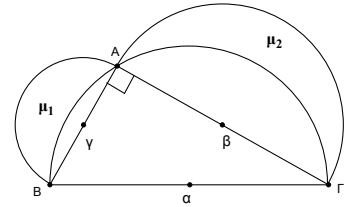


Μηνίσκοι

1. Οι Μηνίσκοι του Ιπποκράτη του Χίου: $(\mu_1) + (\mu_2) = (AB\Gamma)$

Απόδειξη: Αν $AB = \gamma$, $B\Gamma = \alpha$ και $A\Gamma = \beta$, τότε τα ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι για



$$\text{την } AB: (\eta_\gamma) = \frac{\pi \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \gamma^2}{8}, \text{ για την } B\Gamma: (\eta_\alpha) = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{8} \text{ και για την } A\Gamma: (\eta_\beta) = \frac{\pi \cdot \beta^2}{8}.$$

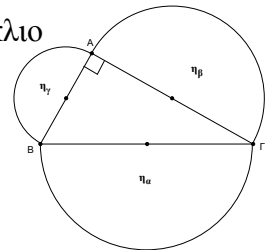
Έτσι, γράφοντας το εμβαδόν του «όλου» σχήματος, μία φορά σαν άθροισμα των εμβαδών του μεγάλου ημικυκλίου (διάμετρος η υποτεινούσα) και των δυο μηνίσκων, και μία φορά σαν άθροισμα του (ABΓ) και των εμβαδών των δυο μικρών ημικυκλίων (διάμετροι οι κάθετες πλευρές) θα έχουμε:

$$(\mu_1) + (\mu_2) + \frac{\pi \cdot \alpha^2}{8} = (AB\Gamma) + \left(\frac{\pi \cdot \beta^2}{8} + \frac{\pi \cdot \gamma^2}{8} \right) \Rightarrow (\mu_1) + (\mu_2) = (AB\Gamma)$$

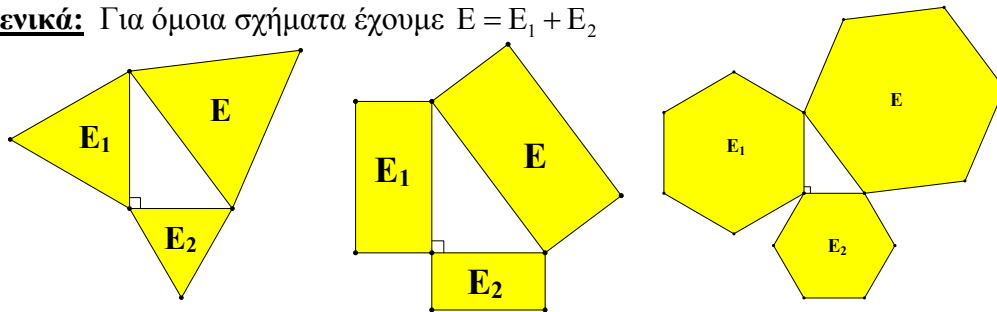
$$* \text{ Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα: } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \frac{\pi}{8} \cdot \alpha^2 = \frac{\pi}{8} \cdot (\beta^2 + \gamma^2) \Rightarrow \frac{\pi \cdot \alpha^2}{8} = \frac{\pi \cdot \beta^2}{8} + \frac{\pi \cdot \gamma^2}{8}$$

Σχόλιο: Το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει για τετράγωνα, αλλά σε μια «ελεύθερη εφαρμογή» δίνει «ισοδυναμία» για κάθε τριάδα ομοίων κλειστών σχημάτων, που «προσαρμόζονται» στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Έτσι, έχουμε για ημικύκλια, αυτό που αποδείξαμε στον *, δηλαδή $(\eta_\alpha) = (\eta_\beta) + (\eta_\gamma)$. Στους μηνίσκους του Ιπποκράτη του Χίου, το ημικύκλιο

η_α , αντικαθίσταται από το «δίδυμό του», που «καλύπτει» μέρος μόνο των η_β , η_γ , αφήνοντας «ακάλυπτους» τους μηνίσκους, αφού «καλύπτει» το τρίγωνο $AB\Gamma$. Άρα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι «ισοδύναμο» με τους δυο μηνίσκους μαζί.



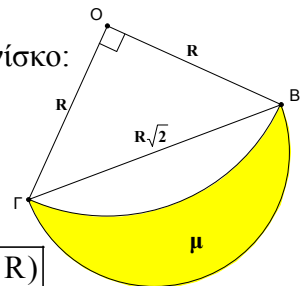
Γενικά: Για όμοια σχήματα έχουμε $E = E_1 + E_2$



2. Αν ονομάσουμε $\underline{\mu}$ το ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma = R\sqrt{2}$, και $\underline{\mu}$ τον μηνίσκο:

$$(\mu) + (\widehat{OB\Gamma}) = (OB\Gamma) + (\eta) \Rightarrow (\mu) + \frac{\pi R^2}{4} = (OB\Gamma) + \frac{\pi \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu) + \frac{\pi R^2}{4} = (OB\Gamma) + \frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow (\mu) = (OB\Gamma) \quad \boxed{\text{εργαστήκαμε σε κύκλο (O, R)}}$$

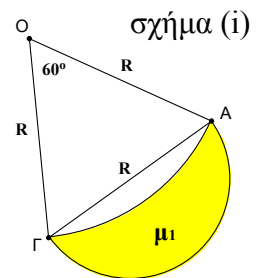


Σχόλιο: Ο μηνίσκος που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 90° , είναι ισοδύναμος με το ισοσκελές τρίγωνο, που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου, και βάση τη χορδή που φαίνεται από την κορυφή του (κορυφή της επίκεντρης γωνίας) – (Δραστηριότητα σελ. 106). Είναι η μοναδική περίπτωση που παρουσιάζεται η σχέση ενός μηνίσκου, με το αντίστοιχο τρίγωνο, και είναι σχέση ισοδυναμίας. Σε κάθε άλλη περίπτωση, παρουσιάζεται η σχέση ομάδας μηνίσκων με ευθύγραμμα σχήματα, και αυτό όπως θα δούμε δεν είναι τυχαίο. Η Μαθηματική πρόταση του Ιπποκράτη από τη Χίο, μάλλον παγίδευσε τους «ερευνητές», για χιλιάδες χρόνια, στο όνειρο του «τετραγωνισμού του κύκλου».

3. Σε κύκλο (O,R), αν ονομάσουμε η_1 το ημικύκλιο με διάμετρο $AG = R$:

$$(\mu_1) + (\widehat{OAG}) = (OAG) + (\eta_1) \Rightarrow (\mu_1) + \frac{\pi R^2}{6} = (OAG) + \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu_1) + \frac{\pi R^2}{6} = (OAG) + \frac{\pi R^2}{8} \Rightarrow (\mu_1) + \frac{\pi R^2}{24} = (OAG) \Rightarrow (\mu_1) < (OAG)$$

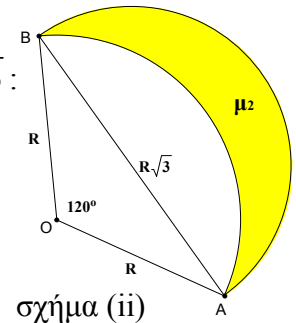


Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι ο μηνίσκος μ_1 , που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60° , η οποία είναι **μικρότερη** από 90° , έχει εμβαδό **μικρότερο** από το αντίστοιχο τρίγωνο.

4. Σε κύκλο (O,R), αν ονομάσουμε η_2 το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = R\sqrt{3}$:

$$(\mu_2) + (\widehat{OAB}) = (OAB) + (\eta_2) \Rightarrow (\mu_2) + \frac{\pi R^2}{3} = (OAB) + \frac{\pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow$$

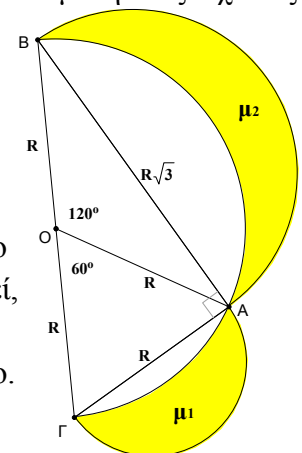
$$\Rightarrow (\mu_2) + \frac{\pi R^2}{3} = (OAB) + \frac{3\pi R^2}{8} \Rightarrow (\mu_2) = (OAB) + \frac{\pi R^2}{24} \Rightarrow (\mu_2) > (OAB)$$



Σχόλιο: Ο μηνίσκος μ_2 , που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 120° , η οποία είναι **μεγαλύτερη** από 90° , έχει εμβαδό **μεγαλύτερο** από το αντίστοιχο τρίγωνο, και μάλιστα όσο ακριβώς «υστερούσε» ο μηνίσκος μ_1 , σε σχέση με το «δικό του» τρίγωνο. Έτσι, προσθέτοντας «κατά μέλη» τις σχέσεις

$$(\mu_1) + \frac{\pi R^2}{24} = (OAG) \text{ και } (\mu_2) = (OAB) + \frac{\pi R^2}{24}, \text{ * επιβεβαιώνεται «αλγεβρικά»,}$$

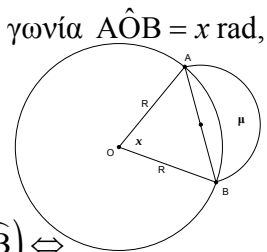
ότι με τα σχήματα (i), (ii), «**συναρμολογείται**» το σχήμα με τους μηνίσκους του Ιπποκράτη του Χίου, στην ειδική περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου με οξείες γωνίες 30° και 60° . Προφανώς, αυτό θα γίνεται κάθε φορά που θα «συνεργάζονται» παραπληρωματικές επίκεντρες γωνίες, και επομένως το μόνο που μένει, για τη γενίκευση των παραπάνω παρατηρήσεων, είναι να αποδειχθεί, ότι με οξεία επίκεντρη γωνία, ο σχετικός μηνίσκος «υστερεί» σε εμβαδόν του αντίστοιχου τριγώνου, ενώ με αμβλεία επίκεντρη γωνία, συμβαίνει το αντίθετο. Επειδή η απόδειξη θα γίνει με το «εργαλείο» των συναρτήσεων, αναγκαστικά τις γωνίες θα τις εκφράζουμε σε ακτίνια(rad).



$$* (\mu_1) + \frac{\pi R^2}{24} + (\mu_2) = (OAG) + (OAB) + \frac{\pi R^2}{24}, \text{ δηλαδή } (\mu_1) + (\mu_2) = (OAG) + (OAB) = (AB\Gamma),$$

Πρόταση: Σε κύκλο (O,R), αν μ είναι ο μηνίσκος που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = x \text{ rad}$,

τότε $(\mu) < (OAB)$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $(\mu) > (OAB)$, για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.



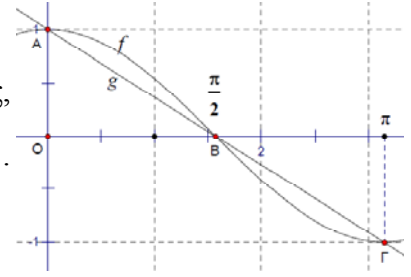
$$\textbf{Απόδειξη: } (OAB) + \frac{\pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = (\widehat{OAB}) + (\mu) \Leftrightarrow (\mu) - (OAB) = \frac{\pi (AB)^2}{8} - (\widehat{OAB}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mu) - (OAB) = \frac{\pi \cdot 2R^2 (1 - \sin x)}{8} - \frac{x}{2\pi} \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow (\mu) - (OAB) = \frac{\pi R^2}{4} \left(1 - \sin x - \frac{2x}{\pi}\right)$$

$$* \left[(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \sin x = 2R^2 (1 - \sin x) \text{ και } (\widehat{OAB}) = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi R^2 \right]$$

$$\text{Έτσι, } (\mu) - (\text{OAB}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2}{4} \left(1 - \sin x - \frac{2x}{\pi} \right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x - \frac{2x}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{2}{\pi} \cdot x + 1. \quad (1)$$

Αν θέσουμε $f(x) = \sin x$ και $g(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot x + 1$, τότε στο διάστημα $[0, \pi]$ προκύπτει η γραφική παράσταση, στην οποία φαίνεται η σχέση των συναρτήσεων.



1. Μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις, έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο διάστημα $(0, \pi)$ το σημείο $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

$$\text{Έτσι, } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \text{ δηλαδή } \sin x = -\frac{2}{\pi} \cdot x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2},$$

και τελικά από τη σχέση (1) έχουμε: $(\mu) = (\text{OAB}) \Leftrightarrow (\mu) - (\text{OAB}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Προσοχή: Ενδιαφεθήκαμε για λύση στο διάστημα $(0, \pi)$, αφού δεν προκύπτουν τρίγωνα και μηνίσκοι, για τις τιμές $x = 0$ και $x = \pi$.

Σχόλια: (i) Προφανώς, ο μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο, μόνο για επίκεντρη γωνία ορθή.

(ii) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ είναι η γνωστή, ενώ για την $g(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot x + 1$, αρκεί να θυμηθούμε ότι είναι ευθεία (πολυνύμο 1^{ου} βαθμού), απλά επιβεβαιώνοντας τα σημεία A, B και Γ.

$$g(0) = -\frac{2}{\pi} \cdot 0 + 1 = 1, \quad \boxed{A(0, 1)}, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 1 = -1 + 1 = 0, \quad \boxed{B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)} \quad \text{και} \quad g(\pi) = -\frac{2}{\pi} \cdot \pi + 1 = -2 + 1 = -1, \quad \boxed{\Gamma(\pi, -1)}.$$

$$2. \quad (\mu) < (\text{OAB}) \Leftrightarrow (\mu) - (\text{OAB}) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2}{4} \left(1 - \sin x - \frac{2x}{\pi} \right) < 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x - \frac{2x}{\pi} < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -\frac{2x}{\pi} + 1 < \sin x \Leftrightarrow g(x) < f(x)$. Όμως, θα έχουμε $g(x) < f(x)$, μόνο για τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f , θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , κάτι που προφανώς συμβαίνει μόνο για τις τιμές του x στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Σχόλιο: Προφανώς, ο μηνίσκος έχει εμβαδόν μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου, μόνο για οξείες επίκεντρες γωνίες.

$$3. \quad (\mu) > (\text{OAB}) \Leftrightarrow (\mu) - (\text{OAB}) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2}{4} \left(1 - \sin x - \frac{2x}{\pi} \right) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x - \frac{2x}{\pi} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -\frac{2x}{\pi} + 1 > \sin x \Leftrightarrow g(x) > f(x)$. Όμως, θα έχουμε $g(x) > f(x)$, μόνο για τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της g , θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f , κάτι που προφανώς συμβαίνει μόνο για τις τιμές του x στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Σχόλιο: Προφανώς, ο μηνίσκος έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου, μόνο για αμβλείες επίκεντρες γωνίες.

Απόδειξη με θεωρία συναρτήσεων Γ' λυκείου

Με $(\mu) - (OAB) = \frac{\pi R^2}{4} \left(1 - \sin x - \frac{2x}{\pi} \right)$, ορίζουμε συνάρτηση $f(x) = 1 - \sin x - \frac{2x}{\pi}$ στο διάστημα $[0, \pi]$, η οποία είναι προφανώς συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$, με τις συνεχείς συναρτήσεις $f'(x) = \eta\mu x - \frac{2}{\pi}$ και $f''(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

$$f''(x) = \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad f''(x) = \sigma\upsilon\nu x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } f''(x) = \sigma\upsilon\nu x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

$$\text{άρα } f' \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f' \searrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{ και αφού } f'(0) = -\frac{2}{\pi} < 0, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi-2}{\pi} > 0, \quad f'(\pi) = -\frac{2}{\pi} < 0,$$

επομένως υπάρχουν $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) : f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$, και συνεπώς $f'(x) < 0, \forall x \in (0, x_1)$,

$$f'(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_2) \text{ και } f'(x) < 0, \forall x \in (x_2, \pi).$$

$$\text{Έτσι, } f \searrow [0, x_1], \quad f \nearrow \left[x_1, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, x_2\right] \text{ και } f \searrow [x_2, \pi], \text{ και επειδή } f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0, *$$

επομένως $f(x) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, και συνεπώς $(\mu) - (OAB) < 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

και $(\mu) - (OAB) > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, δηλαδή $(\mu) < (OAB), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $(\mu) > (OAB), \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$$* \quad f(0) = 1 - \sin 0 - \frac{2 \cdot 0}{\pi} = 1 - 1 - 0 = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} = 1 - 1 - 1 = 0, \quad f(\pi) = 1 - \sin \pi - \frac{2 \cdot \pi}{\pi} = 1 - 1 - 2 = 0$$

Σχόλια: (1) Μας ενδιέφερε το πρόσημο της συνάρτησης, και έτσι κάναμε «στοχευμένη» μελέτη.

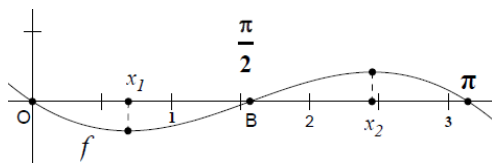
(2) Στη γραφική παράσταση, φαίνονται οι ρίζες της συνάρτησης, οι θέσεις ακροτάτων, και το σημείο καμψής.

(3) Από τη δεύτερη παράγωγο μάθαμε, ότι η f είναι «**κυρτή**» στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και «**κοίλη**» στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

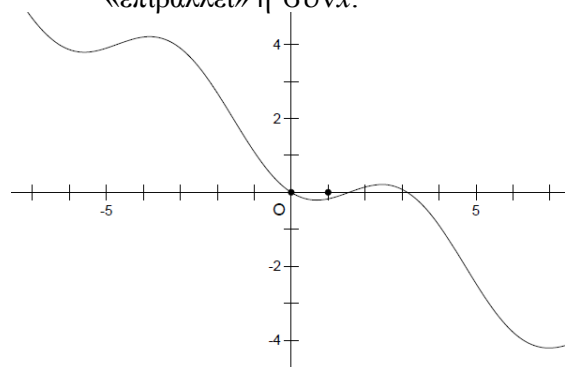
και αφού τα άκρα των διαστημάτων είναι ρίζες της συνάρτησης, το πρόσημό της είναι προφανές.

(4) Πίνακας μεταβολών της συνάρτησης:

x	0	x_1	$\frac{\pi}{2}$	x_2	π
$f'(x)$	- 0 +	+	0 -		
$f''(x)$	+ + 0 -	-	0 +		
$f(x)$	0 - - 0 + + 0				
	T.M.		Σ K.	T.M.	T.E.



Μια «πανοραμική» της γραφικής παράστασης, όπου φαίνεται, πως επηρεάζουν οι απολύτως μεγάλες τιμές της μεταβλητής μέσω του $2x \div \pi$, την ταλάντωση που «επιβάλλει» η $\sin x$.



(5) Οι γραφικές παραστάσεις έγιναν στο πρόγραμμα Sketchpad Greek, που είναι «**Portable**», και θα το βρείτε στη διεύθυνση:

<http://eclass.sch.gr/modules/document/file.php/EL856126/%CE%A0%CE%A1%CE%9F%CE%93%CE%A1%CE%91%CE%9C%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%91/Sketchpad%20Greek.zip>