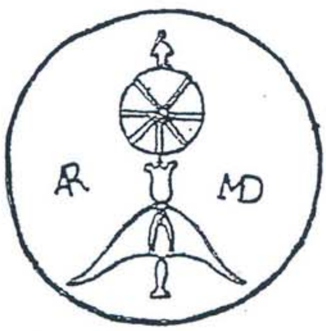
Αττική λευκή Κύλικα
με τον Απόλλωνα κιθαρωδό και την Κορωνίδα.
480-470 πΧ. Μουσείο Δελφών.

5. Τα Κέντρα βάρους του Αρχιμήδη
Το θεώρημα του Πάππου

Στην αρχαία ελληνική γεωμετρία όλα τα στοιχεία της, όπως τα σημεία, οι ευθείες και οι επιφάνειες, θεωρούνταν ως άϋλα και με μηδενικές διαστάσεις πάχους.

Τη φύση αυτών των στοιχείων την όρισαν οι Φιλόσοφοι-γεωμέτρες μετά την μεταξύ τους διαμάχη, κατά την οποία η επ' άπειρον διχοτόμηση ενός ευθυγράμμου τμήματος οδηγεί ή όχι σε ένα μηδενικό σημείο.

Η διαμάχη αυτή, των μέσων του 5ου αι. π.Χ, οδήγησε τελικά σε δύο συμβιβαστικές απόψεις, κατά τις οποίες :



Ο Αρχιμήδης σε Σικελικό νόμισμα.

- Το γεωμετρικό σημείο είναι Άϋλο, Αμερές και Αβαρές, και
- Η επ' άπειρον διχοτόμηση των τμημάτων δεν είναι τερματιζόμενη, ούτε οδηγεί ποτέ σε μηδενικά μέρη, αλλά σε απειροελάχιστα, που πρακτικά είναι μικρότερα του οποιουδήποτε τμήματος, και βέβαια ποτέ άπειρα στο πλήθος. (✱).

Γενικά λοιπόν έγινε αποδεκτό από τους θεωρητικούς γεωμέτρες ότι τα γεωμετρικά σχήματα δεν έχουν υλικότητα και επομένως ούτε βάρος.

Ο Ηρων μάλιστα τονίζει ρητά ότι:

> "... **Το μαθηματικό σώμα προκύπτει μετά από αφαίρεση της υλικότητάς του (αντιτυπίας)...**"
>
> (Ήρωνος "Γεωμετρικά", 1).

Παρόλα αυτά όμως, στα μέσα του 3ου αι. π.Χ, εμφανίζεται ο Αρχιμήδης, με το έργο του "Μηχανικά", να πραγματεύεται τα λεγόμενα **Κέντρα βάρους** των σχημάτων. Από το έργο αυτό διασώθηκε μόνο ένα τμήμα του, με τον μεταγενέστερο τίτλο "Περί επιπέδων Ισορροπιών".

(✱). Τα απειροελάχιστα αυτά μέρη, αν ήταν υλικά, ονομάστηκαν από τον **Δημόκριτο** (~420 πΧ) ως **Άτομα**, ενώ αν ήταν γεωμετρικά ονομάστηκαν ως **Αδιαίρετα** (Ξενοκράτης, Αριστοτέλης "Φυσικά" Ζ).

Εκεί λοιπόν υπάρχουν τα ακόλουθα αξιοπρόσεκτα.

1. Δεν υπάρχει εισαγωγή, όπως στα άλλα έργα του σοφού μας, στην οποία να εξηγεί ποια ανάγκη τον οδήγησε στο να θεωρήσει τα γεωμετρικά σχήματα με βάρος και να αναζητήσει τα αντίστοιχα κέντρα βάρους τους.
2. Στις προτάσεις που διασώθηκαν μελετώνται τα Κέντρα βάρους μερικών μόνο επιπέδων σχημάτων, των οποίων τα εμβαδά θεωρούνται ως βάρη. Η σύγκρισή τους γίνεται μάλλον με ζύγιση πήλινων ομοιωμάτων, ομογενών και ισοπαχών.
3. Εκεί δεν μελετώνται τα κέντρα βάρους υλικών γραμμών (τεθλασμένων, καμπύλων κ.ά), ούτε τα αντίστοιχα των Στερεών (κολούρων κώνων, κωνοειδών εκ περιστροφής κ.λ.π). (*).

Η επαναφορά αυτή της υλικότητας και του βάρους των γεωμετρικών σχημάτων από τον μεγάλο συρακούσιο, πρέπει να υπηρετούσε κάποιες μελετητικές του ανάγκες και όχι μόνο τις μηχανικές του αποδείξεις, όπως αυτές παρουσιάζονται στο έργο του "Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην Έφοδος".

Όσον αφορά δε στην πραγματεία "Περί επιπέδων ισορροπιών", είναι προφανές ότι ο αντιγραφέας της επέλεξε τμήματα μόνο του έργου του Αρχιμήδη, έτσι ώστε να υπηρετήσει τις δικές του διδακτικές ή μελετητικές ανάγκες.

Ήταν αδικία όμως και προς τον μεγάλο σοφό και προς την ιστορία, να μη νοιώσει την ανάγκη να διασώσει τον πρόλογό του, ώστε να φανεί η αιτία επαναφοράς της υλικότητας των γεωμετρικών σχημάτων.

Ατυχία βέβαια ήταν και η απώλεια του υπόλοιπου έργου.

Σήμερα πάντως από την κεντροβαρική αυτή πραγματεία του γεωμέτρη μας σώθηκαν, σε δύο βιβλία, 15 και 10 προτάσεις αντίστοιχα.

(*) Ο Αρχιμήδης είχε συγγράψει ένα έργο με τίτλο "**Μηχανικά**", το οποίο αναφέρεται από τον ίδιο στα έργα του "Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής" και "Οχουμένων", βιβλίο β΄. Είναι πιθανόν ο τίτλος "Επιπέδων ισορροπιών ή Κέντρα βαρών επιπέδων" να ήταν τίτλος επιμέρους κεφαλαίου των Μηχανικών. Το ίδιο μπορεί να συνέβαινε και με τις χαμένες σήμερα πραγματείες του, με τίτλους "Περί Ζυγών" και "Ισορροπίαι".

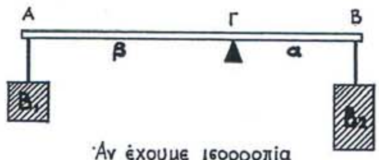
Στο έργο του "Περί μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην Έφοδος" αναφέρει ως γνωστά ήδη τα κέντρα βάρους ευθυγράμμων τμημάτων, πρισμάτων, Κυλίνδρων και Κώνων.

Το γεγονός αυτό βεβαιώνει ότι οι κεντροβαρικές μελέτες και κατακτήσεις του σοφού μας ήταν ευρύτερες από εκείνες που διασώθηκαν στο "Περί Επιπέδων Ισορροπιών".

Τα κυριώτερα από τα στοιχεία των Ισορροπιών είναι τα ακόλουθα

Βιβλίο Α

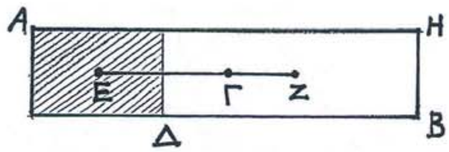
6,7 "Τα σύμμετρα (και ασύμμετρα) μεγέθη ισορροπούν εξαρτημένα σε μήκη αντιστρόφως ανάλογα των βαρών τους."



Αν έχουμε ισορροπία ισχύει $\boxed{\frac{B_1}{B_2}=\frac{\alpha}{\beta}}$

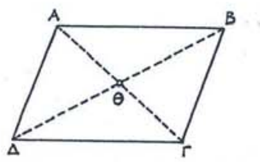
8 "Αν από το μέγεθος ΑΒ, με κέντρο βάρους το Γ, αφαιρεθεί το μέγεθος ΑΔ, με κέντρο βάρους το Ε, τότε του υπολοίπου μεγέθους ΔΗ το κέντρο βάρους Ζ θα είναι συνευθειακό των Ε και Γ και θα ισχύει:

$$\frac{ΓΖ}{ΓΕ}=\frac{\mathbb{B}_{ΑΔ}}{\mathbb{B}_{ΔΗ}}$$



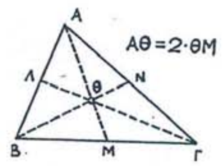
Εδώ ως βάρη των ΑΔ, ΔΗ νοούνται τα αντίστοιχα υλικά εμβαδά.

9 "Το κέντρο βάρους παραλληλογράμμου είναι η τομή των μεσοπαραλλήλων του."



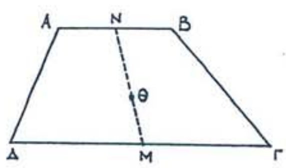
Από αυτό εύκολα προκύπτει ότι το Κ. βάρους είναι η τομή των διαγωνίων του (προτ. 10).

14 "Το κέντρο βάρους τριγώνου είναι η κοινή τομή των διαμέσων του."



Εδώ δεν χρησιμοποιεί τον όρο "Διάμεσος". Εύκολα αποδεικνύεται ότι $Αθ=2\cdot θΜ$. (15). Η απόδειξη αυτή όμως δεν δίνεται (ούτε στα "Στοιχεία"). (*)

15 "Το κέντρο βάρους θ τραπεζίου βρίσκεται επάνω στο τμήμα που ενώνει τα μέσα των παραλλήλων βάσεων, και ισχύει: $\frac{θΝ}{θΜ}=\frac{2Β+β}{2β+Β}$

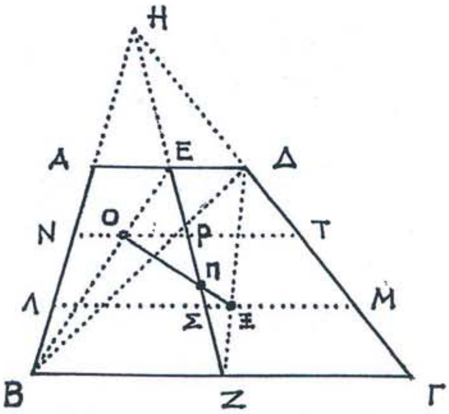


$$\frac{θΝ}{θΜ}=\frac{2\cdot ΔΓ+ΑΒ}{2\cdot ΑΒ+ΔΓ}$$

(*). Ο Αρχιμήδης στην πρόταση 13 αποδεικνύει, με την απαγωγή εις άτοπον και με δύο τρόπους, ότι το Κ. βάρους τριγώνου βρίσκεται πάντα επάνω στις διαμέσους του.

Η απόδειξη για το κέντρο βάρους του τραπεζίου γίνεται κανονικά στηριγμένη στις προτάσεις 8 και 14· στην 8 θεωρεί ως βάρη τα εμβαδά των τριγώνων.
Την απόδειξη αυτή, επειδή είναι εξαιρετική και μικρή και δεν περιέχεται στα σχολικά βιβλία, την δίνουμε αυτούσια.

Το κέντρο βάρους τραπεζίου. (15).



Ο γεωμέτρης μας θεωρεί το τραπέζιο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ των βάσεών του.
Τότε λέει ότι οι ΑΒ, ΖΕ και ΓΔ συντρέχουν στο Η και, αφού τα κέντρα βάρους των ΗΑΔ και ΗΒΓ βρίσκονται στην ΗΖ, σε αυτήν θα βρίσκεται και το κέντρο βάρους της διαφοράς τους· δηλαδή του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
Χωρίζει μετά το ύψος του τραπεζίου σε τρία ίσα μέρη και φέρει παράλληλες πρός τις βάσεις. Τότε το κέντρο βάρους του ΑΒΔ θα είναι το Ο, και του ΔΒΓ το Ξ.
Τότε λέει, κατά την πρόταση 8, το κέντρο βάρους του τραπεζίου θα βρίσκεται και επάνω στην ΟΞ, και επομένως θα είναι το Π.
Ισχύουν τώρα τα ακόλουθα

$\frac{ΟΠ}{ΠΞ} = \frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΔ)}$ (πρότ.8 στον Ζυγό ΟΞ, με βάρη τα εμβαδά (ΒΔΓ), (ΑΒΔ).

Είναι όμως $\frac{ΟΠ}{ΠΞ} = \frac{ΠΡ}{ΠΣ}$ (ομοιότητα) και $\frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΔ)} = \frac{ΒΓ}{ΑΔ}$ (ισοϋψή τρίγωνα).

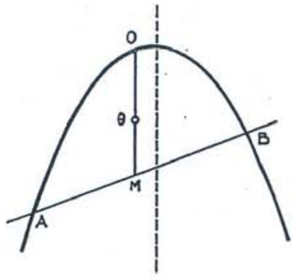
Άρα θα είναι $\frac{ΠΡ}{ΠΣ} = \frac{ΒΓ(=Β)}{ΑΔ(=β)} \Longrightarrow \frac{2\cdot ΠΡ+ΠΣ}{2\cdot ΠΣ+ΠΡ} = \frac{2\cdot Β+β}{2\cdot β+Β}$

Και τελικά $\frac{ΠΕ}{ΠΖ} = \frac{2Β+β}{2β+Β}$ (Είναι $2ΠΡ+ΠΣ=ΠΕ$, $2\cdot ΠΣ+ΠΡ=ΠΖ$).

Βιβλίο Β

Το δεύτερο βιβλίο τώρα των "Επιπέδων ισορροπιών„ ασχολείται μόνο με το κέντρο βάρους των παραβολοειδών τμημάτων· δηλαδή των επιπέδων χωρίων που περικλείονται από μία παραβολή και μία τυχαία χορδή της.
Εκεί τα σημαντικότερα συμπεράσματα του σοφού μας ήταν δύο.

$\boxed{4}$ " Σε κάθε παραβολικό χωρίο το κέντρο βάρους του βρίσκεται επάνω στην διάμετρό του."



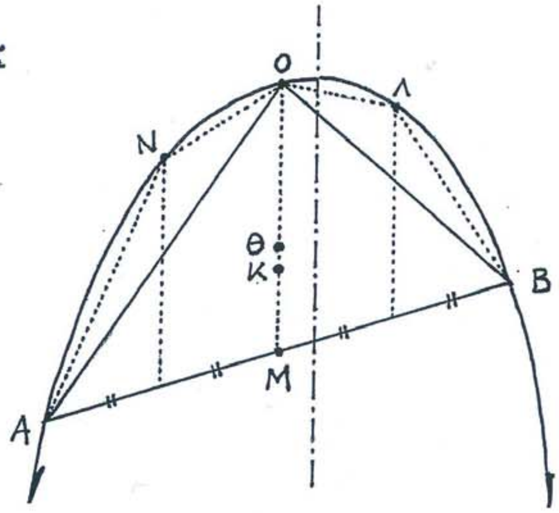
Ως "Διάμετρος" του παραβολικού τμήματος είχε χαρακτηριστεί από παλαιότερα ο γεωμετρικός τόπος (ευθεία) των μέσων των χορδών, των παραλλήλων στη χορδή ΑΒ του τμήματος.

Το σημείο Ο είχε χαρακτηριστεί ως "Κορυφή" του τμήματος και είχε αποδειχθεί ότι η διάμετρος ΟΜ είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής.

$\boxed{8}$ " Το κέντρο βάρους Θ παραβολικού χωρίου διαιρεί τη διάμετρό του ΟΜ σε λόγο $\frac{O\Theta}{\Theta M} = \frac{3}{2}$ ".

Αξιοσημείωτες είναι όμως και οι προτάσεις 2,5,6, στις οποίες θεωρεί το εγγεγραμμένο στο παραβολικό τμήμα ευθύγραμμο χωρίο ΑΝΟΛΒ (και όλα τα ομοίως παραγόμενα, με διπλασιασμό των πλευρών τους), και αποδεικνύει ότι:

$\boxed{2,5,6}$ " Τα κέντρα βάρους Θ και Κ του παραβολικού τμήματος και του εγγεγραμμένου χωρίου ΑΝΟΛΒ έχουν τις ιδιότητες:



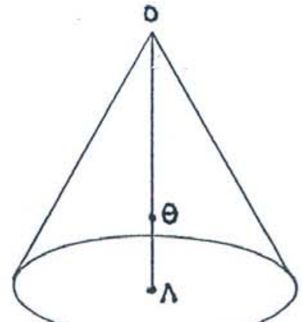
- Βρίσκονται πάντα επάνω στην διάμετρο ΟΜ του τμήματος.
- Το Θ βρίσκεται πλησιέστερα στην κορυφή Ο.
- Το Κ, όσο οι πλευρές του εγγεγραμμένου διπλασιάζονται, ορίζουν με το Θ τμήμα ΚΘ, που διαρκώς μικραίνει. (Δηλαδή τα $K \to \Theta$.) (✱)

(✱). Τις προτάσεις αυτές τις αναφέρουμε, επειδή σ' αυτές υπονοείται η έννοια του ορίου και ακόμα επειδή, για τον τετραγωνισμό του παραβολικού χωρίου, ο σοφός μας εγγράφει πάλι το ίδιο ευθύγραμμο σχήμα και το φαντάζεται στο όριο να καταλαμβάνει όλη την επιφάνεια του χωρίου. Έτσι οδηγείται στο ότι το εμβαδόν του χωρίου αυτού είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ.

Αυτά τα λίγα λοιπόν είναι τα διασωθέντα από τις Κεντροβαρικές εργασίες του Αρχιμήδη. Από άλλη πηγή δεν γνωρίζουμε αν ο ίδιος προσδιόρισε τα κέντρα βάρους των ελλειπτικών ή των υπερβολικών τμημάτων. Ούτε του κυκλικού τμήματος ή έστω του ημικυκλίου.

Τα μόνα που προστέθηκαν σε αυτά είναι εκείνα που έδωσε χωρίς απόδειξη ο ίδιος στα προλεγόμενα των "Μηχανικών θεωρημάτων" του, ότι τα κέντρα βάρους των Πρισμάτων και των Κυλίνδρων είναι προφανώς τα μέσα των αξόνων τους.

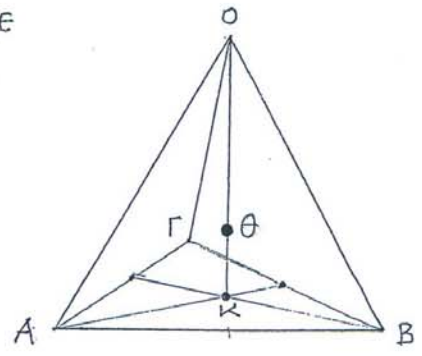
Εκεί όμως δίνει και την καινούργια γνώση ότι:



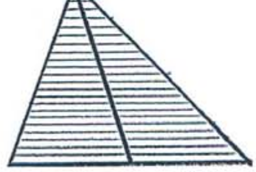
(29) **"Παντός κώνου τό κέντρον ἐστίν τοῦ βάρους ἐπί τοῦ ἄξονος διαιρεθέντος οὕτως, ὥστε τό πρός τῇ κορυφῇ τμῆμα τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ".** (Προλ. Εφόδου, 10).

Δηλαδή το κέντρο βάρους του κώνου είναι το Θ, για το οποίο ισχύει $ΘΟ = 3 \cdot ΘΛ$

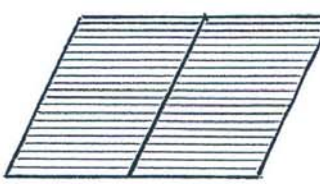
Την πρόταση αυτή θα πρέπει να την εμπνεύστηκε από τη γνώση του κέντρου του κανονικού τετραέδρου. Στο τετράεδρο αυτό ΟΑΒΓ εύκολα αποδεικνύεται ότι, αν Κ είναι τα κέντρα των εδρών, τότε όλες οι ΟΚ συντρέχουν στο Θ και ισχύει ότι $ΟΘ = 3 \cdot ΘΚ$.



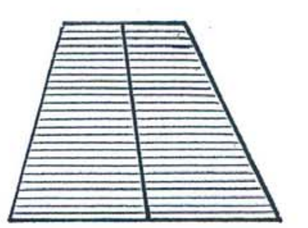
Από όλα τα πιο πάνω γίνεται νομίζω κατανοητός ο τρόπος, με τον οποίο ο σοφός μας εντόπιζε τις ευθείες, πάνω στις οποίες βρισκόταν το κέντρο βάρος των μη συμμετρικών σχημάτων.



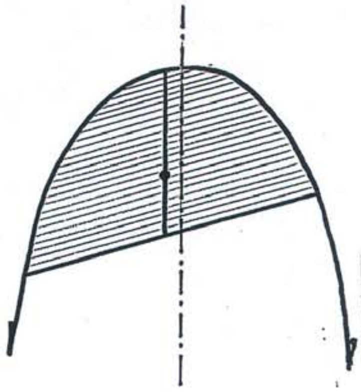
Αυτός φαντάστηκε ότι τα Τρίγωνα, τα Παραλληλόγραμμα, τα Τραπέζια και τα παραβολικά χωρία συντίθενται από ένα άπειρο πλήθος ευθυγράμμων υλικών τμημάτων, των οποίων το κέντρο βάρους είναι το μέσον. (προλ. 4). Έτσι και η γραμμή που συνδέει τα άπειρα αυτά μέσα, θα είναι και η κατοικία των αντίστοιχων κέντρων βάρους.



Μετά τον εντοπισμό του γεωμετρικού τόπου των μέσων, εύρισκε γεωμετρικά το λόγο, στον οποίο το κέντρο βάρους χώριζε το τμήμα του τόπου αυτού.



Έτσι ο γεωμέτρης μας οδηγήθηκε στα κέντρα βάρους των σχημάτων αυτών. Στα τμήματα όμως κύκλου, έλλειψης και υπερβολής, αν και διέθετε τις διαμέτρους τους, φαίνεται ότι δεν κατόρθωσε να προσδιορίσει επάνω τους τη θέση των αντίστοιχων κέντρων βάρους.

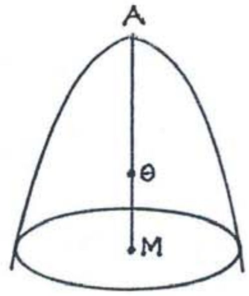


Βέβαια δεν αποκλείεται να τα βρήκε, αλλά να χάθηκαν τα αντίστοιχα κείμενά του.

Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι, αν και δεν δίνει αυτά τα κέντρα βάρους, δίνει στην "έφοδό" του προς τον Ερατοσθένη τα κέντρα βάρους των αντίστοιχων στερεών εκ περιστροφής. Δίνει δηλαδή τα κέντρα βάρους των τμημάτων σφαίρας, ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και παραβολοειδούς εκ περιστροφής. Τα κέντρα των σχημάτων αυτών καθώς και οι σχέσεις, που αυτά υποδιαιρούν τους άξονές τους, φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα της εφόδου του.

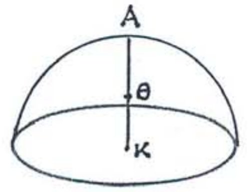
πρότ. 5 Παραβολοειδές εκ περιστροφής

$$A\Theta = 2 \cdot \Theta M$$



προτ. 6 Ημισφαίριο

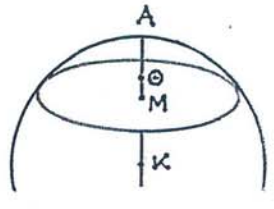
$$\frac{A\Theta}{\Theta K} = \frac{5}{3}$$



προτ. 9 Σφαιρικό τμήμα

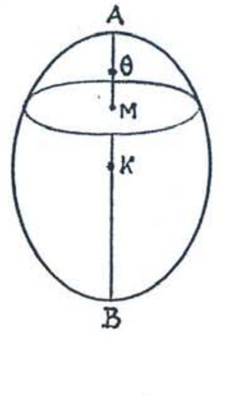
$$\frac{A\Theta}{\Theta M} = \frac{AM+4MB}{AM+2MB} = \frac{8R-3\upsilon}{4R-\upsilon}$$

όπου $\upsilon = AM$.



προτ. 10 Τμήμα Ελλειψοειδούς

$$\frac{A\Theta}{\Theta M} = \frac{AM+4MB}{AM+2MB}$$

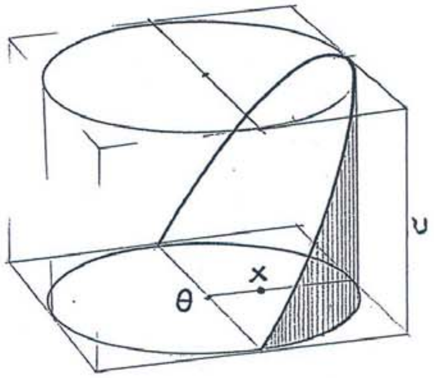


Εδώ πρέπει να κάνουμε μία παρένθεση για να παρουσιάσουμε την άποψή μας, ότι ο σοφός μας γνώριζε και το κέντρο βάρους του ημικυκλίου.

Αυτό το στηρίζουμε στις προτάσεις 12 και 14 της "Εφόδου" του, στις οποίες δίνεται ο όγκος ενός **Όνυχα** (Απότμημα Κυλίνδρου, όπως λέει), που προκύπτει από τη λοξή τομή ενός κυλίνδρου, με επίπεδο δια του κέντρου της βάσης του.

Στην πρόταση λοιπόν 14 και με τη βοήθεια μιας ιδιότυπης "Ολοκλήρωσης" αποδεικνύει ότι ο όγκος του Όνυχα είναι ίσος με το $\frac{1}{6}$ του τετραγωνικού πρίσματος, του περιγεγραμμένου στον κύλινδρο.

Δίνει όμως, για τον ίδιο όγκο, και μία "Μηχανική" απόδειξη, στην πρόταση 12. Εκεί, πάλι με μία ανάλογη "Ολοκλήρωση" οδηγείται στην ισότητα όγκων:



Ο Όνυχας του Αρχιμήδη

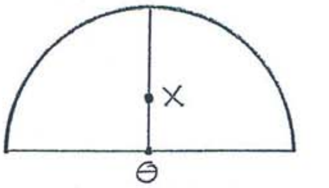
$$V_{ονυχα}\cdot R = V_{ημικυλίνδρου}\cdot(\theta X)$$

όπου Χ το κέντρο βάρους του ημικυκλίου και θ το κέντρο του.

Έτσι, γνωρίζοντας τον όγκο του Όνυχα, από την πρόταση 14, θα μπορούσε να οδηγηθεί στη σχέση:

$$\frac{1}{6}(2R)^2\cdot\upsilon\cdot R = \frac{\pi\cdot R^2}{2}\cdot\upsilon\cdot(\theta X) \quad \text{ή τελικά} \quad \boxed{\theta X = \frac{4}{3\pi}\cdot R}$$

Είναι λοιπόν μάλλον προφανές ότι ο σοφός μας γνώριζε και το κέντρο βάρους του ημικυκλίου, του οποίου όμως η έκφραση ή χάθηκε ή δεν διατυπώθηκε ποτέ, λόγω της ασυμμετρίας του λόγου $\frac{4}{3\pi}$ και της αδυναμίας κατασκευής του.



Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι το κίνητρο του σοφού μας, για την μελέτη και ανακάλυψη των κέντρων βάρους του, ήταν οι "μηχανικές" αποδείξεις του, οι οποίες με ευφυείς επιλογές και τη χρήση των κέντρων βάρους, οδηγούσαν στις αποδείξεις των διαφόρων ζητουμένων.

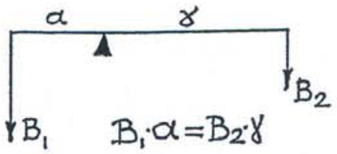
Μερικές από τις αποδείξεις αυτές θα τις δούμε στην ενότητα την αφιερωμένη στην πρωτοπόρα "Έφοδο" (μέθοδο) του σοφού μας.

Εδώ όμως είναι αναγκαίο να δώσουμε, ως επίλογο της ενότητας αυτής, μία από τις αποδείξεις εκείνες, για την εύρεση του κέντρου βάρους του ημισφαιρίου.

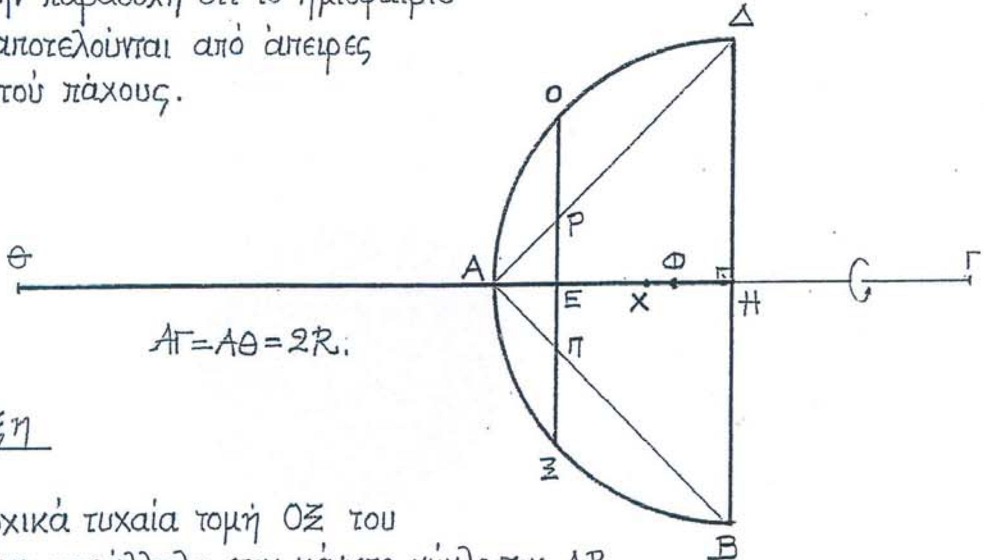
Αρχιμήδους "Περί των μηχανικών θεωρημάτων... Έφοδος"

Θ.6 | Κέντρο βάρους Χ ημισφαιρίου $AX = \frac{5}{8} \cdot R$

Θεωρεί τα εμβαδά ως βάρη και με τη βοήθεια του διπλανού θεωρήματος ισορροπίας ζυγού οδηγείται στην ακόλουθη εξαιρετική απόδειξή του.



Τα βήματά του είναι απλά, σαφή και στηριγμένα στην παραδοχή ότι το ημισφαίριο και ο κώνος αποτελούνται από άπειρες φέτες απειροστού πάχους.



$A\Gamma = A\Theta = 2R.$

Απόδειξη

1. Θεωρεί αρχικά τυχαία τομή ΟΞ του ημισφαιρίου, παράλληλη στον μέγιστο κύκλο του ΔΒ.

Τότε είναι: $\frac{A\Gamma}{AE} = \frac{A\Gamma \cdot AE}{AE^2} = \frac{\Xi A^2}{AE^2} = \frac{AE^2 + E\Xi^2}{AE^2} = \frac{\text{κυκλ}(\Pi P) + \text{κυκλ}(O\Xi)}{\text{κυκλ}(\Pi P)}$ (Στοιχ. 2/XII).

Άρα $\frac{A\Theta}{AE} = \frac{\text{κύκλ}(\Pi P) + \text{κύκλ}(O\Xi)}{\text{κύκλ}(\Pi P)}$

Μετά θεωρεί τους κύκλους ως υλικούς και την αναλογία ως ισότητα ροπών (ζυγού) περί το Α, με τους κύκλους (ΠΡ) και (ΟΞ) ανηρτημένους στο Ε και τον (ΠΡ) στο Θ. Έχει έτσι ισορροπία περί το Α.
Το ίδιο λέει θα συμβαίνει για όλες τις τυχαίες τομές ΟΞ.

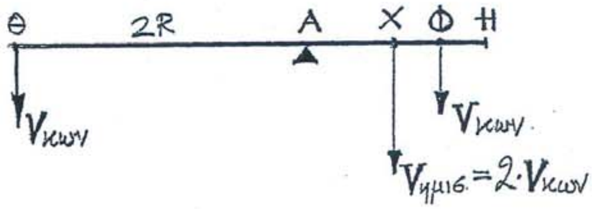
2. Θεωρεί ακόμα ότι το σύνολο όλων των κύκλων (ΡΠ) συναποτελούν τον κώνο ΑΔΒ, ενώ το σύνολο των κύκλων (ΟΞ) συναποτελούν το ημισφαίριο.

Λέει: "**... συμπληρωθέντων οὖν ὑπό τῶν κύκλων τοῦ τε ἡμισφαιρίου καὶ τοῦ κώνου ἰσορροπήσουσι περί τό Α σημεῖον πάντες οἱ κύκλοι οἱ ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ καὶ οἱ ἐν τῷ κώνῳ αὐτοῦ ....**"

(Εδώ "ολοκληρώνει" με τη χρήση του όρου "Πάντες" <Omnia>).

Η ισορροπία των στερεών της "Ολοκλήρωσης" συμβαίνει με τον Κώνο και το ημισφαίριο ανηρτημένα στα κέντρα βάρους τους και με έναν ίσο κώνο ανηρτημένο στο Θ.

3. Οι όγκοι (βάρη) των στερεών του θεωρούνται ανηρτημένοι στον "ζυγό" ΘΗ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Γνωρίζει ότι για το κέντρο Φ του κώνου ισχύει $ΑΦ : ΑΗ = 3 : 4$, και ότι ο όγκος του ημισφαιρίου είναι $V_{ημισ} = 2 \cdot V_{κων}$ (Περι Σφ. και Κυλινδρου, Θ. 34). Το Χ είναι το ζητούμενο κέντρο βάρους του ημισφαιρίου. Έτσι η σχέση ισορροπίας στο ζυγό θα είναι :

$$V_{κων.} \cdot (ΑΘ) = V_{ημισφ.} \cdot (ΑΧ) + V_{κων.} \cdot (ΑΦ) \quad ή \quad 2R = 2(ΑΧ) + \frac{3}{4} R$$

και τελικά $\boxed{ΑΧ = \frac{5}{8} R}$

Ξένιος Δίας

Αυτές σε γενικές γραμμές ήταν οι προτάσεις για τα Κέντρα βάρους του Αρχιμήδη, που κατάφεραν να διασωθούν. Σε αυτές βλέπουμε το Κέντρο βάρους να υποδιαιρεί πάντα τον άξονα σε ρητό λόγο.

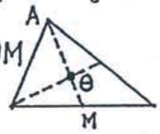
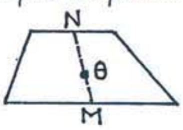
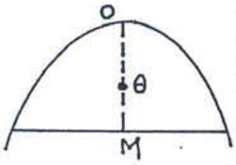
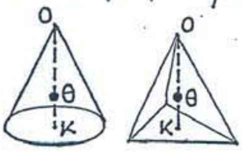
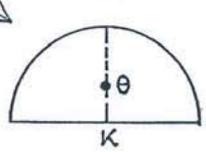
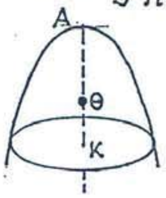
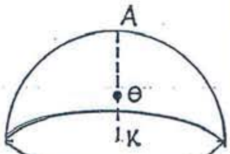
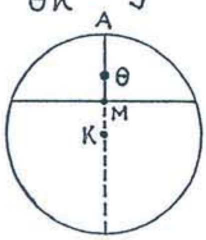
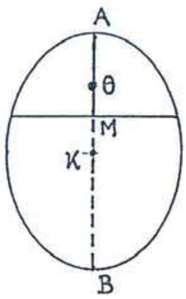
Δικαιούμαστε όμως να υποθέσουμε ότι ο σοφός μας θα είχε προσδιορίσει και άλλα κέντρα βάρους, με άρρητο λόγο, όπως εκείνο του ημικυκλίου και ίσως του κυκλικού τμήματος, τα οποία όμως δεν εξέθεσε, μάλλον λόγω της άρρητης έκφρασης του λόγου τους.

Στόχος της μελέτης του αυτής ήταν η χρήση των κέντρων βάρους στις μηχανικές αποδείξεις της "Εφόδου" του.

Η κατάκτηση αυτή των κέντρων βάρους, μαζί με μία ευφυή ιδέα του μεταγενέστερου **Διονυσοδώρου**, οδήγησε αργότερα στην ανακάλυψη του περίφημου θεωρήματος του **Πάππου**.

Τα Κέντρα Βάρους του ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Τα κέντρα βάρους στη γεωμετρία εισήχθησαν από τον Αρχιμήδη (~240 πΧ), μαζί με την επαναφορά από τον ίδιο της υλικότητας των σχημάτων της. Αυτά νοούνταν ως τα σημεία, στα οποία ασκούνταν, ως δύναμις, το βάρος τους.

Σχήματα	Σχέσεις	Πηγές - Παρατηρήσεις
1. Τμήμα ευθύγραμμο	 Το μέσον Μ	"Περί επιπ. Ισορροπιών" 6,7,8 Ζυγοί και ένωση σχημάτων.
2. Παραλληλόγραμμο	 Η τομή διαγωνίων	" Επιπ. Ισορροπιών" 9, Α
3. Τρίγωνο	Τομή διαμέσων $ΑΘ = 2 \cdot ΘΜ$ 	" Επιπ. Ισορροπιών" 14, Α
4. Τραπέζιο	 $\frac{ΘΝ}{ΘΜ} = \frac{2Β+β}{2β+Β}$	" Επιπ. Ισορροπιών" 15, Α Β, β οι βάσεις
5. Παραβολή	$\frac{ΟΘ}{ΘΜ} = \frac{3}{2}$ ΟΜ Διάμετρος 	"Επιπ. Ισορρ" Β, 8
6. Κώνος	 $ΟΘ = 3 \cdot ΘΚ$	"Επιπ. Ισορρ" Β, 28
✶ Ημικύκλιο	$ΘΚ = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$ 	Έμμεσα στην Έφοδο (Θ.12)
7. Παραβολοειδές	 $ΑΘ = 2 \cdot ΘΚ$	"Έφοδος" (Θ, 5)
8. Ημισφαίριο	$\frac{ΑΘ}{ΘΚ} = \frac{5}{3}$ 	"Έφοδος" (Θ, 6)
9. Σφαιρικό τμήμα	 $\frac{ΑΘ}{ΘΜ} = \frac{8R-3υ}{4R-υ}$ $υ = ΑΜ$	"Έφοδος" (Θ, 9)
10. Ελλειψοειδές τμήμα	$\frac{ΑΘ}{ΘΜ} = \frac{ΑΜ+4ΜΒ}{ΑΜ+2 \cdot ΜΒ}$ 	"Έφοδος" (Θ, 10)

Δ. Τσιμπουράκης 1986