

Μετρήσεις – εκτεταμένη έκδοση

Μετρήσεις γενικά: Για να μετρήσουμε ένα Γεωμετρικό μέγεθος, θα πρέπει να το συγκρίνουμε με ένα «ομοειδές» του, που το επιλέγουμε αυθαίρετα και το ονομάζουμε μονάδα μέτρησης.

Το αποτέλεσμα της μέτρησης λέγεται μέτρο και είναι μη αρνητικός αριθμός.

1. Για να μετρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, επιλέγουμε για μονάδα μέτρησης ένα ευθύγραμμο τμήμα, και τότε ο θετικός αριθμός μέτρο, λέγεται ειδικά μήκος.
2. Για να μετρήσουμε τμήμα μιας επιφάνειας, επιλέγουμε για μονάδα μέτρησης ένα τμήμα επιφάνειας, και τότε ο θετικός αριθμός μέτρο, λέγεται ειδικά εμβαδόν.
3. Για να μετρήσουμε τμήμα του χώρου, επιλέγουμε για μονάδα μέτρησης ένα τμήμα του χώρου, και τότε ο θετικός αριθμός μέτρο, λέγεται ειδικά όγκος.
4. Για να μετρήσουμε τμήμα ενός κύκλου, δηλαδή ένα τόξο, έχουμε δύο επιλογές, ή επιλέγουμε για μονάδα μέτρησης ένα τόξο του, ή επιλέγουμε για μονάδα μέτρησης την ακτίνα του, και τότε ο θετικός αριθμός που προκύπτει, λέγεται μέτρο του τόξου, στην αντίστοιχη μονάδα.

Σχόλια: (i) Θεωρώντας το μέτρο θετικό αριθμό, αποκλείσαμε αρχικά τις «οριακές μορφές». Για παράδειγμα «οριακή μορφή» στα ευθύγραμμα τμήματα, είναι το «μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα», που προφανώς του αντιστοιχεί το μέτρο 0 (μηδέν).

Έτσι «διασταλτικά», μπορούμε να πούμε ότι το μέτρο είναι μη αρνητικός αριθμός.

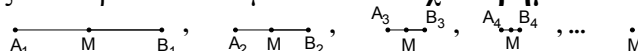
Οι «οριακές μορφές», χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή και φροντίδα. Όταν παρουσιάζονται σαν ακραίες μορφές μιας οικογένειας, συνήθως είναι «εκφυλισμένες», αφού δεν αναγνωρίζουμε πάνω τους τα βασικά χαρακτηριστικά της οικογένειας. Έτσι, αν μας δείξουν ένα σημείο, όχι αυθόρμητα, αλλά μετά από σκέψη («οριακά»^{*} ή σαν αποτέλεσμα της πράξης αφαίρεσης^{**}) θα το συσχετίσουμε με την οικογένεια των ευθυγράμμων τμημάτων, σα μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, αφού δεν αναγνωρίζουμε σε αυτό, το βασικό χαρακτηριστικό των ευθυγράμμων τμημάτων, ότι είναι κομμάτια ευθείας.

* Αν φανταστούμε, ότι τα άκρα A_1, B_1 ενός ευθύγραμμου τμήματος A_1B_1 , κινούνται προς το μέσο M του A_1B_1 , με «διαδοχικά βήματα» για το καθένα, κάθε φορά όσο το $\frac{1}{4}$ του τμήματος που απομένει

ανάμεσά τους, τότε μπορούμε να πούμε ότι «οριακά» οδηγούμαστε στο ευθύγραμμο τμήμα MM , που αφού τα άκρα του ταυτίζονται, προφανώς του αντιστοιχεί το μέτρο 0 (μηδέν).

Στο σχήμα, μπορούμε να παρακολουθήσουμε τις εικόνες που προκύπτουν με τα «διαδοχικά βήματα».

Τα ευθύγραμμα τμήματα $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \dots$



που «ακολουθούν» το ένα το άλλο, μας βοηθάνε να φανταστούμε άπειρα ευθύγραμμα σε μια πορεία συρρίκνωσης, στην οποία το M , σαν «ευθύγραμμο τμήμα» μηδενικού μήκους, «στέκει σα φάρος».

** Θεωρώντας ότι το αποτέλεσμα της πράξης αφαίρεσης στα ευθύγραμμα τμήματα, είναι ευθύγραμμο τμήμα, θα πρέπει να δεχθούμε σαν αποτέλεσμα το μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, όταν αφαιρούμε από ένα ευθύγραμμο τμήμα ένα ίσο του.

(ii) Η επιλογή της μονάδας μέτρησης είναι αυθαίρετη, αλλά δεν είναι κατ' ανάγκην τυχαία.

Η μονάδα μέτρησης είναι «εργαλείο», και η επιλογή της γίνεται έτσι που να υπηρετεί το στόχο που κάθε φορά τίθεται ή προκύπτει. Η ανθρωπότητα μέχρι σχετικά πρόσφατα, μετρούσε με μονάδες μέτρησης ασαφώς ορισμένες, και επομένως όχι αντικειμενικές. Η Γαλλική επανάσταση (1789), έβαλε τέλος στην ασάφεια αυτή και την αδικία που προκύπτει από την ύπαρξη «δύο μέτρων και δύο σταθμών». Στο «Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών» φυλάσσονται τα πρότυπα μονάδων που χρησιμοποιούνται παγκόσμια, αλλά παράλληλα επιβιώνουν ασαφώς ορισμένες μονάδες, με ιστορία πολλών αιώνων.

Άνθρωποι που αιφνιδιάζονται από κάποιο πρόβλημα μέτρησης, για μετρήσεις «επιτόπου», συνεχίζουν να χρησιμοποιούν «ανθρωπομετρικές» μονάδες μήκους όπως η «σπιθαμή» (περίπου 20 cm), δηλαδή η απόσταση ανάμεσα στα άκρα των τεντωμένων δακτύλων αντίχειρα και μικρού.

Προφανώς, η μονάδα μήκους «σπιθαμή», δεν προσφέρεται για ακρίβεια μέτρησης, όμως από την απουσία μέτρησης, καλύτερη είναι η ανακριβής μέτρηση.

Μετρήσεις στον κύκλο:

1) **Μοίρα:** Σε κάθε κύκλο, **τόξο μιας μοίρας**, είναι το τόξο που χωράει στον κύκλο **του, 360** φορές.

2) **Ακτίνιο(rad):** Σε κάθε κύκλο, **τόξο ενός ακτινίου**, ή αλλιώς **ενός rad**, είναι το τόξο που έχει μήκος, όσο η ακτίνα του συγκεκριμένου κύκλου.

Προφανώς, η μονάδα μέτρησης που ορίζεται σε ένα κύκλο, κάνει και για όλους τους **ίσους του** κύκλους.

3) **Μέτρο γωνίας:** Το **μέτρο μιας γωνίας** σε **μοίρες** ή σε **rad**, είναι το **μέτρο του τόξου** στο οποίο **βαίνει σαν επίκεντρο**.

Σγόλια: (i) Οι Σουμέριοι, περίπου **4000** χρόνια πριν, **ορίζοντας** μονάδα μέτρησης τόξων, φρόντισαν το **μέτρο** του κύκλου, να είναι ο βέλτιστος γι αυτούς αριθμός **360**. Έτσι, **μοίρασαν** ένα κύκλο σε **360** ίσα μέρη, και **όρισαν** για μονάδα μέτρησης τόξων, τη γνωστή μας **μοίρα**, σαν το **1/360** του συγκεκριμένου κύκλου. Η **μοίρα** είναι σήμερα, η **μακροβιότερη** μονάδα μέτρησης.

Είναι φανερό, ότι η επιλογή της μονάδας μέτρησης, όχι μόνο δεν ήταν τυχαία, αλλά επιλέχθηκε με **προαποφασισμένο** για μέτρο του κύκλου το **360**(=12·30), μάλλον υπηρετεί την παράσταση με κύκλο, του «πρωτόγονου **σεληνιακού έτους**» με **12 μήνες** των (περίπου) **30 ημερών**.

Ο αριθμός **360**(= $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$), που έχει διαιρέτες όλους τους μονοψήφιους εκτός από το **7**, έχει συνολικά

22 διαφορετικούς διαιρέτες $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180$ και ικανοποίησε όλες τις γνωστές εφαρμογές. Με την προσθήκη του **7**, θα γίνονταν δύσχρηστος $2520 = 7 \cdot 360$ χωρίς σημαντικό όφελος.

(ii) Κατασκευάσαμε εγγεγραμμένα σε κύκλο, με «κανόνα και διαβήτη», «κανονικά» πολύγωνα, εξάγωνο – πεντάγωνο, με κοινή κορυφή Λ.

Για το μέτρο, σε **μοίρες**, του «μικρού» τόξου ΚΑ ισχύει:

$$(\widehat{KA}) = (\widehat{KL}) - (\widehat{AL}) = \frac{360}{5} - \frac{360}{6} = 72 - 60 = 12$$

Στη συνέχεια, από το $\widehat{KA}$, με δύο διαδοχικές διχοτομήσεις, γνωρίζοντας

ότι η μεσοκάθετος της χορδής διχοτομεί το τόξο, προέκυψε το $\widehat{AG}$ με μέτρο **3**(μοίρες), και έτσι μοιράσαμε τον κύκλο σε **120** ίσα μέρη.

Επειδή η «τριχοτόμηση» τόξου, με «κανόνα και διαβήτη», είναι αδύνατη,

«τριχοτομήσαμε» προσεγγιστικά το τόξο των **3** μοιρών, και έτσι κατασκευάσαμε **τόξο 1 μοίρας**.

Στο διπλανό σχήμα, φαίνονται και **γωνίες** 1° και 3° , αφού σαν **επίκεντρος**

βαίνουν σε τόξα 1° και 3° αντίστοιχα. Για τον ίδιο λόγο, το μέτρο

της γωνίας ω σε **μοίρες** είναι **30**, αφού έχει το ίδιο μέτρο με το

τόξο AB, στο οποίο βαίνει. Έτσι: $(\hat{\omega}) = (\widehat{AB}) = (\widehat{A_1B_1}) = 30$

(iii) Η ισότητα, προκύπτει από τη «**δυνατότητα ταύτισης**».

Κατασκευάσαμε τόξο AB', ίσο με το τόξο A_1B_1 . $\widehat{AB'} = \widehat{A_1B_1}$

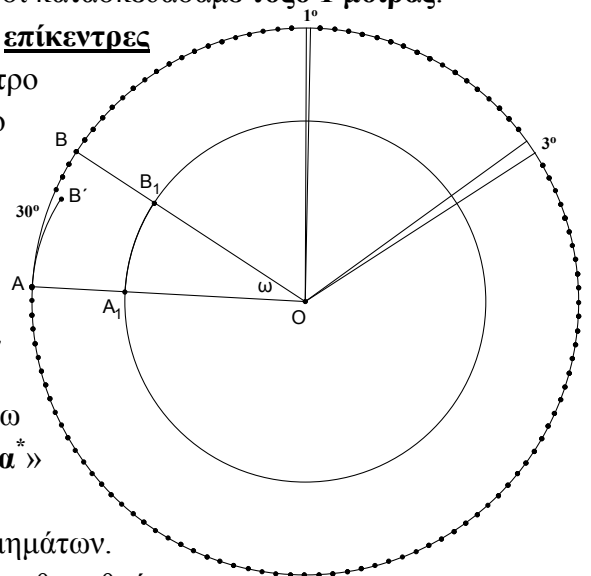
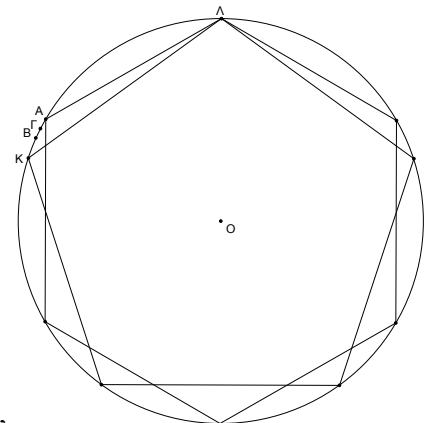
Έτσι $(\widehat{AB'}) = (\widehat{A_1B_1}) = (\widehat{AB}) = 30$, ενώ προφανώς τα $\widehat{AB}$, $\widehat{AB'}$

δεν είναι ίσα, αφού δεν υπάρχει «**δυνατότητα ταύτισης**», λόγω διαφορετικής «καμπυλότητας». Ακόμα και «**ευθυγραμμισμένα**»*

να τα φανταστούμε, προφανώς θα έχουν **διαφορετικό μήκος**,

μετρημένα με οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης ευθυγράμμων τμημάτων.

* Μπορούμε να φανταστούμε ένα τόξο «**ευθυγραμμισμένο**», αν θυμηθούμε



ότι η ζώνη του παντελονιού μας, θυμίζει κύκλο όταν την φοράμε, και ευθύγραμμο τμήμα όταν την κρεμάμε από το μεταλλικό της άκρο. Οι μονάδες μήκους, είναι ευθύγραμμα τμήματα. Έτσι για να μετρηθεί το μήκος ενός τόξου, θα πρέπει να «ευθυγραμμιστεί», για να μπορέσει να «εφαρμόσει» πάνω του, κάποια μονάδα μήκους.

(iv) Μετρήσαμε το $\widehat{AB}$, και έτσι «έμαθε» το μέτρο της η $\hat{\omega}$, που βαίνει σε αυτό. $\boxed{(\hat{\omega}) = (\widehat{AB}) = 30}$

Η $\hat{\omega}$ σαν επίκεντρη, βαίνοντας και στο $\widehat{A_1B_1}$, το «πληροφόρησε» ότι έχει και αυτό μέτρο 30, όσο και το διαφορετικό του, δηλαδή το $\widehat{AB}$. Έτσι, άπειρα διαφορετικά τόξα έχουν ίσα μέτρα, και αυτό γίνεται φανερό όταν τα τόξα αυτά είναι τόξα ομόκεντρων κύκλων, και βαίνει σε αυτά η ίδια επίκεντρη γωνία.

Συμπέρασμα: Για δυο γωνίες ω και ϕ ισχύει, $\boxed{\hat{\omega} = \hat{\phi} \Leftrightarrow (\hat{\omega}) = (\hat{\phi})}$, ενώ τόξα που έχουν ίσα μέτρα, δεν είναι αναγκαστικά ίσα. (Προφανώς, όπως για όλα τα ίσα, τα ίσα τόξα έχουν και ίσα μέτρα)

Προσοχή: Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους, «τόξα με ίσα μέτρα, είναι ίσα».

Μέτρηση μήκους κύκλου: Έστω κύκλος (O, ρ) , που έχει με ευθεία ε , σημείο επαφής A .

Αν φανταστούμε τον κύκλο να κυλίζει πάνω στην ε , όπως δείχνει

το βέλος, έως ότου το A να ξαναβρεθεί πάνω στην ε στη θέση A' ,

τότε προφανώς το μήκος του κύκλου είναι όσο το μήκος του AA' .



Σχόλιο: Η απλή αυτή ιδέα, «ευθυγράμμισης» του κύκλου, χρησιμοποιήθηκε πριν από χιλιάδες χρόνια, με ρόδες που κυλάνε πάνω στο έδαφος, και έδωσε μια προσεγγιστική μέθοδο μέτρησης του κύκλου.

Κάνοντας τέτοιες μετρήσεις και διαιρώντας το «μήκος του κύκλου» με το μήκος της διαμέτρου του, παρατήρησαν ότι προκύπτει περίπου, πάντα ο ίδιος αριθμός. Σήμερα γνωρίζουμε ότι είναι σταθερός ο λόγος: «μήκος κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου του», και είναι ο γνωστός παγκοσμίως αριθμός π .

Τόξο 1 rad: Διαιρέσαμε την ακτίνα OA , με τέσσερις διαδοχικές διχοτομήσεις, σε 16 ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Ξεκινώντας από το A , κατασκευάσαμε 16 διαδοχικές χορδές, που καθεμιά είχε μήκος, το $\frac{1}{16}$

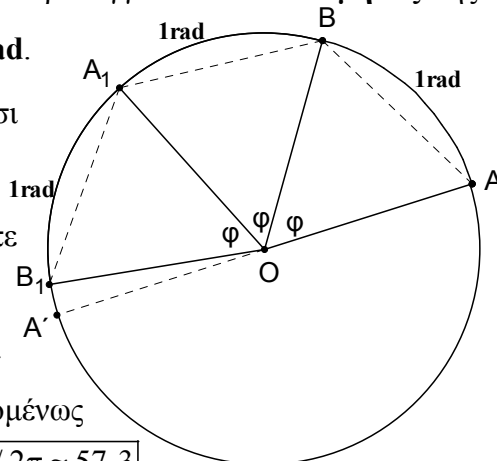
του μήκους της ακτίνας OA . Έτσι, προέκυψε η τεθλασμένη γραμμή με άκρα A, B , που έχει μήκος όσο η ακτίνα και είναι εγγεγραμμένη στο $\widehat{AB}$. Προφανώς το μήκος του $\widehat{AB}$ είναι μεγαλύτερο από το μήκος της τεθλασμένης, που είναι εγγεγραμμένη σε αυτό. Όμως, η τεθλασμένη πλησιάζει (προσεγγίζει) τόσο πολύ το $\widehat{AB}$, που δικαίως θεωρούμε ότι το μήκος του $\widehat{AB}$ είναι προσεγγιστικά όσο το μήκος της τεθλασμένης, που έχει το μήκος της ακτίνας, δηλαδή $(\widehat{AB}) \approx 1$ σε **rad**.

Στη συνέχεια, κατασκευάσαμε ίσες χορδές $AB = BA_1 = A_1B_1$ και έτσι

έχουμε, ότι τα «μικρά» τόξα είναι ίσα, $\widehat{AB} = \widehat{BA_1} = \widehat{A_1B_1} \approx 1 \text{ rad}$

και $\widehat{AB_1} \approx 3 \text{ rad}$. Η διάμετρος AA' , κάνει φανερό αυτό που θα έπρεπε να είναι αναμενόμενο, δηλαδή ότι το ημικύκλιο είναι μεγαλύτερο

από τόξο 3 rad, αφού εμείς γνωρίζουμε ότι: $\boxed{\widehat{AA'} = \pi \text{ rad} \approx 3,14 \text{ rad}}$.



Το μέτρο του κύκλου: σε **rad** είναι 2π και σε μοίρες είναι 360. Επομένως

τόξο 1 **rad**, είναι περίπου 57° και γράφουμε $1 \text{ rad} \approx 57^\circ$, αφού $\boxed{360 / 2\pi \approx 57,3}$

Σχόλιο: Στο σχήμα δεν υπάρχει κύκλος,(!) αφού κρύψαμε το «μικρό» $\widehat{AB}$.

Η τεθλασμένη με άκρα A, B , προσεγγίζει τόσο καλά το $\widehat{AB}$, έτσι που δεν γίνεται αντιληπτή η απουσία του, ούτε σε 10-πλάσια μεγέθυνση. Η προσέγγιση αυτή, είναι λίγο ακριβέστερη από την προσέγγιση που ικανοποιούσε τον Αρχιμήδη (287-212 π.χ.) και δίνει τιμή στον π με ακρίβεια εκατοστού: $\boxed{\pi \approx 3,14}$.

Για την «ιστορία»: Κατασκευάσαμε κύκλο με ακτίνα 3,77cm (διάμετρος 7,54cm). Έτσι, τα ευθύγραμμα τμήματα της τεθλασμένης, είχαν το καθένα μήκος περίπου 0,23cm (ούτε 2,5 χιλιοστά του μέτρου) και σχημάτιζαν διαδοχικά γωνίες περίπου 176°. Το πρόγραμμα κατασκευής, «έδωσε» μήκος κύκλου 23,68 cm. Με ακρίβεια εκατοστού του cm, το μήκος του $\widehat{AB}$, «δόθηκε» 3,77 σε cm, όσο δηλαδή και η ακτίνα. Όταν ζητήσαμε τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, «δόθηκε» το τόξο να είναι μεγαλύτερο από την ακτίνα, μόλις 6 δεκάκις χιλιοστά του cm. Τέλος, ο γνωστός σταθερός λόγος π , μήκους κύκλου προς τη διάμετρο, «δόθηκε» με ακρίβεια εκατοστού 3,14.

Γωνία 1 rad: Στο σχήμα, η γωνία ϕ έχει μέτρο 1 σε rad, αφού σαν επίκεντρη, βαίνει σε τόξο 1 rad.

Ισχύει: $(\hat{\phi}) = (\widehat{AB}) = (\widehat{A_1B_1}) = 1$ σε rad και μπορούμε να γράψουμε $\hat{\phi} = 1$ rad,

$\widehat{AB} = 1$ rad και $\widehat{A_1B_1} = 1$ rad, χωρίς να κάνουμε συγκρίσεις «ανόμοιων πραγμάτων», παρασυρόμενοι από το ίδιο όνομα των μονάδων μέτρησης. Ενώ όλες οι γωνίες 1 rad, είναι ίσες μεταξύ τους, προφανώς αυτό δεν ισχύει για τα τόξα. Τα $\widehat{AB} = 1$ rad και $\widehat{A_1B_1} = 1$ rad, είναι κομμάτια κύκλων

με άνισες ακτίνες, «ευθυγραμμισμένα» έχουν μήκη: για μεν το $\widehat{AB}$, όσο το (OA) , για δε το $\widehat{A_1B_1}$, όσο το (OA_1) , και συνεπώς είναι άνισα, αφού πήραμε $OA_1 < OA \Leftrightarrow (OA_1) < (OA)$.

Επομένως όταν εκφράζουμε τόξα σε rad, θα πρέπει να τα συνοδεύουμε με την ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου, γράφοντας για παράδειγμα $\widehat{AB} = 1$ rad σε κύκλο με ακτίνα $OA = 5$ cm.

Προσοχή: Ίδιο είναι το όνομα της μονάδας μέτρησης στα rad, όπως και στις μοίρες, αφού δηλώνει την ίδια σχέση με τον κύκλο της: $\frac{1}{2\pi}$ του κύκλου του για το rad και $\frac{1}{360}$ του κύκλου της για τη μοίρα.

Κάθε οικογένεια ίσων κύκλων, έχει το δικό της rad, (και τη δική της «μοίρα») αφού έχει τη δική της ακτίνα, και επομένως η μονάδα αυτή για τόξα, δεν είναι «αντικειμενική».

Στις φυσικές επιστήμες: Παρά το δεδομένο, ότι για τις γωνίες, rad και μοίρα είναι «αντικειμενικές»^{*} μονάδες μέτρησης, στις φυσικές επιστήμες, για να αποφύγουν τα λάθη και τη δυσκολία έκφρασης των σχετικών εξισώσεων, «ορίζουν» για γωνία, το μέτρο της σε rad, τη θεωρούν επομένως «αδιάστατη», και αναφέρουν το όνομα της μονάδας, απλά για να γνωρίζουν την αξία του μέτρου.

* Αντικειμενικές, με την έννοια ότι όταν λέμε πως μια γωνία είναι 1 rad, (ή 1 μοίρας) δεν υπάρχει διαφορετική γωνία που να είναι επίσης 1 rad (ή 1 μοίρα).

Γωνία: Γωνία $x\hat{O}y = \hat{\omega}$, «είναι» το γεωμετρικό σχήμα, που αποτελείται από τις ημιευθείες Ox , Oy , οι οποίες λέγονται πλευρές της γωνίας, και το μέρος του επιπέδου «ανάμεσα» στις πλευρές Ox , Oy .

Σχόλιο: Γράψαμε «είναι», για να τονίσουμε ότι αυτός είναι ο γεωμετρικός ορισμός της γωνίας. Για ένα αυστηρό ορισμό, επιλέγονται δυο σημεία A , B πάνω στις ημιευθείες Ox , Oy , και τότε: «Κυρτή γωνία $x\hat{O}y$, με κορυφή O και πλευρές Ox , Oy , είναι η τομή των ημιεπιπέδων (Ox, B) και (Oy, A) .»

Προφανώς, το υπόλοιπο μέρος του επιπέδου, μαζί με τις ημιευθείες Ox , Oy , είναι η μη κυρτή γωνία, με πλευρές Ox , Oy , η οποία σε ένωση με την κυρτή που προαναφέραμε, δίνουν την πλήρη γωνία. Εμείς για να αποφύγουμε τη μεγάλη αυστηρότητα, που για κάποιους είναι δυσνόητη, χρησιμοποιήσαμε το όνομα $\hat{\omega}$, για να δηλώσουμε πια από τις δυο γωνίες εννοούσαμε, φροντίζοντας να σχεδιάσουμε για σημάδι, ένα τόξο με άκρα στις πλευρές της γωνίας. Το σημάδι αυτό υπενθυμίζει, ότι για να μετρηθεί μια γωνία αρκεί να γίνει επίκεντρη σε κάποιο κύκλο. Τέλος, υπάρχει μια γωνία που βρίσκεται καθημερινά μπροστά μας: η ορθή.

Η ορθή γωνία, είναι «σύνορο» ανάμεσα στις οξείες και τις αμβλείες, και είναι μονάδα μέτρησης ή καλύτερα μονάδα έκφρασης, του αθροίσματος Σ_v των γωνιών v -γώνου: $\Sigma_v = (2v - 4)^L = (2v - 4)$ ορθές γωνίες

