

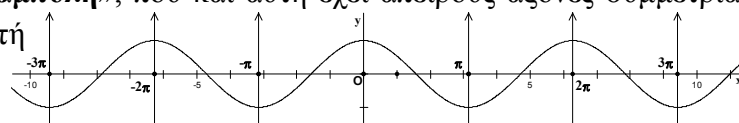
Άξονες συμμετρίας

1. Παράλληλοι άξονες συμμετρίας

Υπάρχουν σχήματα «απέραντα», όπως η ευθεία, που έχουν παράλληλους άξονες συμμετρίας. Μάλιστα, η ευθεία, εκτός από τον εαυτό της, έχει άπειρους άξονες συμμετρίας, όλες τις κάθετες της ευθείας, που προφανώς είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Άλλη περίπτωση είναι η «ημιτονοειδής καμπύλη», που και αυτή έχει άπειρους άξονες συμμετρίας. Μάλιστα, αν φανταστούμε την καμπύλη αυτή

στη γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$,

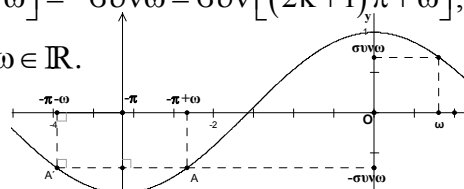


άξονες συμμετρίας είναι όλες οι ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα των x , στα σημεία $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

δηλαδή όλες οι ευθείες $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), αφού $\sin[(2k+1)\pi - \omega] = -\sin \omega = \sin[(2k+1)\pi + \omega]$,

και $\sin(2k\pi - \omega) = \sin \omega = \sin(2k\pi + \omega)$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και $\omega \in \mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα, φαίνονται τα συμμετρικά σημεία A, A' της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sin x$, σε σχέση με τον άξονα



συμμετρίας $x = -\pi$, που αντιστοιχούν στα συμμετρικά σημεία $x_1 = -\pi + \omega$, $x_2 = -\pi - \omega$ του άξονα των x , δηλαδή της ευθείας $y = 0$, πάντα σε σχέση με τον ίδιο άξονα συμμετρίας $x = -\pi$.

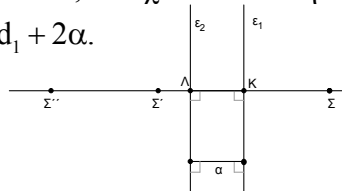
Σχόλια: (1) Προφανώς, σχήμα που δεν είναι «απέραντο», και επομένως **μπορεί να εγγραφεί σε ορθογώνιο**, δε μπορεί να έχει παράλληλους άξονες συμμετρίας, αφού τα «οριακά του σημεία», που με έναν άξονα συμμετρίας «βρίσκουν» τα συμμετρικά τους στα «όρια» του σχήματος, με τον παράλληλο του άξονα συμμετρίας, θα πρέπει να αναζητήσουν το συμμετρικό τους «εκτός κάδρου».

Απόδειξη: Σε σχήμα S που δεν είναι «απέραντο» και έχει άξονα συμμετρίας, έστω A το σύνολο των αποστάσεων, μεταξύ των συμμετρικών σημείων του σχήματος. Το σύνολο A είναι «φραγμένο», αφού κάθε στοιχείο του είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το 0 (το 0 λέγεται κάτω φράγμα), και λόγω του «πεπερασμένου», υπάρχουν αριθμοί, όπως το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου «κάδρου», που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι σε σχέση με όλα τα στοιχεία του (οι αριθμοί αυτοί λέγονται άνω φράγματα). Για σύνολα όπως το A , δεχόμαστε αξιωματικά ότι υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα, και αν στην περίπτωση μας το ονομάσουμε μ (το καθιερωμένο όνομα του μ είναι $\sup A$), τότε προφανώς $d \leq \mu$, για κάθε στοιχείο d του συνόλου A .

Αν υποθέσουμε ότι το σχήμα S έχει δυο παράλληλους άξονες συμμετρίας, που έχουν απόσταση $\alpha > 0$, τότε θα υπάρχει* ζευγάρι (Σ, Σ') συμμετρικών σημείων του σχήματος S , με απόσταση d_1 , σε σχέση με κάποιον άξονα συμμετρίας, έτσι ώστε $d_1 > \mu - \alpha$, όπου ή το Σ , ή το Σ' , θα έχει απόσταση d_2 από το συμμετρικό του, σε σχέση με τον άλλο άξονα συμμετρίας, με $d_2 = d_1 + 2\alpha$.

Τότε όμως θα είχαμε** $d_2 = d_1 + 2\alpha > d_1 + \alpha > \mu$, και αυτό θα ήταν άτοπο.

Άρα, δεν υπάρχει σχήμα S με δυο παράλληλους άξονες συμμετρίας, που να μην είναι «απέραντο».



* γιατί αλλιώς όλες οι αποστάσεις d συμμετρικών σημείων του σχήματος S θα ήταν: $d \leq \mu - \alpha < \mu$, και αυτό θα ήταν άτοπο, αφού ο μ είναι εξ ορισμού το ελάχιστο άνω φράγμα.

** Στο παραπάνω σχήμα, έχουμε $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$, $(\Lambda K) = \alpha$, $d_1 = (\Sigma \Sigma') = 2(\Sigma K)$ και $d_2 = (\Sigma \Sigma'') = 2(\Sigma \Lambda)$,

και επομένως $d_2 = (\Sigma \Sigma'') = 2(\Sigma \Lambda) = 2[(\Sigma K) + \alpha] = 2(\Sigma K) + 2\alpha = d_1 + 2\alpha$

(2) Όπως θα δούμε, το ενδιαφέρον για άξονες συμμετρίας, «μονοπωλούν» τα σχήματα που έχουν τεμνόμενους άξονες συμμετρίας. Στο επίπεδο τα σχήματα που έχουν τεμνόμενους άξονες συμμετρίας, έχουν **πεπερασμένο** πλήθος τέτοιων αξόνων. Εξαίρεση αποτελεί ο κύκλος, που έχει για άξονες συμμετρίας, τις **άπειρες** ευθείες που διέρχονται από το κέντρο του, το οποίο είναι κέντρο συμμετρίας του σχήματος. Έτσι ο κύκλος είναι το τέλει «συμμετρικό» σχήμα.

2. Τεμνόμενοι άξονες συμμετρίας

- a) Αν δύο ευθείες τέμνονται κάθετα, τότε προφανώς καθεμιά είναι άξονας συμμετρίας της άλλης, και επομένως η συμμετρική ευθεία καθεμιάς σε σχέση με την άλλη, είναι ο εαυτός της.
- b) Αν δυο τεμνόμενες ευθείες δεν τέμνονται κάθετα, τότε η συμμετρική της μιας σε σχέση με την άλλη, είναι ευθεία που διέρχεται από το σημείο τομής των δύο ευθειών, και σχηματίζει με τη συμμετρική της, γωνία που διχοτομείται από την ευθεία ως προς την οποία έχουμε συμμετρία.

Απόδειξη: Έστω τεμνόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, που σχηματίζουν οξεία γωνία ω .

Για να κατασκευάσουμε τη συμμετρική ευθεία της ε_2 , ως προς την ε_1 , αρκεί να

βρούμε δύο διαφορετικά σημεία της. Προφανώς το σημείο O, τομής των δύο ευθειών, είναι ένα από αυτά, αφού το συμμετρικό του είναι το ίδιο το σημείο. Έστω A διαφορετικό του O σημείο της ε_2 .

Προφανώς, το ευθύγραμμο τμήμα AA' , όπου A' το συμμετρικό του A ως προς την ε_1 , έχει την ευθεία ε_1 για μεσοκάθετο, και συνεπώς στο ισοσκελές τρίγωνο OAA' , η μεσοκάθετος της βάσης διχοτομεί τη γωνία της κορυφής.

Σχόλιο: Όταν δύο ευθείες τέμνονται «πλάγια», μέσω της συμμετρίας «παράγουν» νέες ευθείες. Προφανώς, όταν το μέτρο της γωνίας ω των δύο ευθειών, διαιρώντας τον αριθμό 180 δίνει πηλίκο φυσικό αριθμό ν , τότε ν συνολικά, είναι το πλήθος των διαφορετικών ευθειών που προκύπτουν με αυτή τη διαδικασία, αφού κάθε επόμενη «ευθυγραμμίζεται» με μια από τις προηγούμενες της.

Πρόταση: Αν ένα σχήμα Σ έχει δυο τεμνόμενους άξονες συμμετρίας $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, που σχηματίζουν οξεία γωνία ω , τότε άξονας συμμετρίας του Σ , είναι και η ευθεία ε_3 , που είναι συμμετρική της ευθείας ε_2 , ως προς την ευθεία ε_1 .

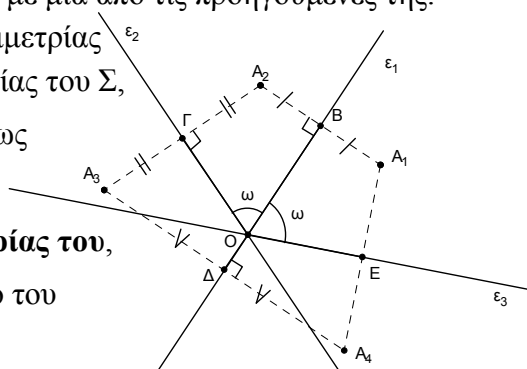
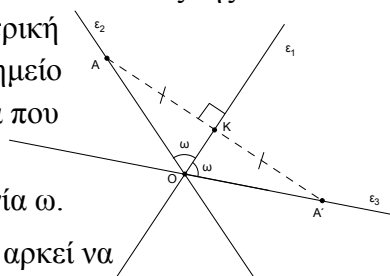
Απόδειξη: (1) Έστω σχήμα Σ , και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο άξονες συμμετρίας του, τεμνόμενοι υπό οξεία γωνία ω , και έστω A_1 «τυχαίο» σημείο του σχήματος Σ , που δεν ανήκει στους άξονες συμμετρίας του.

Αν το σημείο A_2 , είναι συμμετρικό του A_1 , ως προς την ευθεία ε_1 , A_3 το συμμετρικό του A_2 , ως προς την ευθεία ε_2 , και A_4 το συμμετρικό του A_3 , ως προς την ευθεία ε_1 , τότε το A_4 είναι σημείο του σχήματος Σ , αφού προκύπτει με διαδοχικές συμμετρίες, ως προς τους άξονες συμμετρίας του σχήματος Σ . Αν η ευθεία ε_3 είναι συμμετρική της ευθείας ε_2 , ως προς την ευθεία ε_1 , αρκεί για το ζητούμενο, να αποδείξουμε ότι η ευθεία ε_3 είναι μεσοκάθετος του A_4A_1 , αφού τότε το συμμετρικό του «τυχαίου» σημείου A_1 , του σχήματος Σ , θα έχει για συμμετρικό του ως προς την ε_3 σημείο του σχήματος, και συνεπώς η ε_3 , αν δεν προκύψουν εξαιρέσεις, θα είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.

Το $A_1A_2A_3A_4$ είναι τραπέζιο, αφού $A_1A_2 \parallel A_3A_4$ σαν κάθετες στην ευθεία ε_1 , ενώ $A_1A_4 \nparallel A_2A_3$, γιατί σαν συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα ως προς τον άξονα ε_1 , αν ήταν παράλληλα θα ήταν παράλληλα και με τον ε_1 , κάτι που οδηγεί στο άτοπο, η OG να είναι κάθετη στο A_2A_3 , και να σχηματίζει οξεία γωνία ω , με τον ε_1 . Το τραπέζιο $A_1A_2A_3A_4$ είναι **ισοσκελές**, αφού $A_1A_4 = A_2A_3$, σαν συμμετρικά ευθύγραμμα τμήματα ως προς τον άξονα ε_1 . (έχουν συμμετρικά άκρα)

Διαδοχικά $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4$, αφού το O είναι σημείο των αντίστοιχων μεσοκαθέτων. Έτσι, το τρίγωνο OA_1A_4 είναι ισοσκελές, και η $OE(\varepsilon_3)$ σαν κάθετη* στη βάση του (A_4A_1), είναι μεσοκάθετη.

* στο τετράπλευρο $OBA_2\Gamma$, προφανώς $\hat{\omega} + \hat{A}_2 = 180^\circ$, και επειδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, θα έχουμε $\hat{\omega} + \hat{A}_1 = 180^\circ$, και συνεπώς στο τετράπλευρο OBA_1E , αφού $\hat{B} = 90^\circ$, επομένως και $\hat{E} = 90^\circ$.



(2) Έστω σχήμα Σ , και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο **άξονες συμμετρίας του**, τεμνόμενοι υπό οξεία γωνία ω , και έστω A_1 σημείο του σχήματος Σ , που ανήκει στον ε_1 . Αν το σημείο A_2 , είναι συμμετρικό του A_1 , ως προς την ευθεία ε_2 , και το A_3 συμμετρικό του A_2 , ως προς την ευθεία ε_1 , τότε το A_3 είναι σημείο του σχήματος Σ , αφού προκύπτει με διαδοχικές συμμετρίες, ως προς τους άξονες συμμετρίας του σχήματος Σ . Αν η ευθεία ε_3 είναι συμμετρική της ευθείας ε_2 , ως προς την ευθεία ε_1 , αρκεί για το ζητούμενο, να αποδείξουμε ότι η ευθεία ε_3 είναι μεσοκάθετος του A_3A_1 , αφού τότε το συμμετρικό του σημείου A_1 , του σχήματος Σ , θα έχει για συμμετρικό του ως προς την ε_3 σημείο του σχήματος Σ , και συνεπώς η ε_3 θα είναι **τελικά**, άξονας συμμετρίας του σχήματος Σ . Το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισοσκελές, αφού η μεσοκάθετος της βάσης A_2A_3 διέρχεται από την κορυφή A_1 . Έτσι, η A_1E είναι διχοτόμος του τριγώνου $A_1A_2A_3$, και επειδή από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔOA_1 έχουμε $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 90^\circ$, επομένως στο τρίγωνο ZOA_1 η γωνία στην κορυφή Z είναι ορθή, και συνεπώς η ευθεία ε_3 είναι μεσοκάθετος του A_3A_1 , αφού διέρχεται από το **περίκεντρο** του τριγώνου $A_1A_2A_3$, και είναι κάθετη στην A_3A_1 .

Σχόλιο: Αν δε θέλουμε να επικαλεστούμε τις συνέπειες της συμμετρίας, ας δούμε 2^η απόδειξη του (1). Το $A_1A_2A_3A_4$ είναι **ισοσκελές** τραπέζιο, αφού $A_1A_2 \parallel A_3A_4$ σαν κάθετες στην ευθεία ε_1 , ενώ $A_1A_4 \not\parallel A_2A_3^*$, και $A_1A_4 = A_2A_3^{**}$.

* Αν ήταν $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, τότε το $A_1A_2A_3A_4$ θα ήταν παραλληλόγραμμο, επομένως θα ήταν $A_1A_2 = A_3A_4$, άρα και τα μισά τους θα ήταν ίσα ($BA_2 = \Delta A_3$), συνεπώς το $BA_2A_3\Delta$ θα ήταν παραλληλόγραμμο, και συνεπώς η $ΟΓ$ που είναι κάθετος στην A_2A_3 θα ήταν κάθετος και στην $B\Delta$, κάτι όμως που είναι **άτοπο**, αφού έχουμε δεδομένο ότι η γωνία ω είναι οξεία.

** Αν ΛA_2 και MA_1 είναι κάθετες στην A_1A_2 , τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΛA_2A_3 και MA_1A_4 είναι ίσα, αφού $\Lambda A_2 = MA_1$ σαν απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΛA_2A_1M , και $\Lambda A_3 = MA_4$ σαν διαφορές ίσων τμημάτων, με $\Delta\Lambda = BA_2 = BA_1 = \Delta M$, από τα ορθογώνια. ($\Lambda A_3 = \Delta A_3 - \Delta\Lambda = \Delta A_4 - \Delta M = MA_4$)

Σημειώσεις: (1) Στο ισοσκελές τραπέζιο $A_1A_2A_3A_4$, οι ευθείες $A_2A_3, A_1A_4, B\Delta$ συντρέχουν στο σημείο K , αφού η διχοτόμος της γωνίας K , είναι μεσοκάθετος της βάσης και στα δύο ισοσκελή τρίγωνα που σχηματίζονται. Τα τρίγωνα ΓKO και EKO είναι ίσα ($\Gamma\Pi\Gamma$), επομένως η OE είναι κάθετη στην ευθεία A_1A_4 , στο ισοσκελές τρίγωνο $K\Gamma E$ η διχοτόμος της γωνίας κορυφής είναι και ύψος, συνεπώς η ΓE είναι παράλληλη στην A_1A_2 , και επειδή έχει άκρο Γ το μέσο της A_2A_3 , είναι διάμεσος του τραπεζίου, με τελικό συμπέρασμα ότι η ε_3 είναι μεσοκάθετος του A_1A_4 .

(2) Προφανώς, όταν ένα σχήμα έχει **ακριβώς δύο άξονες συμμετρίας**, τότε αυτοί τέμνονται κάθετα, και το σημείο τομής τους O , είναι **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος.

(3) Το πλήθος των αξόνων συμμετρίας, ενός κυρτού κανονικού πολυγώνου, είναι όσο και το πλήθος των πλευρών του. Μάλιστα, αν το πλήθος των πλευρών του κυρτού κανονικού πολυγώνου, είναι άρτιος αριθμός, τότε το σημείο τομής των αξόνων συμμετρίας, είναι **κέντρο συμμετρίας του σχήματος**. Οι άξονες συμμετρίας, είναι μεσοκάθετοι των πλευρών του **είτε** διχοτόμοι των γωνιών του. Πιο συγκεκριμένα, όταν το πλήθος των πλευρών του είναι περιττός αριθμός, τότε κάθε διχοτόμος γωνίας του, είναι και μεσοκάθετος της απέναντι πλευράς του, ενώ όταν το πλήθος των πλευρών του είναι άρτιος αριθμός, τότε οι απέναντι γωνίες έχουν κοινό φορέα διχοτόμου, και οι απέναντι πλευρές του έχουν κοινή μεσοκάθετο.

