

Η δύναμη της γλώσσας

Στην Ερμούπολη (Αίγυπτος), βρέθηκε πάπυρος του 3^{ου} αιώνα π.χ.. Είναι γραμμένος σε δημοτική αιγυπτιακή γλώσσα και περιλαμβάνει αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα, όπως μετρήσεις εδαφών διαφόρων σχημάτων, ποσότητες υφασμάτων, μέγεθος ιστίων, τετραγωνικές ρίζες κ.λπ.. Υποστηρίζεται, ότι το παρακάτω απόσπασμα, είναι εκπαιδευτικό κείμενο.

[Πρόβλημα 34] Ένα χωράφι έχει επιφάνεια 60 τετραγωνικών πήχων, δηλαδή είναι ορθογώνιο με διαγώνιο 13 πήχεις. Πόσους πήχεις έχει η κάθε πλευρά;

Λύση: Πρέπει να υπολογίσουμε το 13, 13 φορές – αποτέλεσμα 169.

Πρέπει να υπολογίσουμε το 60, 2 φορές - αποτέλεσμα 120.

Πρέπει να προσθέσουμε το 120 στο 169 - αποτέλεσμα 289.

Βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του 289 - αποτέλεσμα 17.

Βρίσκουμε τη διαφορά του 120, από το 169 - αποτέλεσμα 49.

Βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του 49 - αποτέλεσμα 7.

Αφαιρούμε το 7, από το 17- υπόλοιπο 10.

Λαμβάνουμε το ήμισυ του 10 - αποτέλεσμα 5. Αυτό είναι το πλάτος.

Αφαιρούμε το 5, από το 17- υπόλοιπο 12. Αυτό είναι το μήκος.

Λέμε: «Τώρα το χωράφι είναι 12 πήχεις επί 5 πήχεις».

Επαλήθευση: Υπολογίζουμε 12 φορές το 12: αποτέλεσμα 144. Υπολογίζουμε 5 φορές το 5: αποτέλεσμα 25. Σύνολο 169. Βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του: αποτέλεσμα 13. Αυτή είναι η διαγώνιος του χωραφιού.

Σχόλιο: Θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τη λύση, χρησιμοποιώντας γεωμετρικούς υπολογισμούς, χωρίς τη σύγχρονη συμβολική γλώσσα της άλγεβρας.

Στο σχήμα 1, φαίνεται η αρχική ιδέα. Χρησιμοποιώντας τέσσερις φορές το ορθογώνιο του προβλήματος, με μήκος (για μας x) διαφορετικό του πλάτους (για μας y), «χτίσαμε» ένα τετράγωνο με πλευρά το άθροισμα μήκους – πλάτους (για μας $x+y$), που εσωτερικά αφήνει για κενό χώρο, τετράγωνο με πλευρά τη διαφορά μήκους – πλάτους (για μας $x-y$).

Στο σχήμα 2, σχεδιάζουμε τις διαγώνιους, και έτσι σχηματίζεται το EZHΘ.

Το EZHΘ είναι τετράγωνο με εμβαδόν $13 \cdot 13 = 169$.

«Προσθέτοντας» τα τέσσερα ίσα τρίγωνα στο EZHΘ, επειδή το καθένα είναι μισό ορθογώνιο, είναι σαν να αυξάνουμε την επιφάνεια κατά δύο εμβαδά ορθογωνίου χωραφιού, $60 \cdot 2 = 120$, και έτσι το τετράγωνο ΑΒΓΔ που σχηματίζεται με πλευρά $x+y$, έχει εμβαδόν $120 + 169 = 289$.

Βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του 289, που είναι 17 (και έτσι $x+y=17$).

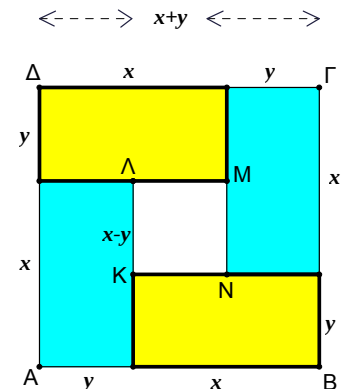
«Αφαιρώντας» τα τέσσερα ίσα τρίγωνα από το EZHΘ, είναι σαν να μειώνουμε την επιφάνεια κατά δύο εμβαδά ορθογωνίου χωραφιού, $60 \cdot 2 = 120$, και έτσι το τετράγωνο ΚΛΜΝ που σχηματίζεται με πλευρά $x-y$, έχει εμβαδόν $169 - 120 = 49$.

Βρίσκουμε την τετραγωνική ρίζα του 49, που είναι 7 (και έτσι $x-y=7$).

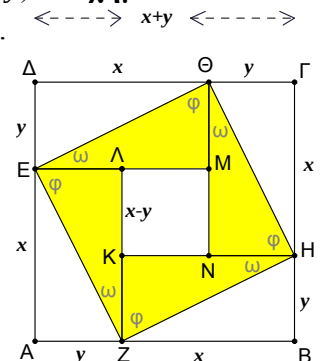
Στο σχήμα 3, το πρώτο ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος $x+y$, στο δεύτερο φαίνεται ότι αν πάρω μέσα στο x , τμήμα y , το υπόλοιπο είναι $x-y$, ενώ στο τρίτο φαίνεται ότι αν από τμήμα $x+y$, αφαιρέσω τμήμα $x-y$, το υπόλοιπο έχει μήκος $2y$.

Έτσι, αν από το άθροισμα μήκους – πλάτους, που είναι 17 (για μας $x+y=17$), αφαιρέσουμε τη διαφορά μήκους – πλάτους που είναι 7 (για μας $x-y=7$), παίρνουμε δυο φορές το πλάτος που είναι 10 (για μας $2y=10$) και βρίσκοντας το μισό του 10, έχουμε το πλάτος ίσο με 5 (για μας $y=5$). Τελικά, αφαιρώντας το πλάτος που είναι 5, από το άθροισμα μήκους – πλάτους, που είναι 17, έχουμε το μήκος που είναι 12 (για μας $x=12$).

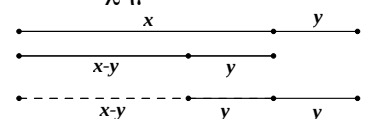
σχήμα 1



σχήμα 2



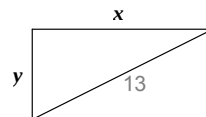
σχήμα 3



Σχόλιο: Το πρόβλημα αυτό, φαντάζει εντελώς απλό στα μάτια ενός μαθητή Β' Λυκείου, που έχει διδαχτεί ήδη «μη γραμμικά συστήματα». Η γνώση της συμβολικής γλώσσας, τον κάνει να νιώθει δυνατός.

Λύση: Ονομάζουμε το μήκος x και το πλάτος y , και έχουμε τις εξισώσεις:

$xy = 60$ (εμβαδόν χωραφιού) και $x^2 + y^2 = 13^2$ (πυθαγόρειο θεώρημα).



Έχουμε $x > y > 0$, αφού μήκος και πλάτος είναι θετικοί αριθμοί και το μήκος συμβατικά θεωρείται η μεγαλύτερη διάσταση.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13^2 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+y)^2 - 2xy = 169 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+y)^2 - 2 \cdot 60 = 169 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+y)^2 = 289 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x>0 \\ \Leftrightarrow \\ y>0 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = \sqrt{289} \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = 17 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x>y \Rightarrow x+y>2y \\ \Leftrightarrow \\ 17>2y \Rightarrow y<\frac{17}{2} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 17-y \\ \text{και} \\ (17-y)y = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 17-y \\ \text{και} \\ y^2 - 17y + 60 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 17-y \\ \text{και} \\ \{y = 5 \text{ ή } y = 12\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y<\frac{17}{2} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 17-y \\ \text{και} \\ y = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 17-5 \\ \text{και} \\ y = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 12 \\ \text{και} \\ y = 5 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1^η: Δε θα μπορούσε να είναι τετράγωνο το χωράφι, αφού αν ήταν τετράγωνο τότε θα είχαμε $x^2 + x^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{169}{2}$, ενώ έχουμε $x^2 = 60$.

Παρατήρηση 2^η: Αν το σύστημα λυθεί με μοναδική δέσμευση $x > 0, y > 0$, τότε θα βρούμε δυο λύσεις, $(x, y) = (5, 12)$ και $(x, y) = (12, 5)$. Προφανώς όμως, λύση του προβλήματος συνεχίζει να είναι μόνο μία, το ορθογώνιο με διαστάσεις 5 και 12.

Παρατήρηση 3^η: Αν το σύστημα λυθεί με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε οι λύσεις είναι τέσσερις.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13^2 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+y)^2 = 289 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = \pm 17 \\ \text{και} \\ xy = 60 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x+y = 17 \text{ και } xy = 60\} \\ \text{ή} \\ \{x+y = -17 \text{ και } xy = 60\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = 17-y \text{ και } (17-y)y = 60\} \\ \text{ή} \\ \{x = -17-y \text{ και } (-17-y)y = 60\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = 17-y \text{ και } y^2 - 17y + 60 = 0\} \\ \text{ή} \\ \{x = -17-y \text{ και } y^2 + 17y + 60 = 0\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = 17-y \text{ και } \{y = 5 \text{ ή } y = 12\}\} \\ \text{ή} \\ \{x = -17-y \text{ και } \{y = -5 \text{ ή } y = -12\}\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = 12 \\ \text{και} \\ y = 5 \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ \text{και} \\ y = 12 \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -12 \\ \text{και} \\ y = -5 \end{array} \right\} \\ \text{ή} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -5 \\ \text{και} \\ y = -12 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε μια «συμμετρία» στις λύσεις, και αν παραστήσουμε τις λύσεις με σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων, θα δούμε το σύνολο των σημείων να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $y = x$ που διχοτομεί το 1^ο τεταρτημόριο. Τέτοιες παρατηρήσεις, θα κάνουμε όταν οι εξισώσεις δεν αλλάζουν με την «αντιστροφή» των μεταβλητών, δηλαδή δεν αλλάζουν όταν στη θέση του x βάλουμε το y και στη θέση του y βάλουμε το x . Οι καμπύλες των οποίων οι εξισώσεις έχουν τέτοια ιδιότητα, έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$.