

Υποδείξεις – Παρατηρήσεις – Λύσεις (b)

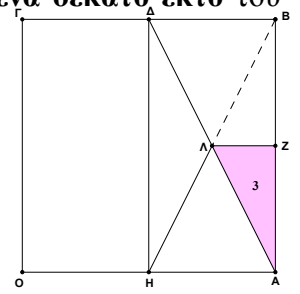
Στο προηγούμενο κείμενο, αποδείξαμε ότι το εμβαδόν του κομματιού (3), είναι το **ένα δέκατο έκτο** του εμβαδού του τετραγώνου.

$$E_3 = \frac{1}{16} \cdot E, \text{ με } E_3 = (AZ\Lambda) \text{ και } E = (OAB\Gamma)$$

Αξίζει να δούμε, σε ελεύθερη μετάφραση πάνω στο δικό μας σχήμα, πώς εργάζονταν, αλλά και πώς εξέφραζε τα επιχειρήματά του ο Αρχιμήδης.

Αρχιμήδης (3): «Θα δείξουμε, ότι καθένα από τα δεκατέσσερα κομμάτια, βρίσκεται σε **ρητή σχέση** προς ολόκληρο το τετράγωνο.

Επειδή η ΔΑ είναι διαγώνιος του ορθογωνίου ΑΒΔΗ, **το τρίγωνο ΒΔΑ** είναι **το μισό** του ορθογωνίου τούτου, δηλαδή το **ένα τέταρτο** του τετραγώνου. Αλλά το τρίγωνο ΑΖΛ είναι το **ένα τέταρτο** του τριγώνου ΒΔΑ, επειδή, αν προεκτείνουμε το ΗΛ, συναντά αυτό στο Β, και τότε το τρίγωνο ΑΒΛ είναι το μισό του τριγώνου ΒΔΑ και ίσο με το άθροισμα των τριγώνων ΑΖΛ και ΒΖΛ. Είναι επομένως, το τρίγωνο ΑΖΛ ίσο προς το **ένα δέκατο έκτο** του τετραγώνου». (**Σημείωση:** Όταν λέει «το τρίγωνο ΒΔΑ...» εννοεί το εμβαδόν του)



➤ Το εμβαδόν E_4 , του κομματιού (4), είναι το **ένα τεσσαρακοστό όγδοο**, του εμβαδού E , του τετραγώνου: Όπως έχουμε αποδείξει, το ΛΖ είναι παράλληλο προς το ΔΒ, και επομένως είναι παράλληλο προς το ΟΑ. Άρα το ΛΖ είναι **κάθετο** στην ΑΒ, και επομένως τα ΕΟΑ και ΕΛΖ είναι όμοια **ορθογώνια τρίγωνα**, αφού έχουν μια κοινή οξεία γωνία στην κορυφή Ε. (Πόρισμα (i), στη σελίδα 33)

Το ΛΖ είναι το **μισό** του ΔΒ, επομένως είναι το **μισό** του ΗΑ, το οποίο προφανώς είναι το **μισό** του ΟΑ, και συνεπώς το ΛΖ είναι το **ένα τέταρτο** του ΟΑ.

Επειδή τα προαναφερθέντα τρίγωνα είναι όμοια, επομένως οι **αντίστοιχες** πλευρές

τους, σχηματίζουν ίσους λόγους: $\frac{EZ}{EA} = \frac{\Lambda Z}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{EZ}{EA} = \frac{1}{4}$ και έτσι $4 \cdot EZ = EA$.

Όμως, $4 \cdot EZ = EA \Rightarrow 4 \cdot EZ = EZ + ZA \Rightarrow 3 \cdot EZ = ZA$, και επομένως $E_3 = 3E_4$,

αφού τα δυο τρίγωνα έχουν το ίδιο ύψος, και το ένα έχει τριπλάσια βάση από το άλλο. (βλ. και εφαρμ. 3^η σελ. 75)

$$E_3 = \frac{(ZA) \cdot (\Lambda Z)}{2} = \frac{3 \cdot (EZ) \cdot (\Lambda Z)}{2} = 3 \cdot \frac{(EZ) \cdot (\Lambda Z)}{2} = 3E_4 \Rightarrow E_3 = 3E_4, \text{ και συνεπώς } E_4 = \frac{1}{3} \cdot E_3.$$

Όπως έχουμε αποδείξει, $E_3 = \frac{1}{16} \cdot E$, επομένως $E_4 = \frac{1}{3} \cdot E_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} \cdot E = \frac{1}{48} E$, και τελικά $E_4 = \frac{1}{48} E$.

➤ Το εμβαδόν E_5 , του κομματιού (5), είναι το **ένα έκτο**, του εμβαδού E , του τετραγώνου:

Όπως έχουμε δει, το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΑ είναι το **ένα τέταρτο** του εμβαδού E , του τετραγώνου, και προφανώς είναι το άθροισμα των εμβαδών, των κομματιών του «παζλ», με αριθμούς (3), (4) και (5).

Έτσι, $E_3 + E_4 + E_5 = (B\Delta A) = \frac{1}{4} E$, και επομένως $\frac{1}{16} E + \frac{1}{48} E + E_5 = \frac{1}{4} E$, δηλαδή $E_5 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{48} \right) E = \frac{1}{6} E$.

Αρχιμήδης (4), (5): «Εάν τώρα υποθέσουμε, ότι η ευθεία ΕΛ διέρχεται από το σημείο Ο, όπως πραγματικά έχει σχεδιαστεί, η ευθεία ΖΛ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΟΑ του τετραγώνου και του τριγώνου ΕΟΑ, οπότε υπάρχει η αναλογία: ΟΑ προς ΛΖ όσο ΑΕ προς ΖΕ. Είναι όμως το ΟΑ όσο **τέσσερα** ΛΖ, και επίσης το ΑΕ όσο **τέσσερα** ΖΕ. Είναι άρα το ΑΖ όσο **τρία** ΖΕ και το τρίγωνο ΑΖΛ όσο **τρία τρίγωνα** ΕΖΛ. Επειδή όμως, όπως έχουμε αποδείξει, το τρίγωνο ΑΖΛ είναι το **ένα δέκατο έκτο** του τετραγώνου, είναι άρα το τρίγωνο ΕΖΛ το **ένα τεσσαρακοστό όγδοο** του τετραγώνου. Επειδή ακόμα το τρίγωνο ΒΔΑ είναι όσο το **ένα τέταρτο** του τετραγώνου και το τρίγωνο ΑΖΛ είναι όσο το **ένα δέκατο έκτο** του ιδίου, και το τρίγωνο ΖΛΕ είναι όσο το **ένα τεσσαρακοστό όγδοο** του ιδίου, έτσι μένει να είναι το τετράπλευρο ΒΕΛΔ, όσο το **ένα έκτο** του τετραγώνου.»

Σχόλιο: Πολλές μεταφράσεις, περιέχουν σύμβολα από τη «σύγχρονη γλώσσα» της άλγεβρας. Η δική μας είναι «καθαρή», προκειμένου να αντιληφθούμε, πώς γράφονταν τα μαθηματικά, περίπου 2000 χρόνια πριν.

Τα κομμάτια του «παζλ» που συνθέτουν το τρίγωνο ΔΗΑ:

Ομοίως με το (ΑΒΔ), και το (ΔΗΑ) είναι όσο το **ένα τέταρτο** του Ε.

Έτσι, $(\Delta \text{ΗΑ}) = E_1 + E_2 + E_7 + E_6 = \frac{1}{4}E$, και αν σχεδιάσουμε το ΠΛ, που έχει για άκρα του, αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών ΔΗ, ΔΑ του τριγώνου ΔΗΑ,

τότε το ΠΛ «είναι παράλληλο και **ίσο με το μισό**» του ΗΑ.
$$\frac{(\Pi \Lambda)}{(\text{ΗΑ})} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Τα τρίγωνα ΞΛΠ και ΞΗΑ είναι όμοια, αφού δυο γωνίες του ενός, είναι ίσες «μία προς μία», με δυο γωνίες του άλλου (Θεώρ. σελ. 33). Προφανώς είναι ίσες οι κατακορυφήν γωνίες, στην κοινή κορυφή Ξ, και ίσες, «**ως εντός εναλλάξ**», οι γωνίες (ω) στις αντίστοιχες κορυφές τους, Π και Α.

Αφού τα τρίγωνα ΞΛΠ και ΞΗΑ είναι όμοια, επομένως οι **αντίστοιχες πλευρές** τους είναι **ανάλογες**:

$$\frac{(\Xi \Lambda)}{(\Xi \text{Η})} = \frac{(\Xi \Pi)}{(\Xi \text{Α})} = \frac{(\Pi \Lambda)}{(\text{ΗΑ})} = \frac{1}{2}, \text{ και επομένως } (\Xi \text{Η}) = 2(\Xi \Lambda) \text{ και } (\Xi \text{Α}) = 2(\Xi \Pi).$$

Έτσι, το τρίγωνο ΗΑΠ, χωρίζεται από την ΗΞ, στα τρίγωνα ΗΑΞ και ΗΠΞ, δηλαδή στα κομμάτια (1) και (7), με $E_1 = 2E_7$,⁽²⁾ και ομοίως το τρίγωνο ΑΗΛ, χωρίζεται από την ΑΞ στα τρίγωνα ΑΗΞ και ΑΛΞ, δηλαδή στα κομμάτια (1) και (2), με $E_1 = 2E_2$.

⁽²⁾ Τα τρίγωνα ΗΑΞ και ΗΠΞ έχουν το ίδιο ύψος και η βάση του ενός, είναι διπλάσια της βάσης του άλλου,

$$\text{επομένως } E_1 = \frac{(\Xi \text{Α}) \cdot \upsilon}{2} = \frac{2(\Xi \Pi) \cdot \upsilon}{2} = 2 \cdot \frac{(\Xi \Pi) \cdot \upsilon}{2} = 2 \cdot E_7, \text{ και έτσι τελικά: } 2E_2 = E_1 = 2E_7 \text{ και } E_2 = E_7.$$

Ομοίως, το τρίγωνο ΗΑΔ, που έχει εμβαδόν όσο το **ένα τέταρτο** του Ε, χωρίζεται από την διάμεσό του, ΗΛ,

$$\text{σε δυο ισοδύναμα τρίγωνα ΗΑΛ και ΗΔΛ } \boxed{\text{μισό}(\text{ΗΑΔ})} : (\text{ΗΑΛ}) = (\text{ΗΔΛ}) = \frac{1}{2} \cdot (\text{ΗΑΔ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}E = \frac{1}{8}E,$$

$$\text{επομένως } \frac{1}{8}E = (\text{ΗΑΛ}) = E_1 + E_2 = 2E_2 + E_2 = 3E_2, \text{ και συνεπώς } E_7 = E_2 = \frac{1}{24}E, \quad E_1 = 2E_2 = \frac{2}{24}E = \frac{1}{12}E.$$

➤ Το εμβαδόν E_6 , του κομματιού (6), είναι το **ένα δωδέκατο**, του εμβαδού Ε, του τετραγώνου:

Όπως έχουμε δει, το εμβαδόν του τριγώνου ΗΑΔ είναι το **ένα τέταρτο** του εμβαδού Ε, του τετραγώνου, και προφανώς είναι το άθροισμα των εμβαδών, των κομματιών του «παζλ», με αριθμούς (1), (2), (7) και (6).

$$E_1 + E_2 + E_7 + E_6 = (\text{ΗΑΔ}) = \frac{1}{4}E, \text{ επομένως } \frac{1}{12}E + 2 \cdot \frac{1}{24}E + E_6 = \frac{1}{4}E, \text{ δηλαδή } E_6 = \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \right)E = \frac{1}{12}E.$$

Ανακεφαλαίωση: Ήδη επεξεργαστήκαμε το **μισό τετράγωνο**, που το συνθέτουν τα **μισά κομμάτια [7]** του «παζλ». Αξιοποιήσαμε το γεγονός, ότι τα **7** κομμάτια, σε δύο ομάδες, «γέμισαν» τα δυο τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΗΔ, που το καθένα τους, είναι όσο το **μισό** ορθογώνιο ΑΒΔΗ, και επομένως όσο το **ένα τέταρτο** του τετραγώνου. Είναι φανερό, ότι «**τον ρόλο που έπαιξε**» η διαγώνιος ΑΔ στο ορθογώνιο ΑΒΔΗ, «**παίζει**» και η διαγώνιος ΟΔ του ορθογωνίου ΟΓΔΗ. Είναι επίσης φανερό, ότι και η διαγώνιος, ΑΓ, του **τετραγώνου**, «**διαμερίζει**» το **τετράγωνο** σε **δυο ίσα**, άρα και **ισοδύναμα** τρίγωνα, που όμως δεν μπορούν να δώσουν καλύτερο περιβάλλον εργασίας για σχέση εμβαδών.

Οι διαγώνιοι που προαναφέραμε, δίνουν **λύσεις**, στο πρόβλημα **αναδιάταξης** των κομματιών του «παζλ».

Στην εύρεση λύσεων, βοηθάει και η μεσοκάθετος ΗΔ των πλευρών του τετραγώνου, ΟΑ και ΒΓ, αφού χωρίζει το τετράγωνο σε δυο ίσα ορθογώνια. Συγκεκριμένα, αν δείτε τις δυο λύσεις, στο τέλος του 2^{ου} κειμένου, η **πρώτη** προκύπτει με «**περιστροφή**» του ορθογωνίου ΑΒΔΗ, κατά 180°, με νοητό άξονα ΖΠ, ενώ η **δεύτερη**, με «**περιστροφή**» του τριγώνου ΑΒΓ, κατά 180°, με νοητό άξονα ΟΒ. Για να φανταστούμε αποτελέσματα όπως τα παραπάνω, θα πρέπει να φανταστούμε κομμάτια **χρωματισμένα**, και στις δύο όψεις.

