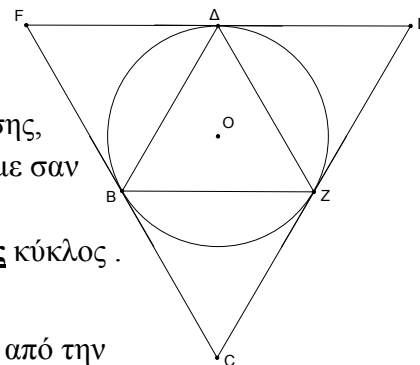


Η έννοια του ορίου



Η «ανακάλυψη» των ψηφίων του π

Επειδή θα εργαστούμε με μετρήσεις, πρέπει να ορίσουμε μονάδα μέτρησης, και αφού το αντικείμενο του ενδιαφέροντός μας είναι ο κύκλος, θεωρούμε σαν καλύτερη επιλογή, η μονάδα μέτρησης να είναι όσο η ακτίνα.

Έστω λοιπόν κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$, δηλαδή μοναδιαίος κύκλος.

Προσέγγιση του π με την ημιπερίμετρο των κανονικών τριγώνων.

Το μήκος του κύκλου $L = 2\pi R = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$, είναι προφανώς μεγαλύτερο από την περίμετρο του εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου $B\Delta Z$ και μικρότερο από την περίμετρο του περιγεγραμμένου κανονικού τριγώνου CDF .

Ονομάζουμε λ_3 την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου $B\Delta Z$, P_3 την περίμετρό του και επομένως: $\lambda_3 = B\Delta = \Delta Z = ZB = R\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ και $P_3 = 3 \cdot \lambda_3 = 3\sqrt{3}$

Οι εφαπτόμενες του κύκλου στις κορυφές του $B\Delta Z$, ορίζουν το περιγεγραμμένο τρίγωνο CDF , το οποίο είναι επίσης κανονικό, αφού είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα τα CBZ , $D\Delta Z$, $F\Delta B$ (Γ - Π - Γ), που έχουν βάσεις τις ίσες πλευρές του εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου ΔBZ , και γωνίες βάσης τις «υπό χορδής και εφαπτομένης» στα ίσα «μικρά» τόξα με $(\widehat{B\Delta}) = (\widehat{\Delta Z}) = (\widehat{ZB}) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$. Η ισότητα των τριγώνων

CBZ , $D\Delta Z$ και $F\Delta B$, όχι μόνο εξασφαλίζει την κανονικότητα του τριγώνου CDF , αλλά και τη διχοτόμηση των πλευρών του, από τα σημεία επαφής. Τα ίσα ισοσκελή τρίγωνα που προαναφέραμε, εμφανίζονται σε κάθε περίπτωση «περάσματος» από το εγγεγραμμένο πολύγωνο, στο περιγεγραμμένο με το ίδιο πλήθος πλευρών, και επομένως σε κάθε περίπτωση προκύπτουν και τα ίδια συμπεράσματα. Εδικά στην περίπτωση μας τα ίσα ισοσκελή τρίγωνα είναι ισόπλευρα, αφού οι γωνίες κορυφής είναι ίσες με 60° σαν γωνίες του κανονικού τριγώνου CDF .

Ονομάζουμε λ'_3 την πλευρά του περιγεγραμμένου κανονικού τριγώνου CDF , P'_3 την περίμετρό του, και επομένως: $\lambda'_3 = CF = CB + BF = BZ + B\Delta = \lambda_3 + \lambda_3 = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$ και $P'_3 = 3 \cdot \lambda'_3 = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Έτσι αφού $P_3 < L < P'_3$, έχουμε: $P_3 < L < P'_3 \Rightarrow \frac{P_3}{2} < \frac{L}{2} < \frac{P'_3}{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2,598 < \pi < 5,199$

Σχόλια: (1) Οι γωνίες στις βάσεις των ίσων ισοσκελών τριγώνων είναι 60° , σαν «υπό χορδής και εφαπτομένης» σε τόξα 120° .

(2) Για την προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{3}$, στην ημιπερίμετρο του εγγεγραμμένου, χρησιμοποιήσαμε τα τρία πρώτα δεκαδικά ψηφία $\boxed{\sqrt{3} \approx 1,732 \text{ με } 1,732 < \sqrt{3}}$, δηλαδή κάναμε προσέγγιση με έλλειψη, ενώ για

την ημιπερίμετρο του περιγεγραμμένου πήραμε $\boxed{\sqrt{3} \approx 1,733 \text{ με } \sqrt{3} < 1,733}$, δηλαδή προσέγγιση με υπεροχή, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μεταβατική ιδιότητα.

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot 1,732 < \frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < \frac{6\sqrt{3}}{2} < 3 \cdot 1,733 \Rightarrow 2,598 < \pi < 5,199$$

(3) Για μας που ξέρουμε την προσέγγιση $\boxed{\pi \approx 3,14}$, η διαδικασία με τα κανονικά πολύγωνα, προσφέρεται για να «επιβεβαιώσουμε» τα διαδοχικά ψηφία του π . Προφανώς, αν ο αριθμός π μας ήταν άγνωστος, η διαδικασία θα ήταν μέθοδος ανακάλυψης. Τα κανονικά τρίγωνα, δεν μας «φώτισαν» ικανοποιητικά, αφού δεν επιβεβαίωσαν ούτε το ακέραιο μέρος **3**, αφού η σχέση $2,598 < \pi < 5,199$ «επιτρέπει» στον π να έχει ακέραιο μέρος 2 ή 3 ή 4 ή ακόμα και 5.

(4) Όπως είναι γνωστό, το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά α , είναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Έτσι, αν $E_3 = \frac{\lambda_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $E'_3 = \frac{\lambda_3'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ και $E = \pi R^2 = \pi$, τα εμβαδά των κανονικών τριγώνων, (εγγεγραμμένου – περιγεγραμμένου) και κύκλου αντίστοιχα, τότε $E_3 < E < E'_3$,

και $E_3 < E < E'_3 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} < \pi < 3\sqrt{3} \Rightarrow 1,299 < \pi < 5,199$. Η προσέγγιση αυτή, υστερεί σε σχέση με την

προσέγγιση των ημιπεριμέτρων, αφού «επιτρέπει» στον π και ακέραιο μέρος 1.

Προσέγγιση του π με την ημιπερίμετρο των κανονικών εξαγώνων.

Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΔ του εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου ΒΔΖ,

διχοτομεί το «μικρό» τόξο $\widehat{BD}$ στο Γ, και έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να κατασκευάσουμε διαδοχικά, το εγγεγραμμένο κανονικό εξαγώνο,

και στη συνέχεια με τις εφαπτόμενες, το περιγεγραμμένο κανονικό εξαγώνο.

Ονομάζουμε λ_6 την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, P_6 την περίμετρό του, και επομένως: $\lambda_6 = AB = R = 1$ και $P_6 = 6 \cdot \lambda_6 = 6$

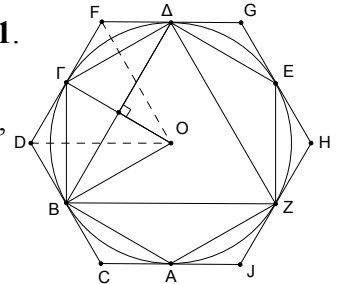
Ονομάζουμε λ'_6 την πλευρά του περιγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου CDFGHJ, P'_6 την περίμετρό του,

και επομένως: $\lambda'_6 = CD = \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ και $P'_6 = 6 \cdot \lambda'_6 = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

Έτσι αφού $P_6 < L < P'_6$, έχουμε: $P_6 < L < P'_6 \Rightarrow \frac{P_6}{2} < \frac{L}{2} < \frac{P'_6}{2} \Rightarrow \frac{6}{2} < \pi < \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 < \pi < 2\sqrt{3} \Rightarrow 3 < \pi < 3,466$

και ήδη «βρέθηκε» σαν ακέραιο μέρος του π , ο αριθμός 3.

$$\boxed{\pi = 3, \dots}$$



Σχόλια: (1) Αν E_6 το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου τότε $E_6 = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, αφού έχουμε 6 ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά $\lambda_6 = R$. Ομοίως, αν E'_6 το εμβαδόν του περιγεγραμμένου

κανονικού εξαγώνου, τότε: $E'_6 = 6 \cdot \frac{\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$, αφού $\lambda'_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ είναι η πλευρά των 6 ισοπλεύρων τριγώνων του. Επίσης αν $E = \pi R^2 = \pi$ το εμβαδόν του κύκλου, τότε $E_6 < E < E'_6$,

και $E_6 < E < E'_6 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < 2\sqrt{3} \Rightarrow 2,598 < \pi < 3,466$. Και στο παράδειγμα αυτό, παρατηρούμε ότι η

προσέγγιση με τα εμβαδά, υστερεί σε σχέση με την προσέγγιση των ημιπεριμέτρων, αφού επιτρέπει στον π και ακέραιο μέρος 2. Γενικά, σε κύκλο με μονάδα μέτρησης την ακτίνα του, δηλαδή σε μοναδιαίο κύκλο, $E_n < \pi < E'_n$, όπου E_n το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου με n πλευρές και E'_n το εμβαδόν του αντίστοιχου περιγεγραμμένου. Η μέθοδος προσέγγισης του π με τα εμβαδά, αν και «καθυστερεί» την προσέγγιση του π , φαντάζει πιο «πειστική», αφού σχεδιάζοντας κανονικά πολύγωνα, όλο και με περισσότερες πλευρές, νιώθουμε ότι τείνει να «εξαντληθεί» η επιφάνεια ανάμεσα στη γραμμή του κύκλου και την κλειστή γραμμή του κανονικού πολυγώνου.

(2) Τα πολύγωνα που χρησιμοποιούμε, έχουν τόσα κοινά σημεία με τον κύκλο, όσες και οι γωνίες τους. Μάλιστα, τα πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, έχουν ακριβώς τα ίδια κοινά σημεία με τον κύκλο, που για το εγγεγραμμένο είναι οι κορυφές του, ενώ για το περιγεγραμμένο τα σημεία επαφής. Όταν διπλασιάζουμε το πλήθος των πλευρών, διπλασιάζονται τα κοινά σημεία κύκλου και πολυγώνου, αφού στα ήδη υπάρχοντα, προστίθενται τα μέσα των τόξων που έχουν για χορδές τις πλευρές των πολυγώνων.

Τα σημεία αυτά διακρίνονται το ένα από το άλλο, και ποτέ δεν πρόκειται να σχηματίσουν τόξο, αφού «κανένα πολύγωνο δε θα γίνει κύκλος». Όταν το πλήθος των γωνιών του πολυγώνου «τείνει στο άπειρο», και τα κοινά σημεία κύκλου – πολυγώνων «τείνουν να γίνουν άπειρα». Έτσι, πάνω στον κύκλο υπάρχουν τα απείρου πλήθους δικά του σημεία, που δε διακρίνονται το ένα από το άλλο, και «δίνουν την εικόνα του συνεχούς», και τα δυνητικά άπειρου πλήθους κοινά σημεία κύκλου – πολυγώνων, που όμως διακρίνονται το ένα από το άλλο, και μπορούμε να τα αριθμήσουμε.

(3) Το τρίγωνο ODF είναι προφανώς ισόπλευρο, και έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο OGF έχουμε:

$$OF = \lambda'_6 \text{ και } GF = \frac{\lambda'_6}{2}, \text{ έτσι } GF^2 + OF^2 = OF^2 \text{ και επομένως } \left(\frac{\lambda'_6}{2}\right)^2 + R^2 = \lambda'^2_6.$$

$$\text{Όμως } \left(\frac{\lambda'_6}{2}\right)^2 + R^2 = \lambda'^2_6 \Leftrightarrow 1 = \lambda'^2_6 - \frac{\lambda'^2_6}{4} \Leftrightarrow \frac{3\lambda'^2_6}{4} = 1 \Leftrightarrow \lambda'^2_6 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lambda'_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \lambda'_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(4) Θα εργαστούμε, με διαδοχικούς διπλασιασμούς του πλήθους των πλευρών κανονικών πολυγώνων, για να προσεγγίσουμε τον π με τις ημιπεριμέτρους τους, τις οποίες θα ονομάσουμε κατάλληλα.

Ας ονομάσουμε T_0 την ημιπερίμετρο του εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου και T'_0 την ημιπερίμετρο του αντίστοιχου περιγεγραμμένου. Ξεκινώντας από το κανονικό τρίγωνο, με διαδοχικούς διπλασιασμούς του πλήθους των πλευρών, προκύπτουν πολύγωνα που με T_v μπορούμε να ονομάσουμε την ημιπερίμετρό τους αν είναι εγγεγραμμένα και με T'_v την ημιπερίμετρό τους αν είναι περιγεγραμμένα, όπου v το πλήθος των διπλασιασμών που χρειάστηκαν. Έτσι ονομάσαμε T_0 την ημιπερίμετρο του εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου, αφού $3 = 3 \cdot 2^0$, ομοίως T_1 θα ονομάσουμε την ημιπερίμετρο του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου, αφού $6 = 3 \cdot 2^1$, ενώ T'_3 θα είναι η ημιπερίμετρος του περιγεγραμμένου κανονικού 24-γώνου, αφού $24 = 3 \cdot 2^3$.

Για τις ημιπεριμέτρους, ισχύουν οι τύποι $T'_{v+1} = \frac{2T'_v \cdot T_v}{T'_v + T_v}$ και $T_{v+1} = \sqrt{T'_{v+1} \cdot T_v}$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$, που θα

αποδειχθούν παρακάτω. Οι τύποι αυτοί λέγονται «αναδρομικοί», αφού οι τιμή της ημιπεριμέτρου κάθε νέου πολυγώνου που προκύπτει με διπλασιασμό πλευρών, είναι συνάρτηση των προηγούμενων τιμών, των δύο «συνεργαζόμενων ακολουθιών». Οι τύποι αυτοί μας δίνουν το πλεονέκτημα των διαδοχικών προσεγγίσεων του π , χωρίς να χρειάζεται να εργαστούμε σε σχήμα.

Προσέγγιση του π με την ημιπερίμετρο των κανονικών δωδεκαγώνων.

Επειδή $12 = 3 \cdot 2^2$, θα χρειαστούμε τις ημιπεριμέτρους T_2, T'_2 .

Με δεδομένο ότι $T_1 = \frac{P_6}{2} = 3$ και $T'_1 = \frac{P'_6}{2} = 2\sqrt{3}$, θα έχουμε:

$$T'_2 = \frac{2T'_1 \cdot T_1}{T'_1 + T_1} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{12}{2 + \sqrt{3}} = 12(2 - \sqrt{3}) \approx 3,216 \text{ και } T_2 = \sqrt{T'_2 \cdot T_1} = \sqrt{12(2 - \sqrt{3}) \cdot 3} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3,1$$

Επειδή $T_2 < \pi < T'_2 \Rightarrow 3,1 < \pi < 3,216$, τα κανονικά δωδεκάγωνα δε μας δίνουν την ευκαιρία να επιβεβαιώσουμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του π .

Προσοχή: Επειδή το $\sqrt{3}$ έχει αρνητικό συντελεστή, που «αντιστρέφει τη διάταξη», χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση με υπεροχή $\sqrt{3} \approx 1,733$ στο T_2 , ενώ την προσέγγιση με έλλειψη $\sqrt{3} \approx 1,732$ στο T'_2 .

$$\sqrt{3} < 1,733 \Rightarrow -\sqrt{3} > -1,733 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} > 2 - 1,733 \Rightarrow \sqrt{2 - \sqrt{3}} > \sqrt{2 - 1,733} \Rightarrow 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} > 6\sqrt{2 - 1,733} \approx 3,1$$

$$\sqrt{3} > 1,732 \Rightarrow -\sqrt{3} < -1,732 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} < 2 - 1,732 \Rightarrow 12(2 - \sqrt{3}) < 12(2 - 1,732) \approx 3,216$$

$$T_2 < \pi < T'_2 \Rightarrow 3,1 = 6\sqrt{2 - 1,733} < 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < \pi < 12(2 - \sqrt{3}) < 12(2 - 1,733) \approx 3,216 \Rightarrow 3,1 < \pi < 3,216$$

Εργαζόμενοι ομοίως με τα κανονικά 24-γωνα: $T_3 < \pi < T'_3 \Rightarrow 3,132 < \pi < 3,160$ «ανακαλύπτουμε» το πρώτο δεκαδικό ψηφίο. $\boxed{\pi = 3,1\dots}$

Με τα κανονικά 48-γωνα: $T_4 < \pi < T'_4 \Rightarrow 3,139 < \pi < 3,147$ δεν προκύπτει η επιβεβαίωση του δεύτερου δεκαδικού ψηφίου, αλλά τα κανονικά 96-γωνα: $T_5 < \pi < T'_5 \Rightarrow 3,141 < \pi < 3,143$, μας αποζημιώνουν, με το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο του π , το ψηφίο 4. $\boxed{\pi = 3,14\dots}$

Σχόλια: (1) Η προσέγγιση του $\boxed{\pi \approx 3,14}$ με τα κανονικά 96-γωνα, «ικανοποίησε» τον Αρχιμήδη, και είναι παγκοσμίως και διαχρονικά η «δημοφιλέστερη» τιμή για εφαρμογές.

(2) Με τις διαδοχικές προσεγγίσεις, δημιουργούνται δύο «ακολουθίες» αριθμών: Οι αριθμοί $T_0, T_1, T_2, T_3, \dots, T_v, \dots$ είναι άπειροι, ακολουθούν ο ένας τον άλλο, είναι όλο και μεγαλύτεροι, όσο μεγαλώνει ο δείκτης τους, πάντα όμως μικρότεροι του π . $\boxed{T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots < T_v < \dots < \pi}$

Οι αριθμοί $T'_0, T'_1, T'_2, T'_3, \dots, T'_v, \dots$ είναι άπειροι, ακολουθούν ο ένας τον άλλο, είναι όλο και μικρότεροι, όσο μεγαλώνει ο δείκτης τους, πάντα όμως είναι μεγαλύτεροι του π . $\boxed{\pi < \dots < T'_v < \dots < T'_3 < T'_2 < T'_1 < T'_0}$

Έτσι, τελικά: $\boxed{T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots < T_v < \dots < \pi < \dots < T'_v < \dots < T'_3 < T'_2 < T'_1 < T'_0}$

Για δείκτες, χρησιμοποιούνται οι τιμές της μεταβλητής $v \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Ο αριθμός π είναι όριο

Ισχυρισμός: Για κάθε θετικό αριθμό ε , τον οποίο παίρνουμε σαν ακτίνα, άπειροι διαδοχικοί όροι των ακολουθιών $(T_v)_{v \in \mathbb{N}}$, $(T'_v)_{v \in \mathbb{N}}$ ανήκουν στην περιοχή με κέντρο τον αριθμό π και ακτίνα ε , δηλαδή όλοι οι όροι των ακολουθιών, από ένα δείκτη και μετά, ανήκουν στο ανοικτό διάστημα $(\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon)$.

Έτσι, αν φανταστούμε το σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών που αντιστοιχεί στον αριθμό π , τότε στο εσωτερικό κάθε ευθυγράμμου τμήματος με μέσο το σημείο αυτό, ανήκουν σαν σημεία του, άπειροι όροι των παραπάνω «ακολουθιών», και μάλιστα όλοι από ένα δείκτη και μετά.

Για παράδειγμα, για $\pi \approx 3,14$, στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος, από 3,13 έως 3,15, ανήκουν όλοι οι όροι από τον T_3 και μετά, ενώ από την άλλη ακολουθία ανήκουν όλοι, από τον T'_4 και μετά.

Η αλήθεια του παραπάνω ισχυρισμού, μας δίνει το δικαίωμα να γράψουμε: $\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = \pi = \lim_{v \rightarrow \infty} T'_v$, να πούμε

ότι το όριο της «ακολουθίας» των T_v , (και ομοίως της «ακολουθίας» των T'_v) όταν το v τείνει στο άπειρο, είναι ο αριθμός π , δηλαδή ότι ο π είναι το κοινό όριο των δύο «ακολουθιών».

Σχόλια: (1) Η περίπτωση του π , είναι η πλέον ευνοϊκή, για την «πρώτη μας γνωριμία» με την έννοια του ορίου. Οι ακολουθίες είναι «μονότονες», η $(T_v)_{v \in \mathbb{N}}$ αύξουσα και η $(T'_v)_{v \in \mathbb{N}}$ φθίνουσα, και «φραγμένες».

Ο αριθμός π , φράζει «από την πάνω μεριά» την $(T_v)_{v \in \mathbb{N}}$, που παρουσιάζει όλο και μεγαλύτερες τιμές, «βάζοντας όρια στην ανάπτυξή της», ενώ την ίδια στιγμή φράζει «από την κάτω μεριά» την $(T'_v)_{v \in \mathbb{N}}$ που παρουσιάζει όλο και μικρότερες τιμές. Έτσι ο αριθμός π , «παίζει» το ρόλο του συνόρου, ανάμεσα στους όρους της ακολουθίας $(T_v)_{v \in \mathbb{N}}$ και στους όρους της ακολουθίας $(T'_v)_{v \in \mathbb{N}}$. Ομοίως ο κύκλος, δηλαδή η περιφέρεια του κύκλου, είναι το σύνоро, ανάμεσα στην «οικογένεια» των εγγεγραμμένων και την «οικογένεια» των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων.

(2) Συνήθως ερευνάμε αν κάποια ακολουθία έχει όριο και αν έχει ποιο είναι. Στην περίπτωση μας, γνωρίζοντας ότι ο λόγος μήκους του κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του είναι σταθερός αριθμός, και στην προσπάθειά μας να τον προσεγγίσουμε, «αποφασίσαμε να τον κάνουμε όριο», επινοώντας εμείς τις κατάλληλες ακολουθίες που τον προσεγγίζουν.

(3) Ο αριθμός π είναι άρρητος αριθμός, δηλαδή δεν υπάρχει κλάσμα με ακέραιους όρους, ίσο με αυτόν. Έχει άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, που «κάνεις ποτέ δε θα τα δει όλα». Επειδή δεν είναι περιοδικός, όσα ψηφία του κι αν ανακαλύψουμε, είναι αδύνατο να προβλέψουμε τα επόμενα. Ο π είναι «υπερβατικός αριθμός», αφού δεν υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές που να τον έχει για ρίζα του. Η χρήση του σε εφαρμογές συνοδεύεται πάντα από σφάλμα, αφού αναγκαστικά αξιοποιείται πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων του. Η αγωνία μας είναι, το αναπόφευκτο σφάλμα να μην αποβεί καταστροφικό για την εφαρμογή μας. Έτσι, αν η εφαρμογή είναι δική μας, φροντίζουμε να τον «ψαλιδίσουμε» τόσο, όσο εκτιμάμε ότι «ανέχεται» η εφαρμογή μας. Όταν παρεμβαίνει στους υπολογισμούς μας, για αποτελέσματα που θα εφαρμόσουν άλλοι, ποτέ δεν τον αντικαθιστούμε. Έτσι, θεωρείται «τελικό» αποτέλεσμα το $L = 20\pi \text{ cm}$, για μήκος κύκλου που έχει ακτίνα $R = 10 \text{ cm}$, αφού η ευθύνη για την προσεγγιστική ακρίβεια ανήκει σε αυτόν που θα κάνει την εφαρμογή.

Απόδειξη των «αναδρομικών» τύπων $T'_{v+1} = \frac{2T'_v \cdot T_v}{T'_v + T_v}$ και $T_{v+1} = \sqrt{T'_{v+1} \cdot T_v}$, για $v = 0$.

Θα αποδείξουμε τους τύπους για $v = 0$, δηλαδή τους

$$\text{τύπους: } T'_1 = \frac{2T'_0 \cdot T_0}{T'_0 + T_0} \quad \text{και} \quad T_1 = \sqrt{T'_1 \cdot T_0}.$$

Όπως προκύπτει από την περιγραφή που έχουμε κάνει, T_0 είναι η ημιπερίμετρος του εγγεγραμμένου κανονικού τριγώνου, αφού $3 = 3 \cdot 2^0$ και ομοίως T'_0 είναι η ημιπερίμετρος του περιγεγραμμένου κανονικού τριγώνου. Επειδή $6 = 3 \cdot 2^1$, οι τύποι T_1 και T'_1 αφορούν τα αντίστοιχα κανονικά εξάγωνα.

Ονομάζουμε λ'_3 , τις πλευρές του περιγεγραμμένου κανονικού τριγώνου, και λ'_6 , τις πλευρές του περιγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου.

(1) Τα ισοσκελή (στην περίπτωση μας ισόπλευρα) τρίγωνα FHK και FBD είναι προφανώς όμοια

$$\text{και έτσι } \frac{FH}{FB} = \frac{HK}{BD} \Rightarrow FH \cdot BD = HK \cdot FB \Rightarrow (FB - HB) \cdot BD = HK \cdot FB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FB \cdot BD - HB \cdot BD = HK \cdot FB \Rightarrow FB \cdot BD = HK \cdot FB + HB \cdot BD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda'_3}{2} \cdot \lambda_3 = \lambda'_6 \cdot \frac{\lambda'_3}{2} + \frac{\lambda'_6}{2} \cdot \lambda_3 \Rightarrow \lambda'_3 \cdot \lambda_3 = \lambda'_6 \cdot (\lambda'_3 + \lambda_3) \Rightarrow \lambda'_6 = \frac{\lambda'_3 \cdot \lambda_3}{\lambda'_3 + \lambda_3} \Rightarrow \frac{T'_1}{3} = \frac{\frac{2}{3}T'_0 \cdot \frac{2}{3}T_0}{\frac{2}{3}T'_0 + \frac{2}{3}T_0} \Rightarrow T'_1 = \frac{2T'_0 \cdot T_0}{T'_0 + T_0}$$

(2) Τα ισοσκελή τρίγωνα $HB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια, αφού έχουν ίσες γωνίες κορυφής $\hat{H} = \hat{\Gamma} = 120^\circ$, και

$$\text{επομένως } \frac{HB}{\Gamma B} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} \Rightarrow B\Gamma^2 = HB \cdot B\Delta \Rightarrow \lambda_6^2 = \frac{\lambda'_6}{2} \cdot \lambda_3 \Rightarrow \left(\frac{T_1}{3}\right)^2 = \frac{T'_1}{6} \cdot \frac{2}{3}T_0 \Rightarrow T_1^2 = T'_1 \cdot T_0 \Rightarrow T_1 = \sqrt{T'_1 \cdot T_0}.$$

Προσοχή: Η απόδειξη στηρίχθηκε στο τρίγωνο FBD . Τρίγωνα με την ίδια «δομή», έχουμε σε κάθε περίπτωση «περάσματος» από πολύγωνα (εγγεγραμμένο – περιγεγραμμένο) με πλήθος πλευρών της μορφής $3 \cdot 2^v$, στα αντίστοιχα πολύγωνα με τις διπλάσιες πλευρές. Έτσι, όπως από το εγγεγραμμένο $B\Delta Z$ με πλευρά $B\Delta = \lambda_3$ προέκυψε το περιγεγραμμένο FCD πλευράς $FC = \lambda'_3$, με κορυφές τα σημεία τομής των εφαπτόμενων του κύκλου στα B, Δ, Z , με τον ίδιο τρόπο προκύπτει το περιγεγραμμένο με πλευρά λ'_μ από το εγγεγραμμένο με πλευρά λ_μ , δημιουργώντας ισοσκελές τρίγωνο

με ίσα σκέλη $\frac{\lambda'_\mu}{2}$, όπως ισοσκελές είναι και το FBD με $FB = FD = \frac{\lambda'_3}{2}$.

Επίσης, όπως με τη μεσοκάθετο της $ΒΔ = λ_3$ προέκυψε το μέσο $Γ$ του $\widehat{ΒΔ}$ και «άνοιξε ο δρόμος» για την κατασκευή του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου $ΓΒΑΖΕΔ$, πλευράς $ΓΒ = ΓΔ = λ_6$ και στη συνέχεια του περιγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου $ΗΚΜΝΡΓ$ πλευράς $ΗΚ = λ'_6$, με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν τα πολύγωνα με πλευρές $λ_{2μ}, λ'_{2μ}$ με τη βοήθεια της μεσοκαθέτου της $λ_μ$.

Επομένως η απόδειξη για κάθε τιμή του v , είναι ίδια με την απόδειξη για $v = 0$, αφού πάντα έχουμε ισοσκελές τρίγωνο με πλευρές $\frac{λ'_μ}{2}$, $\boxed{FB = FD = \frac{λ'_3}{2}}$ βάση $λ_μ$, $\boxed{ΒΔ = λ_3}$ παράλληλο τμήμα στη βάση, $λ'_{2μ}$, $\boxed{ΗΚ = λ'_6}$ που τα άκρα του βρίσκονται πάνω στα ίσα σκέλη και σχηματίζουν με τα άκρα της βάσης ευθύγραμμα τμήματα $\frac{λ'_{2μ}}{2}$, $\boxed{HB = ΚΔ = \frac{λ'_6}{2}}$ και που πάνω του τέμνονται οι διχοτόμοι* των ίσων γωνιών της βάσης.

* Στο τρίγωνο $FBΔ$, η $ΒΓ$ διχοτομεί τη γωνία B , αφού οι δυο γωνίες που προκύπτουν βαίνουν σε ίσα τόξα, η μία σαν εγγεγραμμένη και η άλλη σαν «υπό χορδής και εφαπτομένης».

Σχόλια: (1) Η απόδειξη για κάθε τιμή του v , γίνεται ομοίως, αφού πάντα προκύπτει ισοσκελές τρίγωνο. Εμείς ξεκινάμε με ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο, και με τις εφαπτόμενες του κύκλου στις κορυφές του, δημιουργούμε το περιγεγραμμένο με το ίδιο πλήθος πλευρών. Το ισοσκελές της απόδειξης, έχει για βάση μια πλευρά του εγγεγραμμένου και για ίσα σκέλη μισές πλευρές του περιγεγραμμένου. Με τη μεσοκάθετο της πλευράς του εγγεγραμμένου, διχοτομούμε το αντίστοιχο τόξο και έτσι «άνοιγει ο δρόμος» για την κατασκευή των πολυγώνων με τις διπλάσιες πλευρές, τα οποία δημιουργούν ένα ισοσκελές τραπέζιο στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου. Μάλιστα στη μικρή βάση του τραπεζίου, συναντιούνται οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου.

(2) Επειδή $T_{v+1} = \sqrt{T'_{v+1} \cdot T_v}$, η ημιπερίμετρος οποιουδήποτε εγγεγραμμένου πολυγώνου και η ημιπερίμετρος του περιγεγραμμένου με το διπλάσιο πλήθος πλευρών, έχουν για γεωμετρικό μέσο την ημιπερίμετρο του εγγεγραμμένου, που έχει ίδιο πλήθος πλευρών με το περιγεγραμμένο.

Επίσης, αφού $T'_{v+1} = \frac{2T'_v \cdot T_v}{T'_v + T_v} \Leftrightarrow \frac{2}{T'_{v+1}} = \frac{1}{T'_v} + \frac{1}{T_v}$, οι ημιπερίμετροι οποιωνδήποτε πολυγώνων με το ίδιο πλήθος πλευρών (εγγεγραμμένο – περιγεγραμμένο), έχουν αρμονικό* μέσο την ημιπερίμετρο του περιγεγραμμένου με το διπλάσιο πλήθος πλευρών.

(3) Ο Αρχιμήδης (287-212 π.χ.) πρότεινε για χρήση την προσέγγιση: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, και σε περιοδική μορφή $3,14084507042253521126760563380281690 < \pi < 3,142857$ («στεγασμένο» το περιοδικό τμήμα)

* **Αρμονική πρόοδος**, είναι η πρόοδος της οποίας οι αντίστροφοι των όρων της, ορίζουν αριθμητική πρόοδο. Π.χ.: η ακολουθία $\left(\alpha_v = \frac{1}{v}\right)_{v \in \mathbb{N}^*}$ είναι αρμονική πρόοδος, αφού η ακολουθία $(\beta_v = v)_{v \in \mathbb{N}^*}$ είναι αριθμητική πρόοδος με «διαφορά» $\omega = 1$.

Άλλοι τύποι υπολογισμού του π

Από τον Leonard Euler (1707-1783): $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ (με άπειρο άθροισμα)

Από τον Franciscus Vieta (1540-1603): $\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots$ (με άπειρο γινόμενο)

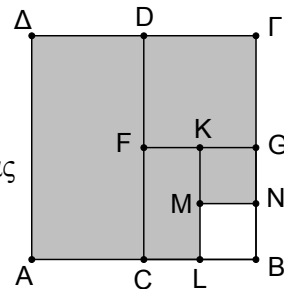
Από τον Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$ (με άπειρο άθροισμα)

Ένα τετράγωνο με πλευρά μονάδα

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ χρησιμοποιηθεί σα μονάδα μέτρησης, τότε προφανώς το εμβαδόν του τετραγώνου είναι **1**.

Ξεκινάμε να χρωματίσουμε με γκριζο την επιφάνεια του τετραγώνου, χρωματίζοντας διαδοχικά το μισό κάθε φορά, της λευκής επιφάνειας. Έτσι, αρχικά «γκριζάρουμε» το ορθογώνιο ΑCDΔ, που καλύπτει τη μισή επιφάνεια του ΑΒΓΔ και συνεπώς, έχει

εμβαδόν $\frac{1}{2}$. Στη συνέχεια «γκριζάρουμε» το μισό του ορθογωνίου CBΓD, δηλαδή το τετράγωνο FGFD



και έτσι στο «δεύτερο βήμα», η συνολικά «γκριζαρισμένη» επιφάνεια, έχει εμβαδόν $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Στο «τρίτο

βήμα» «γκριζάρουμε» το μισό του τετραγώνου CBGF, δηλαδή το ορθογώνιο CLKF, και έτσι έχουμε συνολικά «γκριζαρισμένη» επιφάνεια με εμβαδόν $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Έτσι, προκύπτει η ακολουθία των

εμβαδών του «γκριζαρισμένου», $\alpha_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}$, $\alpha_3 = \frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$, ...

Ισχυρισμός: Για κάθε λευκή περιοχή του τετραγώνου, υπάρχει όρος της ακολουθίας, «που φέρνει το γκριζο» στην περιοχή αυτή, και μάλιστα το ίδιο κάνουν και όλοι οι επόμενοι του.

Επειδή ο ισχυρισμός μας αληθεύει, όπως θα δείξουμε, μπορούμε να πούμε ότι το όριο της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, όταν **το ν τείνει στο άπειρο**, είναι ο αριθμός **1** και να γράψουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.

Απόδειξη: $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \Leftrightarrow 2x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) \Leftrightarrow 2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \Leftrightarrow 2x = 1 + x \Leftrightarrow x = 1$

Σχόλια: (1) Οι όροι της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ στην αναλυτική τους μορφή, είναι τα πλήρη αθροίσματα αντιστρόφων των δυνάμεων του αριθμού **2**, από την πρώτη δύναμη, έως τη δύναμη με εκθέτη τον δείκτη

του αντίστοιχου όρου της ακολουθίας. π.χ.: $\alpha_5 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$

(2) Επειδή κάθε φορά «γκριζάραμε» το μισό του κομματιού που έμενε λευκό, κάθε φορά όσο «γκριζάραμε» άλλο τόσο έμενε λευκό. Για παράδειγμα, στο «δεύτερο βήμα γκριζάραμε» το μισό του μισού, δηλαδή το $\frac{1}{4}$, επομένως η «γκριζαρισμένη» περιοχή έγινε τα $\frac{3}{4}$ του τετραγώνου και συνεπώς

έμενε πλέον λευκό το $\frac{1}{4}$, ή αλλιώς έλειπε $\frac{1}{4}$, για να γίνει γκριζο ολόκληρο το τετράγωνο.

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \alpha_2 = \frac{3}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

Έτσι μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι αν οι όροι της ακολουθίας δεν γράφονται αναλυτικά σαν άθροισμα των κομματιών που έχουν «γκριζαριστεί» μέχρι το αντίστοιχο βήμα, αλλά σαν αποτέλεσμα της πρόσθεσης, τότε ο αριθμητής είναι πάντα κατά μια μονάδα μικρότερος του παρονομαστή. Η παρατήρηση αυτή, μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε τον **γενικό όρο της ακολουθίας**, δηλαδή τον όρο που έχει

δείκτη μεταβλητό το $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, στην προφανώς σωστή μορφή $\alpha_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να «δούμε» την απόδειξη, ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$, «βάσει ορισμού».

Απόδειξη: Αποδεικνύεται ότι **για κάθε** $\varepsilon > 0$, τον οποίο παίρνουμε σαν ακτίνα, **άπειροι διαδοχικοί όροι** της ακολουθιών $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ανήκουν στην περιοχή με κέντρο τον αριθμό **1** και ακτίνα ε , δηλαδή **όλοι οι όροι της ακολουθίας, από ένα δείκτη και μετά**, ανήκουν στο ανοικτό διάστημα $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Θα «δούμε» την απόδειξη, μέσα από ένα παράδειγμα με μια συγκεκριμένη τιμή του ε .

Έστω $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Για να ανήκει ένας όρος α_n της ακολουθίας στην περιοχή $\left(1 - \frac{1}{1000}, 1 + \frac{1}{1000}\right)$, αρκεί

$1 - \frac{1}{1000} < \alpha_n$, δηλαδή αρκεί $1 - \frac{1}{1000} < 1 - \frac{1}{2^n}$, αφού όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι μικρότεροι του 1

και συνεπώς μικρότεροι του $1 + \frac{1}{1000}$. Όμως $1 - \frac{1}{1000} < 1 - \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow -\frac{1}{1000} < -\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \frac{1}{1000} > \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 2^n > 1000$ και

προφανώς αρκεί $n \geq 10$, αφού $2^{10} = 1024 > 1000$. Επομένως όλοι οι όροι της ακολουθίας, από τον α_{10}

και μετά, ανήκουν στην περιοχή $\left(1 - \frac{1}{1000}, 1 + \frac{1}{1000}\right)$. Ομοίως γίνεται η απόδειξη για κάθε $\varepsilon > 0$.

Σχόλια: (1) Αν θέλουμε την απόδειξη για κάθε $\varepsilon > 0$, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε λογαρίθμους.

$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \log_2 \varepsilon > \log_2 \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \log_2 \varepsilon > -n \Leftrightarrow -\log_2 \varepsilon < n$ και να πούμε ότι:

«υπάρχει δείκτης $\mathbf{n}$, που από αυτόν και μετά, όλοι οι αντίστοιχοι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, αρκεί για παράδειγμα να είναι ο αμέσως μεγαλύτερος φυσικός του $-\log_2 \varepsilon$.

Έτσι επειδή για $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, $-\log_2 \frac{1}{1000} < 9,97$, επομένως ο ελάχιστος δείκτης που από αυτόν και μετά,

όλοι οι αντίστοιχοι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην περιοχή με κέντρο **1** και ακτίνα $\varepsilon = 0,001$ είναι 10.

(2) Η ακολουθία $\left(\beta_n = \frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = \frac{1}{2}$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$. Έτσι οι

όροι της $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, είναι τα «μερικά» αθροίσματα των όρων της $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, δηλαδή $\alpha_n = S_n$, για κάθε

$n \in \mathbb{N}^*$. Και για τους δύσπιστους: $S_n = \beta_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$, και έτσι $S_n = \beta_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n} = \alpha_n$, για

κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Η γεωμετρική πρόοδος $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι «απολύτως φθίνουσα», αφού $|\lambda| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, και

επομένως υπάρχει το «άθροισμα των απείρων όρων» $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{\beta_1}{1 - \lambda} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ που δε θα

μπορούσε να είναι άλλο από το $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$.

(3) Αναζητήσαμε το όριο μιας ακολουθίας «μονότονης και φραγμένης», και διαπιστώσαμε ότι έχει όριο. Μάλιστα, με δεδομένο ότι ήταν αύξουσα, το όριό της ήταν ο μικρότερος, από κατασκευής, αριθμός που έφραζε την ανάπτυξη των όρων της ακολουθίας, σε όλο και μεγαλύτερες τιμές. Ο αριθμός αυτός δε θα μπορούσε να είναι άλλος από το **1**, δηλαδή το εμβαδόν του τετραγώνου που, από κατασκευής, οριοθετούσε την περιοχή που ήταν διαθέσιμη για «γκριζάρισμα».

(4) Η έννοια του ορίου είναι πολύ σημαντική, αφού είναι καθοριστική για τη μελέτη των συναρτήσεων. Είναι πολύ σημαντικό, να προσεγγίζουμε την έννοια του ορίου, με παραδείγματα, εικόνες και φαντασία. Όμως τα Μαθηματικά απαιτούν ακρίβεια, και αυτή δεν προκύπτει, παρά μόνο από την προσήλωση με «ευλάβεια» στους ορισμούς. Όμως, για να περάσουμε ομαλά στην αυστηρότητα των ορισμών, δώσαμε τον ορισμό του ορίου, έτσι που να προκύπτει από τα συμφραζόμενα.

Ο ορισμός, απαιτεί «ο υπονήφιος για να χρηστεί» όριο ακολουθίας, «να φέρει από όλες τις περιοχές του βεβαίωση» ότι μέσα τους βρίσκονται άπειροι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας. Ο υπονήφιος «γνωρίζει» ότι οι περιοχές του είναι απείρου πλήθους και επομένως είναι αδύνατο να τις ελέγξει κάθε μία ξεχωριστά. Το πρόβλημα ξεπερνιέται όταν καταφέρνει να εκφράσει τον γενικό όρο της ακολουθίας, δηλαδή τον όρο που έχει δείκτη μεταβλητό το $v \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, αφού τότε επιλέγοντας και τη μεταβλητή $\varepsilon > 0$, που θα αντιπροσωπεύσει τις ακτίνες των περιοχών, μπορεί να κάνει απόδειξη με μεταβλητές, που λειτουργεί αντιπροσωπευτικά για τις άπειρες διαφορετικές αποδείξεις.

(5) Οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ή πιο συνηθισμένα το

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Έτσι η ακολουθία $\left(\alpha_v = 1 - \frac{1}{2^v} \right)_{v \in \mathbb{N}^*}$, θα μπορούσε να γραφτεί σαν $\alpha(v) = 1 - \frac{1}{2^v}$, όπου

αντί για τον συνηθισμένο όνομα f των συναρτήσεων χρησιμοποιούμε το α , και αντί για όνομα μεταβλητής το x , χρησιμοποιούμε το v .

Με την έννοια του ορίου, διαχειριζόμαστε «τις υποθέσεις του απείρου». Έτσι, ακόμα και στις ακολουθίες για τις οποίες δε διαθέτουμε γενικό όρο, ενώ είναι θέμα χρόνου να μάθουμε τι συμβαίνει με οποιονδήποτε όρο τους, όσο μεγάλο δείκτη κι αν έχει, μας είναι αδύνατο, χωρίς την έννοια του ορίου, να περιγράψουμε την αίσθηση που αποκτάμε όταν ανακαλύπτουμε διαδοχικά τους όρους μιας ακολουθίας σε μια αδιάκοπη «πορεία» του μυαλού. Εννοείται ότι η διαδοχή των όρων μιας ακολουθίας, καθορίζεται από τη διαδοχή των δεικτών της, δηλαδή τη διαδοχή των φυσικών αριθμών.

Σε μια πρώτη επαφή μας με την έννοια του ορίου, φαντάζει αυτονόητο να πούμε ότι η διαδοχή των φυσικών αριθμών, η καλύτερα η ακολουθία των φυσικών αριθμών τείνει στο άπειρο. Ο συμβολισμός για τη διαπίστωση αυτή είναι για $v \in \mathbb{N}$, $v \rightarrow \infty$ ή με ακριβέστερο συμβολισμό $v \rightarrow +\infty$, για να μείνει ανοικτός ο δρόμος της διεύρυνσης της χρήσης της έννομιας του ορίου με μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$.

Για τη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$, όπως είναι φυσιολογικό, υπάρχει η δυνατότητα εκφράσεων όπως το x τείνει στο $+\infty$, ($x \rightarrow +\infty$) το x τείνει στο $-\infty$, ($x \rightarrow -\infty$) ή το x τείνει στο 3 , ($x \rightarrow 3$) αφού άπειροι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν σε κάθε περιοχή του 3 . Όπως θα δούμε η διαπραγμάτευση αυτών των περιπτώσεων γίνεται με «επικαιροποίηση του ορισμού», που δόθηκε για τις ακολουθίες.

Η ομαλή μετάβαση στη μεταβλητή $x \in \mathbb{R}$, γίνεται με ακολουθίες. Στην περίπτωση αυτή, και για παράδειγμα όταν το x τείνει στο 3 , ($x \rightarrow 3$) εργαζόμαστε σε μια περιοχή του 3 , «βάζοντας» το x να διατρέξει διαδοχικά τους άπειρους όρους όλων των ακολουθιών με στοιχεία της περιοχής, ακολουθιών της μορφής $(x_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$ που τείνουν στο 3 . ($x_v \rightarrow 3$) Για να βγάλουμε συμπέρασμα για το τι συμβαίνει όταν $x \rightarrow 3$, απαιτούμε όλες οι αντίστοιχες ακολουθίες των εικόνων $(f(x_v))_{v \in \mathbb{N}^*}$, «ομόφωνα» να καταλήξουν στο ίδιο συμπέρασμα, σε σχέση με την έννοια του ορίου.

Διαισθητική προσέγγιση της έννομιας του ορίου

(i) Αφού δεχθούμε ότι $v \rightarrow +\infty$, θα πρέπει ομοίως να δεχθούμε ότι $2^v \rightarrow +\infty$ αφού η ακολουθία $(2^v)_{v \in \mathbb{N}}$ αναπτύσσεται σε όλο και μεγαλύτερες τιμές «ανεξέλεγκτα», δηλαδή σε μια πορεία που κανένα «οδόφθαγμα» δεν μπορεί να της σταθεί εμπόδιο. Μάλιστα η ανάπτυξη της $(2^v)_{v \in \mathbb{N}}$ είναι «ταχύτερη» από την ανάπτυξη του v , αφού π.χ. $v = 10 \Rightarrow 2^v = 2^{10} = 1024$.

(ii) Με $v \rightarrow +\infty$ και $2^v \rightarrow +\infty$, θα πρέπει να δεχθούμε ότι $\frac{1}{2^v} \rightarrow 0$, αφού σε ένα κλάσμα με θετικούς

όρους και σταθερό αριθμητή, η «ανεξέλεγκτη μεγέθυνση» του παρονομαστή, το οδηγεί σε όλο και μικρότερες τιμές, σε μια «πτωτική πορεία» που κανείς θετικός δε μπορεί να φράξει, πορεία προς το 0 .

(iii) Με $\boxed{v \rightarrow +\infty}$ και $\boxed{\frac{1}{2^v} \rightarrow 0}$, θα πρέπει να δεχθούμε ότι $\boxed{5^{\frac{1}{2^v}} \rightarrow 1}$, αφού δύναμη της οποίας ο εκθέτης τείνει στο 0, «φυσιολογικά» αυτή τείνει στο $5^0 = 1$. $\boxed{5^{\frac{1}{2^v}} \rightarrow 5^0 = 1}$ Προφανώς, το ίδιο συμπέρασμα θα προκύψει, και με οποιαδήποτε άλλη **θετική** βάση δύναμης.

Ομοίως θα πρέπει να δεχθούμε ότι $\boxed{\left(1 - \frac{1}{2^v}\right) \rightarrow 1}$, αφού όταν ο αφαιρετέος τείνει στο 0, «φυσιολογικά» η διαφορά τείνει στον μειωτέο. $\boxed{\left(1 - \frac{1}{2^v}\right) \rightarrow 1 - 0 = 1}$

Σχόλια: (1) Ήδη **«λαθραία»** περάσαμε στην **«Άλγεβρα των ορίων»**, δηλαδή στην Άλγεβρα που μας βοηθάει, από απλά όρια να βγάζουμε συμπέρασμα για να πιο σύνθετα.

π.χ. $\boxed{\text{Αν } \alpha_v \rightarrow \alpha \text{ και } \beta_v \rightarrow \beta, \text{ τότε } (\alpha_v + \beta_v) \rightarrow (\alpha + \beta)}$

(2) Τώρα, μπορεί να λυθεί «επιστημονικά» η απορία του «κυρ Αλέκου».

Λέει ο «κυρ Αλέκος»: «Πληκτρολογώ στην αριθμομηχανή του “κινητού” μου το 5, και μετά πατάω διαδοχικά πολλές φορές το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας, μέχρι που βγαίνει στην οθόνη ο αριθμός 1»

Προτροπή: «Κάνε το ίδιο για το 0,5»

Λέει ο «κυρ Αλέκος»: «Ω!! βγήκε πάλι 1»

Απάντηση: «κυρ Αλέκο μου ξεπέρασες τα **όρια** των δυνατοτήτων της «μηχανής» σου, και αυτή σου

έδωσε για απάντηση το “όριο” αυτής της διαδικασίας» $\boxed{5^{\frac{1}{2^v}} \rightarrow 5^0 = 1, \quad (0,5)^{\frac{1}{2^v}} \rightarrow (0,5)^0 = 1}$

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[2]{\sqrt{5}} = \sqrt[2^2]{5} = \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2^2}}$ και για $v \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{5}}}}}_{v \text{ φορές}} = 5^{\frac{1}{2^v}}$ και $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{0,5}}}}}_{v \text{ φορές}} = (0,5)^{\frac{1}{2^v}}$

Προσοχή: η $5^{\frac{1}{2^v}}$ τείνει στο 1, **σαν φθίνουσα**, ενώ η $(0,5)^{\frac{1}{2^v}}$ τείνει στο 1, **σαν αύξουσα**.

Για την ύπαρξη ορίου, μετράει το «τελικό»

Ο ορισμός απαιτεί, σε κάθε περιοχή του ορίου, να βρίσκονται άπειροι **διαδοχικοί** όροι της ακολουθίας, δηλαδή «επιτρέπει» να βρίσκονται έξω από μια περιοχή, πεπερασμένο πλήθος όρων της ακολουθίας, όσο μεγάλος και αν είναι ο αριθμός τους.

Φανταστείτε μια ακολουθία, που οι πρώτοι κατά σειρά ένα δισεκατομμύριο (10^9) όροι είναι ο καθένας

ίσος με (-2) και για τους υπόλοιπους ισχύει ο τύπος $\alpha_v = \frac{1}{v}$, δηλαδή $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_v = -2, \text{ αν } 1 \leq v \leq 10^9 \\ \text{και} \\ \alpha_v = \frac{1}{v}, \text{ αν } v > 10^9 \end{array} \right\} (v \in \mathbb{N}^*)$

Προφανώς $\beta_v = \frac{1}{v} \rightarrow 0$ και συνεπώς σε κάθε περιοχή με κέντρο το 0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$, θα ανήκουν

άπειροι διαδοχικοί όροι της $(\beta_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$. Για την $(\alpha_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$ με δεδομένο ότι $\alpha_v = \beta_v$ για κάθε $v > 10^9$, θα

ισχύει το ίδιο, δηλαδή $\alpha_v = \frac{1}{v} \rightarrow 0$, και αυτό γιατί, διαφορά σε σχέση με τη $(\beta_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$, θα παρατηρηθεί

μόνο στις περιοχές του 0, με ακτίνα $0 < \varepsilon < 2$ από τις οποίες θα μείνουν έξω επιπλέον, οι πρώτοι κατά σειρά ένα δισεκατομμύριο (10^9) όροι της $(\alpha_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$.

Μια απλή περίπτωση ακολουθίας που δεν έχει όριο

Η ακολουθία της οποίας οι όροι με μονό δείκτη είναι ίσοι με (-1) και οι όροι με ζυγό δείκτη είναι 1 δεν έχει όριο, αφού οι μόνοι υποψήφιοι, οι 1 και (-1) , απορρίπτονται. $\{\alpha_{2v-1} = -1 \text{ και } \alpha_{2v} = 1\} \text{ με } v \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη: Υπάρχει μια περιοχή, με κέντρο το (-1) και ακτίνα 1 , δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(-2, 0)$ στο οποίο ανήκουν μεν άπειροι όροι της ακολουθίας, όλοι όσοι έχουν μονό δείκτη, αλλά δεν είναι διαδοχικοί και επομένως δεν υπάρχει δείκτης που από αυτόν και μετά, όλοι οι όροι να ανήκουν στην περιοχή αυτή.

Υπάρχει μια περιοχή, με κέντρο το 1 και ακτίνα 1 , δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(0, 2)$ στο οποίο ανήκουν μεν άπειροι όροι της ακολουθίας, όλοι όσοι έχουν ζυγό δείκτη, αλλά δεν είναι διαδοχικοί, και επομένως δεν υπάρχει δείκτης που από αυτόν και μετά, όλοι οι όροι να ανήκουν στην περιοχή αυτή.

Κανείς άλλος αριθμός δε μπορεί να είναι όριο της $(\alpha_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$, αφού πάντα θα υπάρχει περιοχή του, στην οποία δεν θα ανήκει κανείς από τους όρους της ακολουθίας. (Προφανώς, δεν είναι όρια τα $+\infty, -\infty$)

Π.χ.: Ο $\frac{1}{2}$ δεν είναι όριο της ακολουθίας. Αν πάρουμε τις αποστάσεις του $\frac{1}{2}$, από τους $1, -1$:

$d\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$ και $d\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{3}{2}$, και επιλέξουμε για ακτίνα τη μικρότερη, τότε προφανώς στην περιοχή με

κέντρο το $\frac{1}{2}$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$, δηλαδή στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ δεν ανήκει κανείς όρος της ακολουθίας.

Σχόλιο: Αν αναζητήσουμε το άπειρο άθροισμα των όρων αυτής της ακολουθίας, θα διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχει, όπως θα έπρεπε να είναι αναμενόμενο. Αν αυτοσχδιάσουμε, κάνοντας δοκιμές:

$$-1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = -1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots = -1$$

$$-1 + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 0$$

Όρια ακολουθιών, που οι όροι τους δεν είναι αριθμοί

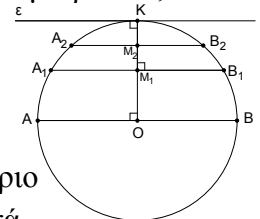
(i) Οι ακολουθίες των πολυγώνων που χρησιμοποιήσαμε για να βρούμε τον π , έχουν για όριο τον κύκλο.

(ii) Ας φανταστούμε ένα κύκλο (O, R) με διάμετρο AB , μια ακτίνα OK κάθετη στη διάμετρο AB ,

και ας φανταστούμε τις άπειρες χορδές που είναι παράλληλες στην AB ως εξής:

Πρώτη η A_1B_1 , αυτή που διέρχεται από το μέσο M_1 της OK , δεύτερη η A_2B_2 ,

που διέρχεται από το μέσο M_2 του M_1K και ομοίως στη συνέχεια.



Προφανώς υπάρχει μια ακολουθία χορδών, ευθυγράμμων τμημάτων, που έχει για όριο

το σημείο K . Αν δεχτούμε ότι ευθύγραμμο τμήμα νοείται μόνο όταν έχει διαφορετικά

άκρα, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι το σημείο είναι μια εκφυλισμένη μορφή ευθυγράμμου τμήματος, αφού έχει μήκος ίσο με το 0 . (Εκφυλισμένη μορφή σε μια οικογένεια, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί η μορφή που έχει χάσει τα βασικά χαρακτηριστικά των μελών της οικογένειας)

Αν πάρουμε τώρα την ακολουθία των αποστάσεων του K από τις χορδές, σε μοναδιαίο κύκλο, τότε:

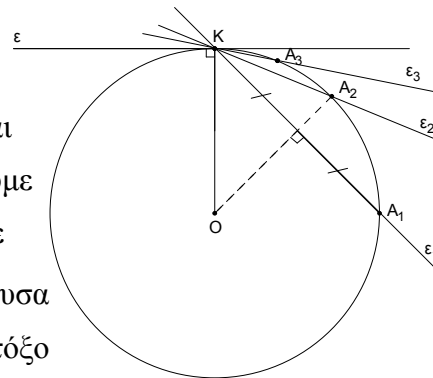
$$d_1(K, A_1B_1) = \frac{1}{2}, d_2(K, A_2B_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}, \dots, d_v(K, A_vB_v) = \frac{1}{2^v}, \dots \text{ επομένως προκύπτει η γνωστή μας}$$

ακολουθία $\left[\frac{1}{2^v} \rightarrow 0\right]$, δηλαδή $d_v \rightarrow 0$, κάτι αναμενόμενο. Επίσης, $d(A_v, B_v) = (A_vB_v) \rightarrow 0$.

Επίσης μπορούμε να φανταστούμε την ακολουθία των ευθειών που είναι φορείς των χορδών, θεωρώντας προφανές ότι η ακολουθία αυτή έχει για όριο την εφαπτομένη του κύκλου στο K , δηλαδή την ευθεία ϵ .

Αν θεωρήσουμε τέμνουσα του κύκλου, μία ευθεία που έχει δύο διαφορετικά κοινά σημεία με τον κύκλο, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι η εφαπτομένη είναι μια «εκφυλισμένη μορφή» τέμνουσας, όπου τα δυο κοινά σημεία της με τον κύκλο, έχουν γίνει ένα.

(iii) Σε κύκλο (O,R) , έστω ε_1 τέμνουσα του κύκλου και A_1, K τα κοινά της σημεία με τον κύκλο. Έστω A_2 το μέσο του $\widehat{A_1K}$, το οποίο βρίσκεται σαν τομή του κύκλου με τη μεσοκάθετη της χορδής A_1K . Τώρα μπορούμε να φανταστούμε την τέμνουσα ε_2 του κύκλου, που έχει κοινά σημεία με τον κύκλο τα A_2, K . Ομοίως, αν A_3 το μέσο του $\widehat{A_2K}$, ε_3 θα είναι η τέμνουσα του κύκλου που έχει κοινά σημεία με τον κύκλο τα A_3, K . Επειδή κάθε τόξο έχει το μέσο του, προκύπτει η βεβαιότητα ύπαρξης μιας ακολουθίας τεμνουσών ευθειών του κύκλου. Προφανώς η ακολουθία αυτών των ευθειών, έχει όριο την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο K , την ε .



Ο αριθμός 0,9999...

Υπάρχει η ακολουθία $\alpha_1 = 0,9; \alpha_2 = 0,99; \alpha_3 = 0,999; \dots$ και **ισχύει:** $0,9999\dots = 1 = \lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v$

Απόδειξη: Για $x = 0,999\dots$

$$x = 0,999\dots \Leftrightarrow 10x = 9,999\dots \Leftrightarrow 10x = 9 + 0,999\dots \Leftrightarrow 10x = 9 + x \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$$

Σχόλια: (1) Το παραπάνω όριο, μπορεί να εκφραστεί και σαν άθροισμα απείρων όρων «απολύτως φθίνουσας» γεωμετρικής προόδου $(\beta_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$, με $\beta_1 = 0,9$; λόγο $\lambda = 0,1$ και $S_1 = 0,9$; $S_2 = 0,9 + 0,09$; ...

$$0,9999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots = S = \lim_{v \rightarrow \infty} S_v = \frac{\beta_1}{1 - \lambda} = \frac{0,9}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

(2) Χρησιμοποιήσαμε το (;) ερωτηματικό, αντί για κόμμα (,) για να μην υπάρξει σύγχυση με το κόμμα του δεκαδικού.

Ο χρυσός λόγος ϕ $\phi = 1,618033988749895$

Όπως είδαμε ο «Χρυσός λόγος» ϕ , είναι λύση των δύο ισοδύναμων εξισώσεων: $\phi = \frac{1}{\phi} + 1 \Leftrightarrow \phi^2 = 1 + \phi$

Ισχυρισμός: $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$

Απόδειξη: (1) Για $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$: $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \Leftrightarrow x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \Leftrightarrow x^2 = 1 + x$. Άρα $x = \phi$

(2) Για $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$: $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x}$. Άρα $x = \phi$

Η ακολουθία Φιμπονάτσι

Η ακολουθία Φιμπονάτσι, $(\phi_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$ με όρους: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$ έχει τους δύο πρώτους όρους της ίσους με **1**, και «αναπτύσσεται» με τον κανόνα ότι κάθε όρος της, από τον τρίτο και μετά, είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων του όρων. (Άλλη «εκδοχή»: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$)

Από την ακολουθία αυτή, προκύπτει η ακολουθία $(\alpha_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$ με $\alpha_v = \frac{\phi_{v+1}}{\phi_v}$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$, και επομένως:

$$\alpha_1 = \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{1}{1} = 1, \alpha_2 = \frac{\phi_3}{\phi_2} = \frac{2}{1} = 2, \alpha_3 = \frac{\phi_4}{\phi_3} = \frac{3}{2} = 1,5; \alpha_4 = \frac{\phi_5}{\phi_4} = \frac{5}{3} = 1,666\dots; \alpha_5 = \frac{\phi_6}{\phi_5} = \frac{8}{5} = 1,6; \alpha_6 = \frac{\phi_7}{\phi_6} = \frac{13}{8} = 1,625; \dots$$

Ισχύει $\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha_v = \phi$ και $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \dots < \phi < \dots < \alpha_6 < \alpha_4 < \alpha_2$ ή $1 < 1,5 < 1,6 < \dots < \phi < \dots < 1,625 < 1,66\dots < 2$

Η ακολουθία αυτή, «μοιράζεται» σε δύο «υπακολουθίες», αυτήν με τους μονούς δείκτες που είναι αύξουσα και έχει τον ϕ για **άνω φράγμα** και αυτήν με τους ζυγούς δείκτες, που είναι φθίνουσα και έχει τον ϕ για **κάτω φράγμα**. Η ακολουθία αυτή, μας βοηθάει να «επιβεβαιώνουμε» τα ψηφία του ϕ , και ήδη γνωρίζοντας τους πρώτους έξι όρους της, μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι $\phi = 1,6\dots$