

Συμμετρία – Λύσεις (ε)

Η δεύτερη λύση στο «Αρχιμήδης (4)»: Στο 1^ο σχήμα, φαίνεται η «αρχική» λύση, και στο 2^ο σχήμα φαίνεται η λύση, της οποίας εκκρεμεί η επεξήγηση. Έχουμε ήδη περιγράψει, τους μετασχηματισμούς που διαμόρφωσαν το δεξιό ορθογώνιο, από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΟΗΔ, αφού προηγήθηκε η ανταλλαγή των κομματιών (7) και (9), ανάμεσα στα τρίγωνα ΑΗΔ και ΟΗΔ.

Παρατηρώντας το «αριστερό» ορθογώνιο της λύσης, διαπιστώνουμε ότι η «σύνθεση», δεν προκύπτει άμεσα από τη συνεργασία των τριγώνων της «αρχικής» λύσης, που απομένουν στη διάθεσή μας, δηλαδή των ΟΓΔ, ΑΗΔ. Μάλιστα, από τον προσανατολισμό των κομματιών (11) και (12), προκύπτει σαν αναγκαιότητα, ο μετασχηματισμός του ορθογωνίου σε ισοδύναμη λύση, η οποία στη συνέχεια θα προκύψει από μετασχηματισμούς της «αρχικής». Προφανώς, απαιτείται η αντιμετάθεση των «γεωμετρικά ίσων» κομματιών (1), (10), και στη συνέχεια, η περιστροφή του ισοσκελούς ορθογωνίου, που θα συνθέτουν πλέον, τα κομμάτια (9), (10), κατά 180°, γύρω από τον άξονα συμμετρίας, που δεν είναι άλλος, από τη μεσοκάθετο της υποτεινουσάς του. Στην κορυφή του κειμένου, βρίσκεται η «αρχική» λύση, και στο δεύτερο σχήμα, η προς επεξήγηση λύση.

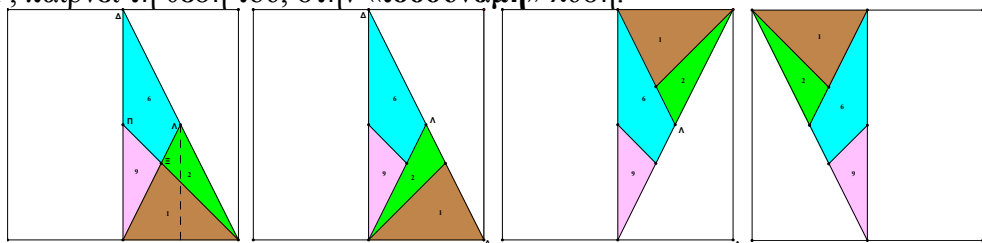
Δεξιά, φαίνονται οι διαδοχικοί μετασχηματισμοί, της λύσης, στην «ισοδύναμη» λύση, όπου πλέον ξεχωρίζει το τρίγωνο «ΟΓΔ», και απομένει να αναδειχθεί ο μετασχηματισμός του ΑΗΔ, στο «ΑΗΔ».

Εξηγήσεις: Όταν γράφουμε «αρχική» λύση, εννοούμε την αρχική κατασκευή του τετραγώνου, ενώ όταν λέμε απλά λύση, εννοούμε τη λύση που προσπαθούμε να εξηγήσουμε (τεκμηριώσουμε).

Όταν γράφουμε «ΑΗΔ», εννοούμε το τρίγωνο ΑΗΔ της αρχικής λύσης, στην μετασχηματισμένη του μορφή.

- Προφανώς, αν το τρίγωνο ΟΓΔ «αναποδογυριστεί», περιστρεφόμενο κατά 180°, με άξονα περιστροφής, τη μεσοκάθετη της ευθείας ΟΓ, παίρνει τη θέση του, στην «ισοδύναμη» λύση.

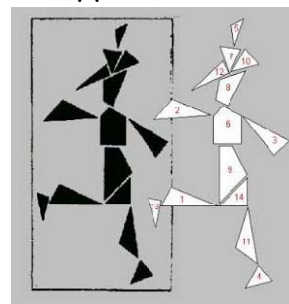
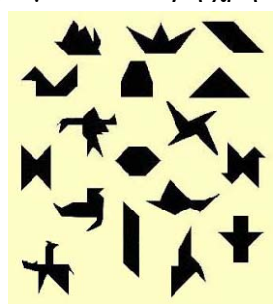
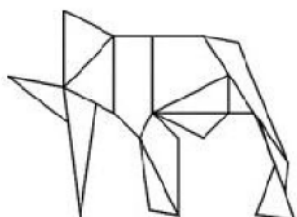
Στα τέσσερα σχήματα, μπορούμε να παρακολουθήσουμε, τις διαδοχικές μεταμορφώσεις, του τριγώνου ΑΗΔ, μέχρι να πάρει την τελική του θέση, στην «ισοδύναμη» λύση.



Αρχικά, στο τρίγωνο ΑΗΔ, που αντί για το κομμάτι (7), διαθέτει τώρα το κομμάτι (9), το τρίγωνο ΛΗΑ, αφού περιστραφεί κατά 180°, γύρω από τον «άξονα συμμετρίας» του, «παίρνει τη θέση» του συμμετρικού του, ως προς «κέντρο συμμετρίας» το Λ. Στη συνέχεια, το αναμορφωμένο τρίγωνο «ΑΗΔ», αφού περιστραφεί κατά 180°, γύρω από την ευθεία ΔΗ, παίρνει την τελική του θέση στην «ισοδύναμη» λύση.

Σγόλια: (1) Ολοκληρώσαμε τις αποδείξεις, και είδαμε την παραγωγή λύσεων, με τα Μαθηματικά εργαλεία. Αυτό που αξίζει, είναι η ανακάλυψη και άλλων «δρόμων», σε μια όχι τυχαία αναζήτηση.

(2) Όπως σε όλα τα παιχνίδια, ο παίχτης μπορεί να βάλει τους δικούς του κανόνες, «σπάζοντας τα δεσμά». Έτσι, μπορείτε να βρείτε «φιγούρες», κατασκευασμένες με μια ελεύθερη χρήση των κομματιών του «παζλ».



Μετρήσεις: Μπορούμε να δούμε το αρχικό σχέδιο, σε τρία χρώματα, προσαρμοσμένο σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, μας δίνεται η δυνατότητα, να δούμε το θέμα μας, με το «εργαλείο» των μετρήσεων.

Επιλέγοντας για μήκος της πλευράς του τετραγώνου, ακέραιο πλήθος μονάδων (**12 μονάδες**), παρατηρούμε, ότι τα σημεία «κόμβοι», έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Το γεγονός αυτό: ενθαρρύνει τα παιδιά της «θεωρητικής», για υπολογισμούς πάνω στους «κλασικούς» τύπους εμβαδών, ενώ για τα παιδιά της «θετικής», εξασφαλίζει ότι ο λόγος των εμβαδών θα είναι ρητός αριθμός, αφού όλα τα κομμάτια, με εξαίρεση τα (5), (6), (8), είναι τρίγωνα με ακέραιες συντεταγμένες, για τις κορυφές τους, και τα (5), (6), (8), χωρίζονται σε τέτοια τρίγωνα,

αρκεί να θυμηθούν τον τύπο εμβαδού τριγώνου ABΓ: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$. (σχ. βιβλίο σελ. 74)

Προφανώς, αν «τροφοδοτηθεί» ο τύπος με ακέραιους αριθμούς, δίνει πάντα ρητό αριθμό, αφού δομείται με τις πράξεις αφαίρεση και πολλαπλασιασμός, έχοντας μοναδική διαίρεση, τελικά με τον αριθμό 2.

Για παράδειγμα, το τρίγωνο OKI, έχει κορυφές O(0,0), K(4,8) και I(2,10), με $\overrightarrow{OK} = (4,8)$, $\overrightarrow{OI} = (2,10)$,

$$\overrightarrow{KI} = (2-4, 10-8) = (-2, 2), \text{ και: } (OKI) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OI})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |40 - 16| = \frac{1}{2} |24| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

$$\text{ή } (OKI) = \frac{1}{2} (OK\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12 \cdot 4}{2} = 12, \text{ αφού το τρίγωνο K\Gamma O με βάση } (O\Gamma) = 12, \text{ έχει προφανώς ύψος } 4.$$

Σχόλιο: Όποιος θέλει, έχει αρκετή δουλειά να κάνει.

Τα χρώματα: Ο «χάρτης» μας, προφανώς δεν μπορεί να χρωματιστεί με δύο χρώματα μόνο, αφού για παράδειγμα, στον «κόμβο» I, συντρέχουν συνοριακές γραμμές από τρία «κράτη», δηλαδή μονός αριθμός.

Κοιτάζτε και τον «κόμβο» Λ, και παρατηρήστε ότι στον «κόμβο» Ξ, θα μπορούσε το (1) να είναι σαν το (6).

Σχόλιο: Όπως θα καταλάβατε, «παίζουμε το παιχνίδι» χρωματισμού ενός «πολιτικού χάρτη», όπου προφανώς η απαίτηση είναι τα διαφορετικά χρώματα, εκατέρωθεν μιας «συνοριακής γραμμής», και στα μαθηματικά, ο χρωματισμός αυτός λέγεται «κανονικός χρωματισμός». Αρχικά αποδείχθηκε ότι αρκούν πέντε χρώματα, «θεώρημα πέντε χρωμάτων», για έναν «κανονικό χρωματισμό», και στη συνέχεια, για περισσότερα από 100 χρόνια, παρέμεινε σαν «εικασία», η δυνατότητα των «τεσσάρων χρωμάτων», μέχρι που προέκυψε απόδειξη, και έτσι η «εικασία» αναβαθμίστηκε σε θεώρημα. Η πρώτη απόδειξη, έγινε το 1976, από τους μαθηματικούς K. Appel και W. Haken, με τη βοήθεια των υπολογιστών, και το τελευταίο αυτό στοιχείο, «διαολίζει» κάποιους, θεωρητικούς κυρίως μαθηματικούς, που δέχονται σαν απόδειξη, μόνο ότι προκύπτει με τον «κλασικό τρόπο». Έτσι οι προσπάθειες, για «κλασική απόδειξη» συνεχίζονται.

Το θεώρημα «των δύο χρωμάτων»: «Κάθε επίπεδος χάρτης, ο οποίος σχηματίζεται από ευθείες και κλειστές καμπύλες, είναι δυνατόν να χρωματιστεί κανονικά με δύο χρώματα μόνο», μπορεί εύκολα να αποδεχθεί με τη «Μαθηματική Επαγωγή», ως προς τον αριθμό των ευθειών και των κλειστών καμπυλών. (σχ. βιβλίο κατ. §4.1)

➤ Αξίζει να δούμε, πώς ένας «χάρτης», για τον οποίο αρκούν τρία χρώματα, με μια μικρή παρέμβαση, απαιτεί τέσσερα χρώματα.

Στο πρώτο σχήμα, ο κεντρικός «κόμβος», χαρακτηρίζεται σαν κορυφή «περιττής τάξης», αφού συντρέχει σε αυτήν περιττός αριθμός συνοριακών γραμμών. Στο δεύτερο σχήμα, κάθε σημείο τομής, του κύκλου, και μιας παλιάς συνοριακής γραμμής, είναι «περιττής τάξης».

