

Αποκρυπτογραφώντας τη φύση

Κατασκευή κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο

(Εφαρμογή 1^η σελίδα 237)

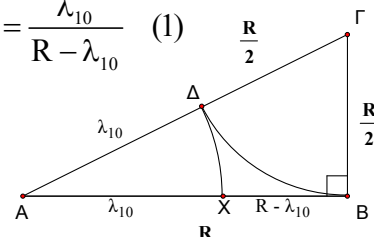
Η πλευρά λ_{10} του κανονικού δεκαγώνου, είναι το μεγαλύτερο κομμάτι, από τα δύο στα οποία

διαιρούμε την ακτίνα R του κύκλου, αρκεί να ικανοποιείται η σχέση $\frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}}$ (1)

Κατασκευή:

Στις πλευρές ορθής γωνίας, παίρνουμε τμήματα $AB = R$ και $B\Gamma = \frac{R}{2}$.

Στην υποτείνουσα «κόβουμε» τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{R}{2}$ και έτσι δημιουργείται



το ζητούμενο τμήμα $\Delta A = \lambda_{10}$. Μεταφέροντας το λ_{10} σαν AX πάνω στο AB , τέμνουμε την ακτίνα R σε δυο άνισα κομμάτια, και με το Πυθαγόρειο Θεώρημα επιβεβαιώνεται ότι ικανοποιείται η σχέση (1).

$$R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\lambda_{10} + \frac{R}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 + \frac{R^2}{4} = \lambda_{10}^2 + \frac{R^2}{4} + 2\lambda_{10} \cdot \frac{R}{2} \Leftrightarrow R^2 - \lambda_{10} \cdot R = \lambda_{10}^2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_{10}^2 = R(R - \lambda_{10})}$$

Σχόλια: (i) Στην παραπάνω κατασκευή, μένει να τεκμηριωθεί ότι αυτό που ισχυριζόμαστε ότι είναι το λ_{10} , όχι μόνο χωράει στην R , αλλά ότι είναι και το μεγαλύτερο από τα δυο κομμάτια της.

Ισχύει $AG > AB = R$, αφού η AG είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και από την τριγωνική ανισότητα $AG < AB + B\Gamma = R + \frac{R}{2}$. Άρα, $R < \lambda_{10} + \frac{R}{2} < R + \frac{R}{2}$ και συνεπώς $\frac{R}{2} < \lambda_{10} < R$.

Έτσι, το φερόμενο ως λ_{10} προφανώς χωράει στην R , και είναι το μεγαλύτερο κομμάτι της, αφού είναι μεγαλύτερο από το μισό της.

(ii) Στο σημείο που κόπηκε η R χρησιμοποιήσαμε το γράμμα X , για να πούμε ότι μια τέτοια τομή ονομάζεται «Χρυσή Τομή». Στο σχολικό βιβλίο μπορείτε να δείτε την ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3^η στη σελίδα 203, το ΣΧΟΛΙΟ στη σελίδα 204 και το ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ στις σελίδες 206 και 207.

Στην ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3^η η απόδειξη μπορεί να γίνει «εντός ύλης», με τα όμοια τρίγωνα $AB\Delta$ και AEB , όπου η γωνία A είναι κοινή, και $\widehat{AB\Delta} = \widehat{AEB}$, αφού η πρώτη είναι «υπό χορδής και εφαπτομένης» στο $\widehat{AB}$ και δεύτερη «εγγεγραμμένη που βαίνει» στο $\widehat{AB}$. Στην εφαρμογή αυτή μπορούμε να διακρίνουμε το ορθογώνιο τρίγωνο της παραπάνω κατασκευής.

Γενικά θα λέμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα κόπηκε με «Χρυσή Τομή» σε δυο άνισα κομμάτια, αν ο λόγος του προς το μεγαλύτερο κομμάτι, είναι όσο ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο.

Στην περίπτωση μας $\lambda_{10}^2 = R(R - \lambda_{10}) \Leftrightarrow \frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} = \phi$. Για τους ίσους λόγους χρησιμοποιήσαμε

το γράμμα ϕ , αφού έτσι συμβολίζεται ο λεγόμενος «Χρυσός Λόγος» σε όλο τον κόσμο. Το όνομα ϕ , έδωσε ο Αμερικάνος Μαθηματικός Μαρκ Μπαρ, στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, προς τιμή του αρχιτέκτονα-γλύπτη Φειδία, ενώ το όνομα «Χρυσός Λόγος», αποδίδεται στο Λεονάρντο Ντα Βίντσι.

Για την τιμή του ϕ , θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} = \phi$.

$$\frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R - \lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{10}}{R} = \frac{R}{\lambda_{10}} - \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10}} \Leftrightarrow \frac{1}{\phi} = \phi - 1 \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618}$$

$$\text{Επειδή } \frac{1}{\phi} = \phi - 1, \text{ έχουμε } \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5} - 2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618, \quad \boxed{\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618}$$

$$\text{και επειδή } \phi^2 = \phi + 1, \text{ έχουμε } \phi^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,618.$$

Η κατασκευή του Ευκλείδη: Σχεδιάζουμε τετράγωνο ΑΒΘΗ πλευράς R.

Με κέντρο το μέσο Γ της πλευράς ΒΘ και ακτίνα ΓΑ σχεδιάζουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ημιευθεία ΘΒ στο Δ. Το τμήμα ΒΔ είναι η λ_{10} .

Παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΑ, είναι αυτό της προηγούμενης κατασκευής, και επομένως η υποτείνουσα ΓΑ, δηλαδή το ΓΔ, μοιράζεται σε $\frac{R}{2}$ και λ_{10} . Με τη λ_{10} πάνω στο ΒΑ = R, προκύπτει η «Χρυσή Τομή»

του R, με $\frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} = \varphi$ (1). Επίσης, επειδή $\frac{R + \lambda_{10}}{R} = \frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} = \varphi$,

τα ορθογώνια ΔΘΗΖ, ΖΔΒΑ και ΑΖΕΧ είναι όμοια*, και αφού ο λόγος των πλευρών τους είναι φ , λέγονται «Χρυσά ορθογώνια».

* Αξιοποιώντας την ιδιότητα των αναλογιών $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$,

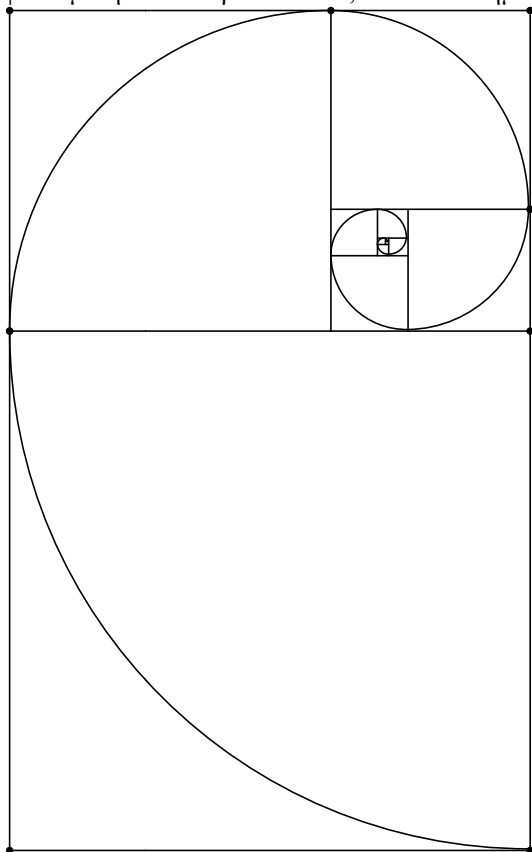
έχουμε $\frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} \Rightarrow \frac{R + \lambda_{10}}{\lambda_{10}} = \frac{R}{R - \lambda_{10}} \Rightarrow \frac{R + \lambda_{10}}{R} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{R + \lambda_{10}}{R} = \frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R - \lambda_{10}} = \varphi$.

Τώρα πλέον, είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε την κατασκευή που ακολουθεί.

Σε ορθογώνιο, στο οποίο ο λόγος της μεγάλης διάστασης (μήκος), προς τη μικρή (πλάτος), είναι ο λόγος φ της «Χρυσής Τομής», «κόβουμε» τετράγωνο με πλευρά όσο το πλάτος. Στο ορθογώνιο που «περισσεύει», που είναι όμοιο του αρχικού, επαναλαμβάνουμε την ίδια κατασκευή και συνεχίζουμε διαδοχικά την ίδια κατασκευή σε κάθε νέο ορθογώνιο. Σχεδιάζοντας σε κάθε τετράγωνο το δικό του τεταρτοκύκλιο, προκύπτει το δικό μας δημιούργημα, σε αρμονία με το φυσικό περιβάλλον.

Το όστρακο του «ναυτίλου», δεν είναι η μόνη πηγή έμπνευσης για όσους διατυπώνουν την άποψη, ότι ο άνθρωπος δημιουργεί αποκρυπτογραφώντας και μιμούμενος τη φύση.

- Η μεγάλη πλευρά των ορθογώνιων, είναι κοινή εφαπτομένη των τεταρτοκυκλίων, στο κοινό σημείο.



- Η σύνθετη καμπύλη των τεταρτοκυκλίων είναι «λεία» παντού.

