

Κύκλος

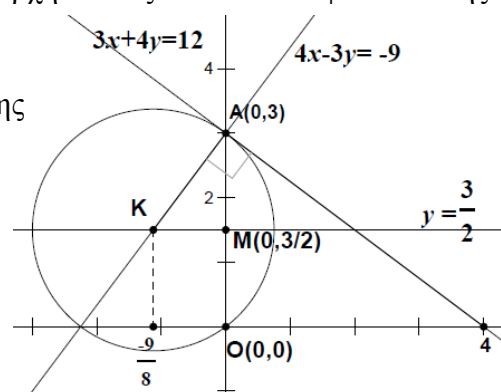
1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 3x + 4y = 12$ στο σημείο $A(0,3)$.

Λύση: Το κέντρο του κύκλου, βρίσκεται στην τομή της μεσοκάθετου της χορδής OA , με την κάθετο της εφαπτομένης του κύκλου ε στο σημείο επαφής A .

Μεσοκάθετος της χορδής OA : $y = \frac{3}{2}$

Κάθετος της ε , στο A : $y - 3 = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow 4x - 3y = -9$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y = -9 \\ \text{και} \\ y = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3 \cdot \frac{3}{2} = -9 \\ \text{και} \\ y = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x = -9 + \frac{9}{2} \\ \text{και} \\ y = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{9}{8} \\ \text{και} \\ y = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$



Επομένως το κέντρο του κύκλου, είναι το σημείο $K\left(-\frac{9}{8}, \frac{3}{2}\right)$.

Προφανώς, $\rho^2 = |\overline{KO}|^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{64} + \frac{9}{4} = \frac{81}{64} + \frac{144}{64} = \frac{225}{64}$ και $\rho = |\overline{KO}| = \sqrt{\frac{225}{64}} = \frac{15}{8}$.

Έτσι, η εξίσωση του κύκλου είναι: $\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

Εξηγήσεις: (1) Τα σημεία O και A έχουν την ίδια τετμημένη 0 και επομένως ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δηλαδή στον άξονα των y . Έτσι, η μεσοκάθετος του OA είναι παράλληλη στον άξονα των x και επομένως έχει εξίσωση $y = \frac{3}{2}$, επειδή το μέσο $M\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$ της χορδής OA έχει τεταγμένη $\frac{3}{2}$.

(2) Το διάνυσμα $\vec{\eta} = (3, 4)$ είναι κάθετο στην ε και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\eta}} = \frac{4}{3}$. Επομένως η κάθετη

στην ε , στο σημείο $A(0,3)$, αφού έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με το $\vec{\eta}$, θα έχει εξίσωση $y - 3 = \frac{4}{3}x$.

Σγόλια: (1) Διαβάζοντας προσεκτικά το κείμενο, θα διαπιστώσουμε ότι η σχεδίαση του σχήματος δεν είναι αναγκαία. Έχοντας τη γνώση, ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο κάθε χορδής, και ότι η ακτίνα στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου, μπορούμε να φανταζόμαστε αυτό για το οποίο μιλάμε, στηριζόμενοι στις εμπειρίες μας. Έτσι, το κέντρο βρέθηκε στην τομή, της ακτίνας στο σημείο επαφής μιας εφαπτομένης, και της μεσοκάθετου μιας χορδής, επειδή οι ευθείες αυτές δεν ήταν παράλληλες, έχοντας κοινό σημείο το A . Αν οι προαναφερθείσες χορδή και εφαπτομένη ήταν παράλληλες, τότε οι κάθετες τους ευθείες, μεσοκάθετη της χορδής και φορέας της ακτίνας στο σημείο επαφής της εφαπτομένης θα ταυτίζονταν, και δε θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε το κέντρο σε μοναδικό σημείο τομής.

(2) Ένα «αξιοπρεπές» σχήμα πάντα βοηθάει, αρκεί να μη γίνεται «πρωταγωνιστής» στα επιχειρήματά μας. Όταν λέμε «αξιοπρεπές», δεν εννοούμε τα ποσοτικά του χαρακτηριστικά, αν δηλαδή το 4 του άξονα των x βρεθεί λίγο πιο αριστερά, αλλά πάντα στο θετικό ημιάξονα. Εννοούμε τα ποιοτικά του χαρακτηριστικά. Δηλαδή π.χ., το κέντρο να μην τοποθετηθεί στο 1^ο τεταρτημόριο και η ε να μη σχεδιαστεί με θετική κλίση.

(3) Κατασκευάζοντας το σχήμα, διαπιστώνουμε ότι ακολουθούμε τους συλλογισμούς της λύσης.

Επειδή τα σημεία O και A αντιστοιχούν στους αριθμούς 0 και 3 του άξονα των y , εύκολα κατασκευάζουμε την μεσοκάθετο $y = \frac{3}{2}$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις λύσεις $(0,3)$ και $(4,0)$ της εξίσωσης $3x + 4y = 12$,

σχεδιάζουμε την ευθεία ε και κατασκευάζουμε την κάθετό της, που διέρχεται από το $A(0,3)$. Έτσι, το κέντρο K εντοπίζεται σαν τομή δύο ευθειών. Τέλος, με κέντρο το K και ακτίνα $\overline{KO}$, κατασκευάζουμε τον κύκλο.

2. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ στα σημεία $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(1,-1)$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιους τους άξονες xx' και yy' . Ποιο είναι το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού;

Απόδειξη: Η ευθεία ϵ_1 , εφαπτομένη του κύκλου στο A έχει εξίσωση:

$$\epsilon_1: 1 \cdot x + 1 \cdot y = 2 \Leftrightarrow \boxed{x + y = 2} \Leftrightarrow y = -x + 2 \text{ με } \lambda_{\epsilon_1} = -1.$$

Η ευθεία ϵ_2 , εφαπτομένη του κύκλου στο B έχει εξίσωση:

$$\epsilon_2: -1 \cdot x + 1 \cdot y = 2 \Leftrightarrow \boxed{-x + y = 2} \Leftrightarrow y = x + 2 \text{ με } \lambda_{\epsilon_2} = 1.$$

Η ευθεία ϵ_3 , εφαπτομένη του κύκλου στο Γ έχει εξίσωση:

$$\epsilon_3: -1 \cdot x + (-1) \cdot y = 2 \Leftrightarrow \boxed{-x - y = 2} \Leftrightarrow y = -x - 2 \text{ με } \lambda_{\epsilon_3} = -1.$$

Η ευθεία ϵ_4 , εφαπτομένη του κύκλου στο Δ έχει εξίσωση:

$$\epsilon_4: 1 \cdot x + (-1) \cdot y = 2 \Leftrightarrow \boxed{x - y = 2} \Leftrightarrow y = x - 2 \text{ με } \lambda_{\epsilon_4} = 1.$$

Επειδή $\lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon_2} = \lambda_{\epsilon_2} \cdot \lambda_{\epsilon_3} = \lambda_{\epsilon_3} \cdot \lambda_{\epsilon_4} = \lambda_{\epsilon_4} \cdot \lambda_{\epsilon_1} = -1$, το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ϵ_1, ϵ_2 βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου K .

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \text{και} \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ \text{και} \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{και} \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{Επομένως έχουμε } K(0,2).$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ϵ_2, ϵ_3 βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Λ .

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ \text{και} \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ \text{και} \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{και} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Επομένως έχουμε } \Lambda(-2,0).$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ϵ_3, ϵ_4 βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου M .

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ \text{και} \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ \text{και} \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{και} \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{Επομένως έχουμε } M(0,-2).$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων ϵ_4, ϵ_1 βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου N .

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ \text{και} \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ \text{και} \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{και} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Επομένως έχουμε } N(2,0).$$

Επειδή $(ΚΛ) = (ΛΜ) = (ΜΝ) = (ΝΚ) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

Έτσι τελικά, το ΚΛΜΝ, αφού είναι ορθογώνιο και ρόμβος, είναι τετράγωνο.

Από τις κορυφές του ΚΛΜΝ, οι K, M βρίσκονται στον άξονα yy' , αφού έχουν τετμημένη 0 και οι Λ, N στον άξονα xx' , αφού έχουν τεταγμένη 0. Έτσι οι διαγώνιους του ΚΛΜΝ, έχουν φορείς τους δυο άξονες.

$$\boxed{E = (ΚΛΜΝ) = (ΚΛ)^2 = (\sqrt{8})^2 = 8}$$

Σχόλια: (1) Θα μπορούσαμε να πούμε: «Επειδή οι διαγώνιοι του ΚΛΜΝ διχοτομούνται κάθετα, είναι ρόμβος, αφού είναι και ίσες, είναι ορθογώνιο και επομένως τελικά είναι τετράγωνο». Όμως προτιμήσαμε να ικανοποιήσουμε έναν ορισμό του τετραγώνου: «Τετράγωνο είναι το τετράπλευρο, που έχεις όλες τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους και τις γωνίες του ορθές». Η προτίμησή μας αυτή, δηλώνει την πεποίθησή μας, ότι όποιος εκπαιδεύεται στην «Αναλυτική Γεωμετρία», θα πρέπει να διακρίνεται από μια προσπάθεια ελαχιστοποίησης της χρήσης Θεωρημάτων-Πορισμάτων από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Όταν όμως έρθει η ώρα της αξιοποίησης των δυο «εργαλείων», γνώμη μας είναι, ότι η «δοσολογία» στη χρήση Αναλυτικής και Ευκλείδειας Γεωμετρίας, θα πρέπει να καθορίζεται από την ανάγκη για «οικονομία».

$$(2) \text{ Θεωρήσαμε ακραίο, να πούμε: } E = (ΚΛΜΝ) = (ΚΛΝ) + (ΜΛΝ) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{ΚΛ} & \overrightarrow{ΚΝ} \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{ΜΛ} & \overrightarrow{ΜΝ} \end{pmatrix} \right|$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που έχει μέσο το σημείο $M(1, -1)$.

Λύση 1^η: Το ευθύγραμμο τμήμα OM είναι κάθετο στη χορδή AB που έχει μέσο M.

$$\overrightarrow{OM} = (1, -1) \text{ και επομένως } \lambda_{\overrightarrow{OM}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$\lambda_{\overrightarrow{OM}} \cdot \lambda_{\overrightarrow{AB}} = -1, \text{ επομένως } -1 \cdot \lambda_{\overrightarrow{AB}} = -1, \text{ και έτσι } \lambda_{\overrightarrow{AB}} = 1.$$

Συνεπώς, η ευθεία φορέας της χορδής AB, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και επειδή διέρχεται από το M, θα έχει εξίσωση:

$$y - (-1) = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$$

Λύση 2^η: Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τα άκρα της χορδής.

$$\text{Έχουμε } \frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \frac{y_1 + y_2}{2} = -1 \text{ και επομένως } \boxed{x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = -2}^*$$

$$\text{Επίσης } x_1^2 + y_1^2 = 4, x_2^2 + y_2^2 = 4 \text{ και επομένως } x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

$$\text{Όμως } x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 = y_1^2 - y_2^2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1) = -(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \cdot 2 = -(y_2 - y_1)(-2) \Leftrightarrow x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \Leftrightarrow 1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lambda_{\overrightarrow{AB}}^*$$

Ισχύει ότι $x_2 - x_1 \neq 0$, αφού αν $x_2 - x_1 = 0$, τότε $x_2 = x_1$ και από τη σχέση $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$ θα προέκυπτε ότι και $y_2 = y_1$. Τότε όμως θα ταυτίζονταν τα A, B.

Συνεπώς, η ευθεία AB, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και επειδή διέρχεται από το M, θα έχει εξίσωση: $y - (-1) = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$

Σχόλιο: (1) Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = \sqrt{4} = 2$ και επειδή $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} < 2 = \rho$, το σημείο M είναι στο εσωτερικό του κύκλου.

(2) Αν ταυτίζονταν τα A, B, τότε η χορδή θα συρρικνώνονταν σε σημείο και μάλιστα στο M. Αυτό όμως θα απαιτούσε το M να βρίσκεται πάνω στον κύκλο και την παραδοχή, ότι μια εφαπτομένη του κύκλου προκύπτει από το φορέα μιας συρρικνωμένης χορδής.

(3) Θεωρήσαμε δεδομένο, ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το κέντρο του κύκλου και το μέσο μιας χορδής, είναι κάθετο στη χορδή. Η απόδειξη είναι απλή, αφού το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $OA = OB = \rho$ και επομένως η διάμεσος OM είναι και ύψος.

(4) Η πρώτη απόδειξη είναι πιο απλή, χρησιμοποιεί όμως την πρόταση του σχολίου 3.

Η δεύτερη απόδειξη έχει λιγότερη εξάρτηση από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης δ του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$,

στο σημείο του, $A(1, -1)$.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

και επομένως, ο κύκλος έχει κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Λύση 1^η: Επειδή το κέντρο K και το σημείο επαφής A έχουν την ίδια τετμημένη 1, ο φορέας ϵ της ακτίνας στο σημείο επαφής έχει εξίσωση $x = 1$.

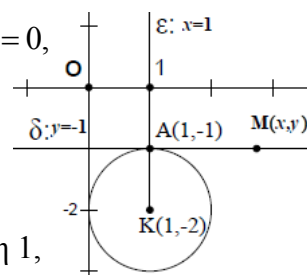
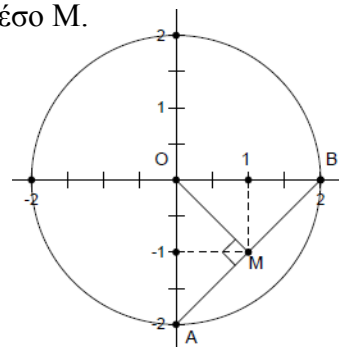
Η ευθεία ϵ , είναι παράλληλη στον άξονα yy' , και συνεπώς η ζητούμενη εφαπτομένη δ , σαν κάθετη στην ακτίνα, είναι κάθετη στον άξονα yy' , και επομένως παράλληλη στον xh' . (εννοείται σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων) Όμως η δ διέρχεται από το $A(1, -1)$, και έτσι έχει εξίσωση $y = -1$.

Λύση 2^η: Έστω $M(x, y)$ ένα σημείο της εφαπτομένης. $\overrightarrow{KA} = (1 - 1, -1 + 2) = (0, 1)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - 1, y + 1)$.

Επειδή η ακτίνα KA είναι κάθετη στην εφαπτομένη AM, στο σημείο επαφής A, θα έχουμε:

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (0, 1) \cdot (x - 1, y + 1) = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1. \text{ Έτσι η εφαπτομένη, έχει εξίσωση } y = -1.$$

Σχόλιο: Η δεύτερη απόδειξη έχει λιγότερη εξάρτηση από το σχήμα.



5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 1)$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$.

Να αναλυθεί το $\vec{\beta}$, σε δυο συνιστώσες διάφορες του μηδενικού διανύσματος, των οποίων η γωνία να είναι $\frac{\pi}{3}$ και η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

Λύση: Έστω $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ με $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$, $\left(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2\right) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\beta}_2 \parallel \vec{\alpha}$. Αν $\vec{\beta}_1 = (x, y)$, τότε:

$$(1) \vec{\beta}_2 \parallel \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\beta}_2 = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\beta}_2 = \lambda (\sqrt{3}, 1) \Rightarrow \vec{\beta}_2 = (\lambda\sqrt{3}, \lambda), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{ αφού } \vec{\beta}_2 \neq \vec{0}.$$

$$(2) \vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \Rightarrow (\sqrt{3}, 3) = (x, y) + (\lambda\sqrt{3}, \lambda) \Rightarrow (x + \lambda\sqrt{3}, y + \lambda) = (\sqrt{3}, 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \{x + \lambda\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ και } y + \lambda = 3\} \Rightarrow \{x = \sqrt{3} - \lambda\sqrt{3} \text{ και } y = 3 - \lambda\}$$

$$(3) \left\{ \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 = (x, y) \cdot (\lambda\sqrt{3}, \lambda) = x\lambda\sqrt{3} + y\lambda \text{ και } \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 = |\vec{\beta}_1| \cdot |\vec{\beta}_2| \cdot \cos \vartheta = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(\lambda\sqrt{3})^2 + \lambda^2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow x\lambda\sqrt{3} + y\lambda = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(\lambda\sqrt{3})^2 + \lambda^2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \\ \stackrel{(2)}{\Rightarrow} (\sqrt{3} - \lambda\sqrt{3})\lambda\sqrt{3} + (3 - \lambda)\lambda = \sqrt{(\sqrt{3} - \lambda\sqrt{3})^2 + (3 - \lambda)^2} \cdot \sqrt{4\lambda^2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (3 - 2\lambda) \cancel{\lambda} = \cancel{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 3} \cdot \cancel{\lambda} \cdot \frac{1}{\cancel{\lambda}} \Rightarrow (3 - 2\lambda)\lambda = |\lambda| \sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 3} \Rightarrow \\ \Rightarrow [(3 - 2\lambda)\lambda]^2 = (|\lambda| \sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 3})^2 \Rightarrow (3 - 2\lambda)^2 \cancel{\lambda^2} = \cancel{\lambda^2} (\sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 3})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9 - 12\lambda + 4\lambda^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 3 \Rightarrow 3\lambda^2 - 9\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \{\lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda - 2 = 0\} \Rightarrow \{\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2\}$$

Για $\lambda = 2$, η εξίσωση $(3 - 2\lambda)\lambda = |\lambda| \sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 3}$ γίνεται: $(3 - 2 \cdot 2) \cdot 2 = |2| \cdot \sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 3} \Leftrightarrow -2 = 2$, επομένως η εξίσωση δεν επαληθεύεται, και συνεπώς το $\lambda = 2$, δεν δίνει λύση στο πρόβλημά μας.

Για $\lambda = 1$, η εξίσωση $(3 - 2\lambda)\lambda = |\lambda| \sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 3}$ γίνεται: $(3 - 2 \cdot 1) \cdot 1 = |1| \cdot \sqrt{1^2 - 3 \cdot 1 + 3} \Leftrightarrow 1 = 1$, επομένως η εξίσωση επαληθεύεται, και συνεπώς το $\lambda = 1$, δίνει τη μοναδική λύση στο πρόβλημά μας.

Για $\lambda = 1$, έχουμε $\vec{\beta}_2 = (\lambda\sqrt{3}, \lambda) = (\sqrt{3}, 1) = \vec{\alpha}$, και $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_2 = (\sqrt{3}, 3) - (\sqrt{3}, 1) = (0, 2)$.

Σχόλια: (1) Η άσκηση αυτή «άργησε να εμφανιστεί», προκειμένου να διδαχθούμε στην Άλγεβρα την επίλυση άρρητων εξισώσεων. **Προσοχή:** Αν $\lambda = 0$, τότε $\vec{\beta}_2 = \vec{0}$ και επομένως $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1$, σε μια ανάλυση «τετριμμένη», χωρίς ουσία. Άρα έχει ουσιαστική σημασία να λύσουμε στο $\mathbb{R}^*$.

(2) Αν είχαμε επιλέξει να λύσουμε την εξίσωση $(3 - 2\lambda)\lambda = |\lambda| \sqrt{\lambda^2 - 3\lambda + 3}$ με ισοδυναμία, θα έπρεπε να παρατηρήσουμε ότι ορίζεται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$, αφού $\lambda^2 - 3\lambda + 3 > 0$ (διακρίνουσα αρνητική).

Για να υπάρχει λύση, «πρέπει και αρκεί» $(3 - 2\lambda)\lambda \geq 0$. $(3 - 2\lambda)\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq \frac{3}{2}$

Έτσι μετά τον «τετραγωνισμό», θα προέκυπτε σα μοναδική λύση το $\lambda = 1$.