

Έτσι κύκλοι εφαπτόμενοι ανά δύο (διαδοχικά), «εγγεγραμμένοι» σε κύκλο.

Κατασκευή ίσων κύκλων, εξωτερικά εφαπτόμενων ανά δύο, εγγεγραμμένων σε κύκλο.

Σε κύκλο (O, R) , κέντρου O και ακτίνας R , μπορούμε να επιλέξουμε δυο σημεία επαφής, B, Γ , για δυο κύκλους στο εσωτερικό του, που να εφάπτονται με αυτόν και μεταξύ τους.

Οι εφαπτόμενες του κύκλου (O, R) , στα B, Γ , τέμνονται στο σημείο A , και από το Θεώρημα II (σελ. 68) γνωρίζουμε ότι $AB = A\Gamma$, $\hat{BAO} = \hat{GAO}$

και η AO είναι διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$.

Φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών BAO και GAO , που τέμνουν τις ακτίνες OB και OG , στα σημεία K_1, K_2 αντίστοιχα, και η AO είναι μεσοκάθετος του K_1K_2 , αφού στο **ισοσκελές τρίγωνο** AK_1K_2 (από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα BAK_1 και $GA K_2$), η διχοτόμος της γωνίας κορυφής, είναι μεσοκάθετος της βάσης.

Έτσι, αφού τα K_1, K_2 , σαν σημεία διχοτόμων γωνιών, ισαπέχουν από τις πλευρές των γωνιών, και AO μεσοκάθετος του K_1K_2 , θα έχουμε: $BK_1 = K_1\Delta = \Delta K_2 = K_2\Gamma = \rho$, με ρ την ακτίνα των δυο ίσων κύκλων, που εφάπτονται εξωτερικά στο Δ , με κοινή εφαπτομένη την OA , και εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου (O, R) , στα B, Γ .

Προφανώς, $B\hat{O}\Gamma = A_1\hat{O}A_2 = A_1\hat{O}A'_6 = 180^\circ - 4\hat{\omega}$, και επομένως, αν θέλουμε να προκύψουν ίσοι κύκλοι, ανά δύο εφαπτόμενοι εξωτερικά, που να εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου (O, R) , έτσι που καθένας να βρίσκεται ανάμεσα σε δυο άλλους, θα πρέπει το κλάσμα με αριθμητή 360 (σε μοίρες) και παρονομαστή το μέτρο της επίκεντρης γωνίας $B\hat{O}\Gamma$ (σε μοίρες), να είναι φυσικός αριθμός, μεγαλύτερος ή ίσος του τρία.

$$\frac{360}{(B\hat{O}\Gamma)} = v, \text{ όπου } v \in \mathbb{N} \text{ και } v \geq 3$$

Σχόλιο: Στο δεύτερο σχήμα, η **τυχαία επιλογή** των σημείων B, Γ , «έδωσε» επίκεντρη γωνία $(B\hat{O}\Gamma) \approx 59^\circ$, έτσι η προαναφερθείσα διαίρεση έχει **πηλίκο που δεν είναι φυσικός αριθμός**, και το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα, με τις εφαπτόμενες OA_6 και OA'_6 να «**αποκλίνουν**».

Στο σχήμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι υπάρχει ο κύκλος με κέντρο O που διέρχεται από τα κέντρα των «μικρών» κύκλων, και ο ομόκεντρός του κύκλος, που διέρχεται από τα σημεία επαφής των «μικρών» κύκλων. Η παρατήρηση αυτή, θα μας βοηθήσει σε «οικονομικές κατασκευές».

Περιγραφή κατασκευής, για 6 κύκλους εφαπτόμενους ανά δύο:

Έστω B σημείο κύκλου (O, R) . Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BO σχεδιάζουμε κύκλο που τέμνει τον (O, R) σε δυο σημεία, και έστω Γ το ένα από αυτά. Προφανώς η χορδή $B\Gamma = R$, εξασφαλίζει επίκεντρη γωνία $(B\hat{O}\Gamma) = 60^\circ$, και επομένως την κατασκευή των 6 κύκλων. Η διχοτόμος της γωνίας $BO\Gamma$, τέμνει την εφαπτομένη του (O, R) στο B , σε σημείο A , και η διχοτόμος της γωνίας BA_1O τέμνει την ακτίνα OB στο σημείο K_1 . Έτσι προκύπτει ο πρώτος κύκλος, και «ο κύκλος των κέντρων», που στην τομή του με την OG δίνει το δεύτερο κέντρο K_2 , ενώ στην τομή των OA_1 και K_1K_2 , προκύπτει το σημείο Δ (πρώτο σημείο επαφής) και «ο κύκλος των σημείων επαφής», που με την τομή του E , με τον δεύτερο κύκλο, εξασφαλίζει την ημιευθεία K_2E , που τέμνει τον «κύκλο των κέντρων», στο τρίτο κέντρο K_3 .

Προφανώς, η επανάληψη των παραπάνω ενεργειών, οδηγεί στην ολοκλήρωση της κατασκευής, και έτσι το μόνο αξιόλογο που μένει για παρόμοιες κατασκευές, είναι η κατασκευή της κατάλληλης επίκεντρης γωνίας.

Σημείωση: Η περίπτωση των δύο κύκλων, όπου η διάκεντρός τους (μισή διάμετρος του «μεγάλου» κύκλου) έχει φορέα, τον φορέα μιας διαμέτρου του «μεγάλου» κύκλου, είναι «τετριμμένη», και δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον.

