Αρχιμήδης ο Συρακούσιος

Η πιό εξέχουσα φυσιογνωμία, από τούς μαθηματικούς τής αρχαιότητας, είναι ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος. Ο χαρακτηρισμός αυτός οφείλεται στό πλήθος τών έργων του και στήν ποιότητα τού περιεχομένου τους. Από όλους χωρίς αμφισβήτηση θεωρείται σάν ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων τών εποχών και όλων τών εθνών.

Ενώ ο Ευκλείδης αποτελεί τό πρότυπο δασκάλου και εκπαιδευτικού συγγραφέα, ο Αρχιμήδης αποτελεί τό περίλαμπρο πρότυπο ερευνητή· και τούτο γιατί στά έργα του δέν ενδιαφέρεται τόσο στό νά παρουσιάσει ομαλά και εκπαιδευτικά μιά μαθηματική αλήθεια, αλλά στό νά τήν ανακαλύψει, τήν αποδείξει και τήν προσφέρει στή χρήση τών ώριμων ερευνητών. Σέ αντίθεση μέ τόν Αρχιμήδη, τόν Ευκλείδη τόν ενδιαφέρει άμεσα ή αλήθεια αυτή νά είναι παρουσιασμένη έτσι ώστε νά μπορεί νά διδαχθεί και κατανοηθεί από αρχάριους.

Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε τό **287** π.Χ. στίς Συρακούσες[(1)]. Πατέρας του ήταν ο αστρονόμος **Φειδίας**, τού οποίου ή οικογένεια συνδεόταν μέ δεσμούς φιλίας και συγγένειας μέ τό βασιλικό γένος τών Συρακουσών. Ταξίδεψε γιά εκπαιδευτικούς λόγους στήν Αίγυπτο και ήρθε σέ επαφή μέ τούς διαδόχους τού Ευκλείδη, **Ερατοσθένη, Δοσίθεο** και άλλους, μέ τούς οποίους συνδέθηκε μέ δεσμά φιλίας και στούς οποίους αφιέρωσε αργότερα όσα έργα έγραψε μετά τήν επιστροφή του στίς Συρακούσες. Ήταν ακόμη φίλος και συσπουδαστής τού **Κόνωνα τού Σάμιου**, πρός τόν οποίο μάλιστα έστελνε γιά έλεγχο τίς πρώτες του εργασίες.

Τά έργα τού Αρχιμήδη είναι πολλά και αναφέρονται σέ πολλούς τομείς τής επιστήμης. Δέν είναι όμως τό πλήθος εκείνο πού αφίνει έκθαμβο τόν αναγνώστη τών έργων του, όσο τό περιεχόμενο τών μαθηματικών αληθειών πού δίνει.

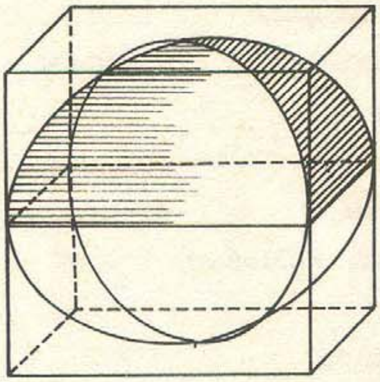
Σέ ένα χειρόγραφο, πού βρέθηκε στήν Κωνσταντινούπολη στίς αρχές τού αιώνα (1906), περιέχεται ένα απόσπασμα ενός έργου του, μέ τίτλο "**Περί τών μηχανικών θεωρημάτων πρός Ερατοσθένην έφοδος**" (μέθοδος), τού οποίου τό περιεχόμενο είναι μεθοδολογικού χαρακτήρα και στό οποίο καθιερώνεται ή διάκριση ανάμεσα στή **μέθοδο ανακάλυψης** και τή **μέθοδο απόδειξης** τών γεωμετρικών αληθειών. Εδώ ο Αρχιμήδης, χωρίς επιφύλαξη, μάς λέει ότι, ενώ ή απόδειξη μιάς γεωμετρικής αλήθειας πρέπει νά γίνεται αυστηρά, μέ καθαρά γεωμετρικές διαδικασίες, ή ανακάλυψη τής αλήθειας αυτής μπορεί νά γίνει μέ οποιοδήποτε τρόπο και μέσο πού νά

---

(1). Οι Συρακούσες ήταν αποικία τών Κορινθίων και ιδρύθηκε τόν 8 αι. π.Χ. (743 π.Χ).

μπορεί νά μάς οδηγήσει σέ αυτή. Έτσι, κάνοντας χρήση μιάς ελεύθερης διαδικασίας ανακάλυψης τών αληθειών, καταλήγει σέ θεωρήματα εκπληκτικά πού αφήνουν άναυδο τόν αναγνώστη τών έργων του.

Στό σημείο αυτό άς κάνουμε μία υπόθεση γιά νά δοθεί ένα παράδειγμα ανακάλυψης μιάς αλήθειας. Έστω λοιπόν τό κοινό μέρος δύο κυκλικών κυλίνδρων, ίσης διαμέτρου, πού κόβονται ώστε οι άξονές τους νά είναι κάθετοι. Τό στερεό πού παράγεται έτσι είναι αυτό πού εμφανίζεται στό διπλανό σχήμα, εγγεγραμμένο σέ κύβο μέ ακμή ίση μέ τή διάμετρο τών κυλίνδρων. Θέλοντας λοιπόν νά προσδιορίσουμε τόν όγκο του, κατασκευάζουμε τό στερεό, είτε από πηλό είτε από κερί, μέ όσο τό δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια· κατασκευάζουμε ακόμη καί τό εσωτερικό τού κύβου.



$V_x = \frac{2}{3} V_{κύβου}$

Άν τώρα ξεχειλίσουμε τόν κύβο μέ νερό καί βαπτίσουμε μέσα του τό στερεό, μπορούμε, από τό νερό πού θά υπερχειλίσει, νά προσδιορίσουμε τί μέρος τού κύβου είναι τό στερεό μας.

Ό Αρχιμήδης βρήκε ότι έχει όγκο τά $\frac{2}{3}$ τού όγκου τού κύβου καί στή συνέχεια, ξέροντας τί ψάχνει, τό απόδειξε μέ αυστηρά γεωμετρικές διαδικασίες[(1)]. Είναι δέ γνωστό, πώς όταν ξέρει κανείς τό ζητούμενο σέ μιά πρόταση, ή απόδειξη είναι λιγώτερο δύσκολη από τήν τυφλή αναζήτηση τής αλήθειας. Τέτοιες λοιπόν διαδικασίες, γιά τήν ανακάλυψη τών θεωρημάτων, ό Αρχιμήδης τίς θεωρούσε αναγκαίες, όπως ειλικρινά μάς λέει στήν "έφοδό" του.

Στίς αποδείξεις τών προτάσεών του ό Αρχιμήδης κάνει εκτεταμένη χρήση τής λεγόμενης γεωμετρικής άλγεβρας, τήν οποία μάλιστα βελτίωσε σέ σχέση μέ τόν Ευκλείδη. Χρησιμοποίησε ακόμη καί ανάπτυξε πολύ τόν απειροστικό λογισμό, τόν οποίον είδαμε νά χρησιμοποιεί γιά πρώτη φορά **ό Ιπποκράτης ό Χίος** καί αργότερα **ό Εύδοξος**

Από τό συνολικό έργο τού Συρακούσιου μαθηματικού σώζονται μόνο **16** έργα του στήν Ελληνική καί Αραβική γλώσσα. Από τά χαμένα έργα του γνωρίζουμε τούς τίτλους τών **25** από αυτά.

Τά έργα του πρέπει νά είχαν όλα εισαγωγές, μέ τή μορφή ίσως επιστολώνπεριγραφών, όπως φαίνεται από τίς εισαγωγές αυτών πού σώθηκαν. Ή δομή τών προτάσεών του είναι ίδια μέ εκείνη τών "Στοιχείων"· σέ πολλές όμως από αυτές έχει αλλάξει ή δομή αυτή από τούς αντιγραφείς, οι οποίοι επίσης έχουν αλλάξει σέ πολλά καί τή δωρική σικελική διάλεκτο τών πρωτοτύπων.

(1). Σέ σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, μέ εξισώσεις τών κυλίνδρων τίς $x^2+\psi^2=R^2$ καί $\psi^2+z^2=R^2$ ό όγκος τού στερεού μας δίνεται από $V=8\cdot\int_{\psi=0}^{R}\int_{x=0}^{x=\sqrt{R^2-\psi^2}} z\cdot dx\cdot d\psi=\frac{2}{3}(2R)^3.$

Σήμερα, τά έργα του πού σώζονται δέν μπορούμε νά τά ταξινομήσουμε χρονολογικά καί έτσι αδυνατούμε νά παρακολουθήσουμε τήν εξελικτική πορεία τών σκέψεων καί ιδεών του. Άς δούμε όμως τά έργα αυτού τού γίγαντα τής σκέψης.

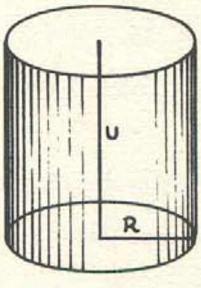
Σώθηκαν	Χάθηκαν
Περί σφαίρας καί κυλίνδρου	Περί τριγώνων
Κύκλου μέτρησις	Περί τετραπλεύρων
Περί κωνοειδέων καί σφαιροειδέων	Περί 13 ημικανονικών πολυέδρων
Περί ελίκων	Αριθμητικά
Επιπέδων ισορροπιών	Περί ζυγών
Ψαμμίτης	Κεντροβαρικά
Τετραγωνισμός παραβολής	Πλινθίδες καί κύλινδροι
Οχουμένων	Κατοπτρικά
Στομάχιον	Ισοπεριμετρικά
Περί τών μηχανικών θεωρημάτων πρός Ερατοσθένην έφοδος	Στοιχεία μηχανικών
Λήμματα	Ισορροπίαι
Πρόβλημα Βοεικόν	Σφαιροποιΐα
Περί τού επταγώνου	Στοιχεία επί τών στηρίξεων
Περί τών επιφαυόντων κύκλων	Περί παραλλήλων γραμμών
Αρχαί τής γεωμετρίας	Περί βαρύτητος καί ελαφρότητος
Περί τού υδραυλικού ωρολογίου	Περί κοίλων παραβολικών καυστικών κατόπτρων
	Προοπτική
	Επισίδια βιβλία
	Βαρυουλκός, Υδροσκοπίαι, Πνευματική
	Καύσις διά τών κατόπτρων
	Περί Αρχιτεκτονικής
	Περί δρομομέτρων
	Στοιχεία τών μαθηματικών
	Περί τής διαμέτρου
	Συγγράμματα έν επιτομή
	Περί τετραγωνισμού τού κύκλου
	Δεδομένα

Τά έργα αυτά καί όσα άλλα χάθηκαν, είναι φυσικό νά υπήρχαν στά μεγάλα κέντρα του Ελληνισμού, στήν Αλεξάνδρεια, στήν Πέργαμο, στή Ρόδο, στήν Αθήνα καί αλλού. Στούς χριστιανικούς χρόνους βέβαια ακολούθησαν καί αυτά τήν τύχη πού είχαν οι βιβλιοθήκες αυτών τών κέντρων καί έτσι σώθηκαν ελάχιστα.

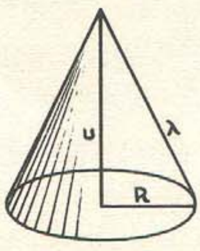
Πρώτη έκδοση έργων τού Αρχιμήδη αναφέρεται ότι έγινε γύρω στό 550 μ.Χ.

από τόν αρχιτέκτονα **Ισίδωρο τόν Μιλήσιο**, ό οποίος έκδοσε τό "Περί σφαίρας καί κυλίνδρου" καί τό "Κύκλου μέτρησις". Σάν δεύτερη έκδοση αναφέρεται εκείνη τού **Λέοντα τού Μαθηματικού**, ό οποίος κατά τόν **9** αι.μΧ. σέ ένα τόμο περίλαβε αρκετά έργα τού Αρχιμήδη. Άς δούμε όμως τό περιεχόμενο τών έργων του.

Από τά ωραιότερα έργα του, τό "**Περί σφαίρας καί κυλίνδρου**", περιλαμβάνει σέ 2 βιβλία, προτάσεις τών οποίων ή απουσία από τά "Στοιχεία" είναι έντονη. Στό πρώτο από αυτά περιέχονται **44** προτάσεις πού αναφέρονται στήν κυρτή επιφάνεια καί τόν όγκο κυλίνδρου καί κολούρου κώνου καθώς καί στήν επιφάνεια καί τόν όγκο σφαίρας καί σφαιρικού τομέα. Ενδεικτικά αναφέρουμε τίς εκφωνήσεις γιά τήν επιφάνεια σφαίρας καί κώνου:



$E=\pi(\sqrt{2R\cdot\upsilon})^2$



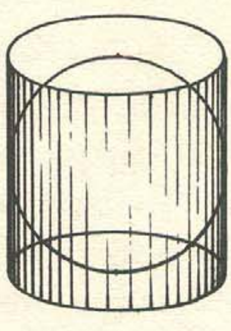
$E=\pi(\sqrt{R\lambda})^2$

"**Πάσης σφαίρας ή επιφάνεια είναι τετραπλασία τού μεγίστου κύκλου αυτής**" δηλαδή $E_{\sigma\varphi}=4\pi R^2$.

Καί γιά τόν κώνο:

"**Παντός ισοσκελούς κώνου ή επιφάνεια άνευ τής βάσεως είναι ίση πρός κύκλον, τού οποίου ή ακτίς είναι μέση ανάλογος τής πλευράς τού κώνου καί τής ακτίνος τού κύκλου, ό οποίος είναι βάσις τού κώνου**". Δηλαδή είναι: $E=\pi\rho^2$ μέ $\rho=\sqrt{R\cdot\lambda}$ ή $E=\pi R\lambda$.

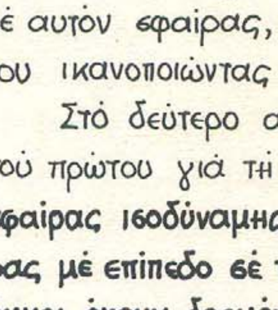
Εδώ πρέπει νά πούμε ότι τό διπλανό θεώρημα πού δίνει τή σχέση τών όγκων τού κυλίνδρου καί τής εγγεγραμμένης σέ αυτόν σφαίρας, μετά τό θάνατό του χαράχτηκε στόν τάφο του ικανοποιώντας επιθυμία του.



$V_{\kappa\upsilon\lambda.}=\frac{3}{2}V_{\sigma\varphi.}$

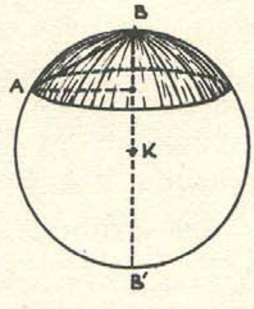
$E_{\kappa\upsilon\lambda.\,o\lambda.}=\frac{3}{2}E_{\sigma\varphi.}$

Στό δεύτερο από τά βιβλία εφαρμόζει τά συμπεράσματα τού πρώτου γιά τή λύση προβλημάτων, όπως "**ή κατασκευή σφαίρας ισοδύναμης μέ κώνο ή κύλινδρο**", "**ή διαίρεση σφαίρας μέ επίπεδο σέ τμήματα τών οποίων οί επιφάνειες ή οί όγκοι έχουν δοσμένο λόγο**", καί άλλα. Στό βιβλίο αυτό περιέχονται **9** προβλήματα από τά οποία μερικά ισοδυναμούν μέ τή λύση εξισώσεων **α'** καί **β'** βαθμού, άλλα ανάγονται στό πρόβλημα τού διπλασιασμού τού κύβου καί άλλα στή λύση μιάς πλήρους τριτοβάθμιας εξίσωσης.



$V_{\sigma\varphi}=4V_{\kappa\omega\nu}=4\frac{\pi R^2}{3}R$

Ό Αρχιμήδης δέν δίνει μέ λεπτομέρειες τίς λύσεις, αλλά παραπέμπει τόν αναγνώστη στό τέλος τού έργου, τό οποίο όμως χάθηκε. Στό κεφάλαιο, πού αναφέρεται στίς γεωμετρικές κατασκευές στήν αρχαιότητα, αναφερόμαστε στή χαμένη λύση ενός από



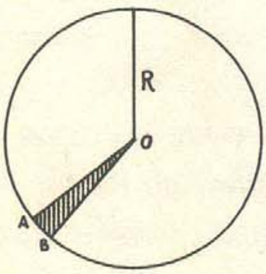
$E_{\sigma\varphi.\tau\mu\eta\mu.}=\pi\cdot(AB)^2$

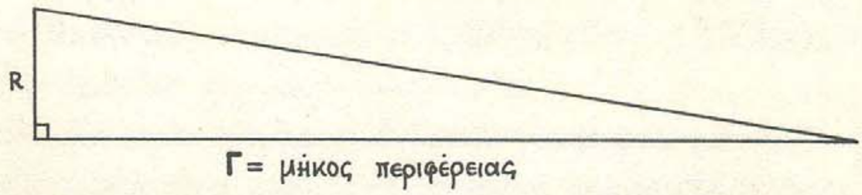
τά προβλήματα αυτά. Πάντως ή λύση από τούς αρχαίους Ελληνες των εξισώσεων τρίτου βαθμού αποτελεί ένα από τά αινίγματα πού μέχρι σήμερα δέν απαντήθηκαν.

Η πραγματεία του " **Κύκλου μέτρησις** ", μέ τίς τρείς προτάσεις πού περιέχει, αναφέρεται στήν προσπάθειά του νά υπολογίσει τό μήκος τής περιφέρειας.

Η συμβολή τού Αρχιμήδη στό πρόβλημα τού **τετραγωνισμού τού κύκλου** καί τής **ευθειοποίησης τής περιφέρειας**, δηλαδή τής κατασκευής μέ χάρακα καί διαβήτη τμήματος ίσου μέ τό "ξετύλιγμα" τής περιφέρειας, ήταν μεγάλη. Στό κεφάλαιο τού τετραγωνισμού τού κύκλου θά δούμε μέ όλες τίς λεπτομέρειες αυτή του τή συμβολή· προσπάθεια πού δίκαια τού χάρισε τόν τίτλο τού πρώτου πού έλυσε τό πρόβλημα αυτό. Πρώτος αυτός έδωσε τόν πραγματικό χαρακτήρα τού προβλήματος μέ τό θεώρημά του, σύμφωνα μέ τό οποίο:

" **Πάς κύκλος ίσος εστί τριγώνῳ ορθογωνίῳ ού ή μέν έκ τού κέντρου ίση μιά τών περί τήν ορθήν, ή δέ περίμετρος τῇ βάσει** ".





Στό θεώρημα αυτό πρέπει νά κατάληξε κάνοντας τήν παραδοχή ότι ό κύκλος είναι τό άθροισμα τών απειροστών τριγώνων OAB. Ετσι όμως πρόκυψε ή ανάγκη έκφρασης τού μήκους τής περιφέρειας συναρτήσει τής ακτίνας. Στή συνέχεια κάνει τήν παραδοχή ότι τό μήκος τής περιφέρειας περιέχεται ανάμεσα στίς περιμέτρους τών αντίστοιχων εγγεγραμμένων καί περιγεγραμμένων πολυγώνων καί ξεκινώντας από τό κανονικό εξάγωνο καί διπλασιάζοντας συνέχεια τίς πλευρές μέχρι τού κανονικού **96**-γώνου,(1) φτάνει στήν περίφημη σχέση του $3\frac{10}{71}\cdot 2R < Γ < 3\frac{1}{7}2R$. Η σχέση αυτή μάς οδηγεί στήν $3\frac{10}{71} < \frac{Γ}{2R} < 3\frac{1}{7}$ πού δίνει τή τιμή τού λόγου π μέ τή σχέση $3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots$

Τήν προσέγγιση αυτή ό Αρχιμήδης θεώρησε ικανοποιητική καί δέν προχώρησε περισσότερο. Πιστεύεται όμως ότι μέ τήν ίδια διαδικασία καί γιά πολύγωνα **384** πλευρών, έφτασε τήν προσέγγιση μέχρι τής τιμής $\pi \cong 3{,}1416$. Τήν πληροφορία αυτή παίρνουμε από τόν **Ηρωνα**, ό οποίος αναφέρει ότι ό Αρχιμήδης στό έργο του "**Πλινθίδες καί Κύλινδροι**" περιορίζει τό π μεταξύ τών ορίων $\frac{211872}{67441} < \pi < \frac{195882}{62351}$.

Η απόδειξη τής πιό πάνω σχέσης είναι ή πρώτη σωζόμενη στήν ιστορία τού πολιτισμού, ή οποία κατορθώνει έναν αριθμητικό υπολογισμό μέ τή βοήθεια τών ορίων.

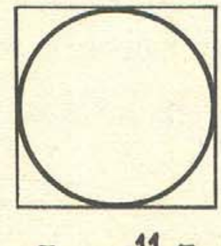
Στή συνέχεια ό Αρχιμήδης χρησιμοποιώντας τήν τιμή $\pi = \frac{22}{7}$ δίνει τήν πρότα-

---

(1). Είναι γνωστός ό τύπος τού Αρχιμήδη πού δίνει τήν πλευρά κανονικού **2ν**-γώνου όταν είναι γνωστή ή πλευρά τού κανονικού **ν**-γώνου. Ο τύπος αυτός σέ σύγχρονη γλώσσα είναι: $\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$, όπου R ή ακτίνα τού περιγεγραμμένου κύκλου.

ση, πού αποτελεί τόν πρώτο τύπο υπολογισμού τού εμβαδού ενός κύκλου. Σύμφωνα μέ αυτή:

" **Ὁ κύκλος πρός τό από τής διαμέτρου τετράγωνο λόγον ἔχει ὄν 11 πρός 14.** "

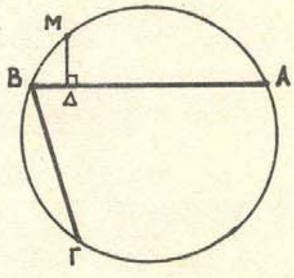


$E_{κυκ} = \frac{11}{14} \cdot E_{τετρ.}$

πρόταση πού αποτελεί τό πρώτο χρήσιμο καί συγκεκριμένο αποτέλεσμα από όλες τίς προσπάθειες πού έγιναν γιά τή λύση τού προβλήματος τού τετραγωνισμού τού κύκλου. Εδώ φαίνεται δηλαδή ότι ο Αρχιμήδης είναι ο πρώτος πού αντικατέστησε τήν ιδέα τής κατασκευής, μέ χάρακα καί διαβήτη, κύκλου ισοδύναμου μέ τετράγωνο, μέ τήν προσπάθεια μέτρησής του.

Οι πιό πάνω προτάσεις τού Αρχιμήδη, όπως αναφέραμε, περιέχονται στήν πραγματεία του "Κύκλου μέτρησις", πού ανήκε όμως σέ ένα ευρύτερο σύγγραμμα τού ιδίου καί πού προοριζόταν γιά σχολική χρήση. Εδώ βρισκόταν καί ή σπουδαία πρόταση, σύμφωνα μέ τήν οποία:

" **Ἄν σέ κύκλο γράφουμε τήν τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓ καί από τό μέσον Μ τού τόξου ΑΒΓ φέρουμε κάθετο ΜΔ πάνω στή μεγαλύτερη χορδή ΑΒ τότε θά ισχύει ΑΔ=ΔΒ+ΒΓ.** "

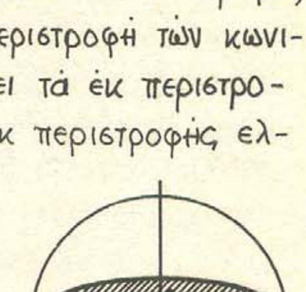


Ἡ πρόταση αυτή έφτασε σέ μάς μέσω τού Πέρση μαθηματικού **Al Biruni**, ο οποίος μάλιστα δίνει τρείς αποδείξεις τού Αρχιμήδη γιά τό πρόβλημα αυτό.

Εδώ πρέπει νά πούμε ότι είναι ευνόητο πώς αυτά τά δύο έργα, τό "περί σφαίρας καί κυλίνδρου" καί τό "κύκλου μέτρησις", αποτελούν συμπλήρωμα τών "Στοιχείων" τού Ευκλείδη.

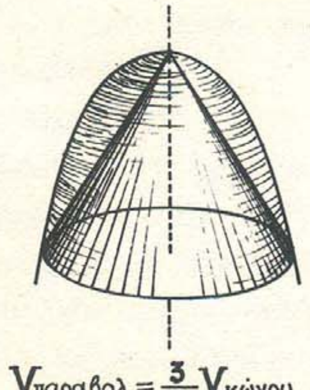
Ἕνα τρίτο θαυμαστό έργο τού Αρχιμήδη είναι τό "**περί Κωνοειδέων καί Σφαιροειδέων**". Στό έργο αυτό, στό οποίο περιλαμβάνονται **32** θεωρήματα καί **1** πόρισμα, μελετούνται ιδιότητες τών επιφανειών πού γεννιούνται από τήν περιστροφή τών κωνικών τομών γύρω από τόν άξονά τους. "Κωνοειδή" ονομάζει τά έκ περιστροφής παραβολοειδή καί υπερβολοειδή, ενώ "Σφαιροειδή" τά έκ περιστροφής ελλειψοειδή.

Στό θεώρημα 4 δίνει τό εμβαδόν έλλειψης μέ τή βοήθεια τής σχέσης $\frac{E_{ελλ.}}{E_{κυκλ.}} = \frac{2β}{2α}$ όπου **β, α** ο μικρός καί ο μεγάλος ημιάξονας τής έλλειψης καί $E_{κυκλ.}$ τό εμβαδόν τού περιγεγραμμένου, στήν έλλειψη, κύκλου. Ἡ σχέση αυτή μάς οδηγεί προφανώς στό γνωστό μας τύπο $E_{ελλ} = παβ$.

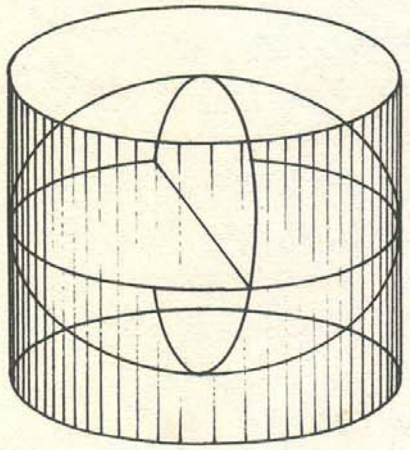


Γενικά στό έργο αυτό παρουσιάζονται σχέσεις πού προκύπτουν από ευφυέστατους συλλογισμούς, πού δέν είναι στήν ουσία παρά ολοκληρώματα, μέ διαφορετική παρουσίαση. Οι συλλογισμοί αυτοί χρησίμευσαν σάν οδηγοί γιά παρόμοιες έρευνες πού έγιναν στή γεωμετρία από μεταγενέστερους, πρίν από τή δημιουργία τού ολοκληρωτικού λογισμού.

Ο Εύδοξος ό Κνίδιος, όπως είδαμε, ήταν ό πρώτος πού επινόησε τή μέθοδο, πού από τούς νεώτερους ονομάστηκε "Μέθοδος τής εξαντλήσεως". Τήν μέθοδο αυτή χρησιμοποίησε ό Ευκλείδης μέ επιτυχία γιά τόν υπολογισμό εμβαδών καί όγκων· όμως εκτεταμένη εφαρμογή της έκανε ό Αρχιμήδης. Μπορούμε έτσι νά πούμε ότι ό Εύδοξος σάν εμπνευστής καί οί Ευκλείδης καί Αρχιμήδης σάν εφαρμοστές τών πρωτότυπων ιδεών τού Ευδόξου, υπήρξαν οί πρωτεργάτες τού ολοκληρωτικού λογισμού.

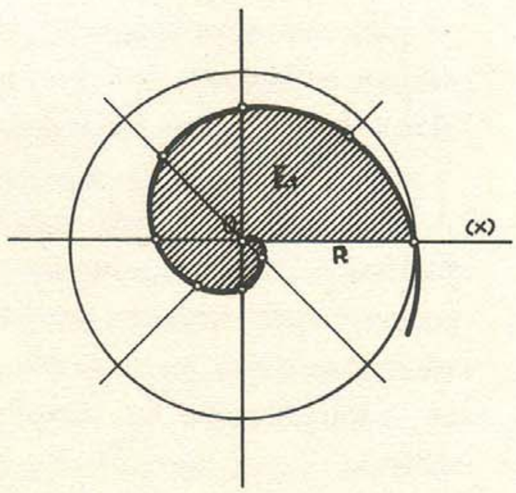


$V_{\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda.} = \frac{3}{2} V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon}$



$V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \frac{3}{2} V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho o\epsilon\iota\delta o\acute{\upsilon}\varsigma}$

Ένα άλλο μεγάλο έργο τού Αρχιμήδη είναι τό "**Περί ελίκων**". Σέ αυτό, μέ τά **28** θεωρήματα καί **6** πορίσματα πού περιέχει, γίνεται από τόν Αρχιμήδη μεθοδική μελέτη τών καμπύλων, πού γιά πρώτη φορά απασχόλησαν τόν **Κόνωνα τόν Σάμιο**[1]. Οί καμπύλες αυτές σήμερα ονομάζονται "Έλικες τού Αρχιμήδη" καί σέ πολικές συντεταγμένες έχουν εξίσωση $\rho = \frac{R}{2\pi}\cdot\theta$, όπου R ή ακτίνα τού κύκλου πού φαίνεται στό σχήμα.



Τήν έλικα τήν ορίζει σάν τροχιά ενός κινητού σημείου πού κινείται ομαλά πάνω σέ μιά ευθεία Οx ή οποία ταυτόχρονα στρέφεται ομαλά γύρω από τήν αφετηρία Ο τής κίνησης.

Μέ τή βοήθεια τής καμπύλης αυτής ό Αρχιμήδης πέτυχε τήν ενδοξότερη ίσως "πρωτειά", έλυσε δηλαδή γιά πρώτη φορά στήν ιστορία τών μαθηματικών, τό διασημότερο από τά προβλήματα τής αρχαιότητας, τόν τετραγωνισμό τού κύκλου. Ή λύση τού προβλήματος, πού είναι θεωρητικού χαρακτήρα, περιέχεται στό θεώρημα **18** καί είναι ιδιαίτερα ευφυής· δίνεται δέ στό ειδικό κεφάλαιο πού ακολουθεί καί πού είναι αφιερωμένο ειδικά στό πρόβλημα αυτό.

Εκτός όμως από τό **18** σημαντικώτατο είναι καί τό θεώρημα, σύμφωνα μέ

(1). **Κόνων ό Σάμιος**. Μαθηματικός καί Αστρονόμος· έζησε στήν Αλεξάνδρεια κοντά στόν Πτολεμαίο τόν Ευεργέτη καί τή σύζυγό του Βερενίκη, αφού προηγούμενα είχε περιοδεύσει στή Μεσόγειο. Ανακάλυψε τόν αστερισμό πού τού έδωσε τό όνομα "**Βερενίκης πλόκαμος**". Έγραψε αστρονομικό σύγγραμμα σέ 7 βιβλία πού χάθηκαν. Πέθανε πρόωρα γύρω στό 240 π.Χ.

τό οποίο : " **Τό εμβαδόν τής επιφανείας πού περικλείεται από τήν έλικα, κατά τήν πρώτη περιστροφή καί τήν ευθεία Οx, ισούται μέ τό τρίτον τού εμβαδού τού κύκλου (Ο,R).** "(1) Δηλαδή είναι $E_x = \frac{1}{3}\pi R^2$

Συνεχίζοντας δίνει τό θεώρημα κατά τό οποίο :

" **Τό εμβαδόν E_2 πού περικλείει ή έλικα κατά τή δεύτερη περιστροφή της, είναι 6-πλάσιο τού περικλειόμενου κατά τήν πρώτη.** "

$E_1 = \frac{1}{3}\pi R^2$

καί όλα τά επόμενα εμβαδά $E_3, E_4, E_5, \ldots$ $\quad E_2 = 6 \cdot E_1 = 2\pi R^2$

Σέ σύγχρονο συμβολισμό, τά θεωρήματα αυτά, δίνουν τά εμβαδά μέ τούς διπλανούς τύπους.

$E_3 = 2 \cdot E_2 = 4\pi R^2$

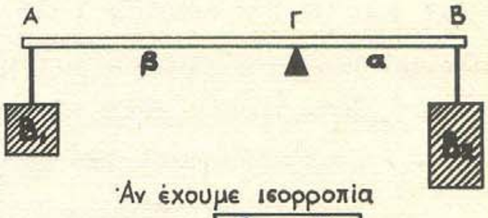
$E_4 = 3 \cdot E_2 = 6\pi R^2$

$\vdots \quad \vdots$

Τά πιό πάνω θεωρήματα, όπως καί πολλά άλλα, αποδεικνύει κάνοντας χρήση τού ολοκληρωτικού λογισμού, στήν αρχική του βέβαια μορφή.

Περίφημο είναι ακόμη τό έργο του μέ τίτλο " **Περί επιπέδων ισορροπιών** ". Τό έργο αυτό, πού τό αποτελούν 2 βιβλία, πραγματεύεται μέ αυστηρότητα θέματα **στατικής** καί αποτελεί τήν πρώτη επιστημονική πραγματεία μέ τέτοιο περιεχόμενο.

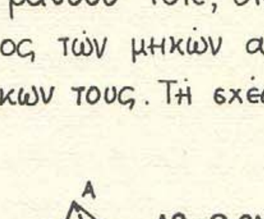
Τό πρώτο βιβλίο, πού περιέχει **15** θεωρήματα καί **2** πορίσματα, αρχίζει μέ τόν προσδιορισμό τών συνθηκών ισορροπίας μιάς βαρειάς ευθείας πού στηρίζεται σέ κατακόρυφο υπομόχλιο. Στή συνέχεια δίνει τή σχέση πού πρέπει νά συνδέει τά βάρη καί τά μήκη ανάρτησης από τό υπομόχλιο Γ, γιά νά υπάρχει ισορροπία. Τήν ισορροπία τής ράβδου χρησιμοποιούσε καί γιά τήν εύρεση γεωμετρικών αληθειών.

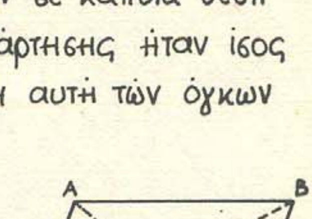


Αν έχουμε ισορροπία ισχύει $\boxed{\frac{B_1}{B_2} = \frac{\alpha}{\beta}}$

Έστω, γιά παράδειγμα, ότι ήθελε νά βρεί τή σχέση όγκων ενός κύβου καί τής, εγγεγραμμένης σέ αυτό, σφαίρας. Κατασκεύαζε από ομοειδές υλικό (πηλό, κερί) τά δύο στερεά καί μετά τά αναρτούσε στά άκρα τής ράβδου· τότε, όταν σέ κάποια θέση τού υπομόχλιου ισορροπούσε ή ράβδος, ό λόγος τών μηκών ανάρτησης ήταν ίσος μέ τό λόγο τών βαρών, δηλαδή τό λόγο τών όγκων τους. Τή σχέση αυτή τών όγκων τους μετά, αποδείκνυε γεωμετρικά.

Συνεχίζοντας τήν πραγματεία του ό Αρχιμήδης προχωρεί στόν προσδιορισμό τών κέντρων βάρους τών βασικών ευθυγράμμων σχημάτων, τριγώνου, παραλληλογράμμου καί τραπεζίου.

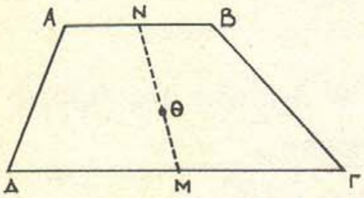




Στό δεύτερο βιβλίο, πού περιέχει **10** θεωρήματα, μελετάται τό κέντρο βάρους επιπε-

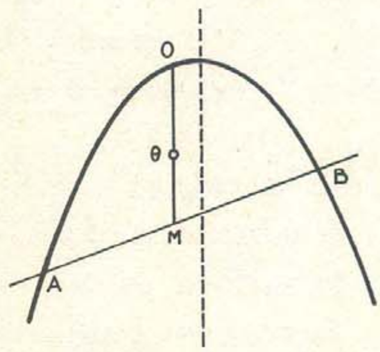
(1). Σέ σύγχρονη γλώσσα, άν θεωρήσουμε τήν έλικα μέ εξίσωση $\rho = \frac{R}{2\pi}\cdot\theta$, τό εμβαδόν E_1 θά είναι: $E_1 = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\rho^2 d\theta = \frac{1}{3}\pi R^2$, όπου R ή ακτίνα τού πρώτου κύκλου (0).

δων παραβολικών τμημάτων. Πιστεύεται ότι θά υπήρχαν, άν καί δέν σώθηκαν, καί αντίστοιχες μελέτες γιά τά κέντρα βάρους υπερβολικών καί ελλειπτικών τμημάτων.



$$\frac{\theta N}{\theta M}=\frac{2\cdot\Delta\Gamma+AB}{2\cdot AB+\Delta\Gamma}$$

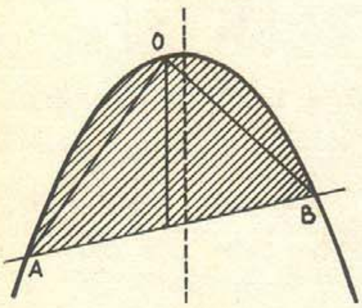
Γιά τό τυχαίο παραβολικό τμήμα OAB, αποδεικνύει ότι τό κέντρο βάρους του βρίσκεται πάνω στή "διάμετρο" του OM καί ότι ικανοποιεί τή σχέση $\frac{O\theta}{\theta M}=\frac{3}{2}$. Σάν διάμετρο εννοεί τήν από τό μέσον τής χορδής παράλληλο πρός τόν άξονα τής παραβολής.



Ο Αρχιμήδειος τίτλος τού πιό πάνω έργου πρέπει νά ήταν "**Μηχανικά**", καί τούτο γιατί στό έργο του "Τετραγωνισμός παραβολής" αναφέρει ότι τά κέντρα βάρους τριγώνου καί τραπεζίου προσδιορίστηκαν στό έργο του "Μηχανικά", ή όπως λέει ό ίδιος ".... δέδεικται γάρ τούτο έν τοίς μηχανικοίς ....". Φαίνεται λοιπόν ότι ό τίτλος "περί επιπέδων ισορροπιών" τέθηκε από μεταγενέστερους σέ ότι είχε σωθεί από τά "Μηχανικά" του.

Τά συμπεράσματα πού βγάζει από τό πιό πάνω έργο τά εφαρμόζει στήν πραγματεία του μέ τόν νεώτερο τίτλο "**Τετραγωνισμός παραβολής**" καί καταλήγει στό περίφημο θεώρημα σύμφωνα μέ τό οποίο:

"**Πάν τμάμα περιεχόμενον υπό ευθείας τε καί ορθογωνίου κώνου τομάς επίτριτον εστί τού τριγώνου τού έχοντος βάσιν τάν αυτάν τώ τμάματι καί ύψος ίσον.**"



$(OABO)=\frac{4}{3}(OAB)$

Τό εμβαδόν δηλαδή τού μεικτόγραμμου χωρίου OABO είναι τά $\frac{4}{3}$ τού εμβαδού τού τριγώνου OAB.

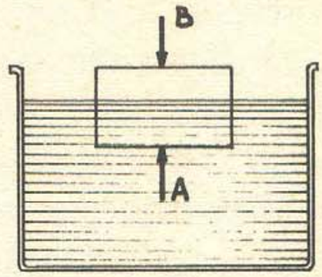
Τό θεώρημα αυτό επιτρέπει, μέσω τού τριγώνου OAB, τόν τετραγωνισμό τού παραβολικού τμήματος OABO, γι' αυτό καί χαρακτηρίζεται σάν "Τετραγωνισμός τής παραβολής". Έτσι γιά πρώτη φορά στήν ιστορία τετραγωνίστηκε καμπυλόγραμμο χωρίο πού δέν περιεχόταν μεταξύ ευθειών καί κύκλου μόνο. Βέβαια ό Αρχιμήδης δέν χρησιμοποίησε τόν όρο "παραβολή" αλλά τήν έκφραση "ορθογωνίου κώνου τομή". Ο όρος "παραβολή" χρησιμοποιήθηκε γιά πρώτη φορά, γιά τήν αντίστοιχη καμπύλη, αργότερα από τόν Απολλώνιο.

Στήν αρχή ό Αρχιμήδης απόδειξε τό πιό πάνω θεώρημα μέ διαδικασία πού περιείχε στοιχεία μηχανικής, γιαυτό θεώρησε καθήκον του νά τό αποδείξει καί μέ μέθοδο καθαρά γεωμετρική· έτσι τό απόδειξε ξανά κάνοντας χρήση τού αθροίσματος τών όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου μέ λόγο $\frac{1}{4}$. Γιά νά φανεί ή ποιότητα τής απόδειξης τού θεωρήματος καί μέσω αυτής, οι διαδικασίες πού ακολουθούσαν οἱ Ἕλληνες στὴ λύση τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων, τὴν ἐποχὴ ἐκείνη, θὰ δώσουμε σὲ μετάφραση τὴν ἀπόδειξη σὲ κεφάλαιο ποὺ ἀκολουθεῖ.

Μὲ τὸ ἔργο "Περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν" μπαίνει στὴν ἱστορία ἡ ἀρχὴ τοῦ μοχλοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ μελέτη πρέπει νὰ ἔβαλε στὸ στόμα τοῦ γίγαντα τῆς σκέψης τὴν περίφημη φράση "Δός μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινήσω".

Ενῶ μὲ τὸ πιὸ πάνω ἔργο ὁ Αρχιμήδης θεμελίωσε τὴ **Στατικὴ τῶν στερεῶν** καὶ κέρδισε τὸν αθάνατο τίτλο τοῦ "πατέρα τῆς Μηχανικῆς", μὲ τὸ ἔργο του "**Περὶ τῶν ἐν ὕδατι εφισταμένων ἢ οχουμένων**" θεμελίωσε τὴν **Υδροστατική**.

Εδῶ γιὰ πρώτη φορὰ διατυπώνεται ἡ εκπληκτικὴ ἄποψη ὅτι "**Ἡ επιφάνεια υγροῦ ποὺ ηρεμεῖ εἶναι σφαιρικὴ μὲ κέντρο τὸ κέντρο τῆς γῆς**" καὶ ἡ περίφημη θεμελιώδης αρχὴ τῆς Υδροστατικῆς κατὰ τὴν οποία: "**Κάθε βυθισμένο στερεὸ σῶμα, σὲ ισόπυκνο υγρό, δέχεται ἐκ τῶν κάτω δύναμη ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ υγροῦ ποὺ εκτοπίζει**".



$A = \varepsilon_{υγρ.} \cdot V_{βυθισμ.}$

Τῆς πραγματείας αυτῆς, ποὺ τὴν αποτελοῦσαν **2** βιβλία, σήμερα σώζονται στὴ Λατινικὴ **19** προτάσεις στὶς οποίες, εκτὸς ἀπὸ τὴ θεμελιώδη αρχὴ τῆς Υδροστατικῆς, εξετάζονται οἱ συνθῆκες ισορροπίας παραβολοειδῶν ἐκ περιστροφῆς τμημάτων ποὺ επιπλέουν σὲ υγρό.

Σχετικὰ μὲ τὴν ανακάλυψη τῆς θεμελιώδους αρχῆς τῆς Υδροστατικῆς, ποὺ ονομάζεται "**Αρχὴ τοῦ Αρχιμήδους**", αναφέρεται ἀπὸ τὸν Ρωμαῖο αρχιτέκτονα **Βιτρούβιο** (περὶ τὸ 25 π.Χ.) τὸ περιστατικὸ ανακάλυψῆς της στὴ μπανιέρα του. Τὸ περιστατικὸ αυτὸ αναφέρουμε λεπτομερέστερα σὲ κεφάλαιο ποὺ ακολουθεῖ.

Τὸ μόνο σωσμένο αριθμητικὸ ἔργο τοῦ Αρχιμήδη εἶναι εκεῖνο ποὺ φέρει τὸν τίτλο "**Ψαμμίτης**" (ψάμμος = ἄμμος). Τὸ περιεχόμενο τοῦ ἔργου εἶναι ὁ υπολογισμὸς τοῦ πλήθους τῶν κόκκων τῆς ἄμμου ποὺ θὰ χωροῦσε στὸ σύμπαν, ἂν ἦταν γεμάτο ἀπὸ αυτήν. Ἀπὸ τὴν εισαγωγὴ τοῦ ἔργου αυτοῦ μαθαίνουμε τὸ ὄνομα τοῦ πατέρα τοῦ Αρχιμήδη καὶ τὸ ὅτι ὁ ἴδιος εἶχε γράψει ἕνα ἔργο, αριθμητικοῦ περιεχομένου, αφιερωμένο στὸ μαθηματικὸ **Ζεύξιππο**, ποὺ σήμερα δυστυχῶς ἔχει χαθεῖ. Αφορμὴ γιὰ τὴν πιὸ πάνω συγγραφὴ πρέπει νὰ ἔδωσε στὸν Αρχιμήδη ἕνας στίχος τοῦ **Πινδάρου** (522-448 π.Χ.) κατὰ τὸν οποῖο

"..... **επεὶ ψάμμος αριθμὸν περιπέφευγεν,** ....."

(.... ὅπως ἡ ἄμμος διαφεύγει τὴν αρίθμηση, ...) ἢ οἱ αντίστοιχες πεποιθήσεις τῶν συγχρόνων του.

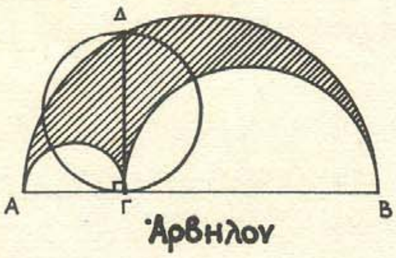
Στὸ ἔργο αυτὸ περιέχεται τὸ σύστημα αρίθμησης τῶν αρχαίων Ἑλλήνων καὶ ἦταν αφιερωμένο στὸ **Γέλωνα**, γυιὸ τοῦ τυράννου τῶν Συρακουσῶν **Ἱέρωνα**.

Εδῶ ὁ Αρχιμήδης θεωρεῖ τὴ διάμετρο τοῦ κόσμου μας, μέχρι τῶν απλανῶν, μικρότερη ἀπὸ $\mathbf{10^{10}}$ στάδια καὶ αποδεικνύει ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κόκκων τῆς μήκωνος πού χωρούν στή σφαίρα αυτή είναι μικρότερος τού αριθμού 10^{63}.

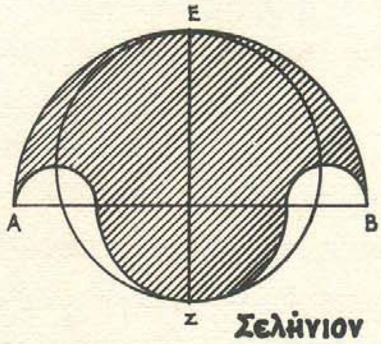
Τό σύστημα αρίθμησης θά τό δούμε λεπτομερέστερα σέ άλλο κεφάλαιο, όπου θά δώσουμε και τόν τρόπο τής επ' άπειρον κατασκευής τών πολύ μεγάλων αριθμών πού προτείνει ό Αρχιμήδης. Εδώ αξίζει νά αναφέρουμε τόν ισχυρισμό τού βυζαντινού **Νικόλαου Ραβδά** (14 αι. μ.Χ.) σύμφωνα μέ τόν οποίο τό σύστημα αρίθμησης μετά τίς εκατοντάδες εκατομμυρίων είναι άναρχο· "πέραν τούτου δέν υπάρχει πλέον τάξις" όπως μάς λέει χαρακτηριστικά. Θλιβερή απώλεια τής επαφής μέ τή λαμπρή αρχαιότητα.

Μερικά έργα τού Αρχιμήδη έφτασαν σέ μάς μέσω τών Αράβων. Αυτοί, από θαυμασμό γιά τήν ελληνική επιστήμη, μετάφρασαν, μελέτησαν και διαφύλαξαν από τόν φανατισμό τών εποχών πού ακολούθησαν, αρκετά έργα τών αρχαίων Ελλήνων. Από τά έργα τού Αρχιμήδη στήν αραβική γλώσσα σώθηκαν τά "**Λήμματα**" μέ **15** προτάσεις, ή πραγματεία του "**επί τού επταγώνου**" μέ **17** προτάσεις, τό "**Περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων**" μέ **14** προτάσεις, τό "**Αρχαί τής γεωμετρίας**" μέ **19** προτάσεις, τό "**Περί υδραυλικού ωρολογίου**" και τό "**Στομάχιον**".

Τό έργο του "**Λήμματα**" είναι μιά συλλογή προτάσεων στοιχειώδους γεωμετρίας, πού κατά πάσα πιθανότητα οι Άραβες μελετητές μάζεψαν από διάφορες ελληνικές πηγές. Μέσα στά "Λήμματα" περιέχεται και ή λύση από τόν Αρχιμήδη τού ενός από τά τρία περίφημα προβλήματα τής αρχαιότητας, τής "**Τριχοτόμησης οξείας γωνίας**" μέ τή βοήθεια τής κινητικής γεωμετρίας. Τή λύση αυτή παρουσιάζουμε σέ ειδικά αφιερωμένο, σέ αυτό τό πρόβλημα, κεφάλαιο πού ακολουθεί.(1)



Άρβηλον



Σελήνιον

Ενδεικτικά εδώ δίνουμε δύο προβλήματα από τά Λήμματα· τό ένα από αυτά μέ τό όνομα "Άρβηλον" μάς λέει:

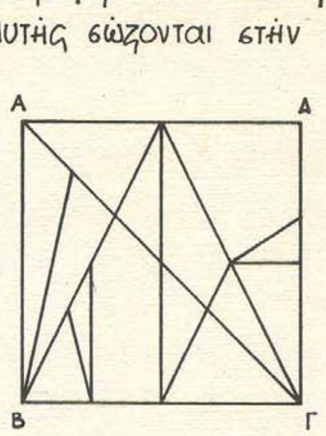
"**Άν τό Γ είναι ένα τυχαίο σημείο τής διαμέτρου ΑΒ ημικυκλίου και ή ΓΔ κάθετος στήν ΑΒ, τότε τό εμβαδόν τού καμπυλόγραμμου χωρίου ισούται μέ τό εμβαδόν κύκλου διαμέτρου ΔΓ.**"

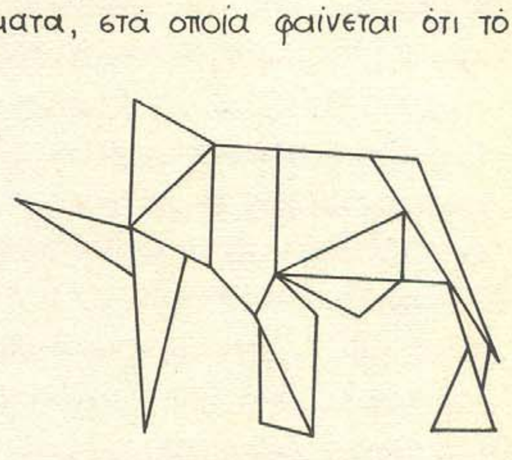
Στό "Σελήνιον" τό καμπυλόγραμμο χωρίο είναι ισοδύναμο μέ κύκλο διαμέτρου ΕΖ.

---

(1). Τά Λήμματα από τήν αραβική μεταφράστηκαν στή Λατινική γλώσσα, μέ τόν τίτλο Liber Assumptorum και εκδόθηκαν γιά πρώτη φορά στό Λονδίνο τό 1659. Στά ελληνικά γιά πρώτη φορά δημοσιεύτηκαν τό 1965 στό δελτίο τής Ε.Μ.Ε από τόν ακούραστο εργάτη τών μαθηματικών και τής ιστορίας τους Ε. Σταμάτη, ό οποίος μάλιστα μέ τεράστια επιμέλεια ανακατασκεύασε τό αρχαίο κείμενο στή σικελική δωρική διάλεκτο. Ό ίδιος μελετητής έχει κάνει και άλλες τέτοιες ανακατασκευές κειμένων μεταξύ τών οποίων και τήν πραγματεία τού Αρχιμήδη περί τού κανονικού επταγώνου.

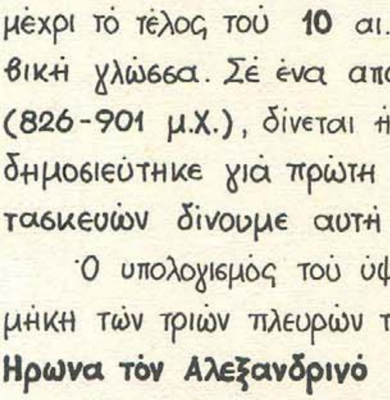
Οἱ ακόλουθοι τοῦ **Μωάμεθ** (περίπου 570-632 μ.Χ.) μάς μετάδωσαν αρκετές πληροφορίες σχετικά μέ μιά πραγματεία τοῦ Αρχιμήδη μέ τόν τίτλο "**Στομάχιον**". Αυτής σώζονται στήν αραβική ελάχιστα αποσπάσματα, στά οποία φαίνεται ότι τό θέμα της ήταν ή διαίρεση ενός παραλληλογράμμου σέ **14** ευθύγραμμα σχήματα, πού νά έχουν ρητό λόγο πρός τό αρχικό σχήμα. Τά τμήματα αυτά τοῦ παραλληλογράμμου, αποτυπωμένα σέ πλακίδια από ελεφαντοστοῦν, αποτελοῦσαν τό παιχνίδι "Στομάχιον", κατά τό οποίο, μέ τή συναρμολόγηση τῶν πλακιδίων κατάλληλα, επιδιωκόταν ό σχηματισμός διαφόρων σχημάτων, ελεφάντων, θηρίων καί άλλων.





Ἡ πραγματεία τοῦ Αρχιμήδη μέ τόν τίτλο "**Επί τοῦ επταγώνου**", πού πιστευόταν μέχρι τό τέλος τοῦ **10** αι. μ.Χ. σάν χαμένη, βρέθηκε σέ διάφορα αντίγραφα στήν αραβική γλώσσα. Σέ ένα από αυτά, τοῦ άραβα μαθηματικοῦ **Tâbit ibn Qurra** (826-901 μ.Χ.), δίνεται ή κατασκευή κανονικοῦ επταγώνου από τόν Αρχιμήδη· αυτή δημοσιεύτηκε γιά πρώτη φορά στά γερμανικά. Στό κεφάλαιο τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν δίνουμε αυτή τήν απόδειξη σέ μετάφραση.

Ὁ υπολογισμός τοῦ ύψους καί τοῦ εμβαδοῦ ενός τυχαίου τριγώνου, όταν δοθοῦν τά μήκη τῶν τριῶν πλευρῶν του, είναι ένα επίτευγμα πού πιστευόταν ότι ανήκει στόν **Ἥρωνα τόν Αλεξανδρινό** (2-1 αι. π.Χ.), επειδή οἱ αντίστοιχες προτάσεις υπήρχαν στό έργο του "Μετρικά" (ανακαλύφθηκε τό 1896 στήν Κωνσταντινούπολη σέ χειρόγραφο τοῦ 12 αι. μ.Χ.). Αργότερα όμως διαπιστώθηκε ότι οἱ προτάσεις αυτές ανήκουν στόν Αρχιμήδη. Αυτό τό μαθαίνουμε από τό έργο τοῦ πέρση μαθηματικοῦ **Al Birouni** (973-1048 μ.Χ.), μέ τόν τίτλο "Περί τής ευρέσεως τῶν χορδῶν έν τῷ κύκλῳ κ.λ.π." στήν αραβική γλώσσα (έκδοση στήν γερμανική τό 1910), στό οποίο μάλιστα, ενῶ αναφέρει ότι οἱ εκφωνήσεις είναι τοῦ Αρχιμήδη, οικειοποιείται τίς αποδείξεις.



Εδῶ ό Αρχιμήδης, γιά τά τμήματα ΔΓ, ΒΔ, δίνει τίς εκφράσεις:

$$\mathbf{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha}+\alpha}{2} \quad \text{καί} \quad \mathbf{B\Delta} = \frac{\alpha-\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha}}{2}$$

από τίς οποίες, μέ τή βοήθεια τοῦ πυθαγόρειου θεωρήματος, μπορεί νά προκύψει τό ύψος ΑΔ τοῦ τριγώνου.

Τίς προτάσεις αυτές σήμερα τίς γνωρίζουμε σάν επέκταση τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος στά τυχαία τρίγωνα, μέ τή μορφή $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\cdot B\Delta$ καί $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\cdot\Delta\Gamma$ (έχουν υποτεθεί οἱ $\hat{B},\hat{\Gamma}$ οξείες) καί δίνονται από τόν Ευκλείδη στό θεώρημα **13/II** τῶν "Στοιχείων" του.

Τό εμβαδόν τοῦ τριγώνου τό δίνει άμεσα μέ τόν τύπο $\mathbf{E}=\sqrt{\tau\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma)}$

όπου τό τ παριστάνει τό ημιάθροισμα τών πλευρών τού τριγώνου. Τό παράδοξο μέ τόν τύπο αυτόν, πού πέρασε στήν ιστορία λόγω τού πιό πάνω λάθους σάν "Τύπος τού Ήρωνος", είναι ότι κανένας μεταγενέστερος τού Ήρωνα, Έλληνας μελετητής ή σχολιαστής δέν κάνει μνεία τής σπουδαίας αυτής αλήθειας.

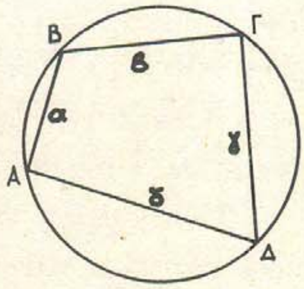
Πολύ περισσότερα από τά **16** σωσμένα έργα τού Αρχιμήδη είναι τά χαμένα.

Αυτή τή στιγμή γνωρίζουμε ήδη **27** έργα του, πού ο χρόνος καί τό μίσος γιά τήν "ειδωλολατρική αρχαιότητα" τά εξαφάνισαν. Στόν αραβικό κατάλογο έργων Ελλήνων μαθηματικών, μέ τόν τίτλο "Αρχιμήδης" αναφέρεται ότι:

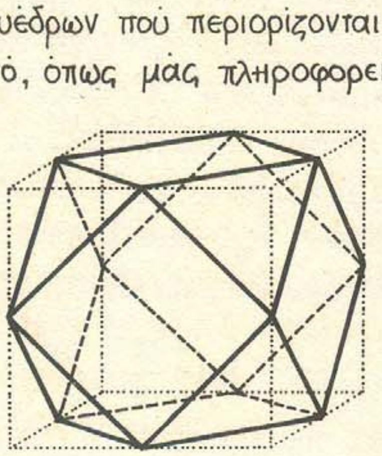
" Οί Έλληνες έκαυσαν **15** έργα τού Αρχιμήδους ώς περιττά καί επειδή ή έκθεσις περί τών συγγραμμάτων αυτών θά ήτο πολύ μακρά, ό κατάλογος περιορίζεται είς τά σωζόμενα έργα αυτού."

Αρκετά πρέπει νά ήταν καί τά έργα πού χάθηκαν χωρίς νά γίνει ποτέ μνεία ούτε τών τίτλων τους.

Ανάμεσα στά χαμένα έργα, τών οποίων γνωρίζουμε τούς τίτλους τους, τό "**Περί τετραπλεύρων**" θά πρέπει νά αναφερόταν στίς διάφορες ιδιότητες τών τετραπλεύρων καί ίσως στόν περίφημο τύπο, πού δίνει τό εμβαδόν ενός εγγραφίμμου τετραπλεύρου συναρτήσει τών πλευρών του. Ό τύπος αυτός, ό οποίος είναι ή συνέχεια τού αντίστοιχου τύπου τών τριγώνων, έχει τήν έκφραση $E=\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}$ όπου τ ή ημιπερίμετρος τού τετραπλεύρου καί αναφέρεται από τούς Ινδούς, αποδιδόμενος σέ "αρχαιότερες αυθαιντίες", τίς πιό πολλές φορές χωρίς τήν ουσιώδη συνθήκη τό τετράπλευρο νά είναι εγγράψιμμο.



Ένα άλλο χαμένο έργο του είναι τό "**Περί ημικανονικών πολυέδρων**" δηλαδή πολυέδρων πού περιορίζονται από κανονικά πολύγωνα διαφόρων ειδών. Στό έργο αυτό, όπως μάς πληροφορεί **ό Πάππος** (3 αι μ.Χ.), ό Αρχιμήδης προσδιόρισε, χωρίς νά γνωρίζουμε πώς, ότι ημικανονικά πολύεδρα υπάρχουν **13**. Ό Πλάτωνας γνώριζε μόνο δύο από αυτά καί συγκεκριμένα τά δύο ημικανονικά **14**/έδρα πού τά περιορίζουν τό μέν πρώτο 8 τρίγωνα καί 6 τετράγωνα, τό δέ δεύτερο 8 τρίγωνα καί 6 οκτάγωνα. Τά 13 αυτά στερεά τού Αρχιμήδη είναι:



τό ημικανονικό **8-εδρο** μέ 4 τρίγωνα καί 4 εξάγωνα, τά **14-εδρα** μέ 8 τρίγωνα καί 6 τετράγωνα ή 8 τρίγωνα καί 6 οκτάγωνα ή 8 εξάγωνα καί 6 τετράγωνα, τά **26-εδρα** μέ 8 τρίγωνα καί 18 τετράγωνα ή 8 εξάγωνα καί 12 τετράγωνα καί 6 οκτάγωνα, τά **32-εδρα** μέ 20 τρίγωνα καί 12 πεντάγωνα ή 20 εξάγωνα καί 12 πεντάγωνα ή 20 τρίγωνα καί 12 δεκάγωνα, τό **38-εδρο** μέ 32 τρίγωνα καί 6 τετράγωνα, τά **62-εδρα** μέ 20 τρίγωνα 30 τετράγωνα καί 12 πεντάγωνα ή 20 εξάγωνα 30 οκτάγωνα και 12 δεκάγωνα και τό **92-εδρο** μέ 80 τρίγωνα και 12 πεντάγωνα. Σήμερα σώζεται μόνο ή απόδειξη τής εγγραφής σέ σφαίρα ενός ημικανονικού 14-εδρου πού βρέθηκε τό 1932 στήν Κωνσταντινούπολη σέ ένα αντίγραφο τού 980 μ.Χ. ενός έργου τού Tâbit ibn Qurra (826-901 μ.Χ.).

Ένα άλλο χαμένο έργο έργο του είναι τό "**Περί ζυγών**". Αυτό αναφέρεται από τόν Πάππο και τό θέμα του πρέπει νά ήταν διάφοροι ορισμοί πού αφορούσαν τά κέντρα βάρους σχημάτων και τήν μεταφορά ενεργείας μέ τή βοήθεια οδοντοτών τροχών.

Τό τέλος τού Αρχιμήδη ήταν τραγικό και επήλθε κατά τήν πτώση τών Συρακουσών, μετά από πολιορκία τριών χρόνων, από τούς Ρωμαίους. Κατά τήν πολιορκία αυτή, ή πόλη αμύνονταν σθεναρά εξοπλισμένη μέ αμυντικά μηχανήματα (καταπέλτες, βαλίστρες, άρπαγες και άλλα) πού είχε επινοήσει ό Αρχιμήδης.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι μέ τά μηχανήματα αυτά τού Αρχιμήδη, ανυψώνονταν ρωμαϊκά πλοία από τή θάλασσα και συντρίβονταν, εκτοξεύονταν βράχοι 360 κιλών ή σωροί λίθων υπό μορφή βροχής και άλλα πολλά και φοβερά. Σέ κεφάλαιο πού ακολουθεί αναφερόμαστε λεπτομερέστερα στήν πολιορκία αυτή

Τόν τρίτο χρόνο όμως τής πολιορκίας και μετά από προδοσία, καταλήφθηκε ή πόλη (212 π.Χ.), μέ αποτέλεσμα νά φονευθεί ό μέγιστος σοφός από Ρωμαίο στρατιώτη, τήν ώρα πού έλυνε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, παρά τίς οδηγίες πού υπήρχαν γιά τό σεβασμό τής ζωής του. Λέγεται πώς ό Μάρκελλος, ό επί κεφαλής τού ρωμαϊκού εκστρατευτικού σώματος, σκότωσε ό ίδιος μέ τσεκούρι τό στρατιώτη φονιά τού Αρχιμήδη.

Όταν βρέθηκε αντιμέτωπος μέ τόν στρατιώτη πού τόν σκότωσε, είπε τήν περήφανη φράση "**Μή μού τούς κύκλους τάραττε**" ή κατά τή γνώμη άλλων, τήν "**Πάρ' κεφαλάν και μή παρά γραμμάν**", χτύπα δηλαδή τό κεφάλι μου αλλά πρόσεχε τό σχήμα.

Ό Μάρκελλος έτρεφε τόσο θαυμασμό γιά τόν άνθρωπο πού καθήλωσε τήν περίφημη ρωμαϊκή στρατιωτική μηχανή γιά τρία χρόνια μπροστά στά τείχη τών Συρακουσών, ώστε, σάν ανάμνηση τού γίγαντα τής διανόησης, ζήτησε και πήρε τό περίφημο χάλκινο πλανητάριό του· αναφέρεται δέ ότι τό πλανητάριο αυτό ήταν τόσο τέλεια κατασκευασμένο ώστε, όταν τό περιέστρεφε κανείς, νά αναπαράγει μέ ακρίβεια όλα τά ουράνια φαινόμενα.

Ό Κικέρων (106-43 π.Χ.) αναφέρει ότι βρήκε και περιποιήθηκε πολύ αργότερα (τό 75 π.Χ.) τόν τάφο τού μεγάλου μαθηματικού. Τόν αναγνώρισε από τό αγαπημένο του θεώρημα πού ήταν χαραγμένο στήν επιτάφια πλάκα.