

Κύκλος – κυκλικός τομέας – κυκλικό τμήμα

1. Η άρβηλος του Αρχιμήδη (Αποδεικτική Άσκηση 4 – σελ.108)

Αν Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ, ενός ημικυκλίου, τότε το επίπεδο «χωρίο» που περικλείεται από το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ, και τα ημικύκλια με διαμέτρους ΑΓ και ΓΒ, που βρίσκονται στο εσωτερικό του, λέγεται «**άρβηλος του Αρχιμήδη**», και έχει εμβαδόν (μ), όσο ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ, όπου Δ το σημείο του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ, που προκύπτει σαν τομή του, με την κάθετο της ΑΒ, στο Γ.

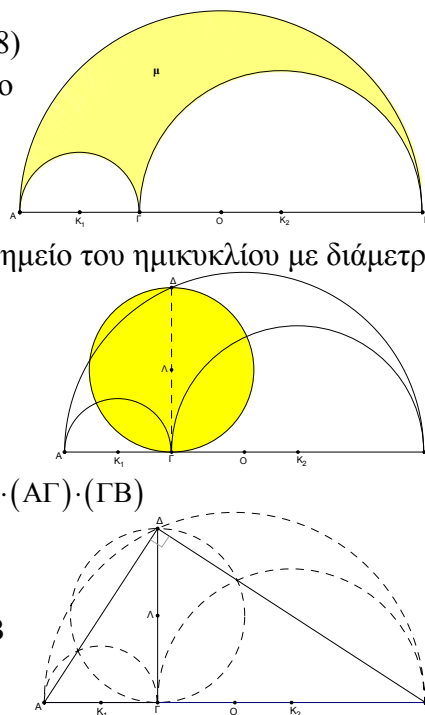
Απόδειξη: $(\mu) = \frac{\pi(OA)^2}{2} - \frac{\pi(K_1A)^2}{2} - \frac{\pi(K_2B)^2}{2} =$

$$\frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{AG}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{GB}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8}[(AG+GB)^2 - (AG)^2 - (GB)^2] = \frac{\pi}{4} \cdot (AG) \cdot (GB)$$

Αν Ε το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΓΔ, τότε:

$$E = \pi\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(\Gamma\Delta)^2, \text{ και επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο } \Delta AB$$

$$(\Delta\Gamma)^2 = (\Gamma A)(\Gamma B), \text{ θα έχουμε } (\mu) = E.$$



Σχόλια: (1) Η «**άρβηλος**», ή αλλιώς το «**δρεπάνι**» του Αρχιμήδη (Συρακούσες 287-212 π.χ.), μπορούμε να το φανταστούμε με **χειρολαβή** στο μικρότερο ημικύκλιο και **λεπίδα** στο αμέσως μεγαλύτερο ημικύκλιο. Η άρβηλος ήταν το εργαλείο του «τσαγκάρη», για την κοπή δερμάτων.

(2) Η εύρεση **κύκλου ισοδύναμου** με την «**άρβηλο**», άφηνε ανοικτό το θέμα τετραγωνισμού της, όσο έμενε ανοικτό το πρόβλημα, «**τετραγωνισμού του κύκλου**».

(3) Το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Δ, αφού η κορυφή Δ είναι σημείο του ημικυκλίου, και «βλέπει» διάμετρο.

(4) Η σχέση $(\Delta\Gamma)^2 = (\Gamma A)(\Gamma B)$, προκύπτει από το θεώρημα IV στη σελίδα 45.

(5) Το «**σαληνόν**» του Αρχιμήδη (**ασπίδα**), προκύπτει όταν από ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ, αφαιρέσουμε δύο **ίσα** ημικύκλια με διαμέτρους ΑΓ και ΔΒ, και προσθέσουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΓΔ, και έχει εμβαδόν (σ), όσο το εμβαδόν κύκλου διαμέτρου ΜΝ. Το ΜΝ, είναι το άθροισμα των ακτίνων, του αρχικού ημικυκλίου και αυτού που προστέθηκε.

Απόδειξη: $(\sigma) = \frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} - 2 \cdot \frac{\pi\left(\frac{AG}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8}[(AB)^2 - 2(AG)^2 + (AB - 2AG)^2] = \frac{\pi}{8} \cdot 2(AB - AG)^2 = \frac{\pi}{4}(AB - AG)^2$

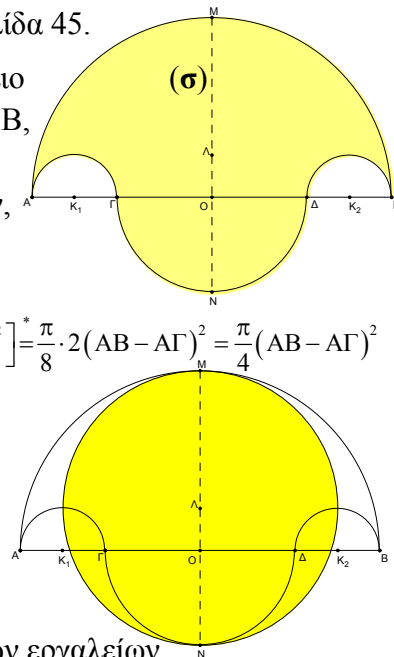
$$\text{Εμβαδόν κύκλου: } E = \pi\left(\frac{\frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2}}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{\frac{AB}{2} + \frac{AB - 2AG}{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(AB - AG)^2$$

$$* (AB)^2 - 2(AG)^2 + (AB - 2AG)^2 = 2(AB)^2 + 2(AG)^2 - 4(AB)(AG) = 2(AB - AG)^2$$

Παρατήρηση: Προφανώς οι παραπάνω κατασκευές, εκτός των άλλων, είχαν και «χρηστική αξία», αφού αναφέρονταν στην κατασκευή χρήσιμων εργαλείων.

Οι κατασκευές αυτές δεν παρουσιάζουν δυσκολία, αφού απαιτούν μόνο κατασκευή μεσοκαθέτου, για να εντοπίζεται το μέσο της διαμέτρου.

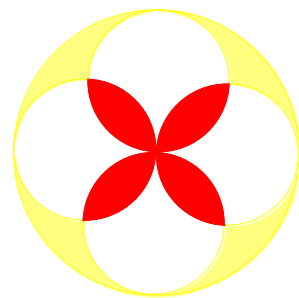
(6) Ο Αρχιμήδης ήταν ένας «ισορροπημένος επιστήμονας», με ισορροπία ανάμεσα σε θεωρία και πράξη (Εμπνευση – τεκμηρίωση και δημιουργία). Αυτό τον έκανε ξεχωριστό και ανεπανάληπτο.



2. Τετράφυλλο σε κύκλο

Σε κύκλο (O, R) , δηλαδή σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R , έστω δυο κάθετες διάμετροι $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Με διαμέτρους τις ακτίνες $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ$ και $ΟΔ$ εγγράφουμε κύκλους με κέντρα K_1, K_2, K_3

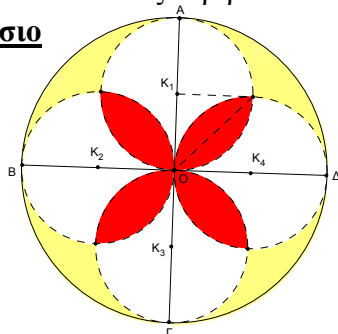
και K_4 , οι οποίοι προφανώς έχουν ακτίνα $\frac{R}{2}$.



Να εκφραστούν σε συνάρτηση του R , το εμβαδόν του «**τετράφυλλου**», και το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στους «**μικρούς**» κύκλους και τον μεγάλο που τους περιβάλλει.

Απάντηση: Προφανώς το εμβαδόν E_1 του «**τετράφυλλου**», είναι οκταπλάσιο του εμβαδού **κυκλικού τμήματος**, με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ορθή, σε «**μικρό**» κύκλο, με ακτίνα το μισό της ακτίνας του κύκλου (O, R) .

$$\text{Έτσι, } E_1 = 8 \cdot \left[\frac{\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2}{4} - \frac{\left(\frac{R}{2} \right)^2}{2} \right] = 8 \cdot \left(\frac{\pi R^2}{16} - \frac{R^2}{8} \right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) R^2$$



Το εμβαδόν E_2 , του χωρίου που στα σχέδια έχει κίτρινο χρώμα, προφανώς προκύπτει, αν από το εμβαδόν του κύκλου (O, R) , αφαιρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που καταλαμβάνουν οι «**μικροί**» κύκλοι, το οποίο ισούται με το **τετραπλάσιο** του εμβαδού ενός «**μικρού**» κύκλου, ελαττωμένο* κατά E_1 .

$$\text{Έτσι, } E_2 = \pi R^2 - \left[4 \cdot \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 - E_1 \right] = \pi R^2 - (\pi R^2 - E_1) = E_1 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) R^2$$

* Κάθε φύλλο του «**τετράφυλλου**», ανήκει σε δυο «**μικρούς**» κύκλους, και επομένως στο άθροισμα εμβαδών, των τεσσάρων «**μικρών**» κύκλων, το E_1 λογίζεται δύο φορές.

Σχόλια: (1) Μπορούμε να δούμε αναλυτικά το «**πάζλ**» του χωρίου, που καλύπτουν οι τέσσερις «**μικροί**» κύκλοι, αποτελούμενο από δύο «**μικρούς**» κύκλους, και δύο άλλους «**κουτσουρεμένους**» κατά ένα δίφυλλο.

(2) Όλοι οι κύκλοι είναι όμοιοι μεταξύ τους, και έτσι, ο «**μεγάλος**» κύκλος (O, R) , που έχει διπλάσια ακτίνα από τον «**μικρό**» κύκλο, έχει εμβαδόν τετραπλάσιο του εμβαδού ενός «**μικρού**» κύκλου, αφού οι δυο κύκλοι έχουν λόγο ομοιότητας **2**, και συνεπώς λόγο εμβαδών $2^2 = 4$.

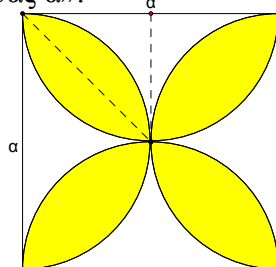
(3) Μπορούμε να ξαναδούμε αναλυτικά το «**πάζλ**» του χωρίου, που καλύπτουν οι τέσσερις «**μικροί**» κύκλοι, αποτελούμενο από **τέσσερα** «**μικρά**» ημικύκλια και ένα τετράγωνο πλευράς R . Όμως, το χωρίο των **τεσσάρων** «**μικρών**» ημικυκλίων, είναι προφανώς ισοδύναμο με το χωρίο **δύο** «**μικρών**» κύκλων, δηλαδή με το χωρίο μισού «**μεγάλου**» κύκλου. Έτσι, το εμβαδόν E_2 , της «**κιτρινισμένης**» περιοχής, είναι το εμβαδόν του «**μεγάλου**» κύκλου (O, R) , ελαττωμένο κατά το εμβαδόν μισού «**μεγάλου**» κύκλου, και το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς R .

$$E_2 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) R^2$$

(4) Μπορούμε να ξαναδούμε ένα «**τετράφυλλο** εγγεγραμμένο σε τετράγωνο πλευράς a ».

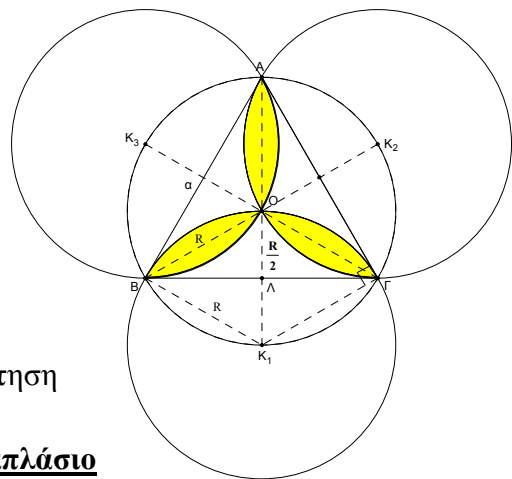
Τώρα, είναι προφανές ότι η «**κιτρινισμένη**» περιοχή, έχει εμβαδόν: $E = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2$

Τότε, είχαμε περιγράψει τόξα κύκλων, που έχουν εφαπτόμενες τις πλευρές τετραγώνου. Έτσι, εντοπίσαμε τα κέντρα των κύκλων στα μέσα των πλευρών του τετραγώνου, αφού οι ακτίνες των κύκλων στα σημεία επαφής, είναι κάθετες στις εφαπτόμενες, και υπολογίσαμε το εμβαδόν του «**τετράφυλλου**», σαν το οκταπλάσιο εμβαδού **κυκλικού τμήματος**, με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ορθή, σε κύκλο με ακτίνα το μισό της πλευράς a .



3. Τρίφυλλο σε ισόπλευρο τρίγωνο

Περιγραφή: Έχουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς a , εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R , που προφανώς το κέντρο του, O , είναι περίκεντρο, βαρύκεντρο, ορθόκεντρο και έκκεντρο, του τριγώνου ΑΒΓ. Με κέντρα τα K_1, K_2, K_3 , που είναι τα συμμετρικά του O ως προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, και ακτίνα R , θεωρούμε κύκλους που τεμνόμενοι σχηματίζουν το «τρίφυλλο» χωρίο, που στο σχήμα είναι κίτρινου χρώματος. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του «τρίφυλλου» χωρίου, ως συνάρτηση της πλευράς a , του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.



Απάντηση: Προφανώς το εμβαδόν E του «τρίφυλλου» είναι εξαπλάσιο

του εμβαδού κυκλικού τμήματος, με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία 60° , σε κύκλο, με ακτίνα R .

$$\text{Έτσι, } E = 6 \cdot \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) R^2, \text{ και επειδή } a = R\sqrt{3}, \text{ θα έχουμε } a^2 = 3R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{a^2}{3},$$

$$\text{και επομένως το εμβαδόν του «τρίφυλλου» χωρίου, ως συνάρτηση της πλευράς } a: E = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} a^2.$$

Σχόλια: (1) Μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι $a = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ και $OA = \alpha_3 = \frac{R}{2}$.

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε τις γωνίες που σχηματίζονται, ξεκινώντας από το προφανές $\widehat{AOB} = \widehat{BOG} = \widehat{GOA} = 120^\circ$, τις γωνίες των ισοπλευρών τριγώνων (60°), και αυτές που προκύπτουν από τη διχοτόμησή τους, και είναι 30° , καθώς και τις ορθές γωνίες που πιστοποιούν ότι οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ εφάπτονται στους κύκλους με κέντρα τα K_1, K_2 και K_3 .

(2) Τώρα, μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι υπάρχει μία «οικονομική» περιγραφή, που οδηγεί στο διπλανό σχήμα υποχρεωτικά, μέσω της μοναδικής λύσης κατασκευής, που περιγράψαμε παραπάνω.

«Στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς a , να κατασκευασθούν τρία τόξα κύκλων, που να έχουν τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ για χορδές και εφαπτόμενες.»

Λύση: Έστω τόξο κύκλου, εσωτερικά ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς a , με χορδή ΒΓ, και εφαπτόμενες τις ΑΒ και ΑΓ. Προφανώς, οι κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία επαφής, διέρχονται από το κέντρο του κύκλου, του οποίου τμήμα είναι το προαναφερθέν τόξο.

Έστω λοιπόν K_1 , το κέντρο του κύκλου, και R η ακτίνα του. Το τρίγωνο $K_1 B \Gamma$ είναι

ισοσκελές με γωνίες βάσης 30° , αφού $\widehat{K_1 B \Gamma} = \widehat{K_1 \Gamma A} - \widehat{B \Gamma A} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Αν O το μέσο του (μικρού) τόξου ΒΓ, τότε η $K_1 O$ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ,

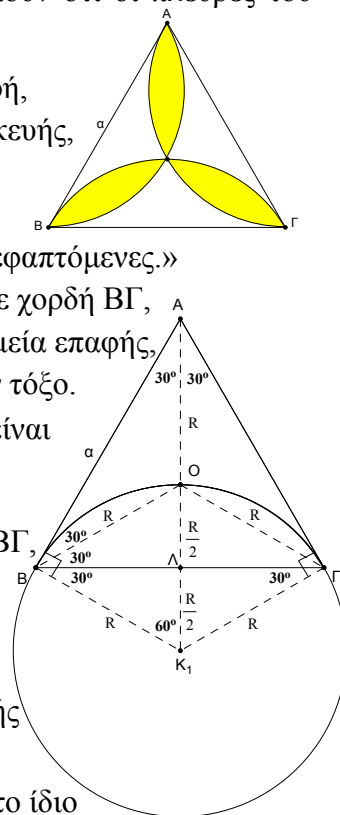
επομένως διχοτομεί τη γωνία Α, επίσης διχοτομεί την $\widehat{B K_1 \Gamma} = 120^\circ$, επομένως δημιουργούνται ίσες χορδές $OB = OG = R$, με αποτέλεσμα το ρόμβο $OB K_1 \Gamma$,

όπου $\widehat{OB \Gamma} = 30^\circ$, και επομένως $\widehat{O B A} = 30^\circ$. Έτσι, το σημείο O είναι σημείο τομής

των διχοτόμων του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ (έκκεντρο), επομένως είναι και

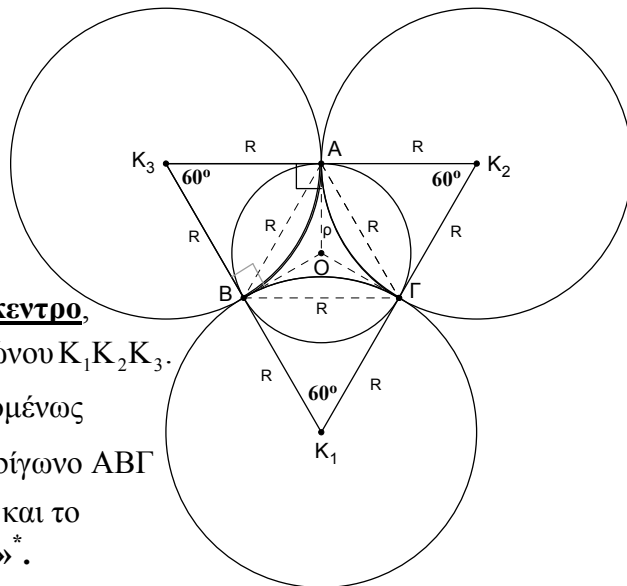
περίκεντρο του τριγώνου, με ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου, R . Προφανώς, το ίδιο συμβαίνει και με τα άλλα δύο τόξα, που και αυτά έχουν μέσο, το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, και ακτίνα για τον κύκλο τους, την ακτίνα R , του περιγεγραμμένου κύκλου, του τριγώνου ΑΒΓ.

Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσουμε ότι οι πλευρές a , του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, είναι σε όλους τους κύκλους $a = \lambda_3 = R\sqrt{3}$, με αποστήματα α_3 .



4. «Ισόπλευρο» καμπυλόγραμμο τρίγωνο

Περιγραφή: Έχουμε τρεις ίσους κύκλους ακτίνας R , που εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά. Αν K_1, K_2, K_3 τα κέντρα των τριών κύκλων, τότε προφανώς το τρίγωνο $K_1K_2K_3$ είναι ισόπλευρο με πλευρά $\alpha = 2R$, οι κοινές εφαπτόμενες είναι μεσοκάθετες των πλευρών του, και επομένως συντρέχουν σε σημείο O , το οποίο είναι περίκεντρο, άρα και βαρύκεντρο, ορθόκεντρο, έκκεντρο, του τριγώνου $K_1K_2K_3$.



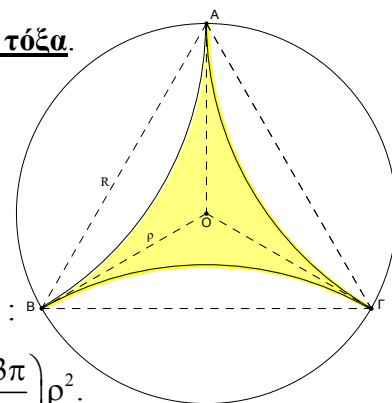
Επειδή το O είναι έκκεντρο του τριγώνου $K_1K_2K_3$, επομένως $OA = OB = OG = \rho$, και αφού $AB = BG = ΓA = R^*$, το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισόπλευρο με περιγεγραμμένο κύκλο (O, ρ) , όπως και το καμπυλόγραμμο τρίγωνο $ABΓ$ είναι επίσης «ισόπλευρο»^{*}.

* $AB = BG = ΓA = R$ και $\widehat{AB} = \widehat{BG} = \widehat{ΓA} = \frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi R}{3}$, αφού σε ίσους κύκλους ακτίνας R , σε ίσες

επίκεντρες γωνίες $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = 60^\circ$, αντιστοιχούν ίσες χορδές και ίσα τόξα.

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $ABΓ$, ως συνάρτηση της ακτίνας ρ , του περιγεγραμμένου του, κύκλου.

Απάντηση: Το εμβαδόν E του καμπυλόγραμμου τριγώνου $ABΓ$, είναι προφανώς ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$, ελαττωμένο όσο το τριπλάσιο του εμβαδού κυκλικού τμήματος, κύκλου ακτίνας R , που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60° , και επειδή $R = \rho\sqrt{3}$, δηλαδή $R^2 = 3\rho^2$:



$$E = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - 3\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2} \stackrel{R^2=3\rho^2}{=} 3\rho^2\sqrt{3} - \frac{3\pi\rho^2}{2} = \left(3\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2}\right)\rho^2.$$

Σχόλιο: Περιγράφοντας «οικονομικά» το ζητούμενο, θα λέγαμε: «Να υπολογισθεί, το εμβαδόν καμπυλόγραμμου τριγώνου $ABΓ$, σα συνάρτηση της ακτίνας ρ του περιγεγραμμένου κύκλου, όταν οι «πλευρές» του, είναι ίσα τόξα κύκλων, εξωτερικά εφαπτόμενων.»

Λύση: Προφανώς, η λύση κατασκευής που περιγράψαμε παραπάνω, με ίσους κύκλους, είναι η μοναδική λύση, αφού η απαίτηση για ίσα τόξα, με την έννοια της δυνατότητας ταύτισης, οδηγεί υποχρεωτικά σε ίσους κύκλους. Μάλιστα, αν μας έχει δοθεί σχήμα όπως το παραπάνω, μπορούμε να κάνουμε τους υπολογισμούς μας, χωρίς να συμπληρώσουμε τους τρεις κύκλους, καταγράφοντας ότι:

- οι τρεις διάκεντροι διερχόμενοι από τα σημεία επαφής A, B, Γ , σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, επειδή περιέχουν ίσες επίκεντρες γωνίες, σαν αντίστοιχες ίσων τόξων, σε ίσους κύκλους.
- οι χορδές $AB, B\Gamma, \Gamma A$, των ίσων κύκλων, είναι ίσες με τις ακτίνες R , των ίσων κύκλων, αφού αντιστοιχούν σε επίκεντρες γωνίες 60° .
- οι ακτίνες $OA = OB = OG = \rho$, του κοινού περιγεγραμμένου κύκλου για το τρίγωνο $ABΓ$ και το καμπυλόγραμμο τρίγωνο $ABΓ$, είναι κοινές εφαπτόμενες των ίσων τόξων, αφού σχηματίζουν ορθές^{*} γωνίες με τις ακτίνες των ίσων κύκλων στα σημεία επαφής.

* Οι χορδές $AB, B\Gamma, \Gamma A$, σχηματίζουν γωνίες 60° , με τις ακτίνες R , στα ισόπλευρα τρίγωνα των ίσων κύκλων, και γωνίες 30° , με τις ακτίνες ρ , στα ισοσκελή τρίγωνα $OAB, OBG, O\Gamma A$, που έχουν γωνίες κορυφής 120° .

Σχόλιο: Καμπυλόγραμμα τρίγωνα σαν το παραπάνω, δημιουργούνται και με άνισους κύκλους, εξωτερικά εφαπτόμενους, όπου το κέντρο O , είναι πάντα το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου με κορυφές τα κέντρα των κύκλων, αφού ο περιγεγραμμένος κύκλος του καμπυλόγραμμου τριγώνου, είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου με κορυφές τα κέντρα των κύκλων.

5. Κύκλοι εγγεγραμμένοι σε κυκλικά τμήματα, χορδών τετραγώνου

Περιγραφή: Σε κύκλο (O, R), εγγράφουμε τετράγωνο, και στα κυκλικά τμήματα που προκύπτουν εγγράφουμε μέγιστους κύκλους.

Να υπολογισθεί, σε συνάρτηση της ακτίνας R, το εμβαδό E, του «κιτρινισμένου» χωρίου, δηλαδή το εμβαδόν της περιοχής των κυκλικών τμημάτων, που περιβάλλει τους τέσσερεις κύκλους.

Λύση: Προφανώς, μέγιστοι κύκλοι, δηλαδή κύκλοι με μέγιστη ακτίνα, εγγεγραμμένοι στα κυκλικά τμήματα, είναι αυτοί που έχουν τη διάμετρό τους, στην προέκταση των αποστημάτων, των χορδών που είναι πλευρές του τετραγώνου*.

Προφανώς, $AB = BG = \Gamma\Delta = \Delta A = \lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $OL = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Αν ρ είναι η ακτίνα των εγγεγραμμένων κύκλων, τότε: $\rho = \frac{OM - OL}{2} = \frac{R - \frac{R\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2R - R\sqrt{2}}{4}$

Αν E_1 το εμβαδόν κάθε εγγεγραμμένου κύκλου, τότε: $E_1 = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}R\right)^2 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}\pi R^2$,

και αν E_2 το εμβαδόν κάθε κυκλικού τμήματος, τότε: $E_2 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{\pi - 2}{4}R^2$.

Έτσι, το εμβαδόν E είναι: $E = 4 \cdot (E_2 - E_1) = 4 \cdot \left(\frac{\pi - 2}{4}R^2 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}\pi R^2\right) = \frac{(2\sqrt{2} - 1)\pi - 4}{2}R^2$

* Σε ένα τμήμα του αρχικού σχήματος, βλέπουμε δύο εγγεγραμμένους κύκλους, στο κυκλικό τμήμα. Είναι ο γνωστός μας (K, ρ), και ο (N, ρ_1), που εφάπτεται στη χορδή ΑΔ στο Η, που είναι διαφορετικό του μέσου Λ, της ΑΔ, και έχει σημείο επαφής με τον κύκλο (O, R), το σημείο Ζ.

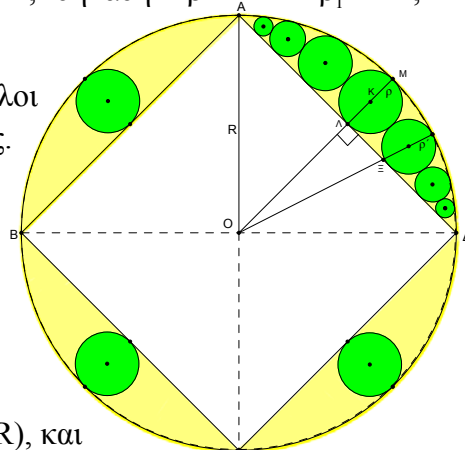
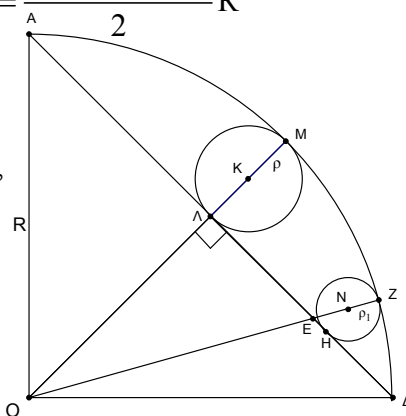
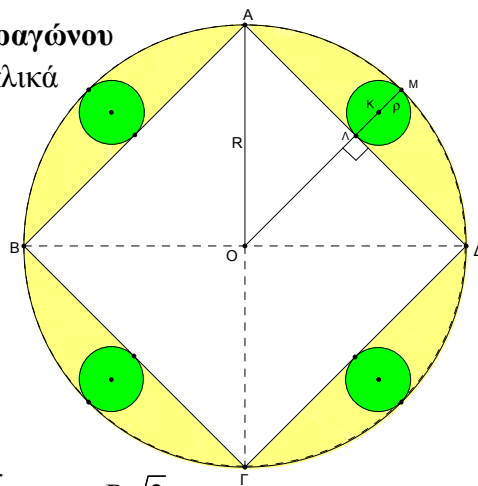
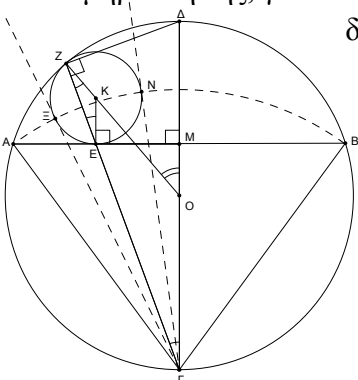
Η ακτίνα ΟΖ τέμνει τη χορδή ΑΔ στο Ε, που είναι διαφορετικό του Η, αφού η ΟΖ δεν είναι κάθετη στην ΑΔ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΛΟΕ, έχουμε $OL < OE$, δηλαδή $OE - OL > 0$, και αφού $OM = R = OZ$, θα έχουμε $OM = OZ \Rightarrow OL + 2\rho = OE + EZ \Rightarrow 2\rho - EZ = OE - OL > 0$.

Επειδή, $EZ > 2\rho_1$, άρα $0 > 2\rho_1 - EZ$, επομένως $2\rho - EZ > 0 > 2\rho_1 - EZ$, δηλαδή $2\rho - EZ > 2\rho_1 - EZ$, και συνεπώς $\rho > \rho_1$.

Σχόλιο: Προφανώς, στα κυκλικά τμήματα, μπορούν να εγγραφούν κύκλοι απείρου πλήθους, όσα και τα εσωτερικά σημεία της αντίστοιχης χορδής.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, παρουσιάζει η περίπτωση των κύκλων που εφάπτονται ανά δύο, ξεκινώντας από τον μέγιστο. Το πλήθος των κύκλων, και αυτής της ομάδας είναι άπειρο. Υπάρχει μια γεωμετρική κατασκευή, που ξεκινά με την εγγραφή κύκλου σε κυκλικό τμήμα.

Η τεκμηρίωσή της, γίνεται με γνώσεις που έχετε, και θα είναι στη διάθεση, όποιου τη ζητήσει.



Περιγραφή: Έστω AB, χορδή κύκλου (O, R), και ΓΔ η διάμετρος που είναι κάθετη στην χορδή. Επιλέγουμε το σημείο επαφής με τον κύκλο έστω Ζ. Φέρνουμε την ΓΖ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Το κέντρο Κ του εφαιπόμενου κύκλου, βρίσκεται στη τομή, του ΟΖ, με την κάθετο της χορδής ΑΒ, στο σημείο Ε. ► Τα σημεία επαφής του κύκλου, Ε, Ν, με άλλους κύκλους, βρίσκονται σε τόξο κέντρου Γ, και ακτίνας ΓΑ.

6. Κύκλος εγγεγραμμένος σε τετράγωνο

Περιγραφή: Σε τετράγωνο πλευράς α , εγγράφουμε κύκλο, και στα μικτόγραμματα τρίγωνα που σχηματίζονται μέσα στο τετράγωνο, και έξω από τον κύκλο, εγγράφουμε κύκλους. Να υπολογισθεί, σε συνάρτηση της ακτίνας R , του εγγεγραμμένου κύκλου, το εμβαδόν E , του χωρίου που έχει χρωματιστεί κίτρινο, δηλαδή το εμβαδόν της περιοχής των μικτογράμμων τριγώνων, που περιβάλλει τους τέσσερεις κύκλους.

Λύση: Προφανώς, $\alpha = 2R$, δηλαδή $R = \frac{\alpha}{2}$, η διαγώνιος του $AB\Gamma\Delta$,

είναι $A\Gamma = \alpha\sqrt{2} = 2R\sqrt{2}$, και για την ακτίνα ρ των μικρών κύκλων, έχουμε:

$$O\Gamma = O\Lambda + \Lambda K + K\Gamma \Rightarrow R\sqrt{2} = R + \rho + \rho\sqrt{2} \Rightarrow \rho(\sqrt{2} + 1) = R(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} R \Rightarrow \rho = (3 - 2\sqrt{2})R$$

Έτσι, το εμβαδόν E_1 του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $E_1 = \alpha^2 = (2R)^2 = 4R^2$

το εμβαδόν E_2 του μεγάλου κύκλου: $E_2 = \pi R^2$

και το συνολικό εμβαδόν E_3 των τεσσάρων μικρών κύκλων:

$$E_3 = 4 \cdot \pi \rho^2 = 4 \cdot \pi \left[(3 - 2\sqrt{2})R \right]^2 = 4 \cdot \pi R^2 (17 - 12\sqrt{2})$$

Επομένως, για το εμβαδόν E , του χωρίου που έχει χρωματιστεί κίτρινο:

$$E = E_1 - E_2 - E_3 = 4R^2 - \pi R^2 - 4 \cdot \pi R^2 (17 - 12\sqrt{2}) = (4 + 48\pi\sqrt{2} - 69\pi)R^2$$

* $K\Gamma = \rho\sqrt{2}$, σε διαγώνιος τετραγώνου πλευράς ρ .

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{2 + 1 - 2\sqrt{2}}{2 - 1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Σχόλιο: Για την κατασκευή του σχήματος, αρκεί να κατασκευασθεί το ρ , αφού στις διαγωνίους του τετραγώνου, θα εντοπίσουμε «τα κέντρα K », στην τομή των διαγωνίων, με τον κύκλο κέντρου O , και ακτίνας $OK = R + \rho$. Επειδή η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι προφανώς $A\Gamma = 2R\sqrt{2}$, για το ρ , αρκεί στην προέκταση της $A\Delta$, να πάρουμε τμήμα R , αποκτώντας τμήμα $AE = 3R$, και στη συνέχεια σχεδιάζοντας κύκλο με κέντρο A και ακτίνα AE , να αποκτήσουμε στην προέκταση του $A\Gamma$ κομμάτι $\rho = \Gamma Z$. Ο κύκλος με κέντρο Γ και ακτίνα ΓZ , μας δίνει τα σημεία H και Θ , και στη συνέχεια οι κάθετες ευθείες στις ΓB και $\Gamma \Delta$ στα σημεία H , Θ αντίστοιχα, στην τομή τους μας δίνουν το κέντρο K .

Η περιγραφή της κατασκευής, έγινε για εφαρμογή με το πρόγραμμα Sketchpad Greek, και προφανώς διαφέρει από τις κατασκευές που γίνονται στο «πεδίο σχεδιάσεως», είτε αυτό είναι το φύλλο τετραδίου, είτε ο σχολικός πίνακας, με τα γνωστά εργαλεία, «κανόνας – διαβήτη».

Γενικό σχόλιο: Γενικά, οι «γεωμετρικές κατασκευές», δηλαδή οι κατασκευές που γίνονται με «κανόνα και διαβήτη», εννοείται πάντα με πεπερασμένο πλήθος «βημάτων», είναι ιδιαίτερα δημιουργική απασχόληση, που αναπτύσσει τις δεξιότητες επίλυσης πρωτότυπων πρακτικών προβλημάτων, ενώ παράλληλα δοκιμάζει την κατανόηση των εννοιών και γενικότερα την καλή γνώση της θεωρίας.

