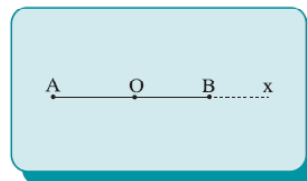


2.10 Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο

Έστω O σημείο του επιπέδου. Τότε για κάθε σημείο A , υπάρχει μοναδικό σημείο B τέτοιο, ώστε το O να είναι το μέσο του AB . Πράγματι αρκεί να προεκτείνουμε το τμήμα AO και στην ημιευθεία Ox να πάρουμε τμήμα $OB = OA$ (σχ.15). Το σημείο B λέγεται **συμμετρικό** του A ως προς O . Προφανώς και το A είναι συμμετρικό του B ως προς το O . Τα σημεία A και B λέγονται **συμμετρικά** σημεία ως προς **κέντρο συμμετρίας** το σημείο O . Παρατηρούμε ότι τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.



Σχήμα 15

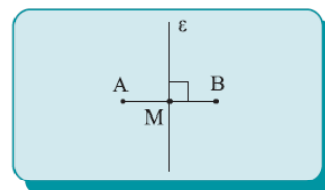
• Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος – Σημεία συμμετρικά ως προς άξονα

Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB και διέρχεται από το μέσο του λέγεται **μεσοκάθετος** του ευθύγραμμου τμήματος AB (σχ.28).

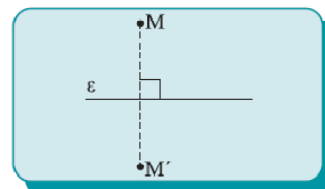
Τα σημεία A, B λέγονται **συμμετρικά** ως προς την ευθεία ε . Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας**.

Για να βρούμε επομένως το συμμετρικό ενός σημείου M ως προς μια ευθεία ε , φέρουμε το κάθετο τμήμα από το M προς την ευθεία και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το άκρο M' της προέκτασης αυτής είναι το συμμετρικό του M (σχ.29).

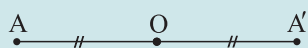
Το συμμετρικό ως προς την ευθεία ε κάθε σημείου της ορίζεται να είναι το ίδιο το σημείο.



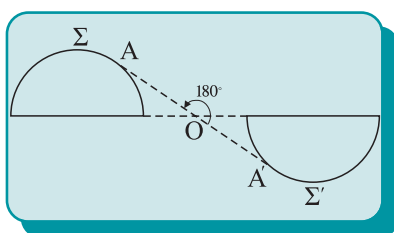
Σχήμα 28



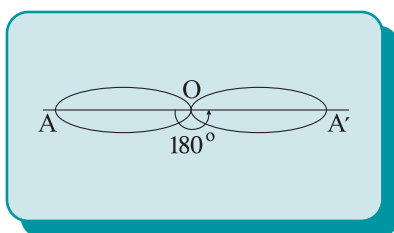
Σχήμα 29



Σχήμα 37



Σχήμα 38



Σχήμα 39

Συμμετρικά σχήματα

3.8 Κεντρική συμμετρία

Στην §2.10 είδαμε πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο O (σχ.37).

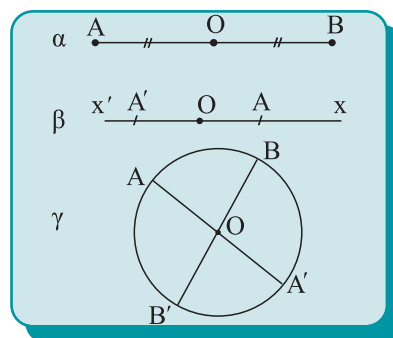
Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O (σχ.38), αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το O και αντίστροφα. Το σημείο O λέγεται **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το O σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή ένα σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς το O , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **κεντρική συμμετρία**.

Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ , με κέντρο συμμετρίας το O (σχ.39), κατά 180° γύρω από το O , θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

ΤΡΙΓΩΝΑ

Από τα γνωστά μας, μέχρι τώρα σχήματα:

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του (σχ.40α).
- Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της (σχ.40β).
- Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του (σχ.40γ).



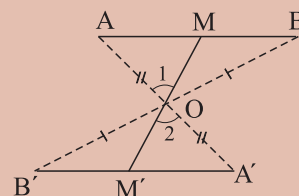
Σχήμα 40

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό.

Απόδειξη

Έστω ένα τμήμα AB (σχ.41), σημείο O που δεν ανήκει στην ευθεία AB και A', B' τα συμμετρικά των A, B ως προς το O αντίστοιχα. Επειδή $OA' = OA$, $OB' = OB$ και $\hat{A'OB'} = \hat{AOB}$, τα τρίγωνα AOB και $A'OB'$ είναι ίσα, οπότε $A'B' = AB$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα AB και $A'B'$ είναι συμμετρικά ως προς το O . Έστω σημείο M του AB και M' η τομή της MO με το $A'B'$. Από την προηγούμενη ιδιότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A'}$, οπότε τα τρίγωνα AOM και $A'OM'$ είναι ίσα γιατί έχουν $OA' = OA$, $\hat{A} = \hat{A'}$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Επομένως $OM' = OM$, που σημαίνει ότι το M' είναι συμμετρικό του M .



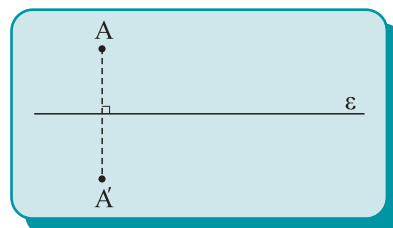
Σχήμα 41

Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου M' του $A'B'$ είναι σημείο του AB . Άρα τα $AB, A'B'$ είναι συμμετρικά ως προς το O .

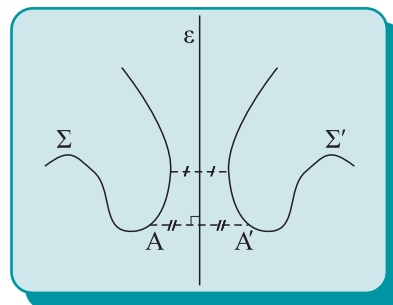
3.9 Αξονική συμμετρία

Στην §2.14 είδαμε πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε (σχ.42).

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε , αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς την ε , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **αξονική συμμετρία**. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε , τότε η ε χωρίζει

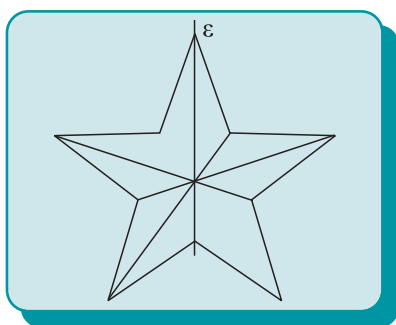


Σχήμα 42



Σχήμα 43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

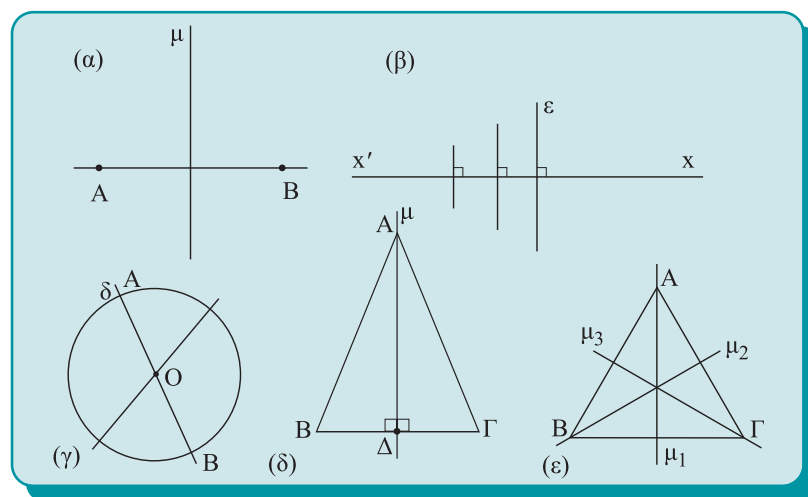


Σχήμα 44

το σχήμα (σχ.44) σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε , τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.

Από τα γνωστά μας σχήματα

- Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ε (σχ.45α).
- Η ευθεία $x'x$ έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία $\varepsilon \perp x'x$ και την ίδια τη $x'x$ (σχ.45β).
- Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του AB (σχ.45γ).
- Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους $A\Delta$ (σχ.45δ).
- Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του (σχ.45ε).



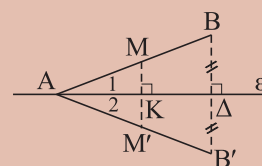
Σχήμα 45

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ε και ένα τμήμα AB του οποίου το ένα άκρο A είναι σημείο της ε . Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του AB ως προς την ε είναι το τμήμα AB' ίσο με το AB , όπου B' το συμμετρικό του B ως προς την ε .

Απόδειξη

Το συμμετρικό του A ως προς την ε είναι το ίδιο το A , αφού το A είναι σημείο της ε . Επειδή η ε είναι μεσοκάθετος του BB' , είναι $AB' = AB$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABB' η $A\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Έστω σημείο M του AB . Φέρουμε $MK \perp \varepsilon$ η οποία όταν προεκταθεί τέμνει το AB' στο M' . Στο τρίγωνο AMM' η AK είναι ύψος και διχοτόμος (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή $KM' = KM$, οπότε το M' είναι συμμετρικό του M . Όμοια αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό κάθε σημείου του AB' είναι σημείο του AB . Άρα τα AB , AB' είναι συμμετρικά ως προς την ε .



Σχήμα 46

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων: Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.
2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο O . Αν A' , B' , Γ' είναι τα συμμετρικά των A , B , Γ ως προς το κέντρο O αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ είναι συμμετρικά ως προς το O και ίσα.
3. Αν $x'\hat{A}y'$ είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο O , εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί ότι $x'\hat{A}y' = x\hat{A}y$.

4. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς την ευθεία $B\Gamma$ είναι τρίγωνο ίσο με το $AB\Gamma$.
5. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.
6. Έστω ε , ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο O και ένα τυχαίο σημείο M . Αν M' είναι το συμμετρικό του M ως προς ε και M'' το συμμετρικό του M' ως προς ε' , τότε να αποδείξετε ότι:
 - i) $OM = OM''$,
 - ii) τα σημεία M , O , M'' είναι συνευθειακά.

