

Συμμετρία – Λύσεις (d)

Πρόλογος: Στο τελευταίο κείμενο, θα προσπαθήσουμε να «κλείσουμε» την παρουσίαση, όσο γίνεται πιο ολοκληρωμένα. Προφανώς, για τον αναγνώστη, όχι μόνο δεν κλείνει το θέμα, αλλά αντιθέτως, ανοίγονται νέα πεδία μελέτης και έρευνας. Στο πρώτο κείμενο γράψαμε, ότι:

«Υπάρχουν, μαζί με τις συμμετρίες, **17152 συνδυασμοί**, για τον σχηματισμό του τετραγώνου». Σήμερα συμπληρώνουμε: «Υπάρχουν **536 βασικές λύσεις** του προαναφερθέντος προβλήματος».

Προφανώς, υπάρχουν δύο διαφορετικές «αποτιμήσεις».

«Μαθηματική προσέγγιση»: Στην προσπάθειά σας, να ερμηνεύσετε

την παρατηρούμενη διαφορά, $[17152 - 536 = 16616]$, θα πρέπει να κάνετε διαίρεση(!) $[17152 : 536 = 32 = 2^5]$.

Ο λόγος των δυο τιμών, είναι «δύναμη του 2»: Προσέξτε την αρχική λύση. Φανταστείτε τα κομμάτια από οποιοδήποτε υλικό, χρωματισμένα και από τις δύο όψεις, σε διαφανές κουτί με καπάκι. Αναποδογυρίστε το κουτί. Προφανώς έχετε μπροστά σας μια δεύτερη λύση. Οι Μαθηματικοί, το «αναποδογύρισμα» θα το περιέγραφαν ως εξής: «περιστρέψτε το τετράγωνο κατά 180° , με άξονα περιστροφής την ευθεία ΔΗ, η οποία είναι προφανώς, «άξονας συμμετρίας του τετραγώνου»». Για να προκύψει ο μέγιστος αριθμός **17152**, μετρήθηκαν και τέτοιες λύσεις. Αν εσείς, δεν θεωρείτε την παραπάνω λύση σαν «βασική», σκεφτείτε ότι για κάθε «βασική» λύση, με «αναποδογύρισμα», προκύπτει μια ακόμα λύση. Εσείς λοιπόν οφείλετε να πείτε, ότι οι «βασικές» λύσεις είναι το πολύ 8576,

που είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης $[17152 : 2 = 8576]$. Με την ίδια λογική, αν τα κομμάτια (7) και (9), που είναι «γεωμετρικά ίσα», αλλάζουν αμοιβαία θέση, από τις λύσεις που εμείς θεωρούμε «βασικές», πάλι προκύπτουν διπλάσιες λύσεις, και επειδή η αλλαγή αυτή προφανώς «συνεργάζεται» πάντοτε με το «αναποδογύρισμα», θα πρέπει να επανέλθουμε διαιρώντας πάλι με το 2, και ομοίως για τα «γεωμετρικά ίσα» κομμάτια, (1) και (10), αντιλαμβανόμενοι πλέον, ότι κάπως έτσι προέκυψε ο αριθμός **536**.

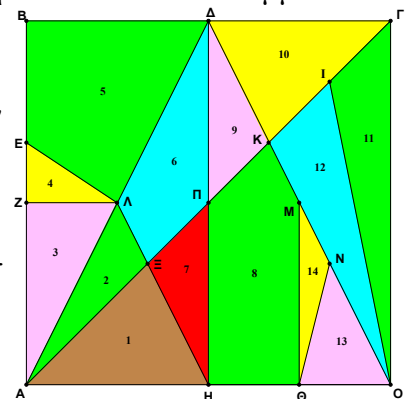
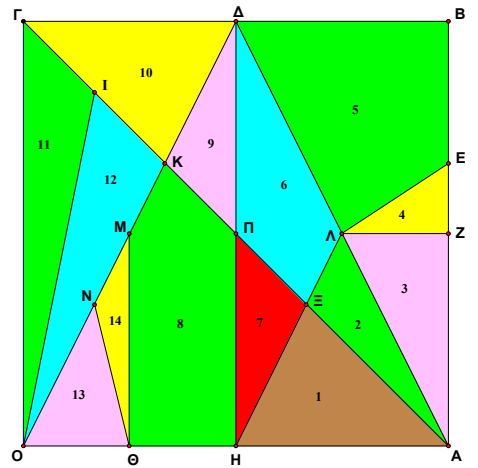
Προσοχή: Η περιστροφή του τριγώνου ΒΑΓ κατά 180° , με άξονα περιστροφής την ευθεία ΒΠ, η οποία είναι «άξονας συμμετρίας» του, δεν «συνεργάζεται» με τις περιστροφές των ορθογωνίων ΟΓΔΗ, ΑΒΔΗ, κατά 180° γύρω από τα Μ και Λ αντίστοιχα, που είναι «κέντρα συμμετρίας» τους, αφού τα καταργεί σαν ομάδες κομματιών. Την περιστροφή αυτή, την είδαμε στη δεύτερη λύση, στο «Αρχιμήδης (2)». Έτσι, αν πραγματοποιήσουμε μια τέτοια περιστροφή, και θεωρήσουμε ότι αξίζει να διαιρέσουμε τον μέγιστο αριθμό λύσεων με το 2, δε θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε διαιρέσεις με το 2, επικαλούμενοι τις περιστροφές των ορθογωνίων. (Οι παραπάνω περιστροφές, στο σχ. βιβλίο, περιγράφονται: «αν διπλώσουμε το φύλλο...»)

❖ Τώρα, θα μπορούσε κάποιος να πει, ότι ο αριθμός **17152**, προκύπτει από τη «σχολαστικότητα» των Μαθηματικών, και ότι ο αριθμός **536**, αφορά «αξιοπρεπείς» λύτες, που δεν καταδέχονται να καμαρώσουν για «τετριμμένες» λύσεις. Προσέξτε, μη βιαστείτε να πετάξετε στο καλάθι των αχρήστων, αυτά που υποστηρίζουν οι Μαθηματικοί. **Αν παίζετε παιχνίδια τύχης, θα τιμωρηθείτε.**

Παιχνίδι τύχης: Τρεις φίλοι βλέπουν ποδοσφαιρικό αγώνα στην τηλεόραση. Οι δύο που «σέβονται» τα Μαθηματικά, προτείνουν στον τρίτο που «σέβεται» πιο πολύ το ποδόσφαιρο, να πάει να φέρει «σουβλάκια», όποιος «κερδίσει» στο παιχνίδι «τ' αψηλού»* με δυο πανομοιότυπα νομίσματα του ενός Ευρώ. Μάλιστα του προτείνουν να πάρει αυτός την περίπτωση με τις δυο διαφορετικές όψεις. Αυτός δέχεται, και «κερδίζει».

Προφανώς θα μπορούσε να είχε «χάσει», όμως **συνέβη το πιο πιθανό**, αφού οι «φίλοι», του «φόρτωσαν», το σύνθετο ενδεχόμενο, και αυτοί κράτησαν τα απλά ενδεχόμενα.

* «τ' αψηλού» στην Κέρκυρα, δηλώνει το παιχνίδι «κορώνα – γράμματα».



Σχόλιο: Για την κατανόηση του «παιχνιδιού τύχης», θα πρέπει να ξαναδιαβάσετε το κεφάλαιο **Πιθανότητες** (σχ. βιβλίο Α' Λυκείου), όπου θα διαπιστώσετε ότι ο «νικητής» είχε διπλάσιες πιθανότητες επιτυχίας, από κάθε «ηττημένο». Επίσης, για τη «Συμμετρία», θα πρέπει να ξαναδιαβάσετε το σχετικό κεφάλαιο (σχ. βιβλίο της Α' Γυμνασίου), και να **διαβάσετε** τις §3.8 – §3.9, (σχ. βιβλίο Γεωμετρίας, Α' Λυκείου).

Τελικές παρατηρήσεις: Το τετράγωνο, στην «αρχική» λύση, είναι «διαμερισμένο», σε δυο ίσα ορθογώνια, τα οποία «οριοθετούν» δύο ομάδες των 7 κομματιών του «παζλ». Έτσι, αν περιστραφούν είτε ως προς τα «κέντρα συμμετρίας» τους, είτε ως προς τους «άξονες συμμετρίας» τους, μπορούν να **ανασυνθέσουν** το τετράγωνο. (λύσεις)
Το τετράγωνο είναι «διαμερισμένο», σε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα, ΟΓΔ, ΟΗΔ, ΑΗΔ και ΑΒΔ, τα οποία, είτε όπως είναι, είτε μετασχηματισμένα, μπορούν να **ανασυνθέσουν** το τετράγωνο, δίνοντας λύσεις. Ειδικά, το ΑΗΔ, έχει τρεις δυνατότητες μετασχηματισμού, πριν **συνεργαστεί** με τα άλλα τρία.
(a) Το τρίγωνο ΛΔΗ, έχει «άξονα συμμετρίας» την ευθεία ΛΠ, και έτσι αν περιστραφεί κατά 180° , γύρω από τον άξονά του, όχι μόνο μετασχηματίζεται το ΑΗΔ, αλλά δίνει άμεσα νέα λύση του προβλήματος.

(b) Ομοίως, το τρίγωνο ΗΑΠ, έχει «άξονα συμμετρίας» την ευθεία ΗΖ, και έτσι αν περιστραφεί κατά 180° , γύρω από τον άξονά του, όχι μόνο μετασχηματίζεται το τρίγωνο ΑΗΔ, αλλά δίνει άμεσα νέα λύση αναδιάταξης του «παζλ».

(c) Το τρίγωνο ΛΗΑ, έχει δύο δυνατότητες: αρχικά μπορεί να περιστραφεί, κατά 180° , γύρω από τον άξονα συμμετρίας του, ΛΘ', ή να «βρει» για συμμετρικό του το τρίγωνο ΛΒΔ, ως προς «κέντρο συμμετρίας» το σημείο Λ, και «αντικαθιστώντας το», να **αναμορφώσει** ριζικά το τρίγωνο ΑΗΔ, στο ίσο του τρίγωνο, ΒΔΗ. Προφανώς, οι δύο αλλαγές μπορούν να συνδυαστούν, πολλαπλασιάζοντας τις λύσεις. Τώρα, μπορούμε να καταλάβουμε, ποιοι μετασχηματισμοί οδήγησαν, στις δυο λύσεις που δόθηκαν στο «Αρχιμήδης(4)». Η προσοχή μας, προφανώς θα πρέπει να «δοθεί», στο αρχικό σχήμα, που είναι πάντα, «σχήμα αναφοράς».

Οι δυο λύσεις: Στην πρώτη λύση, το τρίγωνο ΟΓΔ, αφού «αναποδογυρίσει», παίρνει θέση, στην «οροφή» του τετραγώνου. Στη συνέχεια, το τρίγωνο ΑΒΔ, αφού περιστραφεί 90° , «κατά την αρνητική φορά», με σταθερό σημείο το Β, μετατοπίζεται κατακόρυφα κατά μήκος (ΒΔ), έτσι ώστε μαζί με το τρίγωνο ΟΓΔ, να συνθέσουν το πρώτο ορθογώνιο, που είναι το μισό τετράγωνο.

Για το δεύτερο μισό τετράγωνο, τα τρίγωνα ΟΗΔ και ΑΗΔ, αφού ανταλλάξουν τα ίσα κομμάτια (9) και (7) μετακινούνται κατάλληλα. Το μεν ΟΗΔ, αφού «αναποδογυρίσει», πάει και προσαρμόζει την «ΗΔ», στο «πάτωμα» του μισού τετραγώνου, ενώ το ΑΗΔ, αφού περιστρέψει το τρίγωνο ΗΑΠ, όπως στο (b), πάει και «ταυτίζει» την υποτείνουσά του, με την υποτείνουσα του «ΟΗΔ».

Στην δεύτερη λύση, αφού γίνει η γνωστή πλέον ανταλλαγή, των (9) και (7), τα τρίγωνα ΟΗΔ και ΑΒΔ, συνθέτουν το «δεξιό» ορθογώνιο, το μεν ΟΗΔ αφού «αναποδογυρίσει» με άξονα την ευθεία ΜΠ, και στη συνέχεια μετατοπιστεί οριζοντίως, έως ότου το «Η» ταυτιστεί με το Β, ενώ το ΑΒΔ, περιστροφόμενο γύρω από το «κέντρο» Λ, κατά 180° , παίρνει την τελική του θέση

Υπόδειξη: Για το «αριστερό» μισό, αφού αναμορφώσετε τη λύση, προσεγγίστε την.

