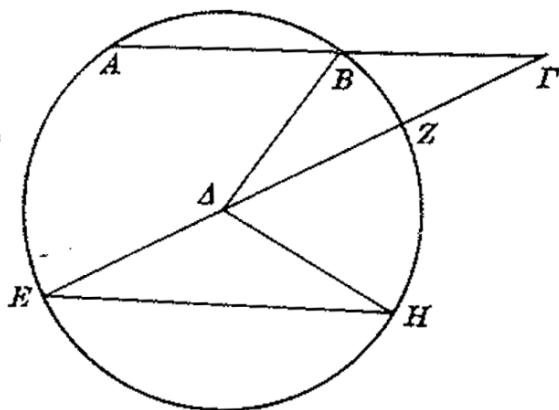
Ἐστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒ περὶ τετραγώνον τὸ ΑΒ καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὁ ΓΔ, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου, ἡ ΑΒ, ἄχθω δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ ΓΔ παρὰ τὰν ΑΕ· φανὶ δὴ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ διπλασίῳ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ, τουτέστι τῆς ΓΔ ἐστὶ διπλάσιον, οἱ κύκλοι δὲ ἐντί ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων αὐτῶν τετράγωνα, ἔσσεϊται ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίῳ· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν. >

η'

Εἴ καὶ ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι τις ΑΒ προσαρμοσμένη ᾗ ἐκβλήθῃ δὲ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὰν ΒΓ εὐθεῖαν τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαν εἶμεν, διαχθῇ δὲ εὐθεῖα τις ἀπὸ τοῦ Γ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον, ἔσσεϊται περιφέρειαι ἡ ΑΕ περιφέρειας τὰς ΒΖ τριπλασίῳ.



Ἀχθω γὰρ ἡ ΕΗ παρὰ τὰν ΑΒ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ ΔΒ, ΔΗ.

Ἐπεὶ οὖν γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΓΔ, ΒΔΓ, ΔΕΗ, ΔΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις

Ἐκ τῆς (2), $ΓΔ : ΔΑ = ΓΡ : ΡΟ$, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος τῆς (1) ἔπεται $ΡΟ = \frac{3}{2} ΓΡ$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (3) εἶναι $ΑΟ = \frac{9}{4} ΓΡ$, ἥτοι ἔχομεν $ΑΟ = \frac{3}{2} ΟΡ = \frac{9}{4} ΓΡ$. Διαιροῦντες τὰ τρία μέλη τῶν ἰσοτήτων διὰ 9 λαμβάνομεν $\frac{ΓΡ}{4} = \frac{ΟΡ}{6} = \frac{ΑΟ}{9}$, καὶ κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν $\frac{ΓΡ}{4} = \frac{ΟΡ}{6} = \frac{ΑΟ}{9} = \frac{ΑΟ}{9} = \frac{ΓΡ + ΟΡ + ΑΟ}{4 + 6 + 9} = \frac{ΑΓ}{19}$, ἥ $ΓΡ : ΟΡ : ΑΟ : ΑΓ = 4 : 6 : 9 : 19$, ἥτοι $ΑΓ : ΟΡ = 19 : 6$].

7

Ὁ περιγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον κύκλος εἶναι διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου. Διότι ἔστω ὁ κύκλος $ΑΒ$ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράγωνον $ΑΒ$ καὶ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένος ὁ κύκλος $ΓΔ$, διάμετρος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ τετραγώνου (δηλ. διαγώνιος) ἡ $ΑΒ$, ἃς ἀχθῇ δὲ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἡ $ΓΔ$, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν $ΑΕ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν $ΑΒ^2 = 2ΑΕ^2 = 2ΓΔ^2$, οἱ δὲ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, θὰ εἶναι ἄρα καὶ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν. (Σημ. Ὅτι τὸ εἰς κύκλον περιγεγραμμένον τετράγωνον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐγγεγραμμένου χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου XII, 2. Εἶναι ἄρα πιθανὸν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι παρεμβολή).

8

Ἐὰν εἰς κύκλον χορδὴ τις $ΑΒ$ ἐκβληθῇ κατὰ τὸ σημεῖον $Γ$, ὥστε ἡ εὐθεῖα $ΒΓ$ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἀχθῇ δὲ ἀπὸ τοῦ $Γ$ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εὐθεῖα τις μέχρι τοῦ σημείου $Ε$, τὸ τόξον $ΑΕ$ θὰ εἶναι τριπλάσιον τοῦ τόξου $ΒΖ$.

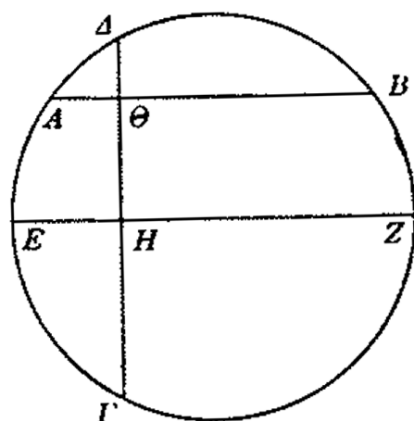
Διότι ἃς ἀχθῇ ἡ $ΕΗ$ παράλληλος πρὸς τὴν $ΑΒ$ καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ $ΔΒ$, $ΔΗ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν αἱ γωνίαι $ΒΓΔ$, $ΒΔΓ$, $ΔΕΗ$, $ΔΗΕ$ εἶναι

ἐντί, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta\text{H}$ γωνίας τῆς ὑπὸ $\Delta\text{E}\text{H}$ ἐστὶ διπλασίων, ἔσσειται ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ $\text{B}\Delta\text{H}$ γωνίας τῆς ὑπὸ $\text{B}\Delta\text{Γ}$ τριπλασίων. ἔσσειται ἄρα περιφέρεια ἡ BH , τουτέστιν ἡ AE , περιφερείας τῆς BZ τριπλασίων· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

θ'

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέονται ἀλλήλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι δυοὶ ταῖς ἀπεναντίον ἴσαι ἀλλήλαις ἐντί.

Ἐστω κύκλος ὁ $\text{AB}\Gamma$ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τεμνέουσαι ἀλλήλας ποτ' ὀρθὰς, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· φαμί δὴ, δύο αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ AD , ΓB δυοὶ ταῖς ἀπεναντίον ταῖς AG , BD ἴσαι ἀλλήλαις ἐντί.

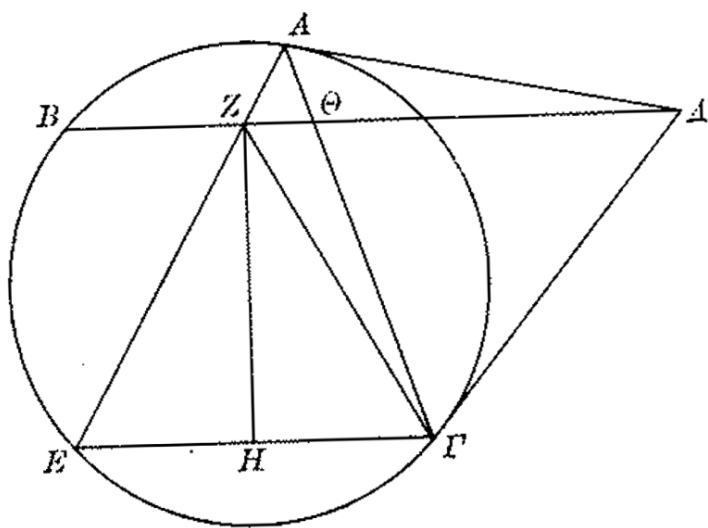


Τετράσθω γὰρ δίχα ἡ $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ H σαμεῖον καὶ διὰ τοῦ H διάχθω διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ EZ παρὰ τὰν AB .

Ἐπεὶ οὖν περιφέρεια ἡ $\text{E}\Gamma$ περιφερείαις ταῖς EA , AD ἴσα ἐστὶ, ἔσσουνται ἄρα περιφέρειαι αἱ ΓZ , EA , AD ἀμικυκλίῳ ἴσαι· ἐστὶ δὲ περιφέρεια ἡ EA περιφέρεια τῆς BZ ἴσα· συναμφοτέρως ἄρα περιφέρεια ἡ ΓB , AD ἀμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· λοιπὴ ἄρα συναμφοτέρως περιφέρεια ἡ AG , ΔB ἀμικυκλίῳ ἐστὶν ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ι'

Εἴ κα ἡ κύκλος ὁ $\text{AB}\Gamma$ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔA , $\Delta\Gamma$ ἐπιπαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ A , Γ σαμεῖα, τεμνέουσα δὲ εὐθεῖα ἡ ΔB , ἀχθῇ δὲ ἡ $\text{E}\Gamma$ παρὰ τὰν BD , ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ EA τεμνέουσα τὰν ΔB κατὰ τὸ Z , καὶ ἀπὸ τοῦ Z ποτ' ὀρθὰς τῆς $\text{E}\Gamma$ ἀχθῇ ἡ ZH , ἡ ἀγμένα τὰν $\text{E}\Gamma$ δίχα τέμνει.



Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ AG . ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΔA ἐπιπαύουσα τοῦ κύκλου ἐστὶ, ἡ δὲ AG τεμνέουσα αὐτοῦ, γωνία ἡ

μεταξύ των ἴσαι, ἡ γωνία δὲ $\Gamma\Delta H = 2\Delta H E$, θὰ εἶναι ὅλη ἡ γωνία $B\Delta H = 3B\Delta\Gamma$ · εἶναι ἐπομένως καὶ τὸ τόξον $BH = AE = 3BZ$ · ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

9

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καθέτως μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, τὰ δύο ἀπέναντι τόξα ἰσοῦνται μὲ τὰ ἄλλα δύο ἀπέναντι.

Ἐστω ὁ κύκλος $AB\Gamma$ καὶ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως αἱ AB , $\Gamma\Delta$ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι τὰ δύο ἀπέναντι τόξα $A\Delta$, ΓB ἰσοῦνται μὲ τὰ δύο ἀπέναντι $A\Gamma$, $B\Delta$.

Διότι ἄς τμηθῇ εἰς τὸ μέσον ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ σημεῖον H καὶ διὰ τοῦ H ἄς διαχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ EZ παράλληλος πρὸς τὴν AB .

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ τόξον $E\Gamma = \text{τοξ } EA + A\Delta$, θὰ εἶναι ἄρα $\text{τοξ } \Gamma Z + EA + A\Delta = \text{μὲ ἡμικύκλιον}$ · εἶναι δὲ $\text{τοξ } BZ = \text{τοξ } AE$ · θὰ εἶναι ἄρα $\text{τοξ } \Gamma B + A\Delta = \text{μὲ ἡμικύκλιον}$ · τὸ ὑπόλοιπον ἄρα τόξον $A\Gamma + \Delta B = \text{μὲ ἡμικύκλιον}$ · ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

10

Ἐὰν εἰς τὸν κύκλον $AB\Gamma$ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔA , $\Delta\Gamma$ ἐφάπτονται αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεία A , Γ , ἀχθῇ δὲ τέμνουσα ἡ ΔB καὶ ἡ $E\Gamma$ παράλληλος πρὸς τὴν $B\Delta$ καὶ ἡ EA τέμνουσα τὴν ΔB κατὰ τὸ Z καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν $E\Gamma$ ἡ ZH , ἡ ἀχθεῖσα διχοτομεῖ τὴν $E\Gamma$.

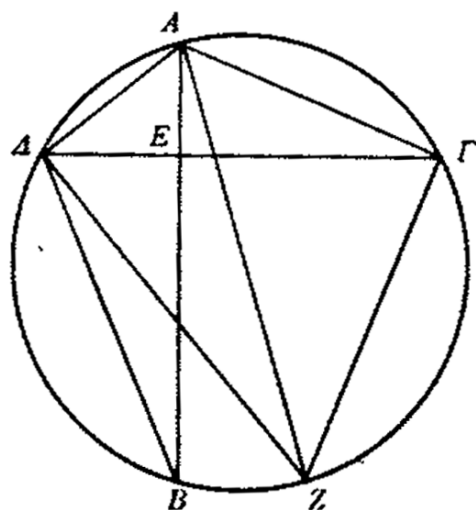
ὑπὸ $\Delta\Lambda\Gamma$ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνία τῇ ὑπὸ $\Lambda\epsilon\Gamma$, τουτέστι τῇ ὑπὸ $\Lambda\mathcal{Z}\Delta$ ἔστιν ἴσα. ἔστι γὰρ ἡ $\Gamma\epsilon$ παρά τὰν $B\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἐν δυοῖς τριγώνοις τοῖς $\Delta\Lambda\mathcal{Z}$, $\Lambda\Theta\Delta$ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Lambda\mathcal{Z}\Delta$, $\Theta\Delta\Delta$ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνία δὲ ἡ πρὸς τὸ Δ κοινά, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\mathcal{Z}\Delta$, $\Delta\Theta$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Lambda$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ τετραγώνῳ ἔστιν ἴσον· ἐπεὶ οὖν ὁν λόγον ἔχει ἡ $\mathcal{Z}\Delta$ πρὸς τὰν $\Delta\Gamma$, τοῦτον ἔχει καὶ ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὰν $\Delta\Theta$, γωνία δὲ ἡ πρὸς τὸ Δ κοινά ἐστι, τρίγωνα ἄρα τὰ $\Delta\mathcal{Z}\Gamma$, $\Delta\Gamma\Theta$ ἔστιν ὁμοία καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Delta\mathcal{Z}\Gamma$, $\Delta\Gamma\Theta$, $\Delta\Lambda\Theta$, $\Lambda\mathcal{Z}\Delta$ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta\mathcal{Z}\Gamma$ τῇ ὑπὸ $\mathcal{Z}\Gamma\epsilon$ ἴσα· ἣν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta\mathcal{Z}\Lambda$ τὰ ὑπὸ $\Lambda\epsilon\Gamma$ ἴσα· ἐν δυοῖς τριγώνοις ἄρα τοῖς $\epsilon\mathcal{H}\mathcal{Z}$, $\Gamma\mathcal{H}\mathcal{Z}$ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $\epsilon\mathcal{H}\mathcal{Z}$, $\mathcal{H}\Gamma\mathcal{Z}$ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί καὶ αἱ πρὸς τὸ $\mathcal{H}$ κοινά γωνίαι ὀρθαί· ἔστι δὲ πλευρὰ ἡ $\mathcal{H}\mathcal{Z}$ κοινά· ἔστιν ἄρα ἡ $\epsilon\mathcal{H}$ τῇ $\mathcal{H}\Gamma$ ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ια'

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέωνται ἀλλάλας ποτ' ὀρθὰς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι, τὰ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῶν εὐθειῶν τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐντί.

Ἐστω γὰρ κύκλος ὁ $AB\Gamma$ καὶ δύο εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τεμνάσθων ποτ' ὀρθὰς κατὰ τὸ ϵ σημειῶν· φανί δὴ, τὰ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῶν $\Lambda\epsilon$, ϵB , $\Gamma\epsilon$, $\epsilon\Delta$ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστί.

Ἀχθῶ γὰρ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ $\Lambda\mathcal{Z}$ καὶ ἐπεζεύχθων αἱ $\Lambda\Gamma$, $\Lambda\Delta$, $\Gamma\mathcal{Z}$, ΔB εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἐν δυοῖς τριγώνοις τοῖς $\Lambda\Delta\epsilon$, $\Lambda\mathcal{Z}\Gamma$ γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Lambda\epsilon\Delta$, $\Lambda\Delta\epsilon$, καὶ $\Lambda\Gamma\mathcal{Z}$, $\Lambda\mathcal{Z}\Gamma$ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί ἑκατέρω ἑκατέρω, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Gamma\Lambda\mathcal{Z}$, $\Delta\Lambda\epsilon$ ἴσους εἰσὶν ἀλλάλαις ἴσαι· περιφέρειαι ἄρα αἱ $\Gamma\mathcal{Z}$, ΔB ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, καὶ αἱ ταύτας ὑποτείνουσιν εὐθεῖαι αἱ



$\Gamma\mathcal{Z}$, ΔB · ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\Delta\epsilon$, ϵB τῷ ἀπὸ τῆς ΔB , τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\mathcal{Z}$ ἴσον, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\Lambda\epsilon$, $\epsilon\Gamma$ τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Lambda$, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\Gamma\mathcal{Z}$, $\Gamma\Lambda$ τῷ ἀπὸ τῆς $\mathcal{Z}\Lambda$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἴσον· ἴσους εἰσὶν ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν τμημάτων τῶν $\Lambda\epsilon$, ϵB , $\Gamma\epsilon$, $\epsilon\Delta$ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου ἴσα· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Διότι ἄς ἀχθῇ ἡ $ΑΓ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $ΔΑ$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἡ δὲ $ΑΓ$ χορδὴ αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἡ γωνία $ΔΑΓ = ΑΕΓ = ΑΖΔ$ διότι ἡ $ΓΕ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΒΔ$. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα τὰ $ΔΑΖ$, $ΑΘΔ$ δύο γωνίαι αἱ $ΑΖΔ$, $ΘΑΔ$ εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ ἡ γωνία $Δ$ κοινή, τὸ ὀρθογώνιον ἄρα $ΖΔ \times ΔΘ = ΔΑ^2 = ΔΓ^2$. Ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ λόγον ἔχει ἡ $ΖΔ$: $ΔΓ = ΔΓ : ΔΘ$, ἡ δὲ πρὸς τὸ $Δ$ σημεῖον γωνία εἶναι κοινή, τὰ τρίγωνα ἄρα $ΔΖΓ$, $ΔΓΘ$ εἶναι ὅμοια καὶ ἡ γωνία $ΔΖΓ = ΔΓΘ = ΔΑΘ = ΑΖΔ$ εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία $ΔΖΓ = ΖΓΕ$. ἦτο δὲ καὶ ἡ $ΔΖΑ = ΑΕΓ$ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ἄρα $ΕΗΖ$, $ΓΗΖ$ εἶναι γωνία ἡ $ΗΕΖ = ΗΓΖ$, αἱ πρὸς τὸ σημεῖον $Η$ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἡ πλευρὰ $ΗΖ$ κοινή· εἶναι ἄρα $ΕΗ = ΗΓ$ ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

11

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καθέτως, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου, τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων ἰσοῦνται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

Διότι ἔστω ὁ $ΑΒΓ$ κύκλος καὶ δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως κατὰ τὸ σημεῖον $Ε$ αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$, μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, $ΔΕ^2 + ΕΒ^2 + ΑΕ^2 + ΕΓ^2$ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

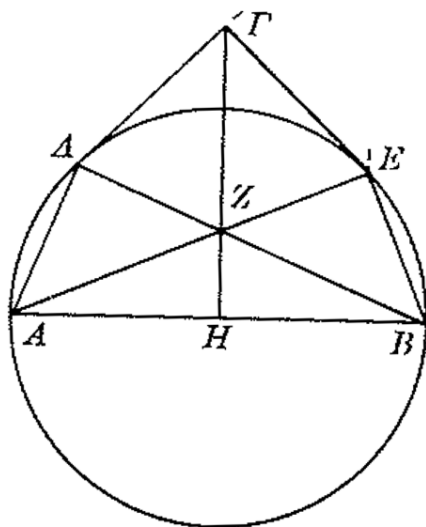
Διότι ἄς ἀχθῇ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου $ΑΖ$ καὶ αἱ εὐθεῖαι $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΓΖ$, $ΔΒ$. Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὰ δύο τρίγωνα $ΑΔΕ$, $ΑΖΓ$ δύο γωνίαι αἱ $ΑΕΔ$, $ΑΔΕ$ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο γωνίας ἀντιστοίχως τὰς $ΑΓΖ$, $ΑΖΓ$ θὰ εἶναι καὶ ἡ ὑπόλοιπος γωνία $ΓΑΖ = ΔΑΕ$ · τὰ τόξα ἄρα $ΓΖ$, $ΔΒ$ εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ αἱ εἰς αὐτὰ χορδαί, αἱ $ΓΖ$, $ΔΒ$ · εἶναι δὲ καὶ $ΔΕ^2 + ΕΒ^2 = ΔΒ^2 = ΓΖ^2$, καὶ $ΑΕ^2 + ΕΓ^2 = ΓΑ^2$, καὶ $ΓΖ^2 + ΓΑ^2 = ΖΑ^2$ · θὰ εἶναι ἄρα τὰ τετράγωνα τῶν τμημάτων $ΔΕ^2 + ΕΒ^2 + ΑΕ^2 + ΕΓ^2 =$ πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου· ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

ιβ'

Εἴ κα ἐκ σαμείου ἐκτὸς ἀμικυκλίου δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ, ἀχθέωντι δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἀφῆς δύο εὐθεῖαι ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάτεσσι τῆς διαμέτρου τεμνέουσαι ἀλλήλας, ἃ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σαμείου ποτὶ τὸ σαμεῖον τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ποτὶ τὰν διάμετρον ἑσσεῖται ταύτα ποτὶ ὀρθάς.

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ AB , σαμεῖον δέ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ Γ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἀχθῶν δύο εὐθεῖαι αἱ $\Gamma\Delta$, ΓE ἐπιψαύουσαι αὐτοῦ κατὰ τὰ Δ , E σαμεῖα, ἐπεξεύχθων δὲ ἐκ τῶν σαμείων ἀφῆς ποτὶ τοῖς ἀπεναντίον περάτεσσι τῆς διαμέτρου τοῖς A , B εὐθεῖαι αἱ EA , ΔB , τεμνέουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Z , καὶ ἀχθεῖσα ἡ ΓZ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H σαμεῖον· φανὶ δὴ, εὐθεῖα ἡ ΓH διάμετρον τῆ AB ἑσσεῖται ποτὶ ὀρθάς.

Ἐπεξεύχθων γὰρ αἱ AD , EB . ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔAB γωνία ἡ ὑπὸ ΔAB ὀρθὴ ἔστιν, λοιπαὶ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔAB , ΔBA μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AEB μιᾷ ὀρθῇ ἴσα· κοινὰ ποτικείσθω ἡ ὑπὸ ZBE · συναμφοτέρος ἄρα ἡ ὑπὸ ΔAB , ABE συναμφοτέρω τῇ ὑπὸ ZBE , ZEB , τουτέστιν ἐξωτερικῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔZE , τριγώνου τοῦ ZBE ἔστιν ἴσα. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $\Gamma\Delta$ ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου ἐστί, διὰκται δὲ ἀπὸ τοῦ σαμείου ἀφῆς τοῦ Δ ἡ ΔB τεμνέουσα τὸν κύκλον, ἑσσεῖται γωνία ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔAB ἴσα· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓEZ τῇ ὑπὸ EBA ἔστιν ἴσα· καὶ συναμφοτέρος ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΓEZ , $\Gamma\Delta Z$ τῇ ὑπὸ ΔZE ἔστιν ἴσα· καὶ δέδεικται παρ' ἡμῶν ἐν τοῖς Περὶ τετραπλεύρων, ὅτι εἴ κα μεταξὺν δύο ἴσων εὐθειῶν τεμνομένων, οἷον τῶν $\Gamma\Delta$, ΓE , δύο εὐθεῖαι ἀχθέωντι τεμνόμεναι, οἷον αἱ ΔZ , EZ , γωνία δὲ ἡ ὑπὸ τούτων περιεχομένη, ὥς ἡ ποτὶ τὸ Z , συναμφοτέρω τῇ ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν περιεχομένη, ὥς αἱ ποτὶ τὰ E , Δ σαμεῖα ἴσα ἔστιν, ἃ ἐπιζευγνυμένα ἐκ τοῦ σαμείου ὁδοῖ που αἱ δύο εὐθεῖαι συμβαλέονται ἐπὶ τὸ σαμεῖον ὁδοῖ που αὗται τεμνέονται ἀλλήλας, ὥς ἡ ΓZ εὐθεῖα, ἑκατέρω τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, ὥς αἱ $\Gamma\Delta$, ΓE ἔστιν ἴσα· ἡ ΓZ εὐθεῖα ἄρα τῇ $\Gamma\Delta$ ἔστιν ἴσα καὶ γω-



12

Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς ἡμικυκλίου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ, ἀχθῶσι δὲ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο εὐθεῖαι πρὸς τὰ ἀπέναντι αὐτῶν πέρατα τῆς διαμέτρου τεμνόμεναι, ἡ ἐκ τοῦ ἐκτὸς σημείου πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ἀχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα μέχρι τῆς διαμέτρου θὰ εἶναι πρὸς αὐτὴν κάθετος.

Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ AB σημεῖον δὲ τι ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ I καὶ ἐκ τοῦ I ᾧς ἀχθῶσι δύο ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ κατὰ τὰ σημεία A, E καὶ ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς πρὸς τὰ ἀπέναντι πέρατα τῆς διαμέτρου τὰ A, B αἱ εὐθεῖαι EA, AB , τεμνόμεναι κατὰ τὸ Z καὶ ἀφοῦ ἀχθῇ ἡ IZ ᾧς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου H · λέγω, ὅτι ἡ εὐθεῖα IH εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον AB .

Διότι ᾧς ἐπιζευχθῶσιν αἱ AA, EB . Ἐπειδὴ λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον AB ἡ γωνία AB εἶναι ὀρθή, αἱ ὑπόλοιποι δύο γωνίαι AB, BA ἰσοῦνται μὲ μίαν ὀρθήν· εἶναι δὲ καὶ ἡ γωνία AB ἴση μὲ μίαν ὀρθήν· ᾧς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ κοινὴ BE · τὸ ἄθροισμα ἐπομένως τῶν γωνιῶν $AB + BE = BE + EB =$ πρὸς τὴν ἑξωτερικὴν γωνίαν ZE τοῦ τριγώνου BE . Καὶ ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα IA εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἔχει δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου ἐπαφῆς A ἡ χορδὴ AB , θὰ εἶναι ἡ γωνία $IAB = AB$ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους εἶναι καὶ γωνία $IEZ = BA$ · τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $IEZ + IAZ = ZE$ καὶ ἔχομεν ἀποδείξει εἰς τὴν πραγματείαν μας Περὶ τετραπλεύρων ὅτι, ἐὰν μεταξὺ δύο ἴσων εὐθειῶν τεμνομένων, ὡς π.χ. τῶν IA, IE , ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὡς αἱ IZ, EZ καὶ ἡ ὑπὸ τούτων περιεχομένη γωνία, ὡς ἡ πρὸς τὸ Z , ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρὸς τὰ σημεία E, A γωνιῶν, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου ὅπου αὗται τέμνονται, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα IZ , ἰσοῦται πρὸς ἐκάστην

νία ἡ ὑπὸ $\Gamma Z \Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma \Delta Z$, τουτέστι τῇ ὑπὸ $\Delta A H$ · γωνίαι δὲ αἱ ὑπὸ $\Gamma Z \Delta$, $\Delta Z H$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· συναμφοτέρως ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta A H$, $\Delta Z H$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσα ἐστί· λοιπαὶ ἄρα γωνίαι τετραπλεύρου τοῦ $A \Delta Z H$, αἱ ὑπὸ $A \Delta Z$, $A H Z$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι ἐντί· ἔστι δὲ γωνία ἡ ὑπὸ $A \Delta B$ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $A H \Gamma$ μιᾷ ὀρθῇ ἴσα ἐστί· ἔστιν ἄρα εὐθεῖα ἡ ΔH διαμέτρῳ τῇ $A B$ ποτ' ὀρθάς· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

ιγ'

Εἴ κα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλήλας μὴ ποτ' ὀρθάς ἢ, ἡ μὲν διάμετρος ἡ δὲ οὐ, ἀχθέωντι δὲ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου εὐθεῖαι ποτ' ὀρθάς τῇ ἄλλῃ εὐθείᾳ, αἱ ἀπολαφθεῖσαι ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ἐντί.

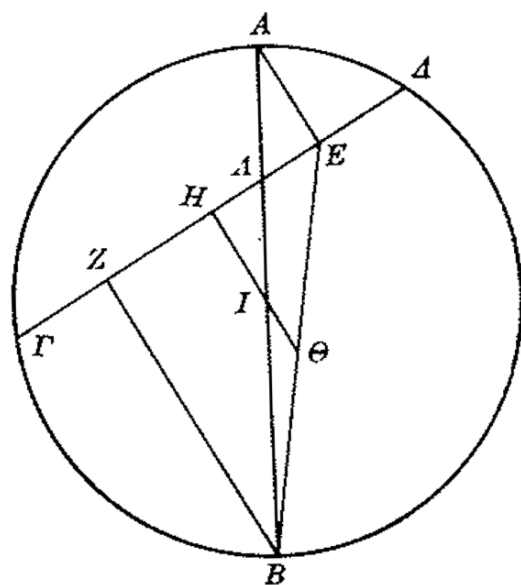
Ἐστω κύκλος ὁ $A B \Gamma$ καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι τεμνέουσαι ἀλλήλας μὴ ποτ' ὀρθάς αἱ $A B$, $\Gamma \Delta$, ἂν ἡ $A B$ διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου τῶν A , B ἀχθῶσαν τῇ $\Gamma \Delta$ ποτ' ὀρθάς εὐθεῖαι αἱ $A E$, $B Z$ · φανερὸν δὲ, αἱ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου ἀπολαφθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΓZ , ΔE ἴσαι ἀλλήλαις ἐντί.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $E B$ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ I τῇ $\Gamma \Delta$ ἀχθῶ ποτ' ὀρθάς εὐθεῖα ἡ $I H$ καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλέτω τῇ $E B$ κατὰ τὸ Θ σημεῖον.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ $I H$ παρὰ τὰν $A E$ ἢ, ἡ δὲ $B I$ τῇ $I A$ ἴσα, εὐθεῖα ἄρα ἡ $B \Theta$ τῇ ΘE ἔστιν ἴσα. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ $B Z$ παρὰ τὰν ΘH ἢ, εὐθεῖα ἄρα ἡ $Z H$ εὐθείᾳ τῇ $H E$ ἔστιν ἴσα· ἔστι δὲ καὶ ἡ $H \Gamma$ τῇ $H \Delta$ ἴσα· κοινὰ ἀφαιρήσθω ἡ $Z H$, τουτέστιν ἡ $H E$ · λοιπὰ ἄρα ἡ $Z \Gamma$ λοιπῇ τῇ $E \Delta$ ἔστιν ἴσα· φανερόν οὖν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'

Εἴ κα ἐν ἀμικνυκλίῳ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου δύο ἴσα τμήματα λαφθέωντι καὶ ἀπὸ τούτων ἀμικνύκλια ἐντὸς γραφέωντι, γραφῇ δὲ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς διαμέτρου ἀμικνύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος οὗ διάμετρος συναμφοτέρως ἡ ἀπὸ τοῦ



τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, ὥς εἶναι αἱ $ΓΔ$, $ΓΕ$. ἡ εὐθεῖα ἄρα $ΓΖ = ΓΔ$ καὶ ἡ γωνία $ΓΖΔ = ΓΔΖ = ΔΑΗ$. τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν γωνιῶν $ΓΖΔ + ΔΖΗ = 2$ ὀρθάς· καὶ τὸ ἄθροισμα ἐπομένως $ΔΑΗ + ΔΖΗ = 2$ ὀρθάς· αἱ ἄλλαι ἄρα γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου $ΑΔΖΗ$, αἱ $ΑΔΖ + ΑΗΖ = 2$ ὀρθάς· εἶναι δὲ ἡ γωνία $ΑΔΒ = 1$ ὀρθήν· καὶ ἡ γωνία ἄρα $ΑΗΓ = 1$ ὀρθήν· εἶναι ἄρα ἡ εὐθεῖα $ΓΗ$ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον $ΑΒ$. ἀπεδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

13

Ἐὰν εἰς κύκλον δύο εὐθεῖαι τέμνωνται οὐχὶ καθέτως καὶ ἡ μία εἶναι διάμετρος ἡ δὲ ἄλλη ὄχι, ἀχθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν, τὰ λαμβανόμενα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τμήματα εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓ$ καὶ εἰς αὐτὸν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι οὐχὶ καθέτως αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ $ΑΒ$ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῶν $Α$, $Β$ ἄς ἀχθῶσι κάθετοι αἱ $ΑΕ$, $ΒΖ$. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου λαμβανόμενα τμήματα τὰ $ΓΖ$, $ΔΕ$ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

Διότι ἄς ἀχθῇ ἡ $ΕΒ$ καὶ ἀπὸ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ $Ι$ ἄς ἀχθῇ ἡ $ΙΗ$ κάθετος πρὸς τὴν $ΓΔ$ καὶ ἐκβληθεῖσα ἄς συναντήσῃ τὴν $ΕΒ$ εἰς τὸ σημεῖον $Θ$.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα $ΙΗ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΑΕ$, ἡ δὲ $ΒΙ = ΙΑ$, ἡ εὐθεῖα ἄρα $ΒΘ = ΘΕ$. Πάλιν, ἐπειδὴ ἡ $ΒΖ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΘΗ$, ἡ εὐθεῖα ἄρα $ΖΗ = ΗΕ$. εἶναι δὲ καὶ ἡ $ΗΓ = ΗΔ$. ἄς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἡ $ΖΗ = ΗΕ$. ἡ ὑπόλοιπος ἄρα ἡ $ΖΓ$ εἶναι πρὸς τὴν ὑπόλοιπον τὴν $ΕΔ$ ἴση· εἶναι λοιπὸν φανερόν τὸ προτεθέν.

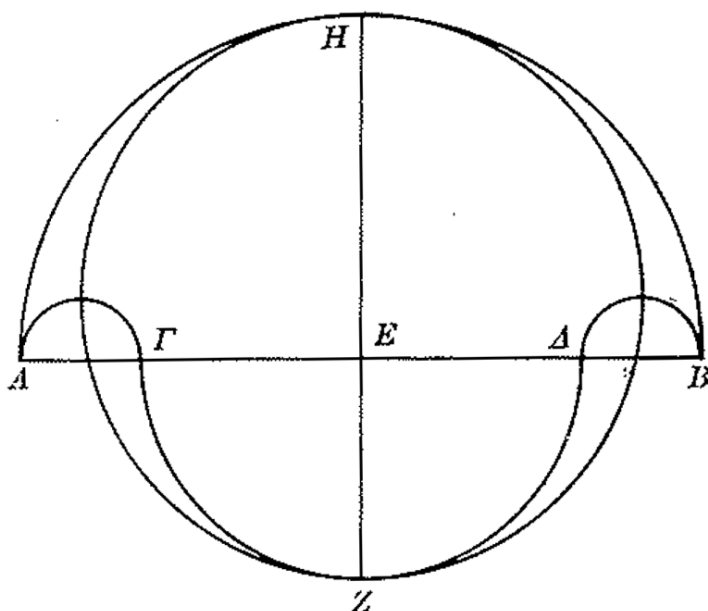
14

Ἐὰν εἰς ἡμικύκλιον ληφθῶσι δύο ἴσα τμήματα ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου καὶ ἀπὸ τούτων γραφῶσιν ἐντὸς δύο ἡμικύκλια, γραφῇ δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τῆς διαμέτρου ἡμικύκλιον ἐκτός, ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τοῦ

κέντρου τοῦ ἀμικυκλίου καὶ ἃ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἐκτός, χωρὶς τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἀμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλεῖσθω, ἴσος ἐστίν.

Ἐστω ἀμικύκλιον, οὗ διάμετρος ἃ AB καὶ ἀπὸ τῶν περάτων τῆς διαμέτρου τῶν A, B δύο τμήματα ἴσα ἀλλήλοις λελάφθω τὰ AG, BD , γεγραφθῶ δὲ ἀπὸ τῶν τμαμάτων δύο ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τοῦ $ΓΔ$ γεγραφθῶ ἀμικύκλιον ἐκτός, διὰ κέντρου δὲ τοῦ ἀμικυκλίου τοῦ E διαμέτρῳ τῇ AB ἄχθῳ ποτ' ὁρθὰς εὐθεῖα ἃ EZ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H σαμεῖον· φανὶ δὴ, ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἃ ZH χωρὶς τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἀμικυκλίων, ὅπερ σελήνιον καλεῖσθω, ἴσος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὰ ἃ $ΔΓ$ δίχα τέτταται κατὰ τὸ E σαμεῖον ποτίκεται δὲ αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἃ $ΓΑ$, τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ποτικεμένης τῆς $ΓΑ$ τὰ συναμφοτέρω τετραγῶνα διπλασίονα ἐντὶ τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἀμισείας τῆς



$ΔΕ$ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΑ$ τετραγώνου. ἐστὶ δὲ ἃ ZH τῇ $ΔΑ$ ἴσα· ἐστὶν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ZH, ΓΑ$ διπλασίονα τοῦ τε ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΑ$. καὶ ἐπεὶ ἃ AB τῆς $ΑΕ$ διπλασίον ἐστὶ καὶ ἃ $ΓΔ$ τῆς $ΔΕ$, ἴσοσύνται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $AB, ΓΔ$ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΔΕ, ΕΑ$ τετραπλασίονα, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν $ZH, ΓΑ$ διπλασίονα· κύκλοι ἄρα, ἂν διαμέτροι αἱ $AB, ΔΓ$ εὐθεῖαι κύκλων, ἂν διαμέτροι αἱ $ZH, ΓΑ$ διπλασίονες ἐντί· ἀμικύκλια ἄρα ἂν διαμέτροι αἱ $AB, ΔΓ$ εὐθεῖαι κύκλων, ἂν διαμέτροι αἱ $ZH, ΓΑ$ ἴσοι ἐντί· κοινὸν ἀφαιρήσθω κύκλος, οὗ διάμετρος ἃ $ΑΓ$, τουτέστι δύο ἀμικύκλια, ὧν διαμέτροι αἱ $ΑΓ, ΔΒ$ · λοιπὸν ἄρα χωρίον, τὸ ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν ἀμικυκλίων περιεχόμενον, ὅπερ σελήνιον καλεῖται, κύκλῳ οὗ διάμετρος ἃ ZH ἴσον ἐστίν· ὁμολον οὖν τὸ προτεθέν.

ληφθέντος ἡμικυκλίου καὶ τοῦ ἐκτὸς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῶν τόξων ὅλων τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἄς κληθῇ σελήνιον (μηνίσκος σελήνης).

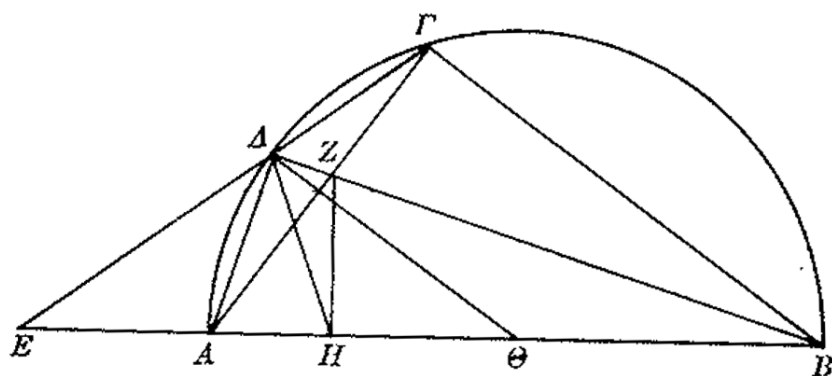
Ἐστω ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου διάμετρος ἡ AB καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῶν A, B ἄς ληφθῶσι δύο ἴσα μεταξύ των τμήματα τὰ AI, BI , ἄς γραφῶσι δὲ ἀπὸ τῶν τμημάτων δύο ἡμικύκλια ἐντὸς καὶ ἀπὸ τοῦ ἄλλου τμήματος ἄς γραφῇ ἡμικύκλιον ἐκτὸς, διὰ τοῦ κέντρου δὲ E τοῦ ἡμικυκλίου ἄς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον AB ἢ EZ καὶ ἄς ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ σημείου H . λέγω, ὅτι ὁ κύκλος τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ ZH ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῶν τόξων ὅλων τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον ἄς κληθῇ σελήνιον.

Διότι, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ AI τέμνεται εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ E σημεῖον πρόσκειται δὲ εἰς αὐτὴν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ EA θὰ εἶναι $AI^2 + EA^2 = 2(IE^2 + EA^2)$, (Εὐκλ. II 10). Εἶναι δὲ ἡ $ZH = AI$ θὰ εἶναι ἄρα $ZH^2 + EA^2 = 2(IE^2 + EA^2)$, (1). Καὶ ἐπειδὴ ἡ $AB = 2EA$ καὶ ἡ $AI = EA$ θὰ εἶναι $AB^2 + AI^2 = 4(EA^2 + IE^2) = 4(IE^2 + EA^2)$, (ἐκ τῆς 1) οἱ κύκλοι ἄρα τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ AB, AI εἶναι διπλάσιοι τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ZH, EA . τὰ ἡμικύκλια ἄρα τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ AB, AI εἶναι ἴσα πρὸς τοὺς κύκλους τῶν ὁποίων διάμετροι εἶναι αἱ ZH, EA . ἄς ἀφαιρεθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ AI , δηλ. δύο ἡμικύκλια διαμέτρων AI, BI . τὸ ὑπόλοιπον ἄρα σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τόξων ἡμικυκλίων, τὸ καλούμενον σελήνιον, εἶναι ἴσον πρὸς κύκλον τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ZH . εἶναι λοιπὸν φανερὸν τὸ προτεθέν.

ΙΕ'

Ἐστω ἀμικύκλιον τὸ AB καὶ ἡ AG πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου, τεινῶσθω δὲ περιφέρεια ἡ AG δίχα κατὰ τὸ Δ , ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ $ΓΔ$ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ E καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σαμείου διάχθω ἡ $ΔB$ τεμνέουσα πλευρὰν τὴν AG κατὰ τὸ Z καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἄχθω τῇ AB ποτ' ὀρθὰς ἡ ZH · φανὶ δὴ, εὐθεῖα ἡ EH τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $ΓB$ καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σαμεῖον καὶ ἄχθωσαν αἱ $\Theta\Delta$, ΔH , $A\Delta$ εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν γωνία ἡ ὑπὸ $ABΓ$ ὑποδιπλασιασματική ὀρθῆς ἐστὶ, γωνία ἡ ὑπὸ $ΓB\Delta$, τουτέστι ἡ ὑπὸ $\Delta B A$ ὑποπενταπλασία ὀρθῆς ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\Theta A$ ὑποδιπλασιασματική ὀρθῆς ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ἐν δυοῖς τριγώνοις τοῖς $ΓBZ$, HBZ δύο γωνίαι αἱ ποτὶ τῷ B ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, ὀρθαὶ δὲ αἱ ποτὶ τὰ



H , Γ σαμεῖα, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἡ BZ , ἴσσεῖται ἄρα καὶ βάσεις ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ BH ἴσα. Πάλιν ἐπεὶ ἐν δυοῖς τριγώνοις τοῖς $ΓB\Delta$, $HB\Delta$ δύο πλευραὶ αἱ $ΓB$, BH ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, γωνίαι δὲ αἱ ποτὶ τὸ B ἴσαι, κοινὰ δὲ πλευρὰ ἡ $B\Delta$, ἴσσεῖται ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΓ\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $BH\Delta$, τουτέστιν ἐπιπέμπτω ὀρθῆς ἴσα· ἐστὶ δὲ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ $ΒΓ\Delta$, $BH\Delta$ γωνιῶν, γωνία τῇ ἐκτός τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ $ΒA\Delta\Gamma$, τουτέστι τῇ $\Delta A E$ ἴσα· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta A B$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta H A$ ἴσιν ἴσα, καὶ πλευρὰ ἡ ΔA τῇ ΔH . καὶ ἐπεὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta\Theta H$ ὑποδιπλασιασματική ὀρθῆς ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta H \Theta$ ἐπίπεμπος ὀρθῆς, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Theta\Delta H$ ὑποδιπλασιασματική ὀρθῆς ἐστὶν· πλευρὰ ἄρα ἡ ΔH πλευρᾷ τῇ $H\Theta$ ἴσιν ἴσα. πάλιν, ἐπεὶ γωνία ἡ ὑπὸ $A\Delta E$ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τετραπλεύρου τοῦ $A\Delta\Gamma B$ ἐκτός ἐστὶ, ἴσσεῖται ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ $A\Delta E$ γωνία τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἴσα· ἐστὶ δὲ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ὑποδιπλασιασματική ὀρθῆς· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $A\Delta E$ γωνία τῇ ὑπὸ $H\Delta\Theta$ ἴσιν ἴσα, καὶ ἐπεὶ ἐν δυοῖς τριγώνοις τοῖς $E\Delta A$, $\Theta\Delta H$ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $E\Delta A$, $\Delta A E$ δυοῖς ταῖς ὑπὸ $\Theta\Delta H$, $\Delta H \Theta$ ἑκατέρω ἑκατέ-

15

Ἐστω τὸ ἡμικύκλιον AB καὶ ἡ AG πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου, ἃς τμηθῇ δὲ τὸ τόξον AG εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ A , ἀφοῦ δὲ ἐπιζευχθῇ ἡ GA ἃς ἐκβληθῇ αὕτη ἕως τὸ E καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου A ἃς ἀχθῇ ἡ AB τέμνουσα τὴν πλευρὰν AG κατὰ τὸ Z καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἃς ἀχθῇ κάθετος πρὸς τὴν AB ἡ ZH . λέγω, ὅτι ἡ EH ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Διότι ἃς ἐπιζευχθῇ ἡ GB καὶ ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον Θ , καὶ ἃς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΘA , ΔH , AA .

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ γωνία $ABG = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς θὰ εἶναι ἡ γωνία

$GBA = \Delta BA = \frac{1}{5}$ ὀρθῆς· ἡ γωνία ἄρα $\Delta \Theta A = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς. Καὶ ἐ-

πειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα GBZ , HBZ αἱ δύο πρὸς τὸ B γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι δὲ αἱ πρὸς τὰ σημεία H , G γωνίαι ὀρθαί, κοινὴ δὲ ἡ πλευρὰ BZ , θὰ εἶναι ἄρα ἡ βάσις BG ἴση πρὸς τὴν βάσιν BH . Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα GBA , HBA δύο πλευραὶ αἱ GB , BH εἶναι ἴσαι μεταξύ των, αἱ δύο δὲ γωνίαι πρὸς τὸ B εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ πλευρὰ BA εἶναι κοινὴ, θὰ εἶναι ἄρα ἡ γωνία

$BGA = BHA = \frac{6}{5}$ ὀρθῆς· $\left(\Delta GA = \frac{1}{2} \Delta \Theta A = \Delta BA = \frac{1}{5} \text{ ὀρθῆς} \right)$.

εἶναι δὲ ἐκάστη τῶν γωνιῶν BGA , BHA ἴση πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου $BAG\Delta$, τὴν ΔAE . (διότι $BGA + \Delta AB = 2$ ὀρ. καὶ $\Delta AB + \Delta AE = 2$ ὀρ.)· ἡ γωνία ἄρα $\Delta AB = \Delta HA$ καὶ ἡ πλευρὰ $AA =$ πλευρὰν ΔH . Καὶ ἐπειδὴ ἡ

γωνία $\Delta \Theta H = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς καὶ ἡ γωνία $\Delta H \Theta = \frac{6}{5}$ ὀρθῆς, ἡ γωνία

ἄρα $\Theta \Delta H = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς· ἡ πλευρὰ ἄρα $\Delta H =$ πλευρὰν $H \Theta$. Πάλιν,

ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔAE εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ εἰς τὸν κύκλον τετραπλεύρου $AAGB$ θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΔAE ἴση πρὸς τὴν ABG ($GBA + \Delta AG = 2$ ὀρ. καὶ $\Delta AE + \Delta AG = 2$ ὀρ.)· εἶναι δὲ ἡ γωνία $ABG = \frac{2}{5}$ ὀρθῆς· ἡ γωνία ἄρα $\Delta AE = H \Delta \Theta$. Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰ δύο τρί-

γωνα τὰ EAA , $\Theta \Delta H$ αἱ δύο γωνίαι EAA , ΔAE εἶναι πρὸς τὰς δύο

ρα ἴσαι ἐντί, βάσις δὲ ἡ ΔA βάσει τῇ ΔH ἴσα, πλευρὰ ἄρα ἡ EA πλευρᾷ τῇ ΘH ἴσα ἐστίν. κοινὰ ποτικείσθω ἡ AH · εὐθεῖα ἄρα ἡ EH εὐθεῖα τῇ $A\Theta$, τουτέστι τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσα ἐστὶ· δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Πόρισμα

Ἐκ τούτου δὴ φανερόν, ὅτι εὐθεῖα ἡ ΔE τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἴσα. ἐπεὶ γὰρ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta A E$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta H \Theta$ ἴσα ἐστὶ, ἐσσεῖται καὶ πλευρὰ ἡ $\Delta \Theta$ πλευρᾷ τῇ ΔE , τουτέστι τῇ $A\Theta$ ἴσα.

Πόρισμα

Καὶ ἔτι δῆλον, ὅτι εὐθεῖα ἡ $A\Gamma$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Δ σαμεῖον· τμήμα δὲ τὸ ΔE τὸ μείζον ἐστὶ, ἐπεὶ ἡ EA πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ $\Delta \Gamma$ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγραφομένων.

$\Theta\Delta H$, $\Delta H\Theta$ ἀντιστοιχῶς, ἡ βάσις δὲ ΔA = βάσιν ΔH , ἡ πλευρὰ ἄρα EA θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ΘH · ὥς προστεθῇ καὶ εἰς τὰς δύο ἡ εὐθεῖα AH · ἡ εὐθεῖα ἄρα $EH = A\Theta$, τουτέστιν ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· ἐδείχθη λοιπὸν τὸ προτεθέν.

Πόρισμα (1ον)

Ἐκ τούτου εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔE εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Διότι, ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Delta AE = \Delta H\Theta$ θὰ εἶναι καὶ ἡ πλευρὰ $\Delta\Theta$ = πλευρὰν ΔE .

Πόρισμα (2ον)

Καὶ ἀκόμη εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ εὐθεῖα AF ἔχει τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ σημεῖον Δ · τμήμα δὲ τὸ ΔE εἶναι τὸ μεγαλύτερον, ἐπειδὴ ἡ EA εἶναι πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἡ ΔF πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν κύκλῳ ἐγγραφομένων (Εὐκλ. XIII, 9).

BIBLIOGRAPHY

- [1] *Nizze, Ernst*: Archimedes von Syrakus Vorhandene Werke, Stralsund 1824.
- [2] *Heiberg, J. L.*: Archimedis opera omnia, vol. 3, B. G. Teubner, Leipzig 1910—13—15.
- [3] *Eecke, Paul ver*: Les oeuvres complètes d' Archimède, vol. 2, Vaillant-Carmanne, Liège, 1960.
- [4] *Heath, T.L.*: The works of Archimedes. Dover Publications, INC. New York.
- [5] *Steinschneider, Moritz*: Die arabischen Übersetzungen aus dem griechischen, Akademische Druck — U. Verlagsanstalt, Graz — Austria 1960.

