

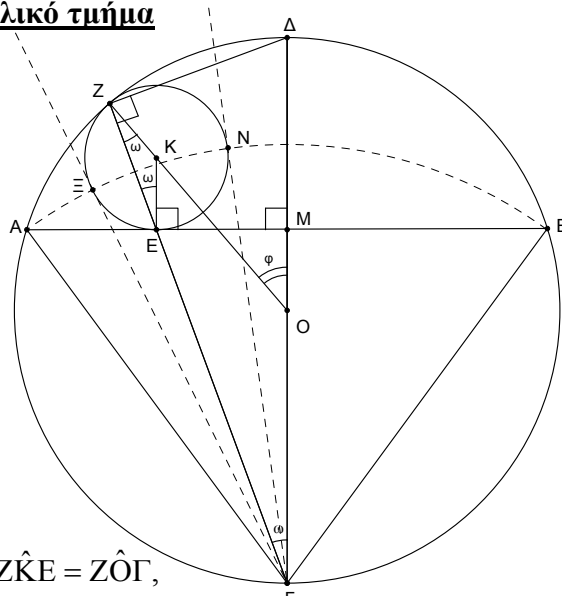
Εγγραφή κύκλου σε κυκλικό τμήμα

Έστω κύκλος (O, R) και AB χορδή του.

Έστω κύκλος (K, ρ) εγγεγραμμένος στο κυκλικό τμήμα, που ορίζει η χορδή AB και το «μικρό» τόξο $\widehat{AB}$.

Αν $\Gamma\Delta$ η διάμετρος του (O, R) που είναι κάθετη στη χορδή AB , με το Δ σημείο του «μικρού» $\widehat{AB}$, και Z, E , τα κοινά σημεία του κύκλου (K, ρ) με το τόξο και τη χορδή AB αντίστοιχα, θα δείξουμε ότι:

- τα Γ, E, Z είναι συνευθειακά
- οι εφαπτόμενες του κύκλου (K, ρ) , από το Γ , έχουν τα σημεία επαφής τους με τον κύκλο, στο τόξο κέντρου Γ και ακτίνας ΓA .



Απόδειξη: (i) $KE \parallel OM$ σαν κάθετες στην AB , συνεπώς $\angle ZKE = \angle ZOG$,

ως «εντός εκτός και επί τα αυτά», επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα KZE και OZG έχοντας τις γωνίες κορυφής ίσες είναι όμοια, άρα στην κοινή κορυφή Z , των δύο τριγώνων, $\angle ZKE = \angle ZOE = \angle ZOG$, (σχηματίζονται ίσες γωνίες, στην ίδια μεριά των πλευρών τους που βρίσκονται πάνω στην ευθεία OZ), και κατά συνέπεια ZE και ZG ταυτίζονται, δηλαδή τα Z, E, Γ , είναι συνευθειακά.

(ii) Προφανώς $\hat{\phi} = 2\hat{\omega}$, επομένως $\angle Z\Gamma G = \angle Z\Gamma O + \angle O\Gamma G = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} + \hat{\omega} = 90^\circ - \hat{\omega} + \hat{\omega} = 90^\circ$, και συνεπώς τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Gamma\Delta$ και $M\Gamma E$, που έχουν κοινή οξεία γωνία στο Γ , είναι όμοια.

Έτσι, $\frac{\Gamma E}{\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma M}{\Gamma Z}$, δηλαδή $(\Gamma E) \cdot (\Gamma Z) = (\Gamma M) \cdot (\Gamma\Delta)$, και επειδή στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, η κορυφή A

βλέπει διάμετρο, συνεπώς $(\Gamma A)^2 = (\Gamma M) \cdot (\Gamma\Delta) = (\Gamma E) \cdot (\Gamma Z)$. Όμως, $(\Gamma\Xi)^2 = (\Gamma E) \cdot (\Gamma Z) = (\Gamma N)^2$,

άρα $(\Gamma\Xi)^2 = (\Gamma A)^2 = (\Gamma N)^2$, δηλαδή $\Gamma\Xi = \Gamma A = \Gamma N$, και επομένως οι εφαπτόμενες του κύκλου (K, ρ) , από το Γ , έχουν τα σημεία επαφής τους με τον κύκλο, στο τόξο κέντρου Γ και ακτίνας ΓA .

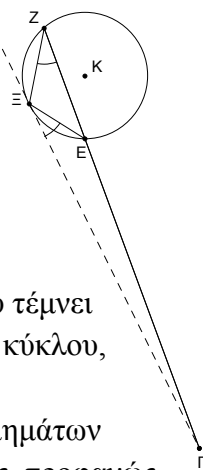
* Έστω κύκλος (K, ρ) , και σημείο Γ εκτός αυτού. Αν φέρουμε από το Γ μία τέμνουσα του κύκλου, στα σημεία E, Z , και μια εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Ξ , τότε $(\Gamma\Xi)^2 = (\Gamma E) \cdot (\Gamma Z)$.

Απόδειξη: Τα τρίγωνα $\Gamma E\Xi$ και $\Gamma\Xi Z$ είναι όμοια, αφού έχουν κοινή γωνία στην κορυφή Γ , και ίσες γωνίες στις κορυφές Ξ, Z αντίστοιχα, σαν υπό χορδής και εφαπτομένης στην Ξ , και εγγεγραμμένης στην Z , που αντιστοιχούν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Xi E}$.

Έτσι, $\frac{\Gamma E}{\Gamma\Xi} = \frac{\Gamma\Xi}{\Gamma Z}$, δηλαδή $(\Gamma\Xi)^2 = (\Gamma E) \cdot (\Gamma Z)$.

Σχόλιο: Αυτό που αποδείξαμε τεκμηριώνει τις παρακάτω κατασκευές.

(1) Όταν θέλουμε να εγγράψουμε κύκλο σε κυκλικό τμήμα, αν μας έχουν «επιβάλλει» το σημείο Z επαφής με το τόξο, ή το σημείο E επαφής με τη χορδή, φέρνουμε τη ΓZ , που τέμνει τη χορδή AB στο E , ή τη ΓE που τέμνει το τόξο στο Z , και εντοπίζουμε το κέντρο K του κύκλου, στην τομή της OZ με την κάθετη της AB στο E . Με κέντρο το σημείο K και ακτίνα KZ , σχεδιάζουμε τον ζητούμενο κύκλο. Προφανώς τα ονόματα σημείων και ευθυγράμμων τμημάτων είναι αυτά του αρχικού σχήματος. Επίσης αν δε μας έχουν «επιβάλλει» τα σημεία επαφής, προφανώς επιλέγουμε εμείς αυτά που μας χρειάζονται.



[illegible]

Το Λ ανήκει στην διχοτόμο της γωνίας NTB, αφού ισαπέχει από την εφαπτομένη ΓΝ και από την εφαπτομένη ΑΒ.

Έτσι, επιλέγοντας σημείο N του τόξου AB , στον κύκλο $(\Gamma, \Gamma A)$, και κατασκευάζοντας την εφαπτομένη του «εν λόγω» κύκλου στο N , εντοπίζουμε τα δυο κέντρα, στην τομή της εφαπτομένης με τις διχοτόμους των (εφεξής παραπληρωματικών) γωνιών, NTA και NTB .