

Υποδείξεις – Παρατηρήσεις (α)

Πρέπει να αποδείξουμε, ότι το κάθε **«κλάσμα»** του «παζλ», δηλαδή κάθε **κομμάτι** του όλου, έχει ρητή σχέση εμβαδού με το τετράγωνο. Έτσι, θα πρέπει να αποδείξουμε, ότι ο λόγος του εμβαδού κάθε κομματιού προς το εμβαδόν του τετραγώνου, είναι ρητός αριθμός, δηλαδή κλάσμα με όρους θετικούς ακέραιους. Εννοείται, ότι σε αυτήν την περίπτωση, και αντιστρόφως θα προκύπτουν ρητοί αριθμοί, που όπως θα διαπιστώσουμε είναι ακέραιοι, με μία μόνο εξαίρεση.

Προσοχή: Δεν ψάχνουμε το εμβαδόν κάθε κομματιού του «παζλ». Προφανώς, κάτι τέτοιο θα απαιτούσε να έχει οριστεί μονάδα μέτρησης, και να έχει δοθεί το μέτρο ενός έστω ευθυγράμμου τμήματος. Στο τέλος θα δώσουμε και αυτήν τη δυνατότητα.

Αυτό που ζητάμε, είναι να προσδιοριστεί **αριθμητικά**, με **κλάσμα** δηλαδή, τι κομμάτι του τετραγώνου (του όλου), είναι το κάθε κομμάτι του «παζλ».

Παράδειγμα:

Αν $E_3 = (AZ\Lambda)$, το εμβαδόν του κομματιού (3), και $E = (OAB\Gamma)$, το εμβαδόν του τετραγώνου, τότε το E_3 είναι το μισό, του ενός τετάρτου, του ενός δευτέρου του E , δηλαδή είναι το ένα δέκατο έκτο του E .

$$E_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} E = \frac{1}{16} E \Rightarrow E_3 = \frac{1}{16} E \Rightarrow \frac{E_3}{E} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{E}{E_3} = \frac{16}{1} = 16 \Rightarrow E = 16E_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_3 = (AZ\Lambda) = \frac{1}{2}(AB\Lambda) \\ (AB\Lambda) = \frac{1}{4}(AB\Delta H) \\ (AB\Delta H) = \frac{1}{2}(OAB\Gamma) = \frac{1}{2}E \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_3 = (AZ\Lambda) = \frac{1}{2}(AB\Lambda) \\ (AB\Lambda) = \frac{1}{4}(AB\Delta H) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} E = \frac{1}{8} E \\ (AB\Delta H) = \frac{1}{2} E \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_3 = (AZ\Lambda) = \frac{1}{2}(AB\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} E = \frac{1}{16} E \\ (AB\Lambda) = \frac{1}{8} E \\ (AB\Delta H) = \frac{1}{2} E \end{array} \right\}$$

Το τετράγωνο $OAB\Gamma$, χωρίζεται από τη μεσοκάθετο της OA , σε δυο ίσα, και επομένως **ισοδύναμα**, ορθογώνια. Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Delta H$ είναι το μισό του εμβαδού του τετραγώνου.

$$\text{Έτσι, } (AB\Delta H) = \frac{1}{2}(OAB\Gamma) = \frac{1}{2}E$$

Το ορθογώνιο $AB\Delta H$, χωρίζεται από τις διαγωνίους του, $A\Delta$ και BH , σε τέσσερα **ισοδύναμα** τρίγωνα, δηλαδή $(AB\Lambda) = (B\Delta\Lambda) = (\Delta H\Lambda) = (H\Lambda\Lambda)$, και επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Lambda$, είναι το ένα τέταρτο του εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Delta H$.

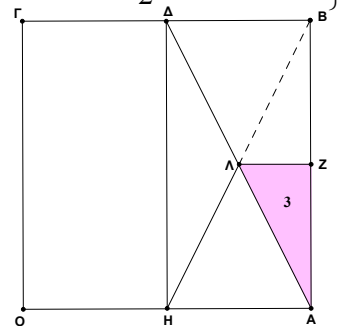
$$\text{Έτσι, } (AB\Lambda) = \frac{1}{4}(AB\Delta H)$$

Η διάμεσος ΛZ , του τριγώνου $AB\Lambda$, το χωρίζει σε δυο ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή $(AZ\Lambda) = (BZ\Lambda)$, και επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $AZ\Lambda$, είναι το μισό του εμβαδού, του τριγώνου $AB\Lambda$.

$$\text{Έτσι, } E_3 = (AZ\Lambda) = \frac{1}{2}(AB\Lambda)$$

Σχόλιο: Το σχήμα είναι «αφαιρετικό», δηλαδή περιέχει μόνο τις **αναγκαίες γραμμές**, αποκαλύπτοντας έτσι, το πώς λειτουργεί ο εγκέφαλος, όσων αντιμετωπίζουν **αποτελεσματικά** το θέμα. Πρέπει λοιπόν να αποκτήσουμε την ικανότητα, να επικεντρωνόμαστε στον στόχο μας, και να **παραβλέπουμε** όσα δεν τον υπηρετούν. Τα παραπάνω, θυμίζουν την προσπάθειά μας, να δούμε μέσα σε μια «μαγική εικόνα».

Σημείωση: Όπως είπαμε, είναι μια ευκαιρία, μέσα από τις ανάγκες μας, να κάνουμε μια επανάληψη στην «ορολογία» και στα «θεωρητικά εργαλεία». Έτσι, σαν πρώτο, θυμίζουμε ότι **ισοδύναμα** σχήματα, είναι αυτά που έχουν ίσα εμβαδά. Προφανώς, τα ίσα σχήματα, είναι και **ισοδύναμα**.



Τα «θεωρητικά εργαλεία» – αποδείξεις:

1. Όταν λέμε **ορθογώνιο** ΑΒΔΗ, εννοούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΔΗ.

2. Το ΑΒΔΗ είναι **ορθογώνιο**, αφού διαπιστωμένα έχει **τρεις ορθές** γωνίες.

Στις κορυφές Α και Β υπάρχουν ορθές γωνίες, από το τετράγωνο, και στην κορυφή Η υπάρχει ορθή γωνία «εξ υποθέσεως».

3. Οι διαγώνιοι των παραλληλογράμμων, όπως είναι γνωστό διχοτομούνται, δηλαδή καθεμιά τους διέρχεται από το μέσο της άλλης.

Το Λ, «εξ υποθέσεως», είναι μέσο της διαγωνίου ΑΔ, του **ορθογωνίου** ΑΒΔΗ. Έτσι, η ευθεία ΗΛ διέρχεται από την κορυφή Β, αφού ταυτίζεται με την ευθεία ΗΒ, που σαν φορέας της διαγωνίου ΒΗ, διέρχεται από το Λ.

* Οι ευθείες ΗΛ και ΗΒ ταυτίζονται, αφού «έχουν εξασφαλίσει» δυο κοινά σημεία, τα Η και Λ.

4. Όπως γνωρίζουμε, το όνομα ενός τριγώνου σε παρένθεση, δηλώνει το εμβαδόν του.

5. Κάθε διάμεσος ενός τριγώνου, το χωρίζει σε δύο **ισοδύναμα** τρίγωνα. (Εφαρμογή 3^η, σελ. 75 του Σχ. βιβλίου)

Έτσι, στο τρίγωνο ΛΑΒ, έχουμε: $(\Lambda \Lambda \text{Z}) = (\Lambda \text{BZ})$, και συνεπώς $E_3 = (\Lambda \text{Z}\Lambda) = \frac{1}{2}(\Lambda \text{B}\Lambda)$.

Ομοίως, στο τρίγωνο ΒΔΛ, έχουμε: $(\text{B}\Delta\Lambda) = (\text{B}\Lambda\Lambda)$, και αφού $\hat{\Lambda}\text{H}\Delta = \hat{\Lambda}\text{B}\Delta$ και $\hat{\Lambda}\text{A}\text{B} = \hat{\Lambda}\text{H}\Delta$ (π-π-π), επομένως $(\text{B}\Delta\Lambda) = (\text{B}\Lambda\Lambda) = (\text{H}\Delta\Lambda) = (\text{H}\Lambda\Lambda)$, και συνεπώς $(\Lambda \text{B}\Lambda) = \frac{1}{4}(\Lambda \text{B}\Delta\text{H})$.

6. Τα ορθογώνια ΑΒΔΗ και ΟΓΔΗ είναι προφανώς **ισοδύναμα**, αφού έχουν ίσες αντίστοιχες πλευρές, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εύρεση του εμβαδού, σαν γινομένου δύο διαδοχικών πλευρών:

$$(\text{ΟΓΔΗ}) = (\text{ΟΗ}) \cdot (\text{ΗΔ}) = (\text{ΑΗ}) \cdot (\text{ΗΔ}) = (\Lambda \text{B}\Delta\text{H}) \text{ και επομένως } (\Lambda \text{B}\Delta\text{H}) = \frac{1}{2}(\text{ΟΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \text{E}.$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα δύο ορθογώνια είναι ίσα, θεωρώντας προφανές ότι δύνανται να ταυτιστούν, αν το ένα μετακινηθεί πάνω στο άλλο, και επομένως είναι ισοδύναμα. Το αποφυγάμε για να μην δημιουργηθεί η εντύπωση ότι γενικότερα έχει οριστεί η ισότητα πολυγώνων.

Σχόλιο: Όλα τα παραπάνω αναπτύχθηκαν, πάνω στον «τρόπο έκφρασης» του Αρχιμήδη. Στα επόμενα σημειώματα, θα έχετε την ευκαιρία να δείτε αρχαία κείμενα, και μεταφράσεις τους σε σύγχρονες γλώσσες.

Σε «σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα», ένας μαθητής, θα μπορούσε να ορίσει **α**, το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, με $\boxed{\text{E} = \alpha^2}$, και στη συνέχεια παρατηρώντας ότι $(\Lambda \text{Z}) = (\text{B}\Delta) = \frac{\alpha}{2}$, και συνεπώς $(\Lambda \text{Z}) = \frac{\alpha}{4}$, αφού το ΛΖ έχει για άκρα τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, στο τρίγωνο ΑΒΔ, να υπολογίσει

το εμβαδόν του **ορθογωνίου*** τριγώνου ΖΑΛ: $E_3 = \frac{(\Lambda \text{Z}) \cdot (\Lambda \text{Z})}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{4}}{2} = \frac{\alpha^2}{16}$ και συνεπώς $E_3 = \frac{\text{E}}{16}$.

* Το τρίγωνο ΖΑΛ είναι ορθογώνιο, αφού η ΖΛ είναι παράλληλη στην ΒΔ, που είναι κάθετη στην ΑΒ.

(Θεώρημα Ι, στη σελίδα 109, του σχολικού βιβλίου στο Τεύχος Α')

Λύσεις αναδιτάξης:

Αν «αποκωδικοποιήσετε» τις δυο λύσεις του «παζλ», ανοίγει ο δρόμος, έτσι που κάποιες λύσεις σας, να λειτουργούν πολλαπλασιαστικά. Όπως είπαμε, υπάρχουν 17.152 διαφορετικές λύσεις. Οι περισσότεροι ιστορικοί υποστηρίζουν, ότι ο Αρχιμήδης είναι ο πρώτος στην ιστορία συγγραφέας, που ασχολήθηκε με τον κλάδο των μαθηματικών: «Συνδυαστική Ανάλυση».

