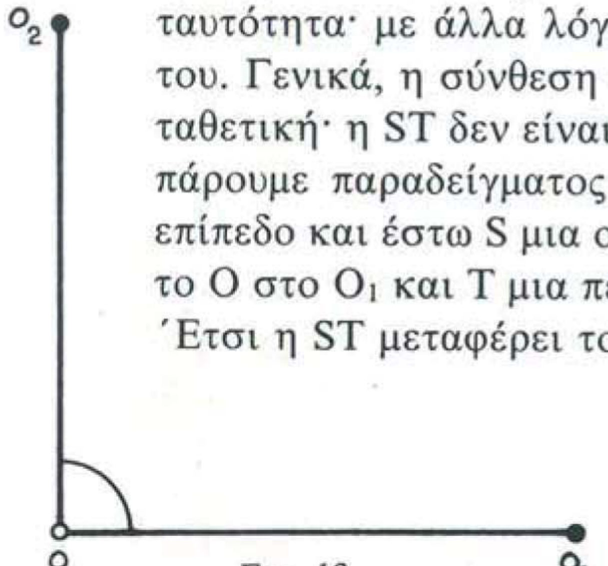
Μεταφορική, περιστροφική και σχετικές συμμετρίες

Περιστροφική συμμετρία σε άνθη.

Μεταφορική, περιστροφική και σχετικές συμμετρίες

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΗ θα στραφούμε τώρα σε άλλα είδη γεωμετρικής συμμετρίας. Όταν ακόμη εξέταζα την αμφίπλευρη συμμετρία, αναπόφευκτα εισήγα σποραδικά και άλλες συμμετρίες, όπως η κυλινδρική και η σφαιρική. Είναι καλύτερο να καθορίσω τη βαθύτερη γενική έννοια με κάποια ακρίβεια εκ των προτέρων, και γι᾽ αυτόν το σκοπό χρειάζονται λίγα μαθηματικά, πράγμα για το οποίο ζητώ την υπομονή σας. Έχω ήδη μιλήσει για μετασχηματισμούς. Μια απεικόνιση S του χώρου είναι μια συνάρτηση που σε κάθε σημείο σ αντιστοιχεί ένα σημείο σ΄ που λέγεται εικόνα του σ. Μια τέτοια ειδική απεικόνιση είναι η ταυτοτική *I* που μεταφέρει κάθε σημείο σ στον εαυτό του. Αν δοθούν δύο απεικονίσεις S, T, μπορούμε να εκτελέσουμε τη μία κατόπιν της άλλης: αν η S μεταφέρει το σημείο σ στο σ΄ και η T μεταφέρει το σ΄ στο σ″, τότε η απεικόνιση που προκύπτει, και συμβολίζεται με ST, μεταφέρει το σ στο σ″. Μια απεικόνιση S μπορεί να έχει μια αντίστροφη απεικόνιση S′ τέτοια ώστε SS′ = *I* και S′S = *I*· με άλλα λόγια, αν η S μεταφέρει το αυθαίρετο σημείο σ στο σ′, τότε η S′ μεταφέρει το σ′ πίσω στο σ, και το ίδιο ακριβώς συμβαίνει αν εκτελεστεί πρώτα η S′ και εν συνεχεία η S. Για μια τέτοια ένα προς ένα απεικόνιση S, στην πρώτη διάλεξη χρησιμοποιήθηκε ο όρος μετασχηματισμός· ας συμβολίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση με το S^{-1}. Βέβαια, η ταυτοτική *I* είναι μετασχηματισμός και η ίδια η I είναι ο αντίστροφός της. Κατοπτρισμός ως προς ένα επίπεδο, η βασική διεργασία της αμφίπλευρης συμμετρίας, είναι τέτοιος, ώστε η επανάληψη SS καταλήγει στην ταυτότητα· με άλλα λόγια, είναι το αντίστροφο του εαυτού του. Γενικά, η σύνθεση των απεικονίσεων δεν είναι αντιμεταθετική· η ST δεν είναι κατ' ανάγκην η ίδια με την TS. Ας πάρουμε παραδείγματος χάρη ένα σημείο O πάνω σ' ένα επίπεδο και έστω S μια οριζόντια μετατόπιση που μεταφέρει το O στο O_1 και T μια περιστροφή γύρω από το O κατά 90°. Έτσι η ST μεταφέρει το O στο σημείο O_2 (Εικόνα 19), ενώ



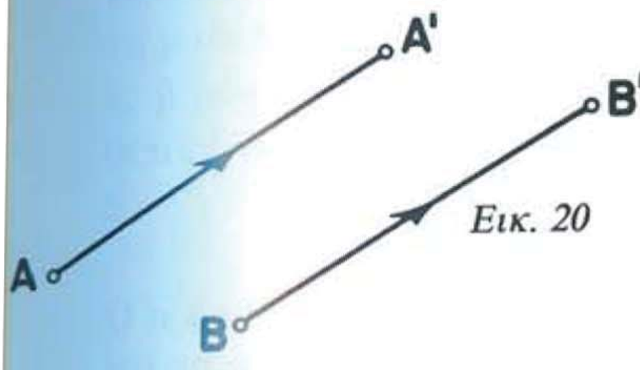
Εικ. 19

η TS το μεταφέρει στο O_1. Αν S είναι ένας μετασχηματισμός με αντίστροφο τον S^{-1}, τότε και ο S^{-1} είναι μετασχηματισμός και ο αντίστροφός του είναι ο S. Η σύνθεση δύο μετασχηματισμών ST είναι μετασχηματισμός με αντίστροφο το $(ST)^{-1}$ που είναι ίσο με $T^{-1}S^{-1}$ (μ' αυτή τη διάταξη!). Αυτός ο κανόνας, αν και ίσως όχι με τη μαθηματική του έκφραση, είναι σε όλους μας οικείος. Όταν ντύνεστε, δεν είναι επουσιώδες με ποια σειρά εκτελείτε τους χειρισμούς· και όπως όταν ντύνεστε αρχίζετε με το πουκάμισο και τελειώνετε με το πανωφόρι, όταν ξεντύνεστε τηρείτε την αντίθετη σειρά· πρώτα βγάζετε το πανωφόρι και τελευταίο το πουκάμισο.

Μίλησα ακόμη για ένα ιδιαίτερο είδος μετασχηματισμών του χώρου που οι γεωμέτρες το ονομάζουν ομοιότητα. Αλλά προτίμησα γι' αυτούς το όνομα αυτομορφισμοί, ορίζοντάς τους όπως ο Λάιμπνιτς ως τους μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτη τη δομή του χώρου. Για την ώρα είναι επουσιώδες από τι συνίσταται αυτή η δομή. Από τον ίδιο τον ορισμό είναι ξεκάθαρο ότι η ταυτοτική *I* είναι αυτομορφισμός και, αν είναι ο S, θα είναι και ο αντίστροφός του S^{-1}. Επιπλέον, η σύνθεση ST δύο αυτομορφισμών S, T είναι πάλι αυτομορφισμός. Αυτός είναι απλώς ένας άλλος τρόπος για να πούμε ότι (1) κάθε σχήμα είναι όμοιο με τον εαυτό του, (2) αν ένα σχήμα Σ' είναι όμοιο με το Σ, τότε και το Σ θα είναι όμοιο με το Σ', και (3) αν το Σ είναι όμοιο με το Σ' και το Σ' με το Σ", τότε το Σ θα είναι όμοιο με το Σ". Οι μαθηματικοί υιοθέτησαν τη λέξη *ομάδα* για να περιγράψουν αυτή την κατάσταση· άρα λένε ότι οι *αυτομορφισμοί σχηματίζουν μια ομάδα*. Κάθε σύνολο Γ μετασχηματισμών σχηματίζει μια ομάδα εφόσον ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες: (1) η ταυτοτική *I* ανήκει στο Γ· (2) αν S ανήκει στο Γ, τότε ανήκει και η αντίστροφή της S^{-1}· (3) αν S και T ανήκουν στο Γ, τότε ανήκει και η σύνθεση ST.

Ένας τρόπος για να περιγραφεί η δομή του χώρου, που προτιμήθηκε και από τον Νεύτωνα και από τον Helmholz, είναι μέσω της έννοιας της ισομετρίας. Ισομετρικά μέρη του χώρου V, V' είναι αυτά που μπορεί να είναι κατειλημμένα από το ίδιο στερεό σώμα σε δύο από τις θέσεις του. Αν μετακινήσετε το σώμα από τη μια θέση στην άλλη, το σωματίδιο του σώματος που καλύπτει το σημείο σ του V θα καλύπτει μετά κάποιο σημείο σ' του V', και έτσι το αποτέλεσμα της κίνησης είναι μια απεικόνιση σ→σ' του V πάνω στο V'. Μπορούμε να επεκτείνουμε το στερεό σώμα είτε στην πραγματικότητα είτε στη φαντασία μας, ώστε να περικλείει οποιοδήποτε αυθαίρετα δεδομένο σημείο σ του χώρου και, ως εκ τούτου, η ισομετρική απεικόνιση σ→σ' μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο το χώρο. Κάθε τέτοιος ισομετρικός μετασχηματισμός — τον ονομάζω έτσι γιατί προφανώς έχει ένα αντίστροφο σ→σ' — είναι μια ομοιοθεσία ή ένας αυτομορφισμός· μπορείτε εύκολα να πειστείτε ότι αυτό απορρέει από τις ίδιες τις έννοιες. Είναι επίσης προφανές ότι οι ισομετρικοί μετασχηματισμοί σχηματίζουν ομάδα, μια υποομάδα της ομάδας των αυτομορφισμών. Με περισσότερες λεπτομέρειες η κατάσταση έχει ως εξής: Ανάμεσα στις ομοιοθεσίες υπάρχουν αυτές που δεν αλλάζουν τις διαστάσεις του σώματος· θα τις ονομάσουμε ισομετρίες. Μια ισομετρία μπορεί να είναι είτε γνήσια, αν μεταφέρει έναν αριστερόστροφο κοχλία σε αριστερόστροφο κοχλία και έναν δεξιόστροφο σε δεξιόστροφο, είτε καταχρηστική ή αντανακλαστική, αν αλλάζει τον αριστερόστροφο κοχλία σε δεξιόστροφο και το αντίστροφο. Οι γνήσιες ισομετρίες είναι αυτοί οι μετασχηματισμοί που πριν από λίγο τους ονομάσαμε ισομετρικούς, οι οποίοι συνδέουν τις θέσεις των σημείων ενός στερεού σώματος πριν και μετά την κίνηση. Τώρα θα τους ονομάζουμε απλώς κινήσεις (με μη κινηματική γεωμετρική έννοια) και τις καταχρηστικές ισομετρίες τις ονομάζουμε καταπτρισμούς: π.χ. κατοπτρισμός ως προς ένα επίπεδο, διά του οποίου ένα σώμα μεταπηδά πάνω στο κατοπτρικό του είδωλο. Έτσι έχουμε αυτή τη γραμμική διάταξη: ομοιοθεσίες → ισομετρίες = ομοιοθεσίες χωρίς αλλαγή της κλίμακας → κινήσεις = γνήσιες ισομετρίες. Οι ισομετρίες σχηματίζουν μια υποομάδα των ομοιοθεσιών, οι κινήσεις σχηματίζουν μια υποομάδα των ισομετριών, τάξης 2. Η τελευταία προσθήκη σημαίνει ότι, αν B είναι μια οποιαδήποτε δεδομένη καταχρηστική ισομετρία, λαμβάνουμε όλες τις καταχρηστικές ισομετρίες με τη μορφή BS, συνθέτοντας τη B με όλες τις δυνατές γνήσιες ισομετρίες S. Ως εκ τούτου, οι γνήσιες ισομετρίες σχηματίζουν το μισό και οι καταχρηστικές το άλλο μισό της ομάδας όλων των ισομετριών. Αλλά μόνο το πρώτο μισό είναι ομάδα· διότι η σύνθεση AB δύο καταχρηστικών ισομετριών A, B είναι γνήσια ισομετρία (και όχι καταχρηστική).

Μια ισομετρία που αφήνει το σημείο O σταθερό ονομάζεται *περιστροφή* γύρω από το O· έτσι υπάρχουν γνήσιες και καταχρηστικές περιστροφές. Οι περιστροφές γύρω από κάποιο κέντρο O σχηματίζουν ομάδα. Η πιο απλή περίπτωση ισομετρίας είναι *οι μεταφορές*. Μια μεταφορά μπορεί να να παρασταθεί με ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$· διότι, αν μια μεταφορά μεταφέρει ένα σημείο A στο A′ και το σημείο B στο B′ (Εικόνα 20), τότε το BB′ έχει την ίδια διεύθυνση και μήκος όπως



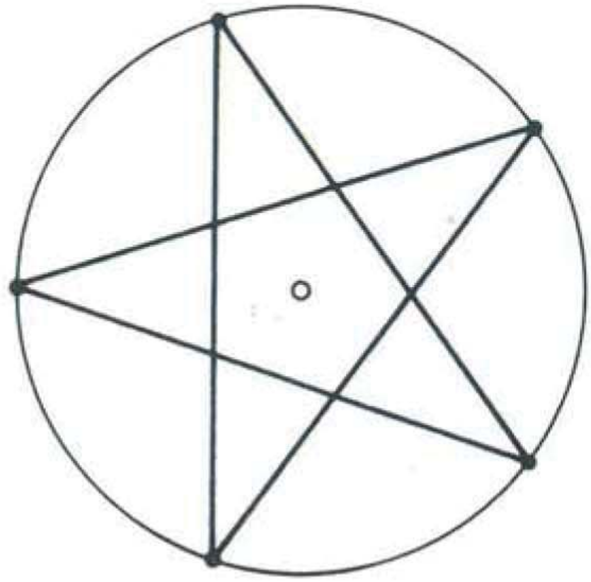
Εικ. 20

το AA′ — με άλλα λόγια, το διάνυσμα $BB' = AA'$[1]. Οι μεταφορές σχηματίζουν μια ομάδα· πράγματι η διαδοχή δύο μεταφορών $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ έχει αποτέλεσμα τη μεταφορά $\overrightarrow{AC}$.

Τι σχέση έχουν όλα αυτά με τη συμμετρία; Εξασφαλίζουν την κατάλληλη μαθηματική γλώσσα για να την ορίσουμε. Δεδομένου ενός σχήματος F του χώρου, εκείνοι οι

1. Ενώ ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει μόνο μήκος, ένα διάνυσμα έχει μήκος και διεύθυνση. Ένα διάνυσμα είναι στην πραγματικότητα το ίδιο πράγμα όπως μια μεταφορά, μολονότι χρησιμοποιούμε διαφορετικές φρασεολογίες για τα διανύσματα και τις μεταφορές. Αντί να μιλάμε για τη μεταφορά α που μεταφέρει το σημείο A στο A′, μιλάμε για το διάνυσμα $\alpha = \overrightarrow{AA'}$, και, αντί για τη φράση: η μεταφορά α μεταφέρει το A στο A′, λέμε ότι το A′ είναι το άκρο του διανύσματος α με αρχή το A. Το ίδιο διάνυσμα με αρχή το B περατούται στο B′, αν η μεταφορά από το A στο A′ μεταφέρει το B στο B′.

αυτομορφισμοί του χώρου που αφήνουν το F αναλλοίωτο σχηματίζουν μια ομάδα Γ, και αυτή η ομάδα περιγράφει ακριβώς τη συμμετρία που διαθέτει το F. Ο ίδιος ο χώρος διαθέτει πλήρη συμμετρία που αντιστοιχεί στην ομάδα όλων των αυτομορφισμών, όλων των ομοιοθεσιών. Η συμμετρία



Εικ. 21

κάθε σχήματος στο χώρο περιγράφεται από μια υποομάδα της προηγούμενης ομάδας. Ας πάρουμε π.χ. το φημισμένο πεντάγραμμα με το οποίο ο Δόκτωρ Φάουστ καταράστηκε τον Μεφιστοφελή, το διάβολο. Μεταφέρεται επί του εαυτού του με πέντε κατάλληλες περιστροφές ως προς το κέντρο του κατά πολλαπλάσιο της γωνίας 360° = 5 (συμπεριλαμβανομένης της ταυτοτικής) και επίσης με πέντε κατοπτρισμούς στις ευθείες που ενώνουν το Ο με τις πέντε κορυφές. Αυτές οι δέκα διεργασίες σχηματίζουν μια ομάδα, και αυτή η ομάδα μάς υποδηλώνει το είδος της συμμετρίας που διαθέτει το πεντάγραμμα. Ως εκ τούτου, η φυσική γενίκευση που οδηγεί από την αμφίπλευρη συμμετρία στη συμμετρία υπ' αυτή την ευρύτερη γεωμετρική έννοια συνίσταται στην αντικατάσταση του κατοπτρισμού σε ένα επίπεδο από οποιαδήποτε ομάδα αυτομορφισμών. Ο κύκλος με κέντρο Ο στο επίπεδο και η σφαίρα στο χώρο γύρω από το Ο έχουν τη συμμετρία που καθορίζεται από την ομάδα όλων των επίπεδων περιστροφών ή των περιστροφών του χώρου, αντίστοιχα.

Αν ένα σχήμα F δεν επεκτείνεται στο άπειρο, τότε ένας αυτομορφισμός που αφήνει το σχήμα αναλλοίωτο πρέπει να διατηρεί την κλίμακα και, ως εκ τούτου, είναι ισομετρία, εκτός αν το σχήμα αποτελείται από ένα μόνο σημείο. Νά μια απλή απόδειξη: Έστω ότι έχουμε έναν αυτομορφισμό που αφήνει το F αναλλοίωτο, αλλά αλλάζει την κλίμακα· τότε, είτε αυτός ο αυτομορφισμός είτε ο αντίστροφός του θα αύξανε (και δεν θα σμίκρυνε) όλες τις γραμμικές διαστάσεις κατά κάποια αναλογία λ : 1, όπου λ ένας αριθμός μεγαλύτερος από τη μονάδα. Ονομάζουμε αυτό τον αυτομορφισμό S, και έστω α, β δύο διαφορετικά σημεία του σχήματος F. Τότε έχουν θετική απόσταση d. Επαναλαμβάνουμε το μετασχηματισμό S,

$$S = S^1,\ SS = S^2,\ SSS = S^3,\ \ldots .$$

O n φορές επαναλαμβανόμενος μετασχηματισμός S^n μεταφέρει τα α και β σε δύο σημεία α_n, β_n του σχήματός μας, που η απόστασή τους είναι $d.a^n$. Αυξανομένου του εκθέτη, αυτή η n απόσταση τείνει στο άπειρο. Αλλά, αν το σχήμα μας F είναι φραγμένο, υπάρχει ένας αριθμός c τέτοιος ώστε δύο σημεία τού F να μην έχουν απόσταση μεγαλύτερη από c. Ως εκ τούτου, δημιουργείται μια αντίφαση, καθώς το n γίνεται τόσο ώστε $d.a^n > c$. Το επιχείρημα δείχνει κάτι άλλο: κάθε πεπερασμένη ομάδα αυτομορφισμών αποτελείται αποκλειστικά από ισομετρίες. Γιατί, αν περιέχει ένα μετασχηματισμό S που μεγεθύνει τις γραμμικές αποστάσεις κατά το λόγο λ : 1, $\lambda > 1$, τότε οι άπειρες επαναλήψεις S^1, S^2, S^3,... που περιέχονται στην ομάδα θα ήταν διαφορετικές ανά δύο γιατί μεγεθύνουν σε διαφορετικές κλίμακες λ^1, λ^2, λ^3,... . Για τέτοιους λόγους θα θεωρούμε αποκλειστικά ομάδες ισομετριών — ακόμη κι αν έχουμε να κάνουμε με πραγματικά ή εν δυνάμει άπειρα σχήματα όπως οι διακοσμητικές ταινίες και τα παρόμοια.

Μετά απ' αυτές τις γενικές μαθηματικές σκέψεις, ας ασχοληθούμε τώρα με μερικές ειδικές ομάδες συμμετρίας οι οποίες είναι σημαντικές στην τέχνη ή στη φύση. Η διεργασία που καθορίζει την αμφίπλευρη συμμετρία, η κατοπτρική ανάκλαση, είναι ουσιαστικά διεργασία σε μία διάσταση. Μια ευθεία γραμμή μπορεί να κατοπτριστεί σε καθένα από τα σημεία της Ο· αυτός ο κατοπτρισμός μεταφέρει ένα σημείο Σ πάνω στο σημείο Σ' που απέχει το ίδιο από το Ο, αλλά κείται από την άλλη πλευρά. Τέτοιοι κατοπτρισμοί είναι οι μόνες καταχρηστικές ισομετρίες της μονοδιάστατης ευθείας, ενώ, αντίθετα, οι κανονικές ισομετρίες είναι οι μεταφορές. Ένας κατοπτρισμός από το σημείο Ο μιας ευθείας ακολουθούμενος από τη μεταφορά ΟΑ ισοδυναμεί με κατοπτρισμό από εκείνο το σημείο A_1 που διαιρεί στη μέση την απόσταση ΟΑ. Μια εικόνα που παραμένει αναλλοίωτη από μια μεταφορά t εμφανίζει αυτό το οποίο στην τέχνη της διακόσμησης ονομάζεται «επ' άπειρον σχέση», δηλαδή επανάληψη με έναν κανονικό ρυθμό μέσα στο χώρο. Ένα σχέδιο που παραμένει αναλλοίωτο από τη μεταφορά t παραμένει επίσης αναλλοίωτο από τις επαναλήψεις του $t^1, t^2, t^3,\ldots$ και επιπλέον από την ταυτότητα $t^0 = I$, και από την αντιστροφή t^{-1} της t και τις επαναλήψεις της $t^{-1}, t^{-2}, t^{-3},\ldots$. Αν η t μετατοπίζει τη γραμμή κατά την ποσότητα α, τότε ο t^n τη μετατοπίζει κατά την ποσότητα

$$n.a \; (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

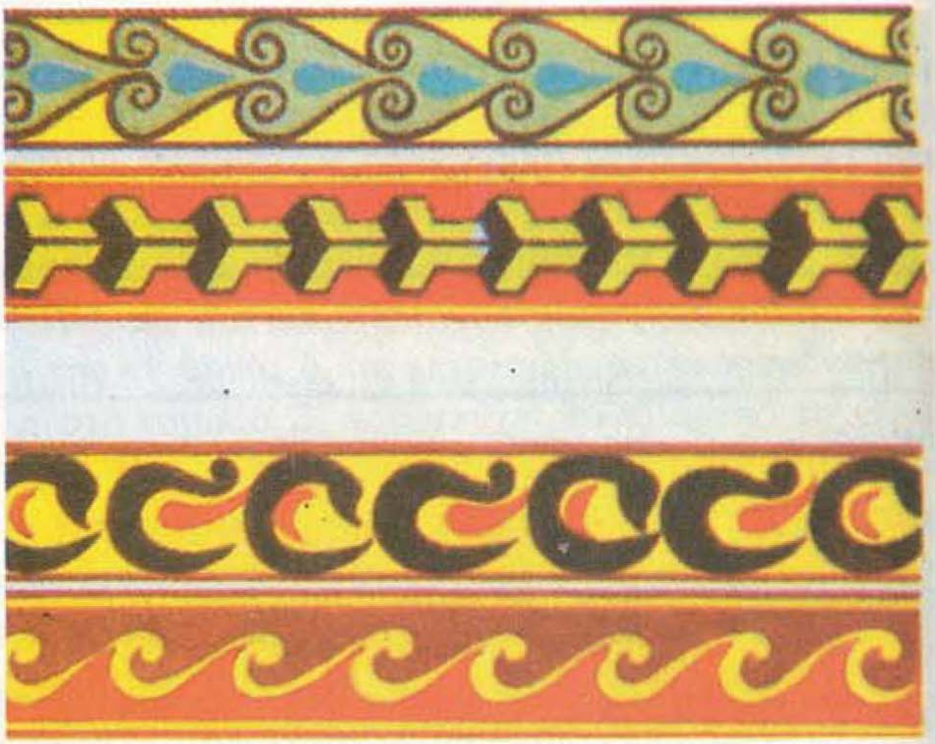
Ως εκ τούτου, αν χαρακτηρίσουμε μια μεταφορά t από τη μετατόπιση α, τότε η επανάληψη ή η δύναμη t^n χαρακτηρίζεται από το πολλαπλάσιο n.a. Όλες οι μεταφορές που μετακινούν επί του εαυτού του ένα δεδομένο σχέδιο «επ' άπειρον σχέσης» επί ευθείας γραμμής είναι υπ' αυτή την έννοια πολλαπλάσια n.a μιας βασικής μεταφοράς α. Αυτή η ρυθμική μπορεί να συνδυαστεί με ανακλαστική συμμετρία. Εφόσον γίνεται αυτό, τα κέντρα των κατοπτρισμών ακολουθούν το ένα το άλλο σε απόσταση ½a. Μόνο αυτοί οι δύο τύποι συμμετρίας, όπως φαίνεται στην Εικόνα 22, είναι δυνατοί για ένα μονοδιάστατο σχέδιο ή «διακοσμητικό». (Τα Χ σημειώνουν τα κέντρα κατοπτρισμού).

Εικ. 22

Βέβαια, οι πραγματικές διακοσμητικές ταινίες δεν είναι αυστηρά μονοδιάστατες, αλλά η συμμετρία τους, απ' ό,τι έχουμε περιγράψει μέχρι τώρα, επωφελείται μόνο από την κατά μήκος διεύθυνσή τους. Νά δύο απλά παραδείγματα από την αρχαία ελληνική τέχνη. Το πρώτο (Εικόνα 23) που απει-

Εικ. 23

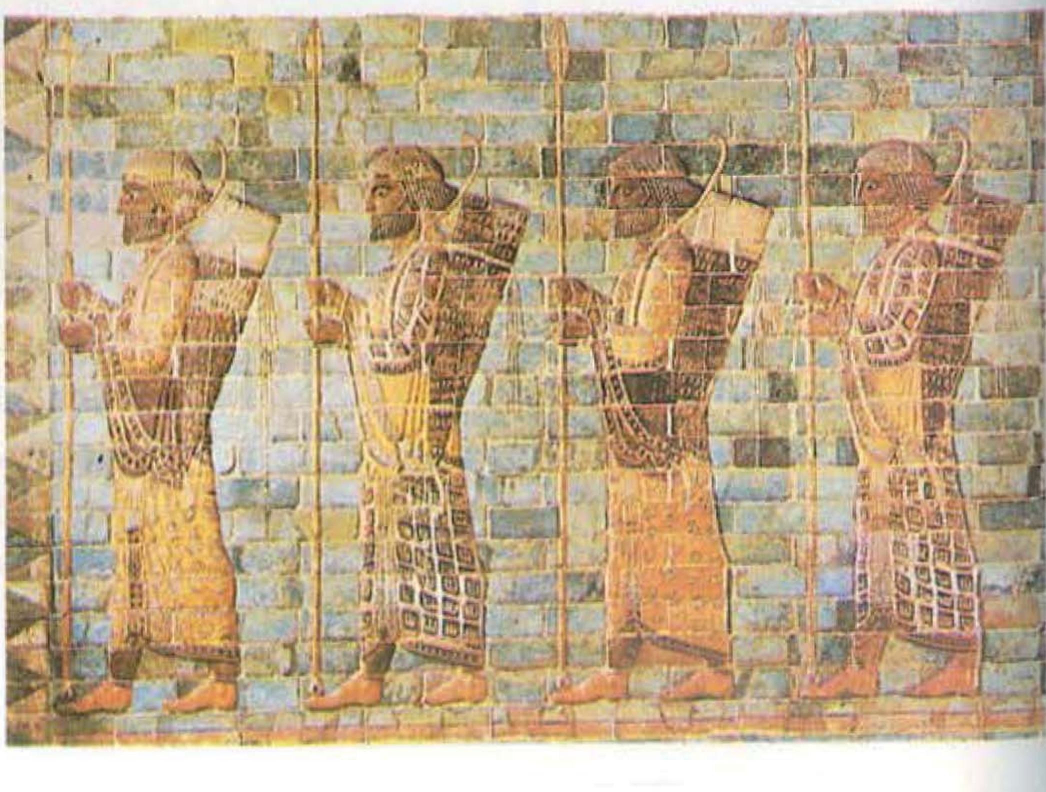
κονίζει ένα πολύ συχνό κοσμητικό στοιχείο, ένα ανθέμιο, είναι του τύπου I (μεταφορά + κατοπτρισμός). Το δεύτερο (Εικόνα 24) είναι χωρίς κατοπτρισμό (τύπος II). Το διάζωμα με τους Πέρσες τοξότες από το Παλάτι του Δαρείου στα Σούσα (Εικόνα 25) είναι απλή μεταφορά· αλλά πρέπει να παρατηρήσετε ότι η βασική μεταφορά καλύπτει διπλάσια απόσταση από την απόσταση από άντρα σε άντρα, γιατί οι ενδυμασίες των τοξοτών εναλλάσσονται. Για μια φορά ακόμη,



Εικ. 24

θα υποδείξω το ψηφιδωτό της Αναλήψεως του Κυρίου στον καθεδρικό ναό του Monreale (Εικόνα 10), αλλά αυτή τη φορά εφιστώντας την προσοχή σας στη διακοσμητική ταινία που

Εικ. 25



το πλαισιώνει. Το πιο πλατύ μέρος της, φτιαγμένο με ασυνήθιστη τεχνική, που αργότερα συνεχίστηκε από τους Cosmati,* εμφανίζει τη μεταφορική συμμετρία μόνο όσον αφορά την επανάληψη του περιγράμματος του βασικού του θέματος —κάτι σαν δέντρο—, ενώ κάθε τέτοιο περίγραμμα καλύπτεται από ένα διαφορετικό δισδιάστατο ψηφιδωτό μεγάλης συμμετρίας. Το παλάτι των Δόγηδων στη Βενετία (Εικόνα 26) αντιπροσωπεύει τη μεταφορική συμμετρία στην αρχιτεκτονική. Θα μπορούσαν να προστεθούν αναρίθμητα παραδείγματα.

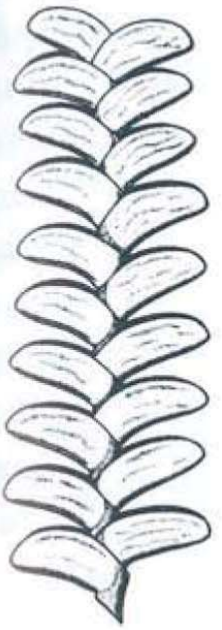
Εικ. 26

* Cosmati: Όνομα οικογένειας μαρμαρογλύφων της Ρώμης του 12ου και 13ου αι., που διακόσμησαν με μωσαϊκά και με πολύχρωμα ψηφιδωτά σε γεωμετρικά μοτίβα λιθοστρώσεις εκκλησιών, και εκκλησιαστικά αντικείμενα: θυσιαστήρια, θόλους, άμβωνες, θρόνους. (Σ.τ.μ.).

'Οπως είπα πριν, οι διακοσμητικές ταινίες στην πραγματικότητα είναι δισδιάστατες λωρίδες γύρω από μια κεντρική ευθεία και έτσι έχουν μια δεύτερη πλάγια διάσταση. Σαν τέτοιες μπορεί να έχουν και άλλες συμμετρίες. Το σχέδιο μπορεί να μεταφέρεται στον εαυτό του με κατοπτρισμό ως προς την κεντρική ευθεία l· ας τον ονομάσουμε κατά μήκος κατοπτρισμό για να τον διακρίνουμε από τον άλλο που γίνεται ως προς ευθεία κάθετη στην l. Ή το σχέδιο μπορεί να μεταφέρεται με κατά μήκος κατοπτρισμό σε συνδυασμό με μεταφορά κατά ½α (κατά μήκος κατοπτρική διολίσθηση). 'Ενα συχνό κεντρικό θέμα στις διακοσμητικές ταινίες είναι σχοινιά, χορδές ή πλεξούδες κάποιου είδους, το σχέδιο των οποίων δίνει την εντύπωση ότι κάθε κλώνος διασταυρώνεται με τον άλλο στο χώρο (και έτσι ένα μέρος του παραμένει αόρατο). Αν αυτή η ερμηνεία γίνει αποδεκτή, γίνονται δυνατές κι άλλες διεργασίες· π.χ. κατοπτρισμός ως προς το επίπεδο της διακόσμησης θα άλλαζε τον κλώνο που είναι κατά τι από πάνω, σε κλώνο από κάτω. 'Ολα αυτά μπορούν να αναλυθούν τέλεια με τη βοήθεια της θεωρίας ομάδων, όπως γίνεται, για παράδειγμα, σε ένα κεφάλαιο του βιβλίου του Andreas Speiser *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* που αναφέρθηκε στην Εισαγωγή.

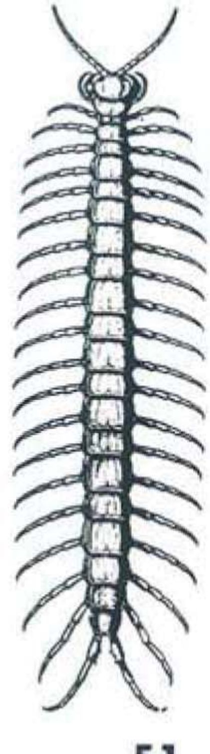
Στον οργανικό κόσμο η μεταφορική συμμετρία, που οι ζωολόγοι την ονομάζουν μεταμερισμό, σπάνια είναι τέλεια όσο η αμφίπλευρη συμμετρία. Ο βλαστός του σφενδάμνου και ο βλαστός του *Angraecum distichum* (Εικόνα 27) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παραδείγματα[2]. Στη δεύτερη περίπτωση, η μεταφορά συνοδεύεται και από κατά μήκος κατοπτρική διολίσθηση. Βέβαια, το σχέδιο δεν συνεχίζει

2. Αυτή και η επόμενη εικόνα αντλούνται από το *Studium Generale*, σελ. 249 και 241 (άρθρο του W. Troll, «Symmetrie-betrachtung in der Biology»).



Εικ. 27

Εικ. 28



51

επ᾽ άπειρον (ούτε και η διακοσμητική ταινία), αλλά μπορούμε να πούμε ότι είναι εν δυνάμει άπειρη τουλάχιστον κατά μία διεύθυνση, καθώς στην πορεία του χρόνου δημιουργούνται συνεχώς νέα τμήματα που χωρίζονται μεταξύ τους από νέα «μάτια». Ο Γκαίτε είπε για τις ουρές των σπονδυλωτών ότι υπαινίσσονται το εν δυνάμει άπειρο της οργανικής ύπαρξης. Το κεντρικό μέρος του ζώου που δείχνει η Εικόνα 28, μια σαρανταποδαρούσα, διαθέτει μια αρκετά κανονική μεταφορική συμμετρία, συνδυασμένη με αμφίπλευρη, της οποίας οι βασικές διεργασίες είναι μεταφορά κατά τμήμα και κατά μήκος κατοπτρισμός.

Στον μονοδιάστατο *χρόνο*, η επανάληψη σε ίσα διαστήματα είναι η μουσική αρχή του *ρυθμού*. Καθώς ένα βλαστάρι μεγαλώνει, μετατρέπει, μπορούμε να πούμε, ένα βραδύ τέμπο σ' ένα ρυθμό του χώρου. Η ανάκλαση, αντίστροφη στο χρόνο, παίζει πολύ λιγότερο σημαντικό ρόλο στη μουσική απ' ό,τι ο ρυθμός. Ο χαρακτήρας μιας μελωδίας αλλάζει σε σημαντικό βαθμό αν αυτή παιχτεί ανάποδα, κι εγώ, που είμαι κακός μουσικός, το βρίσκω δύσκολο να αναγνωρίσω την ανάκλαση όταν χρησιμοποιείται στην κατασκευή μιας φούγκας· σίγουρα δεν έχει το αυθόρμητο αποτέλεσμα του ρυθμού. Όλοι οι μουσικοί συμφωνούν ότι κάτω από το συγκινησιακό στοιχείο της μουσικής βρίσκεται ένα ισχυρό τυπικό στοιχείο. Ίσως αυτό επιδέχεται κάποια μαθηματική πραγμάτευση —κάτι που έγινε επιτυχημένα με την τέχνη της διακόσμησης. Σε μια τέτοια περίπτωση, πιθανώς δεν έχουμε ανακαλύψει ακόμη τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία. Αυτό δεν θα μας ξάφνιαζε και τόσο. Άλλωστε οι Αιγύπτιοι διέπρεψαν στην τέχνη της διακόσμησης τέσσερις χιλιάδες χρόνια πριν οι μαθηματικοί ανακαλύψουν στη θεωρία ομάδων το κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη των διακοσμήσεων και για την παραγωγή των δυνατών τάξεων συμμετρίας τους. Ο Andreas Speiser, ο οποίος ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για τη θεωρητική εφαρμογή της θεωρίας ομάδων στη διακόσμηση, προσπάθησε να εφαρμόσει συνδυαστικές αρχές μαθηματικής φύσης και στα τυπικά προβλήματα της μουσικής. Υπάρχει ένα κεφάλαιο μ' αυτό το θέμα στο βιβλίο του *Die mathematishe Denkweise* (Ζυρίχη, 1932). Σαν παράδειγμα, αναλύει τη σονάτα για πιάνο του Μπετόβεν έργο 28, ποιμενική, και επισημαίνει επίσης τις έρευνες του Alfred Lorenz πάνω στην τυπική δομή των κυριότερων έργων του Ρίχαρντ Βάγκνερ. Στενή σχέση μ' αυτό έχουν και τα μέτρα στην ποίηση, και εδώ, υποστηρίζει ο Speiser, η επιστήμη έχει διεισδύσει πολύ βαθύτερα. Μια κοινή αρχή στη μουσική και στην προσωδία φαίνεται να είναι το σχήμα α α b που συχνά αποκαλείται μέτρο : ένα θέμα α επαναλαμβάνεται και στη συνέχεια ακολουθείται από την «κατάληξη» b· η στροφή, η αντιστροφή και η επωδός στα αρχαία ελληνικά λυρικά άσματα. Αλλά τέτοια σχήματα δύσκολα μπαίνουν κάτω από την επικεφαλίδα της συμμετρίας[3].

Επιστρέφουμε στη συμμετρία του χώρου. Παίρνουμε μια διακοσμητική ταινία, όπου το ξεχωριστό τμήμα που επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά έχει μήκος α, και την περιστρέφουμε σε κύλινδρο, η περιφέρεια του οποίου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του α, για παράδειγμα 25α. Λαμβάνουμε έτσι ένα σχέδιο που μεταφέρεται πάνω στον εαυτό του μέσω περιστροφής ως προς τον άξονα του κυλίνδρου κατά γωνία $\theta = 360^\circ/25$ και τις επαναλήψεις της. Η 25η επανάληψη είναι η περιστροφή κατά 360° ή η ταυτότητα με το αρχικό. Σχηματίζουμε έτσι μια πεπερασμένη ομάδα περιστροφών τάξης 25, με άλλα λόγια μια ομάδα αποτελούμενη από 25 διεργασίες. Ο κύλινδρος μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε επιφάνεια κυλινδρικής συμμετρίας, συγκεκριμένα από μία που μεταφέρεται στον εαυτό της από όλες τις περιστροφές ως προς κάποιον άξονα, π.χ. ένα αγγείο. Η Εικόνα 29 δείχνει ένα αττικό αγγείο της γεωμετρικής εποχής όπου φαίνεται ένας αριθμός απλών κοσμητικών αυτού του τύπου. Η αρχή της συμμετρίας είναι η ίδια, μολονότι ο ρυθμός δεν είναι πια «γεωμετρικός», στο ροδιακό αγγείο της Εικόνας 30 της ιωνικής σχολής του 7ου π.Χ. αιώνα. Άλλα τέτοια παραδείγματα αποτελούν τα κιονόκρανα όπως αυτά από την αρ-

3. Ο αναγνώστης πρέπει να συγκρίνει τι έχει να πει ο G.D. Birkhoff για τα μαθηματικά της ποίησης και της μουσικής στις δύο δημοσιεύσεις που αναφέρονται στη διάλεξη Ι, σημείωση 1.

Εικ. 29

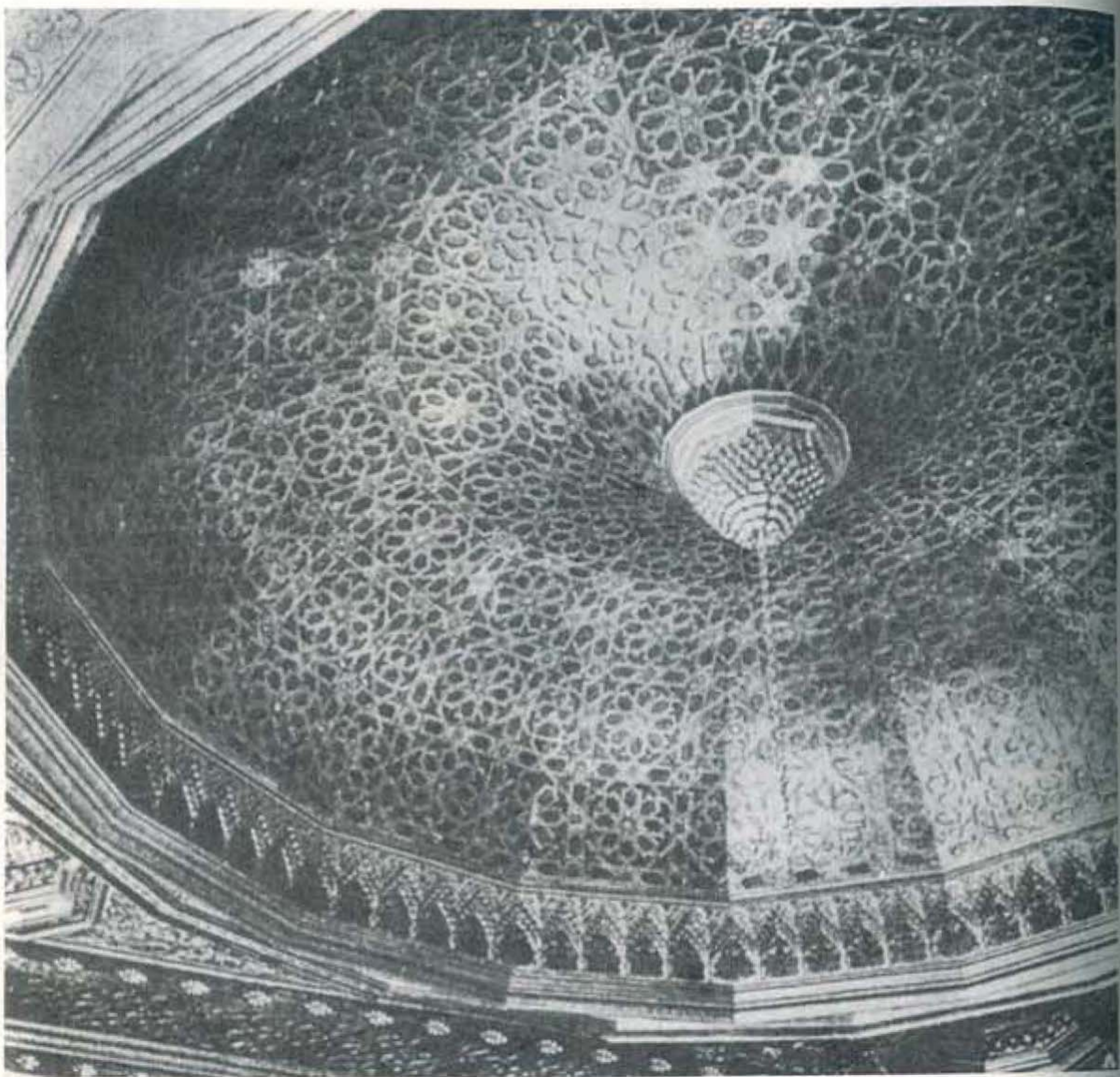
Εικ. 30

χαία Αίγυπτο (Εικόνα 31). Κάθε πεπερασμένη ομάδα γνήσιων περιστροφών ως προς ένα σημείο Ο του επιπέδου, ή ως προς έναν δεδομένο άξονα στο χώρο, περιέχει μια πρωταρχική περιστροφή t η γωνία της οποίας είναι ίση με το υποπολλαπλάσιο $369°/n$ μιας πλήρους περιστροφής $360°$, και αποτελείται από τις επαναλήψεις της $t^1, t^2, ..., t^{n-1}, t^n =$ ταυτότητα. Η τάξη n χαρακτηρίζει πλήρως αυτή την ομάδα. Αυτό προκύπτει από το ανάλογο γεγονός ότι κάθε ομάδα μεταφορών μιας γραμμής, εφόσον δεν περιλαμβάνει διεργασίες αυθαίρετα κοντά στην ταυτοτική εκτός από την ίδια την ταυτοτική αποτελείται από τις επαναλήψεις ν.α μιας μόνης μεταφοράς α ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, ...$).

Ο ξύλινος θόλος στο Bardo της Τύνιδας, που ήταν το

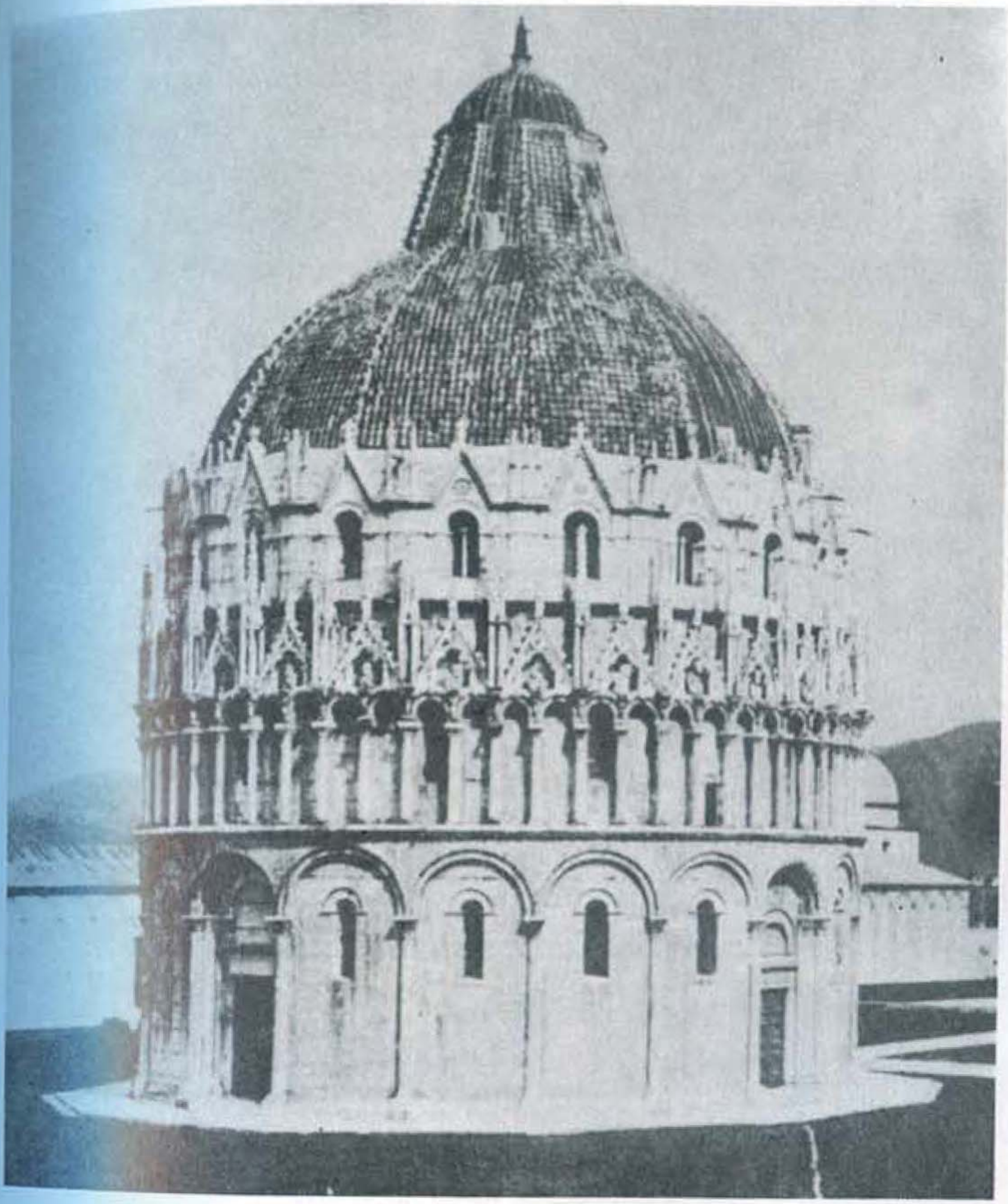
Εικ. 31

παλάτι των Μπέηδων της Τύνιδας (Εικόνα 32), μπορεί να χρησιμεύσει σαν ένα παράδειγμα εσωτερικής αρχιτεκτονικής. Η Εικόνα 33, αμέσως μετά, σας μεταφέρει στην Πίζα· το Βαπτιστήριο με το μικροσκοπικό, σε σχέση με το οικοδόμημα, άγαλμα του Ιωάννη Βαπτιστή στην κορυφή του είναι ένα κεντρικό κτίριο που στο εξωτερικό του διακρίνετε έξι οριζόντια στρώματα, το καθένα με περιστροφική συμμετρία διαφορετικής τάξης n. Θα μπορούσαμε να κάνουμε την εικόνα ακόμη πιο εντυπωσιακή προσθέτοντας και τον Κεκλιμένο Πύργο με τους έξι εξώστες των αψίδων του, που έχουν όλοι περιστροφική συμμετρία της ίδιας υψηλής τάξης, και το ίδιο το κεντρικό οικοδόμημα, το εξωτερικό κλίτος του οποίου έχει, στις κολόνες και τα διαζώματά του, σχέδια γραμμικής μεταφορικής συμμετρίας, ενώ ο μικρός τρούλος της κορυφής περιβάλλεται από κιονοστοιχία υψηλής περιστροφικής συμμετρίας.



Εικ. 32

Ένα τελείως διαφορετικό πνεύμα διακρίνουμε με την πρώτη ματιά, όπως φαίνεται από το πίσω μέρος του «χορού», στον ρομανικό καθεδρικό ναό του Mainz της Γερμανίας (Εικόνα 34). Εκτός από την επανάληψη των στρογγυλών τόξων στα διαζώματα, έχουμε οκταγωνική κεντρική συμμετρία (n = 8, μια χαμηλή τιμή συγκρινόμενη μ' αυτές που περιέχονται στα διάφορα στρώματα του Βαπτιστηρίου της Πίζας) στη μικρή ροζέτα και στους τρεις πύργους, ενώ αμφίπλευρη συμμετρία κυριαρχεί στο οικοδόμημα σαν σύνολο καθώς και σχεδόν σε κάθε λεπτομέρεια.



Εικ. 33

Η κυκλική συμμετρία εμφανίζεται στην απλούστερη μορφή αν η επιφάνεια της κυλινδρικής συμμετρίας είναι ένα επίπεδο κάθετο προς τον άξονα. Μπορούμε έτσι να περιοριστούμε στο επίπεδο με κάποιο κέντρο Ο. Έξοχα παραδείγματα τέτοιας κεντρο-επίπεδης συμμετρίας αποτελούν οι ροζέ-

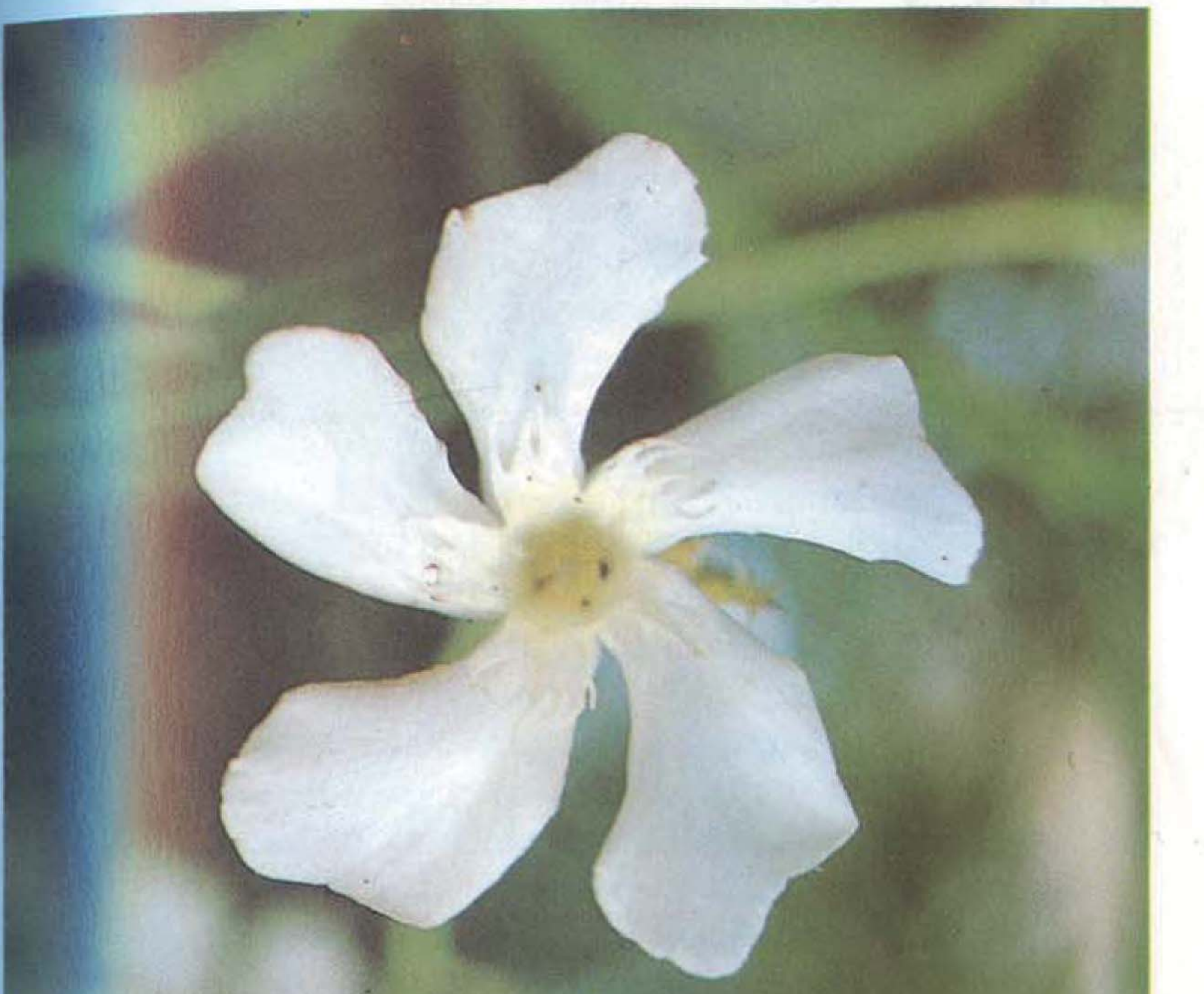
Εικ. 34

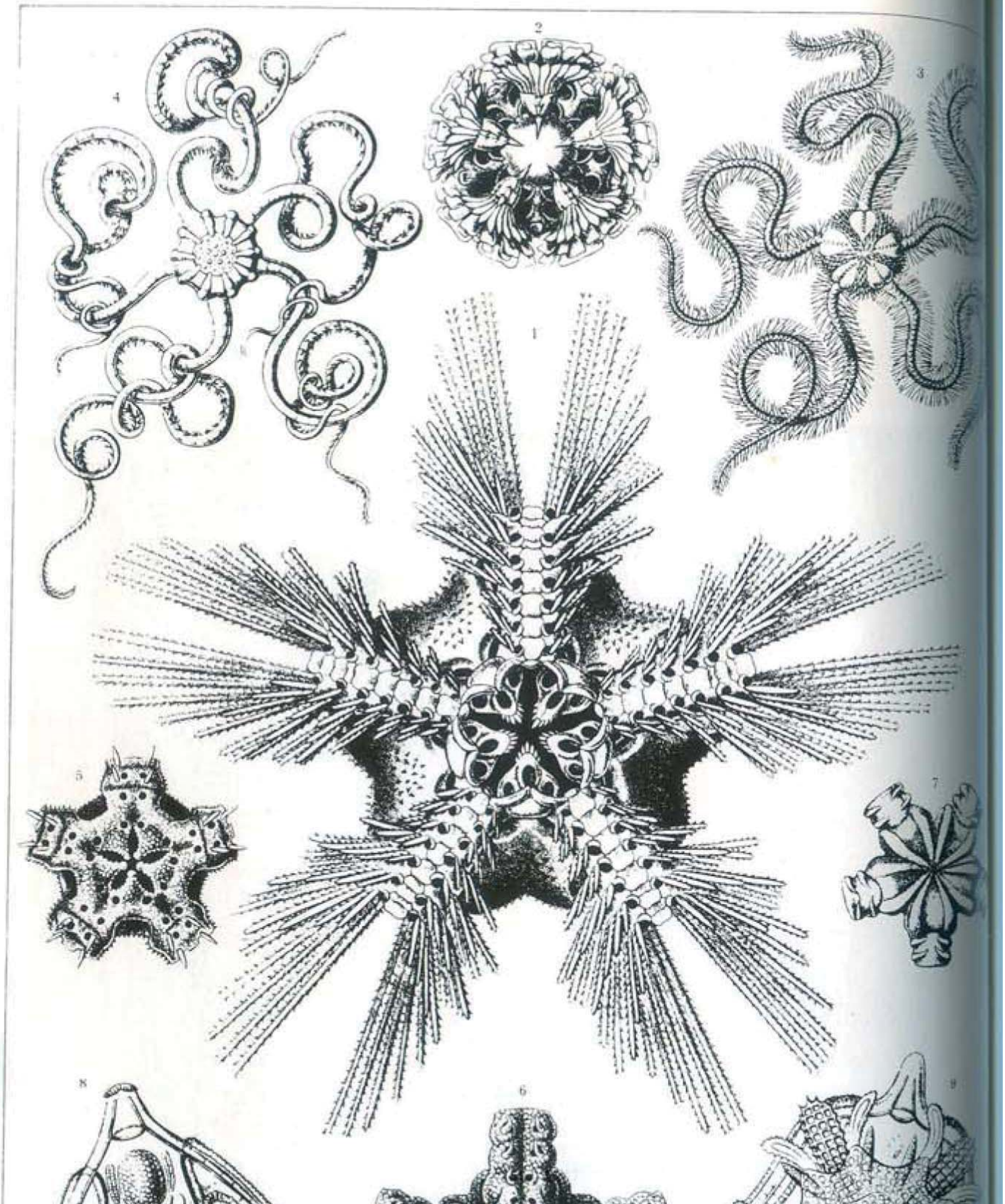
τες* (ρόδακες) των γοτθικών καθεδρικών ναών με τους έντονα χρωματισμένους υαλοπίνακές τους. Η πιο πλούσια που θυμάμαι είναι η ροζέτα του St. Pierre στην πόλη Troyes, στη Γαλλία, που είναι βασισμένη εξ ολοκλήρου στον αριθμό 3.

* Κυκλικό διακοσμητικό παράθυρο. (Σ.τ.μ.).

Τα λουλούδια, τα πιο ευγενή παιδιά της φύσης, είναι επίσης σπουδαία για τα χρώματά τους και για την κυκλική τους συμμετρία. Η Εικόνα 35 δείχνει μια ίριδα (κρίνο) με τον τριπλό πόλο της. Η συμμετρία 5η τάξης είναι η πιο συχνή ανάμεσα στα λουλούδια. Μια σελίδα σαν αυτή που ακολουθεί (Εικόνα 36) από το *Kunstformen der Natur* [Τεχνοτροπία της φύσης] του Ernst Haeckel φαίνεται να υποδεικνύ-

Εικ. 35

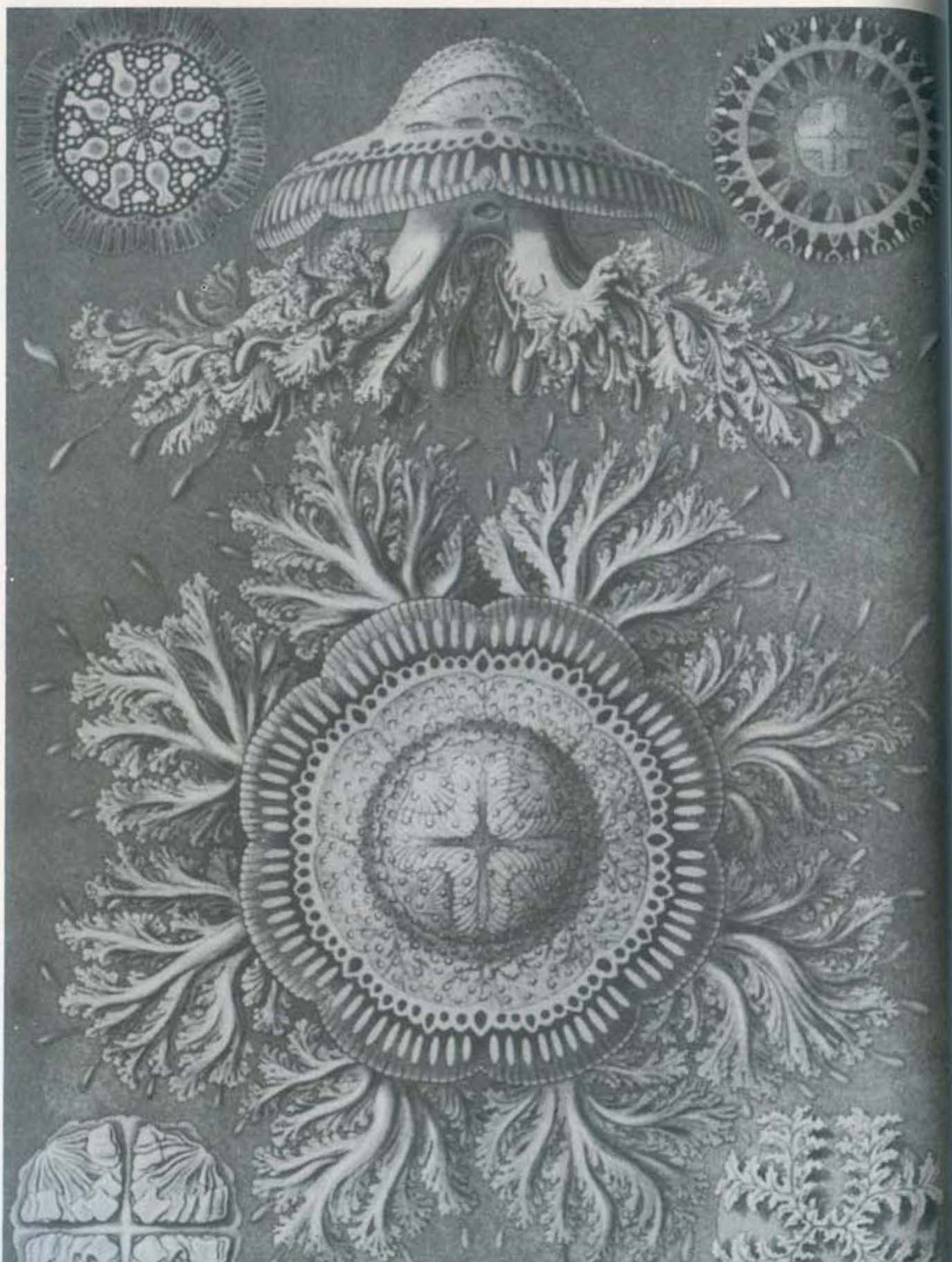




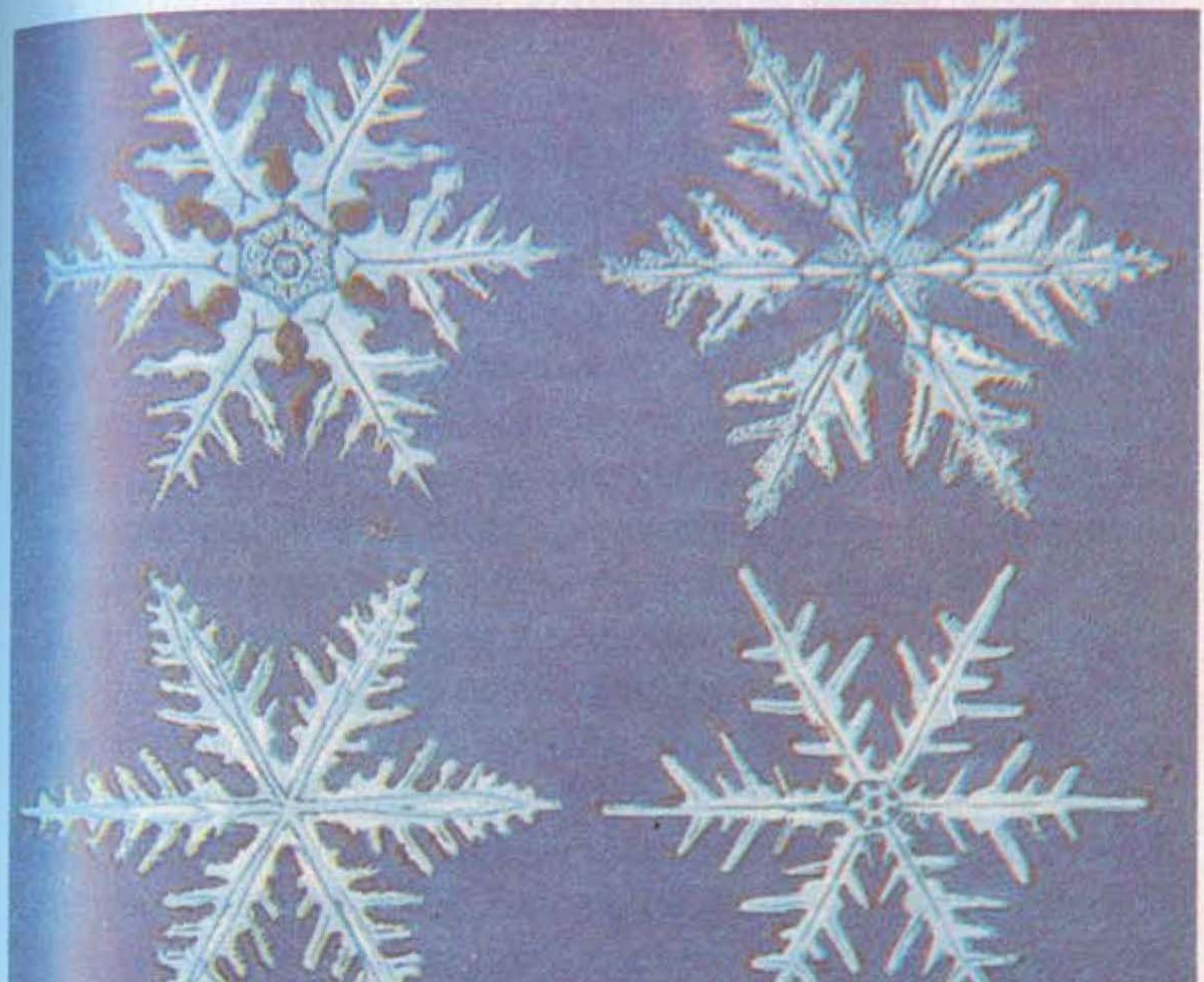
Εικ. 36

ει ότι τέτοια συμμετρία παρατηρείται επίσης συχνά και μεταξύ των κατώτερων ζωικών οργανισμών. Αλλά οι βιολόγοι με προειδοποιούν ότι η εξωτερική εμφάνιση αυτών των εχινόδερμων της τάξης των *οφιοειδών* είναι σε κάποιο βαθμό απατηλή· οι προνύμφες τους είναι οργανωμένες σύμφωνα με την αρχή της αμφίπλευρης συμμετρίας. Τέτοιου είδους αντιρρήσεις δεν συνοδεύουν την Εικόνα 37, από την ίδια πηγή, μια *Δισκομέδουσα* οκταγωνικής συμμετρίας. Διότι τα κοιλεντερωτά κατέχουν μια θέση στη φυλογενετική εξέλιξη όπου η κυκλική συμμετρία δεν έχει υποχωρήσει υπέρ της αμφίπλευρης. Η εκπληκτική εργασία του Haeckel, στην οποία το ενδιαφέρον του για τις συγκεκριμένες μορφές οργανισμών εκφράζεται με αναρίθμητα σχέδια εκτελεσμένα με την παραμικρή λεπτομέρεια, είναι ένας αληθινός κώδικας συμμετρίας της φύσης. Εξίσου αποκαλυπτικές για τον Haeckel ως βιολόγο είναι οι χιλιάδες εικόνες στο έργο του *Challenger Monograph* [Μονογραφία Challenger], στο οποίο περιγράφει για πρώτη φορά 3.508 νέα είδη της τάξης ακτίνια που ανακάλυψε ο ίδιος κατά την αποστολή του Challenger, το 1887. Δεν θα έπρεπε να ξεχάσουμε αυτά τα επιτεύγματα, πέρα από τις συχνά κάπως αστήρικτες φυλογενετικές κατασκευές στις οποίες παραδόθηκε αυτός ο ενθουσιώδης απόστολος του δαρβινισμού, και πέρα από τη μάλλον ρηχή υλιστική φιλοσοφία του του μονισμού, που έκανε μεγάλη εντύπωση στη Γερμανία προς το τέλος του 19ου αιώνα.

Μιλώντας για τις *Μέδουσες*, δεν μπορώ να αντέξω στον πειρασμό να αναφέρω λίγες γραμμές από το κλασικό έργο του D' Arcy Thompson *On Growth and Form*, ένα αριστούργημα της αγγλικής φιλολογίας, που συνδυάζει βαθιά γνώση γεωμετρίας, φυσικής και βιολογίας με ουμανιστική ευρυμάθεια και επιστημονική οξυδέρκεια ασυνήθιστης πρωτοτυπίας. Ο Thompson αναφέρεται σε φυσικά πειράματα με αιωρούμενες σταγόνες που χρησιμεύουν για να απεικονίσουν αναλογικά το σχηματισμό των μεδουσών. «Η ζωντανή μέδουσα»,



Εικ. 37



Εικ. 38

λέει, «έχει γεωμετρική συμμετρία τόσο χαρακτηριστική και κανονική, ώστε να επιτρέπει να υποθέσουμε ένα φυσικό ή μηχανικό στοιχείο στην ανάπτυξη και τη δομή αυτού του μικρού πλάσματος. Έχει, εν πρώτοις, τον κώδωνα ή ομπρέλα, με το συμμετρικό του χερούλι. Ο κώδωνας διασχίζεται εγκάρσια από ακτινωτά κανάλια, τέσσερα ή πολλαπλάσια του τέσσερα· στην άκρη του γύρω γύρω έχει πλοκάμια, λεία ή συχνά με εξογκώματα σε κανονικές αποστάσεις ή κατά μεγέθη που κλιμακώνονται· κάποια αισθητήρια όργανα, συμπεριλαμβανομένων των στερεών συμφύσεων ή "ωτολίθων", είναι επίσης διασκορπισμένα συμμετρικά. Με το που δημιουργείται, αρχίζει να πάλλεται· ο κώδωνας αρχίζει να "χτυπά". Βλαστήματα, μικροσκοπικά αντίγραφα του μητρικού οργανισμού, εμφανίζονται στα πλοκάμια ή στο χερούλι ή, μερικές φορές, στην άκρη του κώδωνα· είναι σαν να βλέπουμε τον ένα κώδωνα να παράγει άλλους μπροστά στα μάτια μας. Η ανάπτυξη ενός μεδουσοειδούς αξίζει να μελετηθεί χωρίς προκατάληψη απ' αυτή τη σκοπιά. Είναι βέβαιο ότι τα μικροσκοπικά μεδουσοειδή του *Obelia*, για παράδειγμα, εκβλαστάνουν με ταχύτητα και τελειότητα που προϋποθέτουν μάλλον μια αυτόματη και σχεδόν στιγμιαία πράξη διαμόρφωσης, παρά μια βαθμιαία διαδικασία ανάπτυξης».

Ενώ η πενταγωνική συμμετρία είναι συχνή στον οργανικό κόσμο, δεν τη βρίσκουμε ανάμεσα στις τελειότατα συμμετρικές δημιουργίες της ανόργανης φύσης, τους κρυστάλλους. Οι μόνες δυνατές ρητές συμμετρίες εκ περιστροφής είναι 2ης, 3ης, 4ης και 6ης τάξης. Οι κρύσταλλοι του χιονιού μάς προσφέρουν τα πιο γνωστά δείγματα εξαγωνικής συμμετρίας. Η Εικόνα 38 δείχνει μερικά απ' αυτά τα μικρά θαύματα του παγωμένου νερού. Στα νιάτα μου, όταν έπεφταν από τον ουρανό τα Χριστούγεννα σκεπάζοντας το τοπίο, ήταν η απόλαυση μικρών και μεγάλων. Τώρα αρέσουν μόνο στους σκιέρ, ενώ οι οδηγοί οχημάτων τις απεχθάνονται. Οι εξοικειωμένοι με την αγγλική λογοτεχνία θα θυμούνται την παράξενη αφήγηση του Sir Thomas Browne στο έργο του *Garden of Cyrus* [Ο κήπος του Κύρου, 1658] για την εξαγωνική και την «πενταγωνική» συμμετρία η οποία «υποδηλώνει καθαρά πως η φύση γεωμετρικοποιεί και τηρεί την τάξη σε όλα τα πράγματα». Ο εξοικειωμένος με τη γερμανική λογοτεχνία, πάλι, θα θυμάται πώς περιγράφει ο Τόμας Μαν στο *Μαγικό βουνό*[4] την «hexagonale Unwesen» της χιονοθύελλας, κατά την οποία ο Χανς Κάστορπ, ο ήρωάς του, σχεδόν πεθαίνει, όταν αποκοιμιέται εξαντλημένος και βλέπει το όνειρο της αγάπης και του θανάτου. Μια ώρα πριν, όταν ο Χανς ξεκινάει για την αδικαιολόγητη διαδρομή με τα σκι, απολαμβάνει το παιχνίδι με τις νιφάδες «κι ανάμεσα σ' αυτές τις μυριάδες τα γοητευτικά μικρά αστέρια», φιλοσοφεί, «μέσα στην κρυφή τους μεγαλοπρέπεια, πολύ μικρή για να τη δει ο άνθρωπος με γυμνό μάτι, ούτε ένα δεν ήταν όμοιο με το άλλο· μια ατελείωτη εφευρετικότητα κυβερνούσε την ανάπτυξη και την ασύλληπτη διαφοροποίηση ενός και μόνου βασικού σχήματος, του κανονικού εξαγώνου. Κι ενώ καθένα ήταν μόνο του —αυτός ήταν ο αλλόκοτος, ο αντιοργανικός χαρακτήρας όλων αυτών, ένας χαρακτήρας που αρνιόταν τη ζωή—, καθένα τους ήταν απόλυτα συμμετρικό, παγερά κανονικό στη μορφή. Ήταν πολύ κανονικά, σε βαθμό που ποτέ μορφή ζωής δεν προσάρμοσε μια ουσία —η ζωντανή αρχή ριγούσε σ' αυτή την τέλεια ακρίβεια, την έβρισκε μακάβρια, το ίδιο το μεδούλι του θανάτου—, τόσο που ο Χανς Κάστορπ ένιωσε ότι κατάλαβε τώρα γιατί οι κατασκευαστές της αρχαιότητας σκόπιμα και μυστικά εισήγαγαν μικροσκοπικές παραλλαγές απόλυτης συμμετρίας στις κιονοειδείς τους κατασκευές»[5].

4. Αναφέρω τη μετάφραση της Helen Lowe-Porter, Knopf, New York 1927 και 1939.

5. Ο Ντύρερ θεώρησε τον κανόνα του για την ανθρώπινη μορφή μάλλον ένα πρότυπο από το οποίο πρέπει κανείς να αποκλίνει παρά ένα πρό-

Μέχρι τώρα συγκεντρώσαμε την προσοχή μας μόνο στις κανονικές περιστροφές. Αν ληφθούν υπόψη και οι μη κανονικές περιστροφές, έχουμε τις δύο ακόλουθες δυνατότητες για πεπερασμένες ομάδες περιστροφών ως προς κέντρο Ο στην επίπεδη γεωμετρία, οι οποίες αντιστοιχούν στις δύο δυνατότητες που συναντήσαμε στη γραμμική διακοσμητική συμμετρία: (1) Την ομάδα που αποτελείται από τις επαναλήψεις μιας μοναδικής περιστροφής κατά γωνία $\alpha = 360°/n$ υποπολλαπλάσιο της γωνίας 360°. (2) Την ομάδα αυτών των περιστροφών συνδυασμένη με κατοπτρισμό σε n άξονες που σχηματίζουν γωνίες ίσες με ½α. Η πρώτη ομάδα ονομάζεται κυκλική ομάδα C_n και η δεύτερη δίεδρη ομάδα D_n. Αυτές είναι λοιπόν οι δύο δυνατές βασικές συμμετρίες σε δύο διαστάσεις:

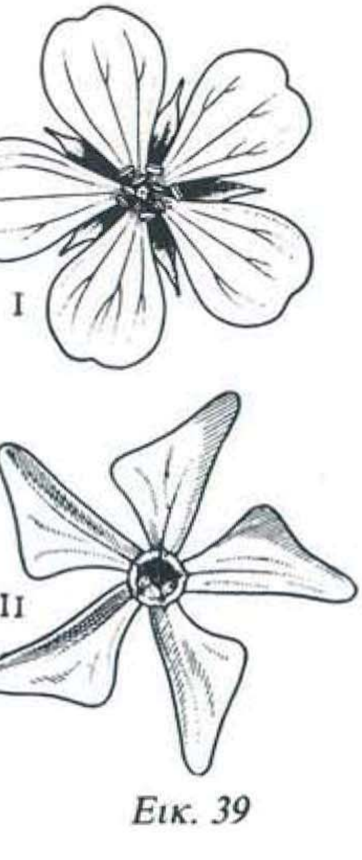
(1) $C_1, C_2, C_3, \ldots$ $D_1, D_2, D_3, \ldots$

C_1 σημαίνει ότι δεν έχουμε καθόλου συμμετρία, D_1 σημαίνει αμφίπλευρη συμμετρία και τίποτε άλλο. Στην αρχιτεκτονική κυριαρχεί η συμμετρία 4ης τάξης. Οι πύργοι έχουν συχνά εξαγωνική συμμετρία. Κεντρικά κτίρια με συμμετρία 6ης τάξης είναι πολύ λιγότερο συχνά. Το πρώτο καθαρό κεντρικό κτίριο μετά την αρχαιότητα, το κτίριο της S. Maria degli Angeli στη Φλωρεντία (άρχισε να χτίζεται το 1434), είναι οκτάγωνο. Τα πεντάγωνα είναι πολύ σπάνια. Όταν κάποτε έδωσα μια διάλεξη πάνω στη συμμετρία, στη Βιέννη το 1937, είπα ότι γνώριζα μόνο ένα παράδειγμα, και μάλιστα όχι ευδιάκριτο, το διάδρομο από το ναό San Michele di Murano (Βενετία), στην εξαγωνική Capella Emiliana. Σήμερα, βέβαια, έχουμε και το κτίριο του Πενταγώνου στην Ουάσιγκτον. Με το μέγεθός του και το σχήμα του που ξεχωρίζει προσφέρει έναν

τυπο που πρέπει να προσπαθεί να φτάσει. Το έργο του Βιτρούβιου *Temperaturae* [Κράσεις] φαίνεται να έχει το ίδιο νόημα, και ίσως η μικρή λέξη «σχεδόν» στην πρόταση που αποδίδεται στον Πολύκλειτο και μνημονεύεται στη διάλεξη Ι, σημείωση 1, προσανατολίζει προς την ίδια κατεύθυνση.

ελκυστικό στόχο για τα βομβαρδιστικά. Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι ασχολήθηκε συστηματικά με τον καθορισμό των δυνατών συμμετριών ενός κεντρικού κτιρίου και με το πώς να συνδέει παρεκκλήσια και σηκούς (αχιβάδες) χωρίς να καταστρέφει τη συμμετρία του πυρήνα. Στην αφηρημένη σύγχρονη ορολογία, τα αποτελέσματά του είναι στην ουσία οι δικές μας δυνατές πεπερασμένες ομάδες περιστροφών (κανονικών και μη) σε δύο διαστάσεις.

Ως αυτό το σημείο, η περιστροφική συμμετρία πάνω σε επίπεδο συνοδευόταν πάντοτε από κατοπτρική συμμετρία· σας έχω παρουσιάσει έναν αριθμό παραδειγμάτων για τη διεδρική ομάδα D_n αλλά όχι και για την πιο απλή κυκλική ομάδα C_n. Αυτό είναι λίγο-πολύ συμπτωματικό. Στην Εικόνα 39 εικονίζονται δύο άνθη, ένα *γεράνι* (I) με συμμετρία της ομάδας D_5, ενώ το *Vinca herbacea* (II) έχει την πιο περιορισμένη συμμετρία της ομάδας C_5 που οφείλεται στην ασυμμετρία των πετάλων του. Η Εικόνα 40 δείχνει το πιο απλό ίσως σχήμα με περιστροφική συμμετρία, τον τρίποδα ($n = 3$).



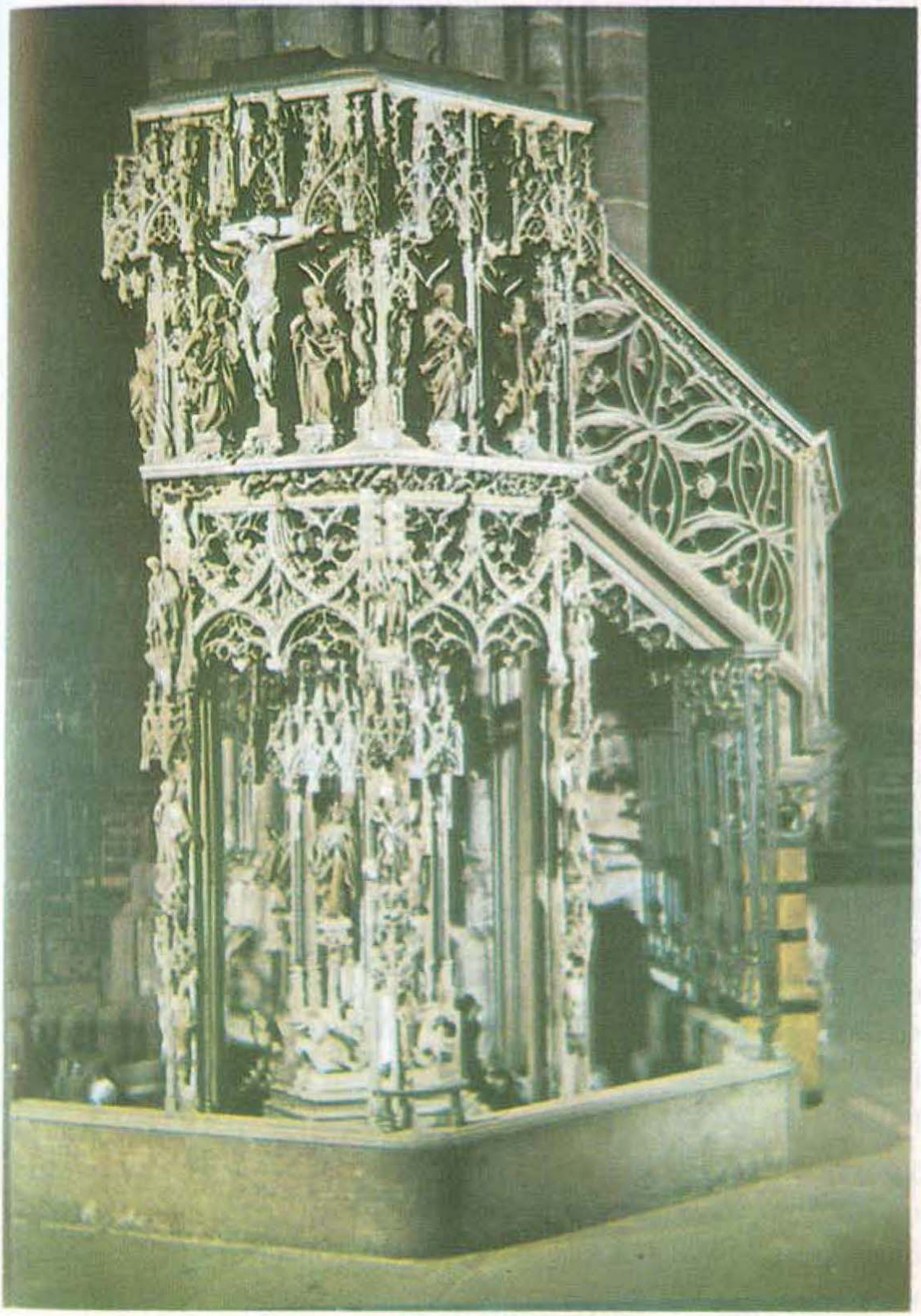
Εικ. 39

Εικ. 40

Αν θέλουμε να εξαλείψουμε την επιμελημένη κατοπτρική συμμετρία, τοποθετούμε μικρές προεξοχές στις άκρες των τριών βραχιόνων και παίρνουμε το triquetrum (τρίγωνο), ένα αρχαίο μαγικό σύμβολο. Οι αρχαίοι Έλληνες, για παράδειγμα, το χρησιμοποιούσαν με το κεφάλι της Μέδουσας στο κέντρο σαν το σύμβολο της τριγωνικής Σικελίας*. (Οι μαθηματικοί είναι εξοικειωμένοι μ' αυτό, γιατί είναι η σφραγίδα στο εξώφυλλο του μαθηματικού περιοδικού *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.) Η παραλλαγή του με τέσσερις αντί για τρεις βραχίονες, είναι η σβάστικα, που δεν χρειάζεται να τη δείξουμε εδώ, ένα πανάρχαιο σύμβολο του ανθρώπινου γένους, κοινό σε αρκετούς μάλλον ανεξάρτητους πολιτισμούς. Στη διάλεξή μου για τη συμμετρία στη Βιέννη, το φθινόπωρο του 1937, λίγο πριν οι ορδές του Χίτλερ καταλάβουν την Αυστρία, πρόσθεσα σχετικά με τη σβάστικα: «Στις μέρες μας έχει γίνει το σύμβολο ενός τρόμου πολύ πιο φοβερού απ' ό,τι το ζωσμένο με φίδια κεφάλι της Μέδουσας» —κι ένα πανδαιμόνιο επευφημιών και αποδοκιμασιών ξέσπασε στο ακροατήριο. Φαίνεται πως η καταγωγή της μαγικής δύναμης που αποδόθηκε σ' αυτά τα σχέδια βρίσκεται στην εντυπωσιακή τους ατελή συμμετρία — περιστροφές χωρίς κατοπτρισμούς. Στην Εικόνα 41 φαίνεται η σχεδιασμένη με χάρη σκάλα του άμβωνα του καθεδρικού ναού του Αγίου Στεφάνου στη Βιέννη· ένα triquetrum εναλλάσσεται με έναν τροχό σαν σβάστικα.

Αυτά όσον αφορά την περιστροφική συμμετρία σε δύο διαστάσεις. Αν έχουμε να κάνουμε με εν δυνάμει μη πεπερασμένα σχέδια όπως οι διακοσμητικές ταινίες ή με άπειρες ομάδες, η διεργασία υπό την οποία το σχέδιο παραμένει

* Ο Στράβων στα Γεωγραφικά του αναφέρει ότι η Σικελία ονομαζόταν στην αρχαιότητα Θρινακία ή Τρινακία (με τρία άκρα), λόγω του τριγωνικού της σχήματος. Στην Οδύσσεια, άλλωστε, απαντά ο όρος «Θρινακρία η Σικελική». (Σ.τ.επιστ. συμβ.).



Εικ. 41

αναλλοίωτο δεν είναι κατ' ανάγκη μια ισομετρία, αλλά μπορούσε να είναι μια ομοιότητα. Μια ομοιότητα σε μία διάσταση που δεν είναι μια απλή μεταφορά έχει ένα σταθερό σημείο O και είναι μια διαστολή s από το O κατά κάποιο λόγο $\alpha : 1$, όπου $\alpha \neq 1$. Δεν είναι ουσιαστικός περιορισμός να υποθέσουμε ότι $\alpha > 0$. Απεριόριστη επανάληψη αυτής της διεργασίας δημιουργεί μια ομάδα Σ που αποτελείται από τις διαστολές

(2) $S^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Ένα καλό παράδειγμα αυτού του τύπου της συμμετρίας δίνει το όστρακο *Turritella duplicata* (Εικόνα 42). Είναι πράγματι αξιοσημείωτη η ακρίβεια με την οποία τα πλάτη των διαδοχικών σπειρών ακολουθούν τον κανόνα της γεωμετρικής προόδου.

Οι δείκτες μερικών ρολογιών εκτελούν συνεχή ομοιόμορφη περιστροφή, άλλοι δείκτες πηδούν από λεπτό σε λεπτό. Οι περιστροφές επί έναν ακέραιο αριθμό λεπτών σχηματίζουν μια ασυνεχή υποομάδα μέσα στη συνεχή ομάδα όλων των περιστροφών, και είναι φυσικό να θεωρήσουμε μια περιστροφή s και τις επαναλήψεις της (2) ως συμπεριλαμβανόμενες στη συνεχή ομάδα. Μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή την άποψη για κάθε ομοιότητα σε μία, δύο ή και τρεις διαστάσεις, στην πραγματικότητα για κάθε μετασχηματισμό s. Η συνεχής κίνηση μιας ουσίας στο χώρο, ενός «ρευστού», μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά αν δώσουμε το μετασχηματισμό $U(t, t')$ που μεταφέρει τη θέση P_t κάθε σημείου του ρευστού, τη χρονική στιγμή t, στη θέση $P_{t'}$, τη χρονική στιγμή t'. Αυτοί οι μετασχηματισμοί σχηματίζουν ομάδα μιας παραμέτρου αν ο $U(t,t')$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά χρόνου $t'-t$, $U(t,t') = S(t'-t)$, αν δηλαδή κατά τη διάρκεια ίσων χρονικών διαστημάτων επαναλαμβάνεται πάντα η ίδια κίνηση. Υπ' αυτές τις συνθήκες το ρευστό κάνει «ομοιόμορφη κίνηση». Ο απλός νόμος της ομάδας

Εικ. 42

$$S(t_1)\,S(t_2) = S(t_1+t_2)$$

εκφράζει ότι οι κινήσεις κατά τη διάρκεια δύο διαδοχικών χρονικών διαστημάτων t_1, t_2 αντιστοιχούν στην κίνηση κατά τη διάρκεια του χρόνου t_1+t_2. Η κίνηση κατά τη διάρκεια ενός λεπτού οδηγεί σ' έναν συγκεκριμένο μετασχηματισμό $s=S(1)$ και για όλους τους ακεραίους *n* η κίνηση $S(n)$ που εκτελείται κατά τη διάρκεια *n* λεπτών είναι η επανάληψη s^n: η ασυνεχής ομάδα Σ που αποτελείται από τις επαναλήψεις του S εμφυτεύεται στη συνεχή ομάδα με παράμετρο t αποτελούμενη από τις κινήσεις $S(t)$. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η συνεχής κίνηση αποτελείται από την ατελείωτη επανάληψη της ίδιας απειροελάχιστης κίνησης κατά διαδοχικά και απείρως μικρά ίσα χρονικά διαστήματα.

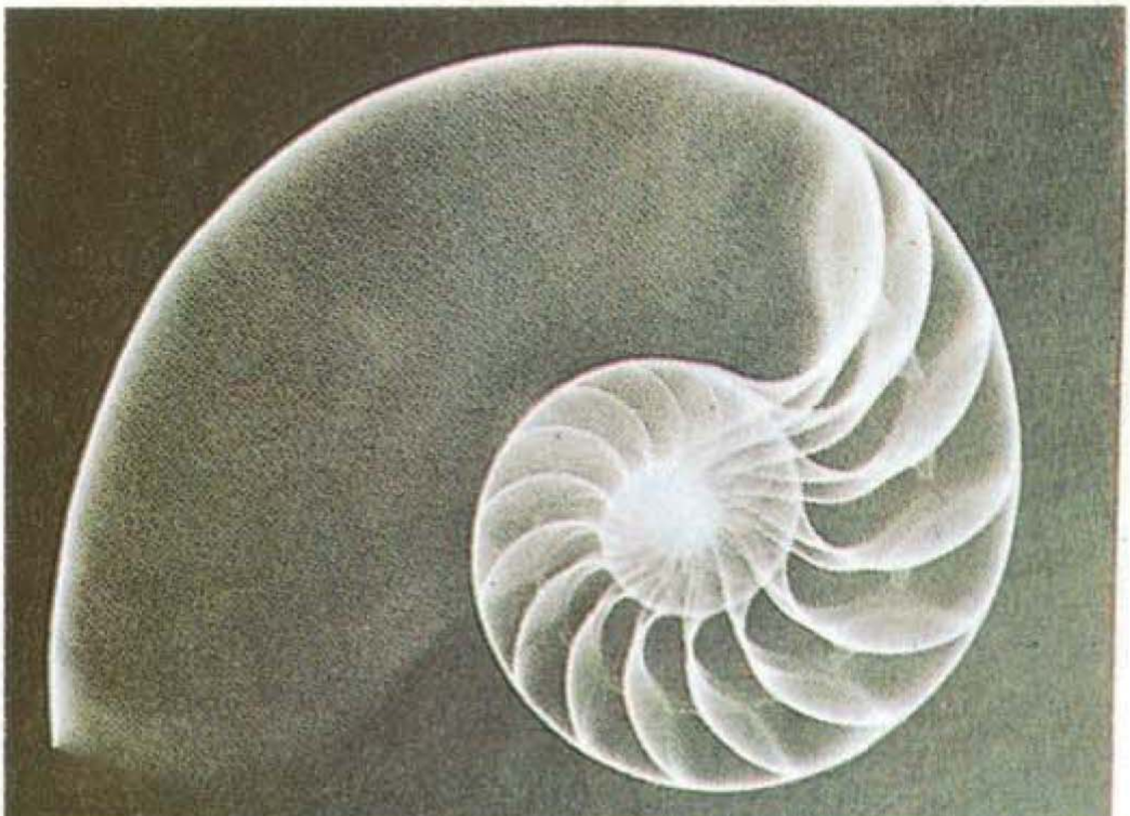
Θα μπορούσαμε να έχουμε εφαρμόσει αυτή τη διαπίστωση στις περιστροφές ενός επίπεδου δίσκου καθώς και στις διαστολές. Εξετάζουμε τώρα μια γνήσια ομοιότητα *s*, δηλαδή μια ομοιότητα που δεν εναλλάσσει το αριστερό και το δεξιό. Αν, καθώς υποθέσαμε, δεν είναι μια απλή μεταφορά, έχει ένα σταθερό σημείο Ο και συνίσταται από μια περιστροφή ως προς το Ο συνδυασμένη με μια διαστολή ως προς το κέντρο Ο. Μπορεί να επιτευχθεί όπως το στάδιο $S(1)$ που προκύπτει μετά από ένα λεπτό με μια συνεχή διαδικασία $S(t)$ συνδυασμού ομοιόμορφης περιστροφής και επέκτασης. Αυτή η διαδικασία μεταφέρει ένα σημείο $\neq$ του Ο κατά μήκος μιας ισογώνιας ή λογαριθμικής έλικας όπως ονομάζεται. Αυτή η καμπύλη, ως εκ τούτου, έχει κοινή με την ευθεία γραμμή και τον κύκλο τη σπουδαία ιδιότητα να μεταπηδά πάνω στον εαυτό της με μια συνεχή ομάδα ομοιομορφιών. Τα λόγια με τα οποία είχε κοσμήσει ο Ιάκωβος Μπερνουλλί* αυτή τη *spira mirabilis* [θαυμαστή έλικα] πάνω στην επιτύμβια πλάκα

* Ιάκωβος Μπερνουλλί: Ο πρώτος της οικογένειας των Ελβετών μαθηματικών (1655-1705). Εισήγαγε τις πρώτες αρχές του λογισμού των μεταβολών. (Σ.τ.μ.)

του στο Münster της Βασιλείας, «Eadem mutata resurgo» [Μέσα από την αλλαγή της ανανεώνομαι] είναι μια εύγλωττη έκφραση αυτής της ιδιότητας. Ευθεία γραμμή και κύκλος είναι οριακές περιπτώσεις της λογαριθμικής έλικας που προκύπτουν όταν στο συνδυασμό περιστροφή συν διαστολή η μία από τις δύο συνιστώσες συμβαίνει να είναι η ταυτότητα. Τα στάδια που προκύπτουν από τη διαδικασία κατά τις χρονικές στιγμές

(3) $t = n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

σχηματίζουν μια ομάδα αποτελούμενη από τις επαναλήψεις (2). Το πολύ γνωστό κοχύλι *Ναυτίλος* (Εικόνα 43) παρουσιάζει αυτό το είδος της συμμετρίας με εκπληκτική τελειότητα. Βλέπετε εδώ: όχι μόνο η συνεχής λογαριθμική έλικα αλλά και η εν δυνάμει άπειρη αλληλουχία των διαμερισμάτων έχει μια συμμετρία που περιγράφεται από την ασυνεχή ομάδα Σ.



Εικ. 43

Εικ. 44

Για όποιον κοιτάζει το γιγάντιο ηλιοτρόπιο της Εικόνας 44, τον *Helianthus maximus*, τα ανθύλλια είναι φυσικά διατεταγμένα σε λογαριθμικές έλικες, δύο σειρές ελίκων αντίθετης περιέλιξης.

Η πιο γενική κίνηση στον τρισδιάστατο χώρο είναι η κίνηση ενός κοχλία *s*, που είναι συνδυασμός περιστροφής ως προς έναν άξονα και μεταφοράς κατά μήκος του ίδιου άξονα. Υπό την επίδραση αυτής της ομοιόμορφης συνεχούς κίνησης, κάθε σημείο που δεν βρίσκεται πάνω στον άξονα διαγράφει μια έλικα η οποία, βέβαια, θα μπορούσε να πει για τον εαυτό της το ίδιο σωστά όπως και η λογαριθμική έλικα : *Eadem resurgo* [η ίδια ανανεώνομαι]. Οι θέσεις P_n στις οποίες βρίσκεται το κινούμενο σημείο κατά τα ίσα χρονικά διαστήματα (3) είναι ισοκατανεμημένες πάνω στην έλικα σαν σκαλοπάτια σε μια κυκλική σκάλα. Αν η γωνία περιστροφής της διεργασίας *s* είναι το κλάσμα μ/ν της γωνίας των 360° εκφρασμένο με μικρούς ακεραίους μ, ν, τότε κάθε νυοστό σημείο της ακολουθίας P_n κείται πάνω στην ίδια κάθετο, και είναι απαραίτητες μ πλήρεις περιστροφές του κοχλία για να πάμε από το σημείο P_n στο σημείο $P_{n+\nu}$ που βρίσκεται από πάνω του. Τα φύλλα γύρω από το βλαστό ενός φυτού συχνά εμφανίζουν μια τέτοια κανονική ελικοειδή διευθέτηση. Ο Γκαίτε μίλησε για μια ελικοειδή τάση στη φύση και το φαινόμενο αυτό, με το όνομα *φυλλοταξία* από την εποχή του Charles Bonnet (1754), έχει γίνει το αντικείμενο πολλής έρευνας και ακόμα περισσότερου διαλογισμού μεταξύ των βοτανικών επιστημόνων[6]. Ένας απ' αυτούς βρήκε ότι τα κλάσματα μ/ν που αντιπροσωπεύουν την ελικοειδή διευθέτηση των φύλλων αποτελούν σχεδόν πάντοτε μέλη της «σειράς του Fibonacci»

(4) 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 34/55, ...,

η οποία προκύπτει από το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του άρρητου αριθμού $1/2\ (\sqrt{5} - 1)$. Αυτός ο αριθμός δεν είναι άλλος από το λόγο το γνωστό ως *χρυσή τομή*, ο οποίος

6. Το φαινόμενο αυτό παίζει επίσης ρόλο στις κατασκευές του J. Hambidge. Το βιβλίο του *Dynamic symmetry* [Δυναμική συμμετρία] περιέχει στις σελ. 146 - 157 λεπτομερείς σημειώσεις από τον μαθηματικό R.C. Archibald πάνω στη λογαριθμική έλικα, τη χρυσή τομή και τις σειρές του Fibonacci.

έχει παίξει σπουδαίο ρόλο στις προσπάθειες για την αναγωγή των αναλογιών της ομορφιάς σε μια μαθηματική σχέση. Ο κύλινδρος πάνω στον οποίο είναι τυλιγμένος ο κοχλίας θα μπορούσε να αντικατασταθεί από έναν κώνο· αυτό ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της ελικοειδούς κίνησης *s* από οποιαδήποτε γνήσια ομοιότητα — περιστροφή συνδυασμένη με διαστολή. Η διευθέτηση των διαβαθμίσεων πάνω σ' ένα κουκουνάρι υπάγεται σ' αυτή την ελαφρά γενικότερη μορφή της φυλλοταξίας. Η μετάβαση από τον κύλινδρο στον κώνο και στο δίσκο είναι οφθαλμοφανής και φαίνεται στον κυλινδρικό μίσχο ενός φυτού με τα φύλλα του, σε ένα κουκουνάρι με τις διαβαθμίσεις του και στη δισκοειδή ανθοφορία του ηλίανθου με τα επιμέρους ανθύλλιά του. Εκεί όπου μπορούμε να ελέγξουμε τους αριθμούς (4) καλύτερα, κυρίως στη διευθέτηση των διαβαθμίσεων πάνω σε ένα κουκουνάρι, η ακρίβεια δεν είναι αρκετή ούτε οι αξιοσημείωτες αποκλίσεις είναι σπάνιες. Ο P.G. Tait στο *Proceedings of the Royal Society of Edinburg* [Πεπραγμένα της Βασιλικής Εταιρείας του Εδιμβούργου, 1872] προσπάθησε να δώσει μια απλή εξήγηση, ενώ ο A.H. Church στην ογκώδη πραγματεία του *Relations of phyllotaxis to mechanical laws* [Σχέσεις της φυλλοταξίας με τους νόμους της Μηχανικής, Οξφόρδη, 1901-1903] βλέπει στην αριθμητική της φυλλοταξίας ένα οργανικό μυστήριο. Φοβάμαι ότι οι σημερινοί βοτανικοί παίρνουν την όλη θεωρία της φυλλοταξίας λιγότερο σοβαρά από τους προπάτορές τους.

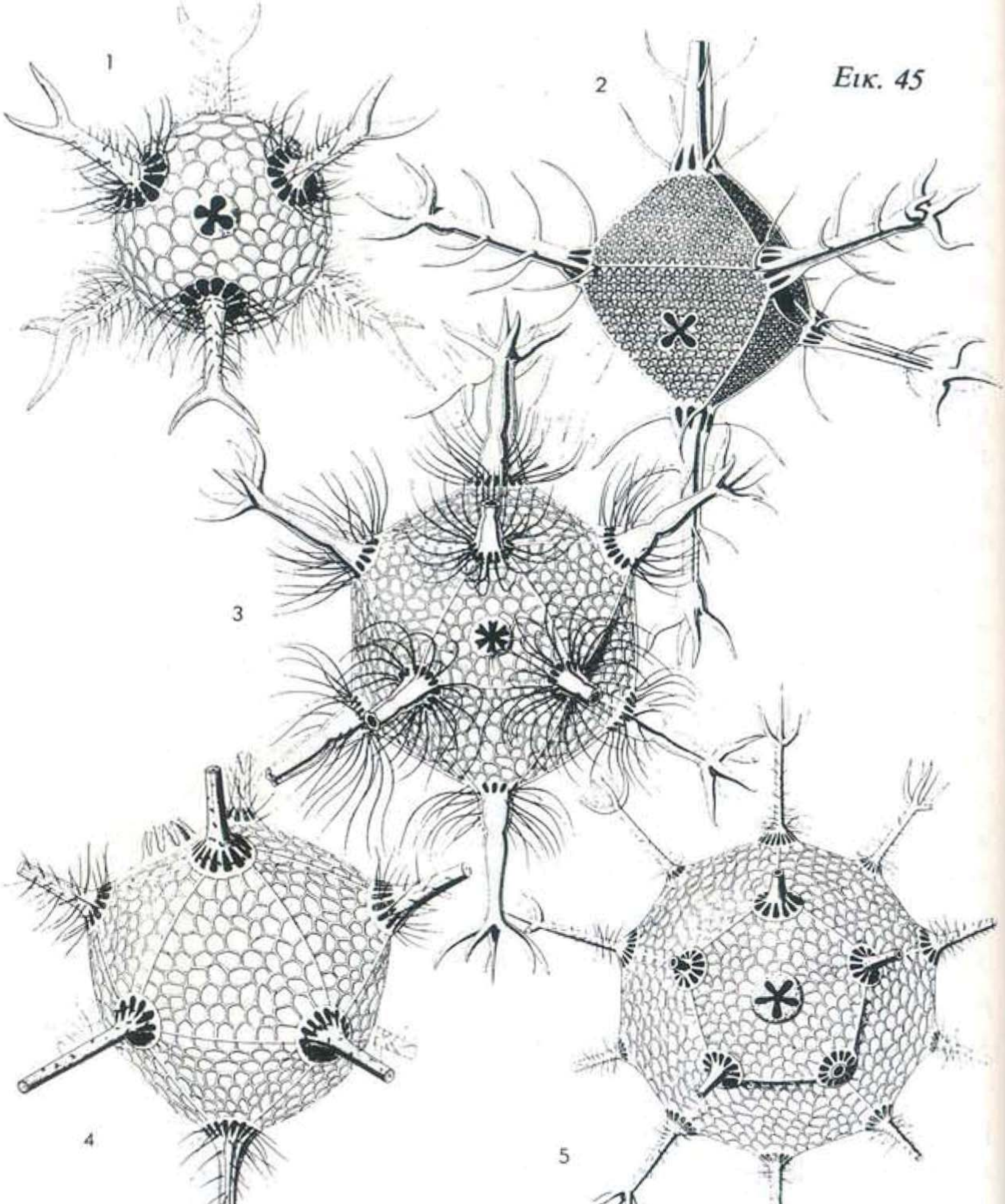
Εκτός από τον κατοπτρισμό, όλες οι συμμετρίες που εξετάστηκαν μέχρι τώρα περιγράφονται από ομάδες αποτελούμενες από επαναλήψεις μιας διεργασίας *s*. Σε μια περίπτωση, που είναι αναμφίβολα και η πιο σπουδαία, η προκύπτουσα ομάδα είναι πεπερασμένη· συγκεκριμένα, αν η διεργασία *s* ληφθεί ως περιστροφή κατά γωνία $\alpha = 360°/n$, που είναι υποπολλαπλάσιο της γωνίας 360°, δηλαδή μιας πλήρους περιστροφής. Στις δύο διαστάσεις δεν υπάρχουν άλλες πεπερασμένες ομάδες γνήσιων περιστροφών, εκτός απ' αυτές· μάρτυρας η πρώτη σειρά, C_1, C_2, C_3... του πίνακα του Leonardo (1). Τα απλούστερα σχήματα που έχουν την αντίστοιχη συμμετρία είναι τα κανονικά πολύγωνα : το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο, το κανονικό πεντάγωνο κτλ. Το γεγονός ότι για κάθε αριθμό $n = 3,4,5, \ldots$ υπάρχει ένα κανονικό πολύγωνο που έχει n πλευρές είναι στενά συνδεδεμένο με την ύπαρξη, για κάθε n, μιας ομάδας περιστροφών τάξης n στην επίπεδη γεωμετρία. Και τα δύο γεγονότα κάθε άλλο παρά τετριμμένα είναι. Πράγματι, η κατάσταση στις τρεις διαστάσεις είναι τελείως διαφορετική : δεν υπάρχουν απείρως πολλά πολύεδρα στο χώρο, αλλά μόνο πέντε, που συχνά ονομάζονται πλατωνικά στερεά, γιατί παίζουν εξέχοντα ρόλο στη φυσική φιλοσοφία του Πλάτωνα*. Αυτά είναι το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο και επιπλέον το κανονικό δωδεκάεδρο, οι πλευρές του οποίου είναι δώδεκα κανονικά πεντάγωνα, και το εικοσάεδρο, που σχηματίζεται από είκοσι ισόπλευρα τρίγωνα . Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ύπαρξη των τριών πρώτων είναι ένα αρκετά προφανές γεωμετρικό γεγονός. Αλλά η ανακάλυψη των δύο τελευταίων είναι βέβαια μια από τις ωραιότερες και μοναδικές που έγιναν σε ολόκληρη την ιστορία των μαθηματικών. Με αρκετή βεβαιότητα, μπορεί να αποδοθεί στους Έλληνες αποίκους της Κάτω Ιταλίας. Ορισμένοι ισχυρίζονται ότι η αφηρημένη ιδέα του κανονικού δωδεκάεδρου είχε έναυσμα τους κρυστάλλους του πυρίτη, ενός θειούχου ορυκτού άφθονου στη Σικελία. Αλλά, όπως αναφέρθηκε πριν, η συμμετρία 5η τάξης, η τόσο χαρακτηριστική για το κανονικό δωδεκάεδρο, έρχεται σε αντίφαση με τους νόμους της κρυσταλλογραφίας και, πράγματι, βρίσκουμε ότι τα πεντάγωνα που περιβάλλουν τα δωδε-

* Η φυσική αυτή φιλοσοφία του Πλάτωνα αναπτύσσεται κυρίως στα έργα *Τίμαιος* και *Επινομίς*. (Σ.τ.επιστ. συμβ.)

κάεδρα στα οποία κρυσταλλώνεται ο πυρίτης έχουν 4 πλευρές ίσου μήκους και μία διαφορετικού. Η πρώτη ακριβής κατασκευή κανονικού δωδεκάεδρου οφείλεται πιθανώς στον Θεαίτητο*. Υπάρχει κάποια μαρτυρία ότι το δωδεκάεδρο χρησιμοποιούνταν σαν ζάρι στην Ιταλία, σε πολύ πρώιμους χρόνους, και ότι είχε κάποια θρησκευτική σημασία στον ετρουσκικό πολιτισμό. Ο Πλάτων, στο διάλογό του *Τίμαιος*, συσχετίζει την κανονική πυραμίδα, το οκτάεδρο, τον κύβο, το εικοσάεδρο, με τα τέσσερα στοιχεία, το πυρ, τον αέρα, τη γη και το ύδωρ αντίστοιχα, ενώ στο κανονικό δωδεκάεδρο βλέπει, με μια έννοια, την εικόνα ολόκληρου του σύμπαντος. Ο Α. Speiser έχει διατυπώσει την άποψη ότι η κατασκευή των πέντε κανονικών στερεών είναι ο κύριος σκοπός της επαγωγικής γεωμετρίας όπως διατυπώθηκε από τους αρχαίους Έλληνες και καθιερώθηκε στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Θα ήθελα να μνημονεύσω όμως ότι οι αρχαίοι Έλληνες ουδέποτε χρησιμοποίησαν τη λέξη «συμμετρικός» με τη σημερινή έννοια. Στη συνηθισμένη χρήση, *σύμμετρος* σημαίνει *ανάλογος*, ενώ στον Ευκλείδη είναι ισοδύναμο με το δικό μας *ρητόν* : η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι *ασύμμετρα μεγέθη* (άρρητα μεγέθη).

Η Εικόνα 45 είναι μια σελίδα από το έργο του Haeckel *Challenger monograph* που δείχνει τους σκελετούς πολλών ακτινόζωων (Radiolaria). Τα 2, 3 και 5 είναι, αντίστοιχα, οκτάεδρο, εικοσάεδρο και δωδεκάεδρο, σε εκπληκτικά κα-

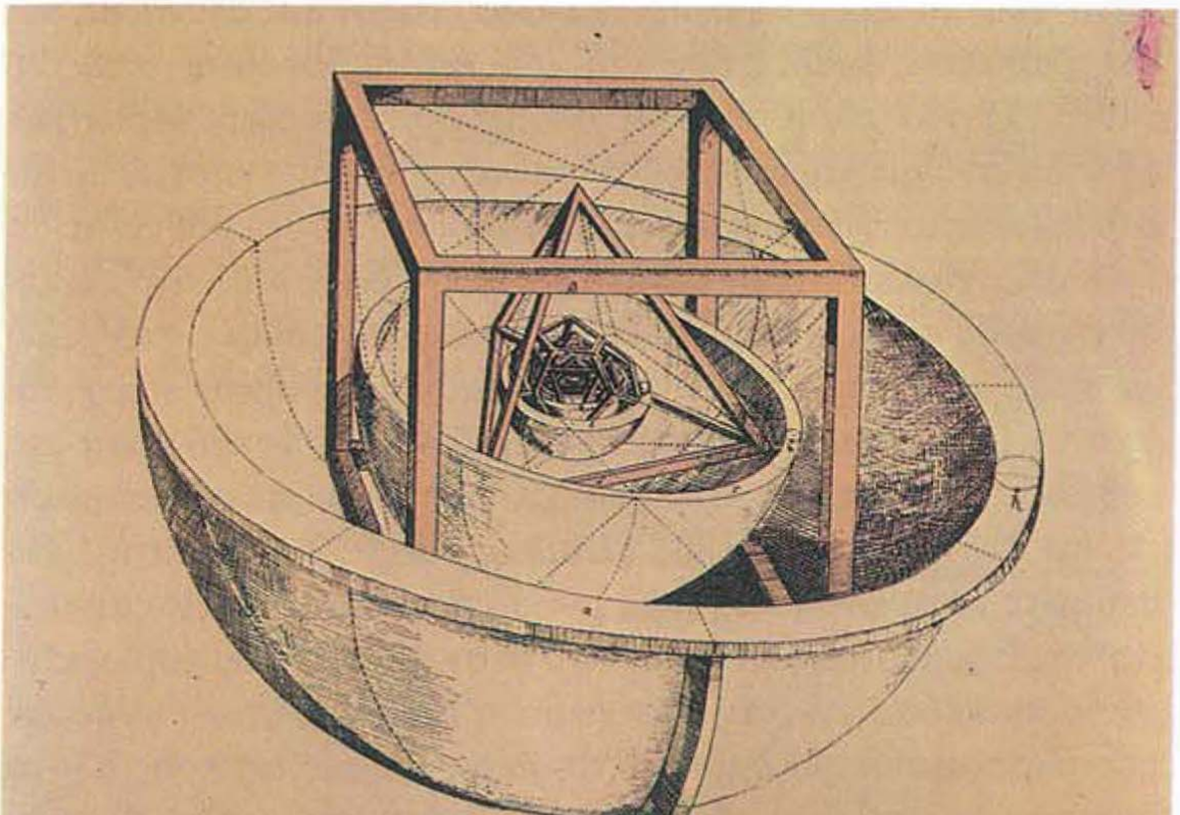
* Μεγάλος μαθηματικός από την Αθήνα. Υπήρξε φίλος του Πλάτωνα. Γεννήθηκε γύρω στο 415-413 π.Χ. και πέθανε γύρω στο 369 π.Χ. Μαθηματικά διδάχτηκε από τον Πυθαγόρειο Θεόδωρο τον Κυρηναίο. Φέρεται ως σύγχρονος του Αρχύτα του Ταραντίνου. Στα σχόλια για τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη από ανώνυμο συγγραφέα, αναφέρεται ότι το περίφημο 9° Θεώρημα του Χ βιβλίου των *Στοιχείων* καθώς και η κατασκευή και εγγραφή σε σφαίρα των κανονικών πολύεδρων οκτάεδρου και εικοσάεδρου οφείλονται στον Θεαίτητο. (Σ.τ.μ.).



νονικές μορφές· το 4 φαίνεται να έχει κατώτερη συμμετρία.

Ο Κέπλερ, στο *Mysterium Cosmographicum* [Κοσμογραφικό μυστήριο], που εκδόθηκε το 1595, πολύ πριν ανακαλύψει τους τρεις νόμους που σήμερα φέρουν το όνομά του, έκανε μια προσπάθεια να αναγάγει τις αποστάσεις στο πλανητικό σύστημα σε κανονικά σώματα που είναι διαδοχικά εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε σφαίρες.

Στην Εικόνα 46 εικονίζεται η κατασκευή του, με την οποία πίστευε ότι είχε διεισδύσει βαθιά στα μυστικά του Δημιουργού. Οι έξι σφαίρες, που αντιστοιχούν στους έξι τότε γνωστούς πλανήτες, Κρόνο, Δία, Άρη, Γη, Αφροδίτη, Ερμή, χωρίζονται μεταξύ τους με τη σειρά που τους αναφέραμε από έναν κύβο, ένα τετράεδρο, ένα δωδεκάεδρο, ένα οκτάεδρο και ένα εικοσάεδρο. (Βέβαια ο Κέπλερ δεν γνώριζε τότε τους άλλους τρεις απομακρυσμένους πλανήτες, τον Ουρανό, τον Ποσειδώνα και τον Πλούτωνα, που ανακαλύφθηκαν το 1781, το 1846 και το 1930 αντίστοιχα). Προσπάθησε να βρει



Εικ. 46

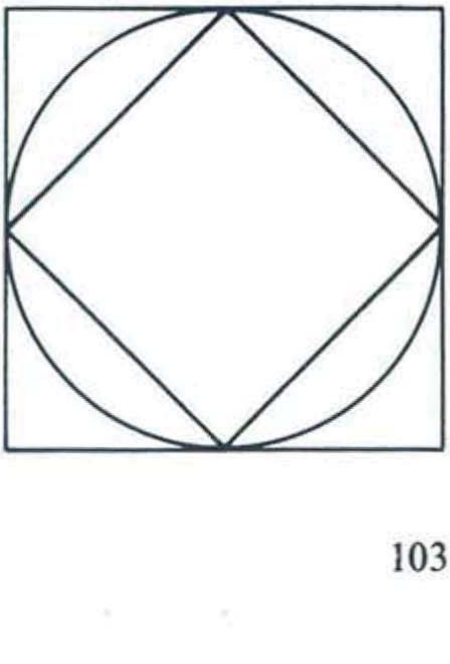
για ποιους λόγους ο Δημιουργός είχε διαλέξει αυτή τη διάταξη των πλατωνικών στερεών και παραλλήλισε τις ιδιότητες των πλανητών (τις αστρολογικές μάλλον παρά τις αστροφυσικές) με τις ιδιότητες των αντίστοιχων κανονικών πολύεδρων. Ένας μεγαλειώδης ύμνος με τον οποίο διακηρύσσει το πιστεύω του, «Credo spatioso numen in orbe» [Πιστεύω σε μια ευρεία θεία βούληση στον κύκλο] κλείνει το βιβλίο του. Ακόμη συμμεριζόμαστε την πίστη του στη μαθηματική αρμονία του σύμπαντος. Άντεξε στη δοκιμασία της συνεχώς διευρυνόμενης εμπειρίας. Αλλά εμείς σήμερα δεν ψάχνουμε πια γι' αυτή την αρμονία σε στατικές μορφές όπως τα κανονικά σώματα, αλλά σε δυναμικούς νόμους.

Όπως τα κανονικά πολύγωνα συσχετίζονται με τις πεπερασμένες ομάδες των επίπεδων περιστροφών, έτσι και τα κανονικά πολύεδρα πρέπει να συσχετίζονται στενά με τις πεπερασμένες ομάδες των γνήσιων περιστροφών ως προς το κέντρο Ο στο χώρο. Από τη μελέτη των επίπεδων περιστροφών παίρνουμε αμέσως δύο τύπους ομάδων γνήσιων περιστροφών στο χώρο. Πράγματι, μπορεί να θεωρηθεί ότι η ομάδα C_n των γνήσιων περιστροφών σ' ένα οριζόντιο επίπεδο ως προς κέντρο Ο αποτελείται από περιστροφές στο χώρο ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο και διέρχεται από το Ο. Ο κατοπτρισμός στο οριζόντιο επίπεδο κατά μια ευθεία l του επιπέδου, στο χώρο, αντιστοιχεί σε περιστροφή ως προς την l κατά 180° (*Umklappung* : εναπόθεση). Θα θυμάστε ίσως ότι το έχουμε μνημονεύσει αυτό στην ανάλυση της σουμερικής Εικόνας 4. Έτσι η ομάδα D_n του οριζόντιου επιπέδου γίνεται στο χώρο η ομάδα D'_n των γνήσιων περιστροφών· περιλαμβάνει τις περιστροφές ως προς άξονα κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Ο κατά πολλαπλάσια του 360°/n και τις εναποθέσεις ως προς n οριζόντιους άξονες που διέρχονται από το Ο και σχηματίζουν ο ένας με τον άλλο γωνίες ίσες προς 360°/2n. Αλλά πρέπει να παρατηρηθεί ότι η ομάδα D'_1, όπως και η C_2, αποτελείται απο την ταυτότητα και την εναπόθεση ως προς μια ευθεία. Οι δύο αυτές ομάδες είναι ταυτόσημες. Έτσι στον πίνακα των *διαφορετικών* ομάδων των γνήσιων περιστροφών στις τρεις διαστάσεις, η D'_1 πρέπει να παραλειφθεί αν διατηρηθεί η C_2. Ως εκ τούτου ο πίνακάς μας θα αρχίζει ως εξής:

$$C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots$$
$$D'_2, D'_3, D'_4, \ldots$$

Η D'_2 είναι η επονομαζόμενη ομάδα 4 που συνίσταται από την ταυτότητα και την εναπόθεση ως προς τρεις άξονες κάθετους μεταξύ τους.

Για καθένα από τα πέντε κανονικά στερεά μπορούμε να κατασκευάσουμε την ομάδα αυτών των γνήσιων περιστροφών που μεταφέρει το στερεό επί του εαυτού του. Δημιουργεί αυτό πέντε νέες ομάδες; Όχι, μόνο τρεις. Κι αυτό για τον εξής λόγο: Εγγράψτε μια σφαίρα μέσα σ' έναν κύβο και ένα οκτάεδρο μέσα στη σφαίρα έτσι ώστε οι κορυφές του οκτάεδρου να κείνται στα σημεία όπου οι πλευρές του κύβου εφάπτονται με τη σφαίρα, δηλαδή στα κέντρα των έξι πλευρών του κύβου. (Η Εικόνα 47 δείχνει το ανάλογο σε δύο διαστάσεις.) Σ' αυτή τη θέση ο κύβος και το οκτάεδρο είναι πολικές εικόνες από την άποψη της προβολικής γεωμετρίας. Είναι ξεκάθαρο ότι κάθε περιστροφή που μεταφέρει τον κύβο



Εικ. 47

επί του εαυτού του αφήνει το οκτάεδρο αμετάβλητο, και το αντίστροφο. Ως εκ τούτου, η ομάδα για το οκτάεδρο είναι η ίδια όπως του κύβου. Κατά τον ίδιο τρόπο το κανονικό δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο είναι πολικά σχήματα. Το σχήμα που είναι πολικό του κανονικού τετράεδρου είναι κανονικό τετράεδρο, οι γωνίες του οποίου είναι οι αντίποδες αυτών του πρώτου. Έτσι βρήκαμε τρεις νέες ομάδες, T, W και P, γνήσιων περιστροφών. Είναι αυτές που αφήνουν αναλλοίωτο το κανονικό τετράεδρο, τον κύβο (ή το οκτάεδρο) και το κανονικό δωδεκάεδρο (ή το εικοσάεδρο), αντίστοιχα. Οι τάξεις τους, με άλλα λόγια ο αριθμός των στοιχείων για καθεμιά απ' αυτές, είναι 12, 24 και 60, αντίστοιχα.

Μπορεί να αποδειχτεί με μια σχετικά εύκολη ανάλυση (Παράρτημα Α) ότι με την προσθήκη αυτών των τριών ομάδων ο πίνακάς μας είναι πλήρης:

$$\begin{array}{ll} & C_n \ (n=1, 2, 3, \ldots), \\ (5) & D'_n \ \ (n=2, 3, \ldots)\cdot \\ & T, W, P. \end{array}$$

Αυτό είναι το σύγχρονο ισοδύναμο της ταξινόμησης των κανονικών πολυέδρων από τους αρχαίους Έλληνες. Οι ομάδες αυτές, ιδιαίτερα οι τρεις τελευταίες, αποτελούν ένα πολύ ελκυστικό αντικείμενο για γεωμετρική έρευνα.

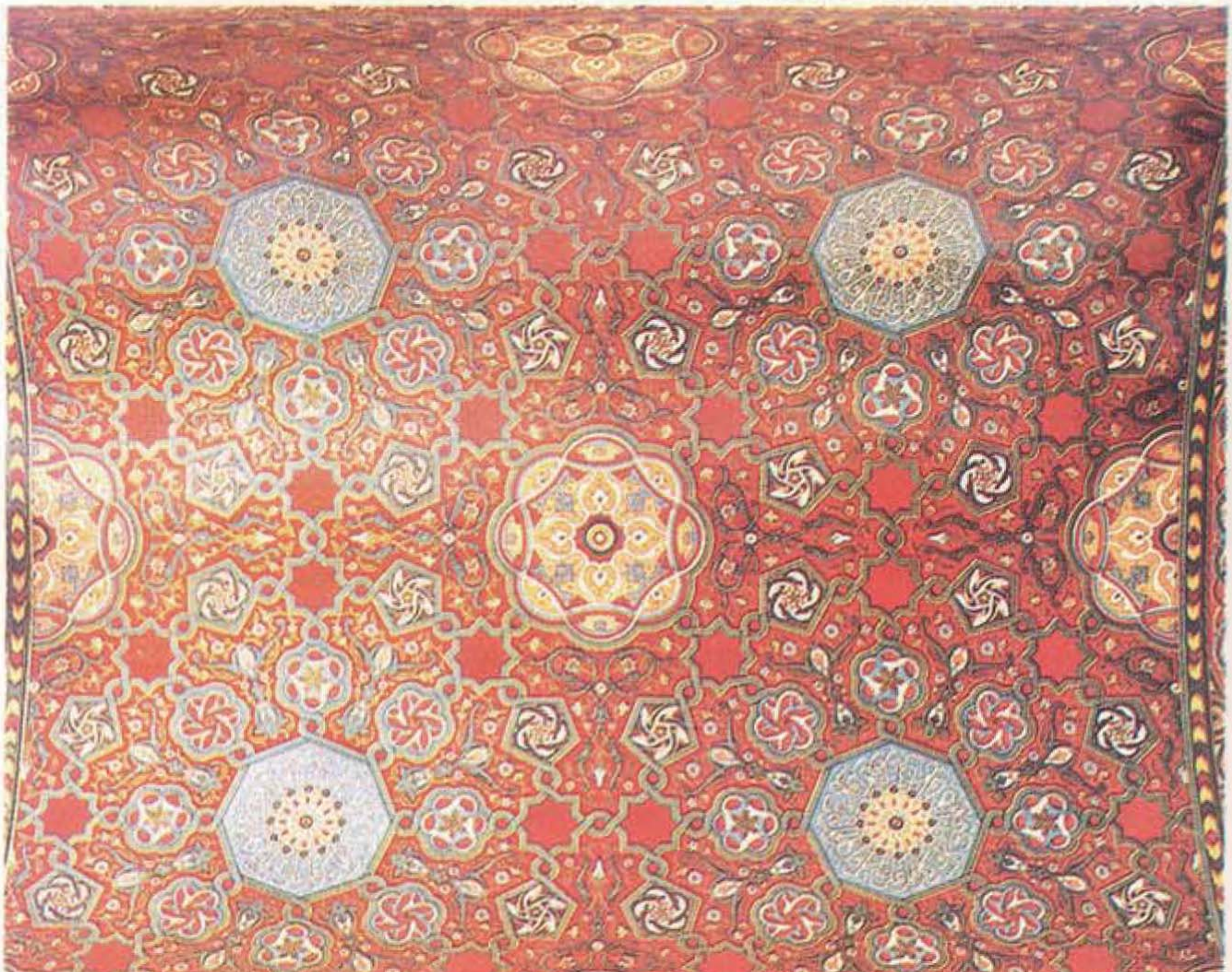
Ποιες περαιτέρω πιθανότητες δημιουργούνται αν γίνουν αποδεκτές στις ομάδες και οι μη γνήσιες περιστροφές; Αυτή η ερώτηση μπορεί να απαντηθεί καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε μια αρκετά ειδική μη γνήσια περιστροφή, συγκεκριμένα τον κατοπτρισμό ως προς σημείο O· μεταφέρει κάθε σημείο P στον αντίποδά του P′ εν σχέσει με το O που βρίσκεται αν ενώσουμε το P με το O και εν συνεχεία προεκτείνουμε την ευθεία PO κατά μήκος $OP' = PO$. Αυτή η διεργασία Z αντιμετατίθεται με κάθε περιστροφή S, $ZS = SZ$. Έστω τώρα ότι Γ είναι μια από τις πεπερασμένες μας ομάδες των γνήσιων περιστροφών. Ένας τρόπος για να συμπεριλάβουμε τις μη γνήσιες περιστροφές είναι να επισυνάψουμε απλώς τη Z, επακριβέστερα προσθέτοντας στις γνήσιες περιστροφές S της Γ όλες τις μη γνήσιες περιστροφές της μορφής ZS (με το S να ανήκει στο Γ). Έτσι η τάξη της ομάδας $\bar{\Gamma} = \Gamma + Z\Gamma$ που παίρνουμε είναι προφανώς διπλάσια της Γ. Άλλος τρόπος για να περιλάβουμε τις μη γνήσιες περιστροφές προκύπτει ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι η Γ περιέχεται σαν υποομάδα τάξης 2 σε μια άλλη ομάδα Γ′ γνήσιων περιστροφών, έτσι ώστε τα μισά των στοιχείων της Γ′ να κείνται στη Γ —ας τα ονομάσουμε αυτά S— και τα άλλα μισά, S′, να μην κείνται. Αντικαθιστούμε τώρα αυτά τα τελευταία με τις μη γνήσιες περιστροφές ZS′. Κατ᾽ αυτό τον τρόπο, έχουμε μια ομάδα Γ′Γ, η οποία περιέχει τη Γ, ενώ τα άλλα μισά από τα στοιχεία της είναι μη γνήσιες πράξεις. Για παράδειγμα, $\Gamma = C_n$ είναι μια υποομάδα τάξης 2 της $\Gamma' = D'_n$· τα στοιχεία S′ της D'_n που δεν περιλαμβάνονται στην C_n είναι οι εναποθέσεις ως προς *n* οριζόντιους άξονες. Οι αντίστοιχες ZS′ είναι οι κατοπτρισμοί ως προς τα κατακόρυφα επίπεδα που είναι κάθετα σ᾽ αυτούς τους άξονες. Έτσι η D'_nC_n αποτελείται από τις περιστροφές ως προς τον κατακόρυφο άξονα, οι γωνίες των οποίων είναι πολλαπλάσια του 360°/n, και από τους κατοπτρισμούς σε κατακόρυφα επίπεδα που διέρχονται απ᾽ αυτό τον άξονα σχηματίζοντας μεταξύ τους γωνίες ίσες με 360°/2n. Θα έλεγε κανείς ότι αυτή είναι η ομάδα που προηγουμένως ονομάστηκε D_n. Ένα άλλο παράδειγμα, το απλούστερο απ᾽ όλα: $\Gamma = C_1$ περιλαμβάνεται στο $\Gamma' = C_2$. Η μία πράξη S′ της C_2 που δεν περιέχεται στη C_1 είναι η περιστροφή κατά 180° ως προς τον κατακόρυφο άξονα· ZS′ είναι ο κατοπτρισμός ως προς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το O. Ως εκ τούτου η C_2C_1 είναι η ομάδα που αποτελείται από την ταυτότητα και από τον κατοπτρισμό ως προς ένα δεδομένο επίπεδο· με άλλα λόγια, είναι η ομάδα που αφορά την αμφίπλευρη συμμετρία.

Οι δύο τρόποι που περιγράφτηκαν είναι οι μόνοι με τους οποίους οι μη γνήσιες περιστροφές μπορούν να συμπεριληφθούν στις ομάδες μας. (Για την απόδειξη, βλέπε το Παράρτημα Β.) Ως εκ τούτου αυτός είναι ο πλήρης πίνακας όλων των πεπερασμένων ομάδων των (γνήσιων και μη γνήσιων) περιστροφών:

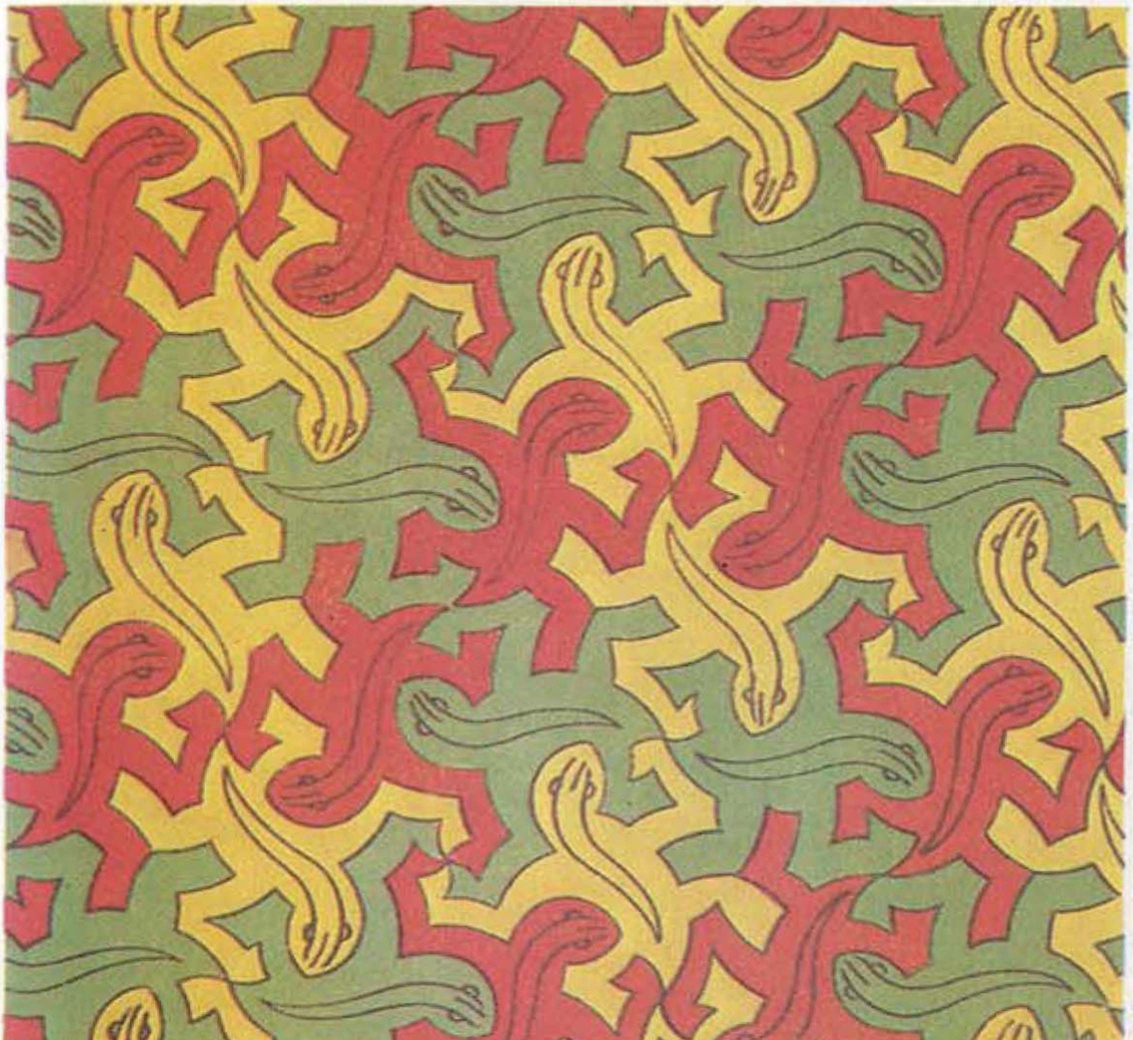
C_n, $\bar{C}_n$, $C_{2n}C_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$
D'_n, $\bar{D}'_n$, D'_nC_n, $D'_{2n}D'_n$ $(\nu = 2, 3, ...)$
T, W, $P\cdot \bar{T}$, $\bar{W}$, $\bar{P}\cdot WT$.

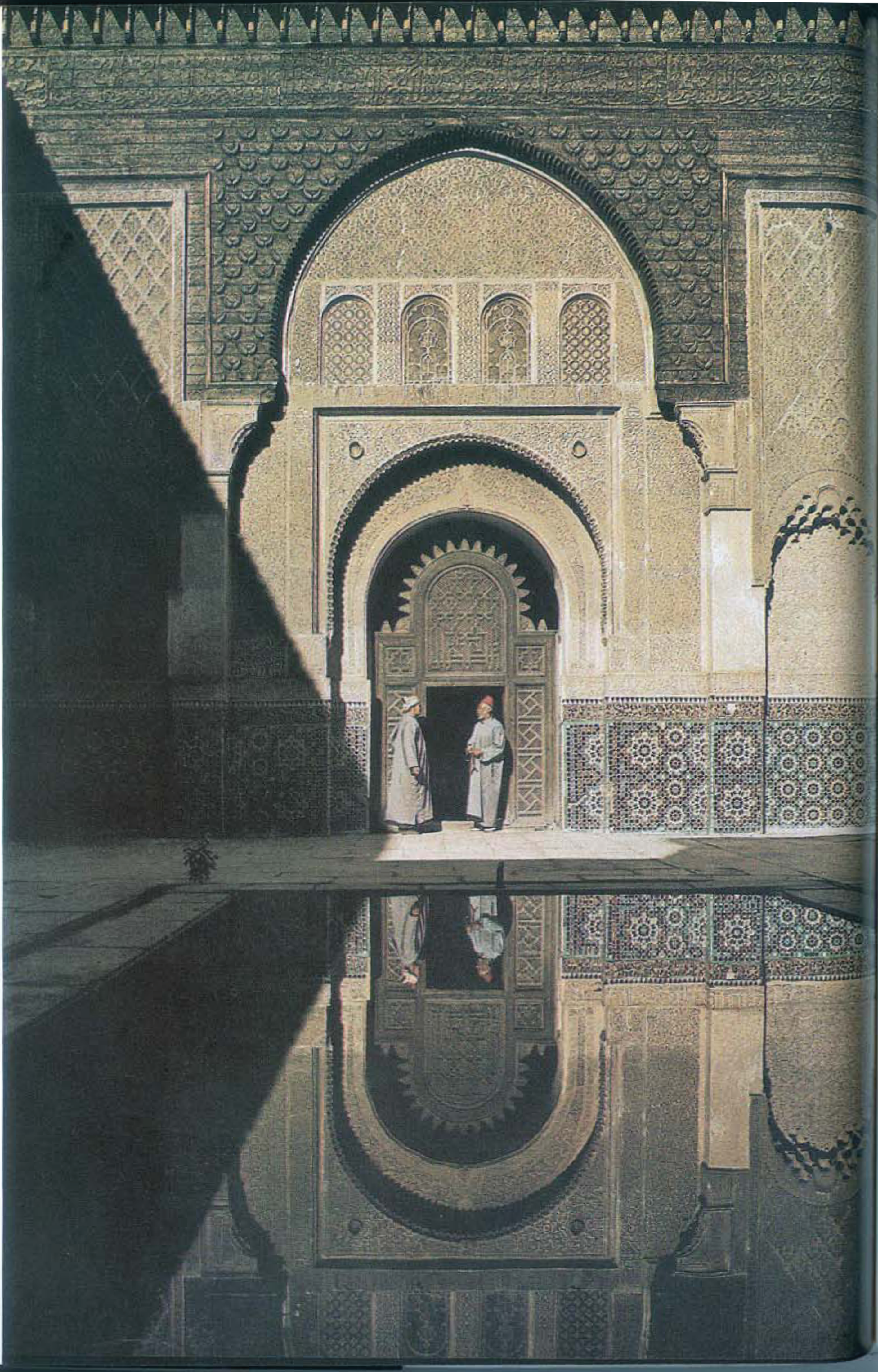
Η τελευταία ομάδα WT γίνεται δυνατή από το γεγονός ότι η τετραεδρική ομάδα T είναι υποομάδα τάξης 2 της οκταεδρικής ομάδας W.

Αυτός ο πίνακας θα μας είναι χρήσιμος όταν, στην τελευταία διάλεξη, θα εξετάζουμε τη συμμετρία των κρυστάλλων.



Διακοσμητική συμμετρία

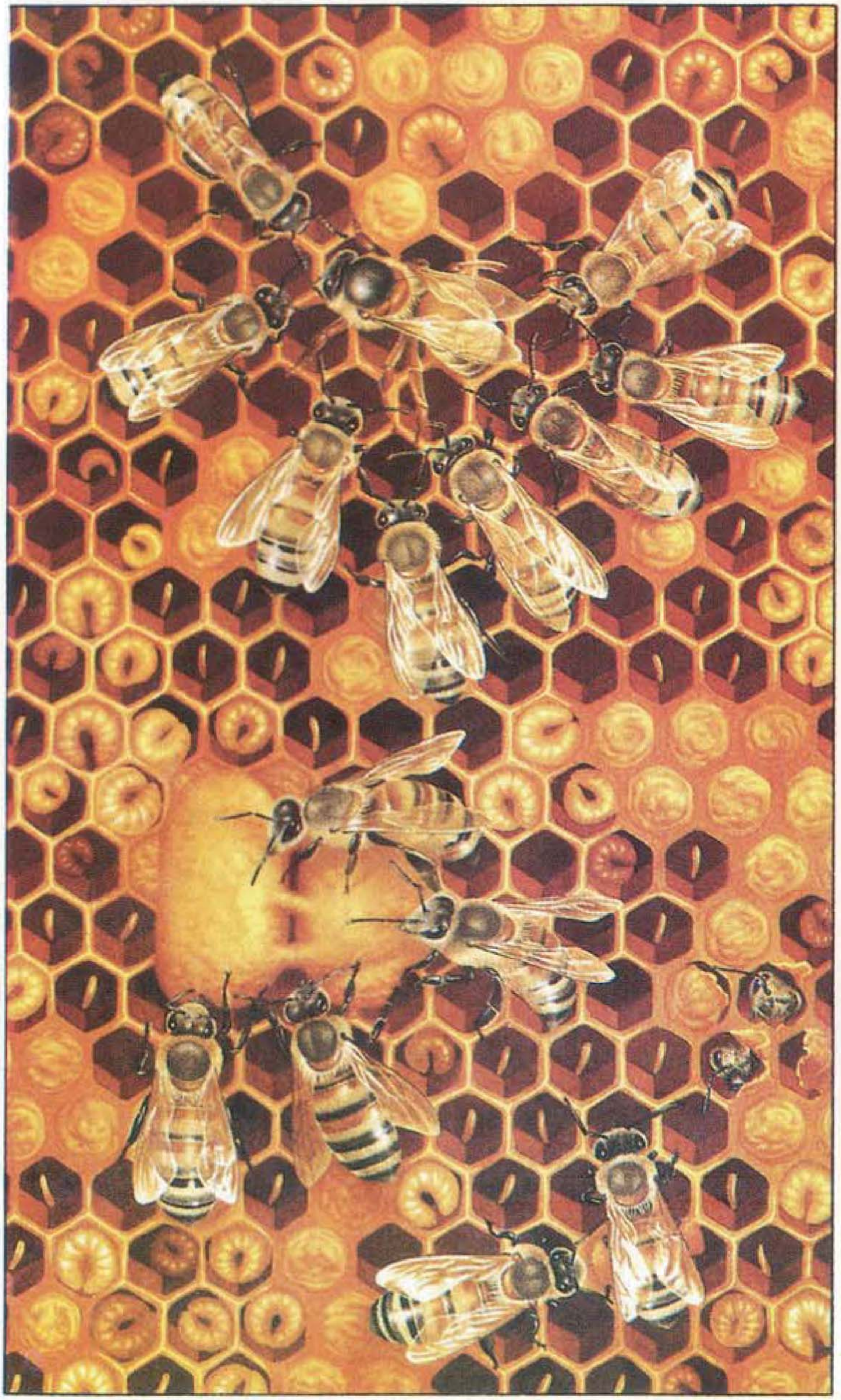




Διακοσμητική συμμετρία

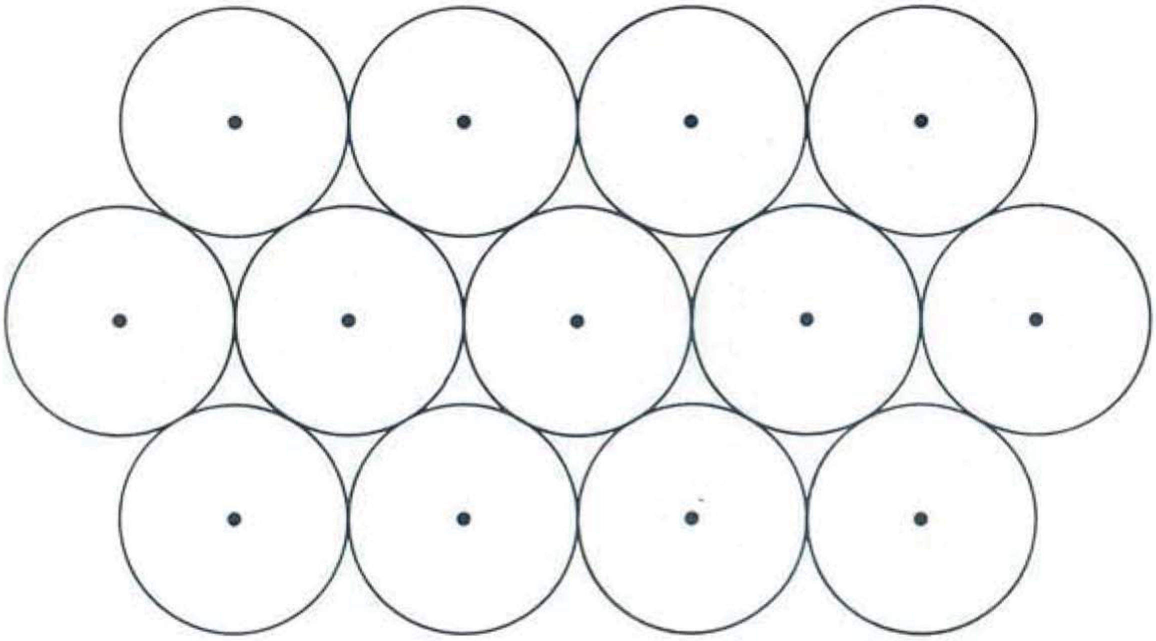
Αυτή η διάλεξη έχει πιο συστηματικό χαρακτήρα από την προηγούμενη, γιατί θα αφιερωθεί σε μιά ειδική μορφή γεωμετρικής συμμετρίας, την πιο περίπλοκη αλλά και την πιο σπουδαία από κάθε άποψη. Στις δύο διαστάσεις η συμμετρία αυτή έχει να κάνει με την τέχνη της διακόσμησης πάνω σε επιφάνειες, στις τρεις διαστάσεις χαρακτηρίζει την οργάνωση των ατόμων μέσα σ' έναν κρύσταλλο. Γι' αυτό θα την ονομάσουμε διακοσμητική ή κρυσταλλογραφική συμμετρία.

Ας ξεκινήσουμε με ένα διακοσμητικό σχέδιο σε δύο διαστάσεις που απαντά ίσως πιο συχνά από οποιοδήποτε άλλο και στην τέχνη και στη φύση: το εξαγωνικό σχέδιο που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα πλακόστρωτα δάπεδα των μπάνιων. Το βλέπετε εδώ σε μια κερήθρα φτιαγμένη σε μια κοινή κυψέλη (Εικόνα 48). Τα κελιά των μελισσών έχουν πρισματική μορφή, η φωτογραφία έχει ληφθεί κατά τη διεύ-



Εικ. 48

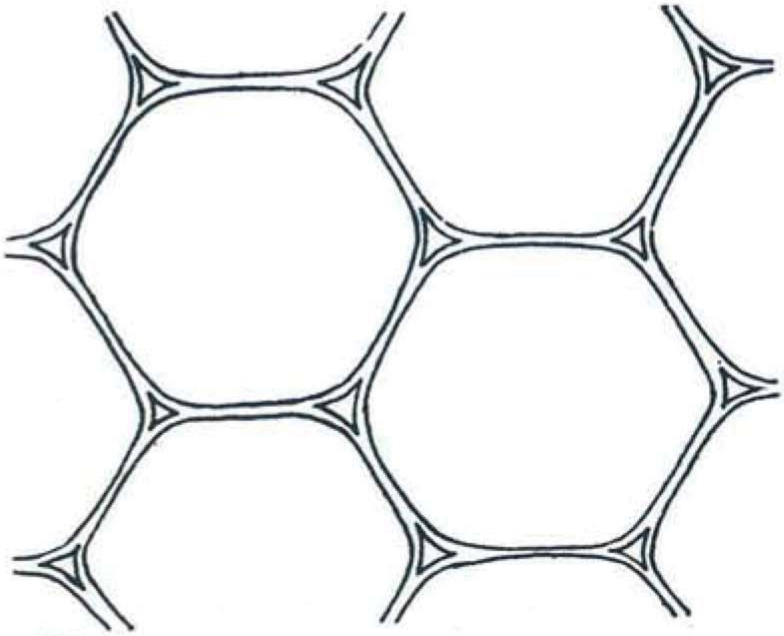
θυνση αυτών των πρισμάτων. Στην πραγματικότητα μια κερήθρα αποτελείται από δύο στιβάδες τέτοιων κελιών και τα πρίσματα της μια στιβάδας βρίσκονται απέναντι από τα πρίσματα της άλλης. Το πώς ταιριάζουν τα εσωτερικά άκρα των δύο αυτών στιβάδων είναι ένα πρόβλημα χώρου που θα μας απασχολήσει εντός ολίγου. Προς το παρόν θα ενδιαφερθούμε για το απλούστερο πρόβλημα σε δύο διαστάσεις. Αν στοιβάξετε μπάλες ή χάντρες σε σωρό, θα διαταχθούν από μόνες τους στο τρισδιάστατο ανάλογο της εξαγωνικής διαμόρφωσης. Στις δύο διαστάσεις το θέμα είναι να διατάξουμε ίσους κύκλους με όσο το δυνατόν πιο συμπαγή τρόπο. Ξεκινάτε με μια οριζόντια σειρά κύκλων που εφάπτονται μεταξύ τους. Αν τοποθετήσετε από πάνω απ' αυτή τη σειρά έναν άλλο κύκλο, θα χωθεί μεταξύ δύο συνεχόμενων κύκλων της σειράς, και τα κέντρα των τριών κύκλων θα σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Από τους υπερκείμενους κύκλους παράγεται μια δεύτερη οριζόντια σειρά από κύκλους χωμένους ανάμεσα σ' αυτούς της πρώτης, και ούτω καθεξής (Εικόνα 49). Οι κύκλοι



Εικ. 49

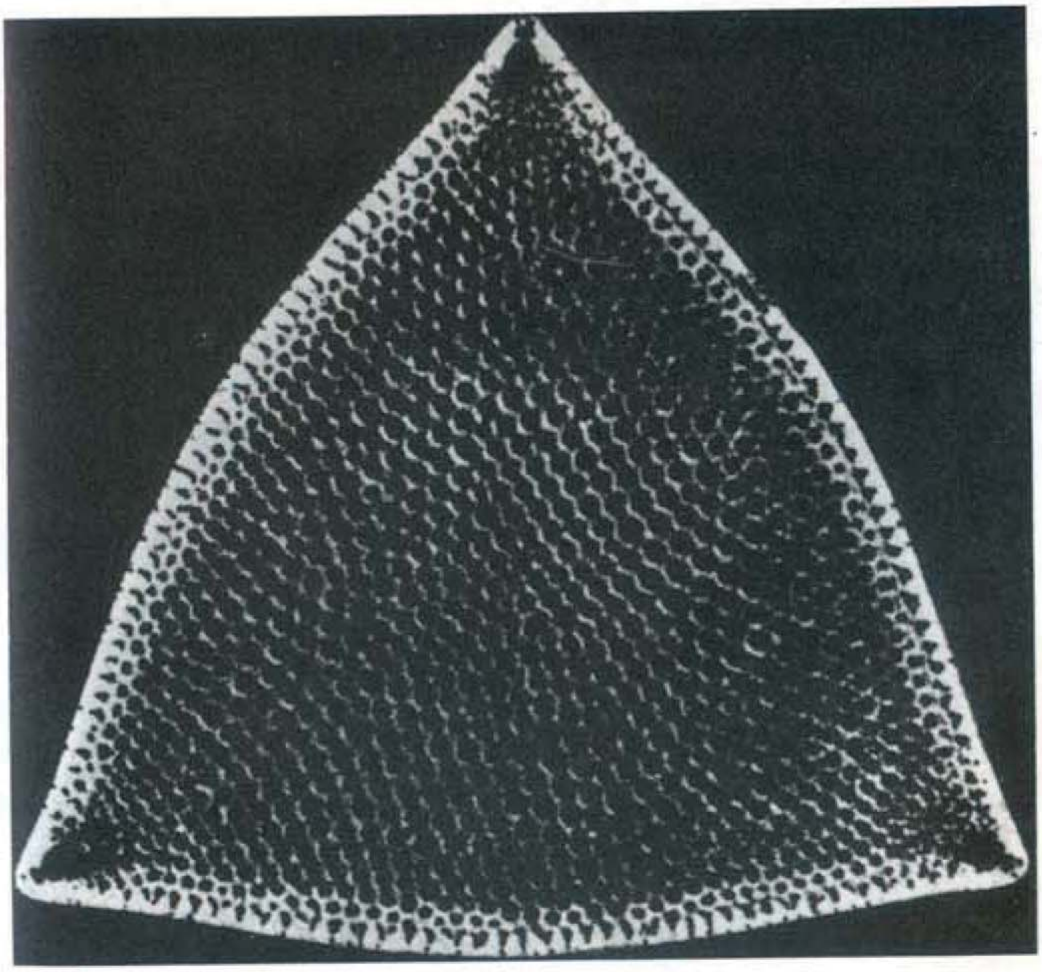
μεταξύ τους αφήνουν μικρά κενά. Οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα σημεία όπου αυτός εγγίζει τους έξι άλλους που τον περιβάλλουν σχηματίζουν ένα κανονικό εξάγωνο που περιγράφει τον κύκλο και, αν αντικαταστήσετε κάθε κύκλο μ' αυτό το εξάγωνο, θα επιτύχετε την κανονική διαμόρφωση των εξαγώνων που επικαλύπτουν ολόκληρο το επίπεδο.

Σύμφωνα με τους νόμους των τριχοειδών αγγείων, μια μεμβράνη από σαπουνάδα περικλεισμένη σε ένα πλαίσιο φτιαγμένο από ψιλό σύρμα παίρνει τη μορφή της μικρότερης δυνατής επιφάνειας, έχει δηλαδή το μικρότερο εμβαδόν από κάθε άλλη επιφάνεια με το ίδιο πλαίσιο. Μια σαπουνόφουσκα μέσα στην οποία φυσάμε αέρα παίρνει σφαιρικό σχήμα γιατί η σφαίρα περικλείει τον δεδομένο όγκο αέρα με τη μικρότερη δυνατή επιφάνεια. Έτσι δεν μας εκπλήσσει που ο αφρός από δύο δισδιάστατες φούσκες ίσης επιφάνειας διατάσσεται από μόνος του κατά το εξαγωνικό σχέδιο, αφού ανάμεσα σε όλες τις επικαλύψεις του επιπέδου σε μέρη ίσης επιφάνειας αυτός είναι εκείνος για τον οποίο το δίκτυο των περιγραμμάτων έχει ελάχιστο μήκος. Υποθέτουμε εδώ ότι το πρόβλημα έχει αναχθεί στις δύο διαστάσεις, αφού έχουμε, ας πούμε, να κάνουμε με μια οριζόντια στιβάδα από σαπουνόφουσκες ανάμεσα σε δύο οριζόντια τζάμια. Ας ο αφρός φυσαλίδων έχει ένα όριο (μια επιδερμική στιβάδα, όπως θα έλεγαν οι βιολόγοι), παρατηρούμε ότι αποτελείται από κυκλικά τόξα που το καθένα σχηματίζει γωνία 120° με το γειτονικό τοίχωμα του κελιού και το επόμενο τόξο, όπως απαιτεί ο νόμος του ελάχιστου μήκους. Μετά απ' αυτή την εξήγηση δεν θα εκπλαγούμε όταν βρούμε αυτό το εξαγωνικό σχέδιο να πραγματοποιείται σε τόσο διαφορετικές δομές όπως, για παράδειγμα, το παρέγχυμα του καλαμποκιού (Εικόνα 50), η χρωστική του αμφιβληστροειδούς των ματιών μας, η επιφάνεια πολλών διατομών, ένα ωραίο δείγμα των οποίων φαίνεται στην Εικόνα 51, και, τέλος, η κερήθρα. Καθώς οι μέλισσες, που είναι όλες σχεδόν του ίδιου μεγέθους, χτίζουν τα

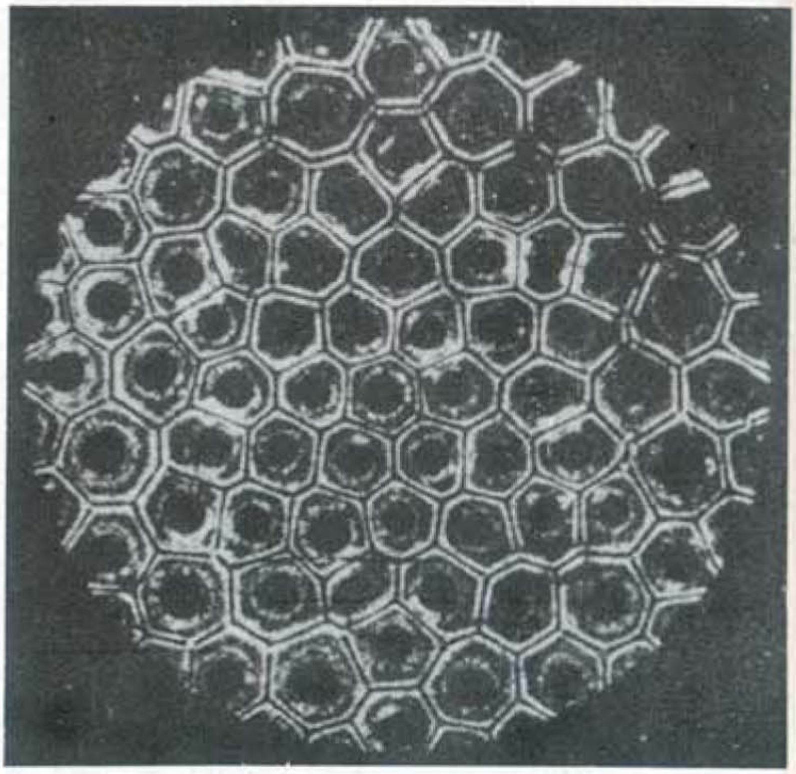


Εικ. 50

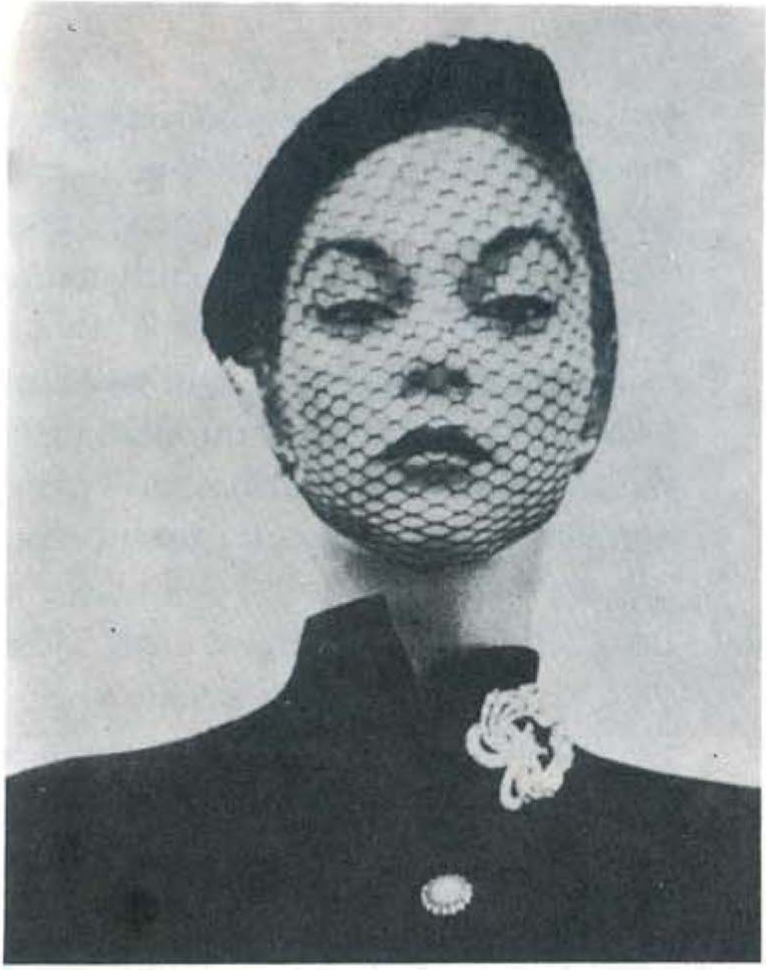
Εικ. 51



κελιά τους περιστρεφόμενες γύρω από αυτά, τα κελιά θα σχηματίζουν μια πυκνότατη διάταξη από παράλληλους κυλίνδρους, η οποία σε εγκάρσια τομή θα φαίνεται όπως το εξαγωνικό σχέδιο με τους κύκλους. Όση ώρα οι μέλισσες εργάζονται, το κερί βρίσκεται σε ημίρρευστη κατάσταση, και έτσι πιθανόν οι δυνάμεις που οφείλονται στα τριχοειδή φαινόμενα περισσότερο από ό,τι οι πιέσεις που ασκούνται από τα σώματα των μελισσών μετασχηματίζουν τους κύκλους σε περιγεγραμμένα εξάγωνα (οι γωνίες των οποίων εξακολουθούν να εμφανίζουν υπολείμματα κυκλικής μορφής). Με το παρέγχυμα του καλαμποκιού μπορείτε να συγκρίνετε αυτό το τεχνητό κυψελοειδές δίκτυο [Εικόνα 52] που έχει σχηματιστεί με διάχυση σε ζελατίνη σταγόνων διαλύματος σιδηροκυανιούχου καλίου $\{K_4[Fe(CN)_6]\}$. Η κανονικότητα δεν είναι εντελώς ικανοποιητική· υπάρχουν ακόμη σημεία όπου έχει περάσει λαθραία ένα πεντάγωνο αντί για εξάγωνο. Στις Εικόνες 53 και 54 δίνουμε δύο άλλα τεχνητά δίκτυα εξαγω-



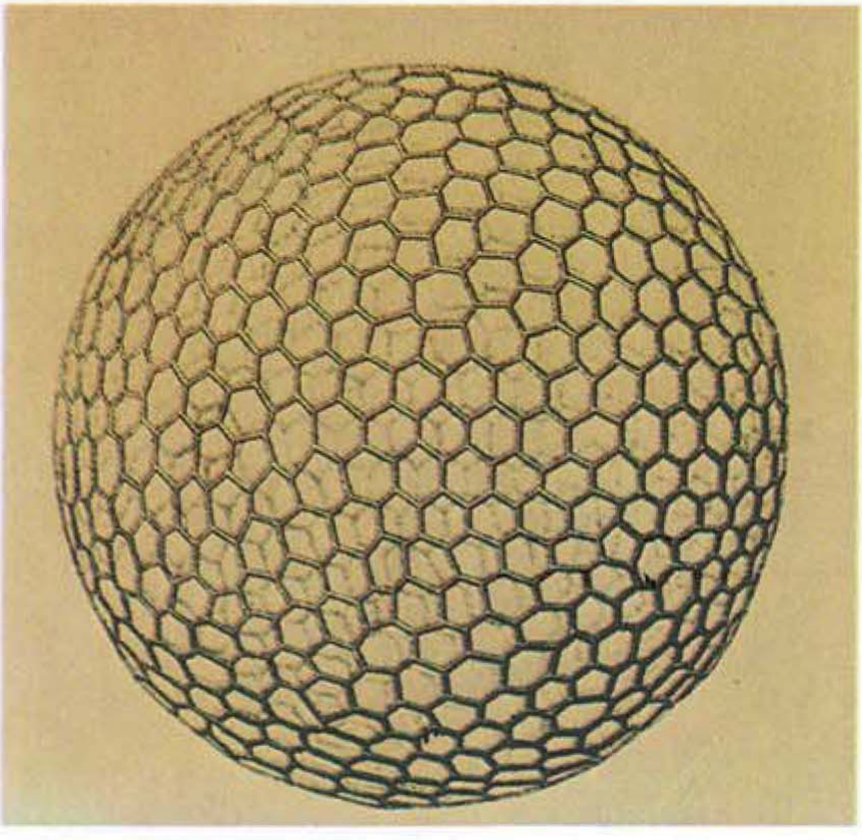
Εικ. 52



Εικ. 53

Εικ. 54

νικού σχεδίου που έχουν ληφθεί στην τύχη από μια πρόσφατη έκδοση του περιοδικού μόδας *Vogue* (Φεβρουάριος 1951). Ο πυριτικός σκελετός ενός από τα Ακτινόζωα του Haeckel, που το ονόμαζε *Aulonia hexagona* (Εικόνα 55), φαίνεται να επιδεικνύει ένα πάρα πολύ κανονικό εξαγωνικό σχέδιο που καταλαμβάνει όχι ένα επίπεδο αλλά σφαίρα. Όμως ένα εξαγωνικό δίχτυ που καλύπτει μια σφαίρα είναι αδύνατο, εξαιτίας ενός θεμελιώδους τύπου της τοπολογίας. Αυτός ο τύπος αναφέρεται σε μια αυθαίρετη διαμέριση μιας σφαίρας σε περιοχές που συνορεύουν η μία με την άλλη κατά μήκος ορισμένων ακμών. Ορίζει ότι ο αριθμός Ε των περιοχών, ο αριθμός Α των ακμών και ο αριθμός Κ των κορυφών (όπου τουλάχιστον τρεις περιοχές συναντώνται μεταξύ τους) ικανοποιεί τη σχέση $K+E-A=2$. Για ένα εξαγωνικό δίχτυ θα είχαμε $A=3E$, $K=2E$ και ως εκ τούτου $K+E-A=2E+E-3E=0$! Και πραγματικά βλέπουμε ότι μερικοί από τους βρόχους στο δίχτυ της *Aulonia* δεν είναι εξάγωνα αλλά πεντάγωνα.



Εικ. 55

Από την πιο πυκνή διάταξη κύκλων στο επίπεδο, ας περάσουμε τώρα στην πιο πυκνή διάταξη ισομεγέθων σφαιρών στο χώρο. Ξεκινάμε με μια μπάλα κι ένα επίπεδο, το «οριζόντιο επίπεδο» που διέρχεται από το κέντρο της. Στην πιο πυκνή συσσωμάτωση, αυτή η μπάλα θα εφάπτεται σε δώδεκα άλλες («όπως τα σπυριά μέσα σ' ένα ρόδι», κατά τον Κέπλερ), έξι στο οριζόντιο επίπεδο, τρεις από πάνω και τρεις από κάτω[1]. Αν είναι αδύνατη η αμοιβαία διείσδυση, οι μπάλες σ' αυτή τη διάταξη, κάτω από μια ομοιόμορφη ανάπτυξη ως προς τα σταθερά κέντρα τους, θα σχηματίσουν ρομβικά δωδεκάεδρα* που επικαλύπτουν πλήρως το χώρο. Σημειώστε ότι το κάθε δωδεκάεδρο δεν είναι κανονικό στερεό — ενώ στο αντίστοιχο πρόβλημα στις δύο διαστάσεις προκύπτει ένα κανονικό εξάγωνο (βλ. Σχήμα 49)! Τα κελιά των μελισσών αποτελούνται από το κάτω ήμισυ ενός τέτοιου δωδεκάεδρου με τις έξι κάθετες πλευρές προεκτεινόμενες έτσι ώστε να σχηματίσουν ένα εξαγωνικό πρίσμα με ανοιχτό το ένα του άκρο. Πολλά έχουν γραφεί για το ζήτημα της γεωμετρίας μιας κερήθρας. Οι παράξενες κοινωνικές συνήθειες των μελισσών και το γεωμετρικό τους ταλέντο δεν μπορούσαν παρά να τραβήξουν την προσοχή και να διεγείρουν το θαυμασμό των παρατηρητών και εξερευνητών τους. «Το σπίτι μου», λέει η μέλισσα στις *Χίλιες και μία Νύχτες*, «είναι κατασκευασμένο σύμφωνα με τους νόμους της πιο αυστηρής αρχιτεκτονικής· και ο ίδιος ο Ευκλείδης θα μπορούσε να μάθει από τη μελέτη της γεωμετρίας του κελιού μου»*. Ο

1. Η διάταξη προσδιορίζεται μονοσήμαντα μόνο αν προϋποθέσουμε ότι τα κέντρα σχηματίζουν δικτυωτό. Για τον ορισμό του δικτυωτού βλέπε σελ. 78· για πληρέστερη ανάλυση του προβλήματος, D. Hilbert και S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Βερολίνο, 1932, σελ. 40-41, και H. Minkowski, *Diophantische Approximationem*, Λειψία, 1907, σελ. 105-111.

* Ο Πάππος στη *Συναγωγή* του, ένα σπουδαίο αρχαίο ελληνικό μαθηματικό κείμενο, εξαίρει κι αυτός τις γεωμετρικές γνώσεις των μελισσών

Maraldi** φέρεται να είναι ο πρώτος που πραγματοποίησε το 1712 αρκετά ακριβείς μετρήσεις και βρήκε ότι οι τρεις ρόμβοι στο κάτω μέρος του κελιού έχουν μια αμβλεία γωνία α περίπου 110° και ότι η γωνία β που σχηματίζουν με τις πλευρές του πρίσματος έχει την ίδια τιμή. Υπέβαλε στον εαυτό του τη γεωμετρική ερώτηση ποια πρέπει να είναι η γωνία α του ρόμβου ώστε να συμπίπτει ακριβώς με τη δεύτερη γωνία β. Βρίσκει $\alpha=\beta=109°28'$ και έτσι δέχεται ότι οι μέλισσες είχαν λύσει αυτό το γεωμετρικό πρόβλημα. Όταν οι αρχές του ελαχίστου εισήχθησαν στη μελέτη των καμπυλών και στη μηχανική, η άποψη ότι η τιμή τής α καθορίζεται για οικονομία του κεριού δεν ήταν εξεζητημένη· με οποιαδήποτε άλλη γωνία θα χρειαζόταν περισσότερο κερί για να σχηματιστούν κελιά του ίδιου όγκου. Αυτή η εικασία του Réaumur επιβεβαιώθηκε από τον Ελβετό μαθηματικό Samuel Koenig. O Koenig με κάποιον τρόπο πήρε τη θεωρητική τιμή του Maraldi σαν τιμή που είχε πραγματικά μετρηθεί και βρίσκοντας ότι η δική του θεωρητική τιμή βασισμένη στην αρχή του ελαχίστου είχε απόκλιση από εκείνη κατά 2′ (οφειλόμενη σε σφάλμα των πινάκων που χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό της $\sqrt{2}$), συμπέρανε ότι οι μέλισσες διαπράττουν ένα σφάλμα το πολύ κατά 2′ όταν λύνουν αυτό το πρόβλημα ελαχίστου, για το οποίο λέει ότι ξεπερνά τις δυνατότητες τις κλασικής γεωμετρίας και απαιτεί τις μεθόδους του Νεύτωνα και του Λάιμπνιτς. Η συζήτηση που επακολούθησε στη Γαλλική Ακαδημία συνοψίστηκε από τον ισόβιο γραμματέα της Fontenelle σε μια φημισμένη απόφανση στην οποία αρνήθηκε στις μέλισσες τη γεωμετρική ευ-

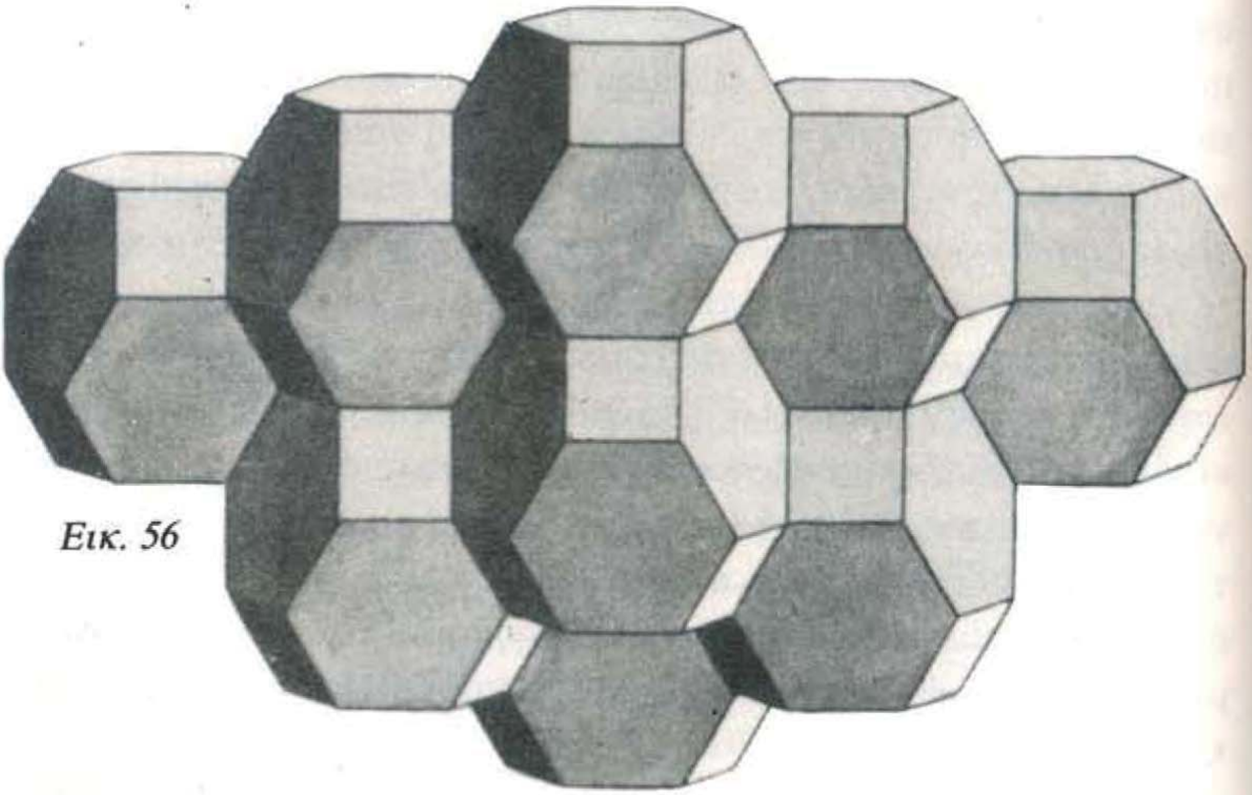
για τη σοφία τους να χτίζουν τις κερήθρες τους εξαγωνικές, περικλείοντας έτσι τον μέγιστο δυνατό όγκο με ελάχιστη περίμετρο μεταξύ των πλακοστρώσεων του επιπέδου με κανονικά πολύγωνα. (Σ.τ.επιστ. συμβ.).

** Τζάκομο Φίλιππο Μαράλντι (1665 - 1729): Γάλλος αστρονόμος και γεωδαίτης. (Σ.τ.μ.).

φυΐα ενός Νεύτωνα και ενός Λάιμπνιτς, αλλά κατέληξε ότι αυτές, χρησιμοποιώντας τα ανώτερα μαθηματικά, υπάκουαν σε θεία καθοδήγηση και εντολή. Στην πραγματικότητα, τα κελιά δεν είναι τόσο κανονικά όσο υπέθεσε ο Koenig και είναι δύσκολο να μετρηθούν οι γωνίες χωρίς απόκλιση αρκετών μοιρών. Αλλά πάνω από εκατό χρόνια μετά, ο Δαρβίνος μιλούσε ακόμη για την αρχιτεκτονική των μελισσών σαν «το πιο υπέροχο από τα γνωστά ένστικτα» και πρόσθετε: «Πέρα απ᾿ αυτό το στάδιο της τελειότητας στην αρχιτεκτονική, η φυσική επιλογή (η οποία τώρα έχει αντικαταστήσει τη θεία καθοδήγηση!) δεν θα μπορούσε να προχωρήσει περισσότερο· γιατί η κερήθρα της κυψέλης, όσο μπορούμε να δούμε, είναι απολύτως τέλεια στην εξοικονόμηση εργασίας και κεριού».

Όταν αποκόψουμε τις έξι γωνίες ενός οκτάεδρου με κατάλληλο συμμετρικό τρόπο, παίρνουμε ένα πολύεδρο που περικλείεται από 6 τετράγωνα και 8 εξάγωνα. Αυτό το δεκατετράεδρο ήταν γνωστό στον Αρχιμήδη και ανακαλύφθηκε ξανά από τον Ρώσο κρυσταλλογράφο Fedorow. Αντίγραφα αυτού του στερεού που λαμβάνονται από κατάλληλες μεταφορές είναι ικανά να καλύψουν πλήρως το χώρο χωρίς επικαλύψεις και κενά, όπως ακριβώς και το ρομβικό δωδεκάεδρο (Εικόνα 56). Στη διάλεξή του στη Βαλτιμόρη ο λόρδος Kelvin* απέδειξε πως πρέπει να παραμορφωθούν οι έδρες του και να καμπυλωθούν οι ακμές του για να επιτευχθεί η κατάσταση του ελάχιστου εμβαδού. Αν γίνει αυτό, ο διαμερισμός του χώρου σε ίσα και παράλληλα δεκατετράεδρα δίνει ακόμη μεγαλύτερη οικονομία στην επιφάνεια εν σχέσει με

* Kelvin (1824 - 1907)· πλήρες όνομα πριν γίνει λόρδος: Γουίλιαμ Τόμσον, 1ος βαρόνος Κέλβιν του Λαργκς, γνωστός και ως Σερ Γουίλλιαμ Τόμσον ή, μετά, λόρδος Κέλβιν. Βρετανός φυσικός, μαθηματικός και μηχανικός, γνωστός και από την καθιέρωση της απόλυτης κλίμακας της θερμοκρασίας που φέρει το όνομά του. (Σ.τ.μ.).

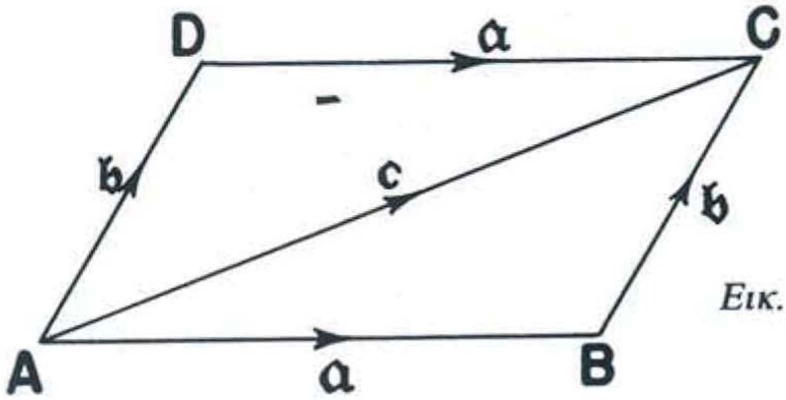


Εικ. 56

τον όγκο απ' ό,τι τα ρομβικά δωδεκάεδρα με τις επίπεδες έδρες. Τείνω να πιστέψω ότι η διαμόρφωση του λόρδου Kelvin δίνει το απόλυτο ελάχιστο· αλλά, απ' ό,τι γνωρίζω, αυτό δεν έχει αποδειχτεί ποτέ.

Ας επιστρέψουμε τώρα από τον τρισδιάστατο χώρο στο δισδιάστατο επίπεδο και ας ασχοληθούμε με μια πιο συστηματική έρευνα της συμμετρίας με διπλή άπειρη σχέση. Πρώτα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε αυτή την έννοια. Όπως μνημονεύτηκε πριν, οι μεταφορές, οι παράλληλες μετατοπίσεις ενός επιπέδου σχηματίζουν ομάδα. Μια μεταφορά a μπορεί να περιγραφεί πλήρως ορίζοντας το σημείο A′ στο οποίο μεταφέρεται δεδομένο σημείο A. Η μεταφορά ή το διάνυσμα $\overrightarrow{BB'}$ είναι η ίδια με τη μεταφορά $\overrightarrow{AA'}$ αν το $\overrightarrow{BB'}$ είναι παράλληλο με το $\overrightarrow{AA'}$ και έχει το ίδιο μήκος. Η σύνθεση των μεταφορών συνήθως σημειώνεται με το σημείο +. Έτσι a+b είναι η μεταφορά που προκύπτει εκτελώντας πρώτα τη μεταφορά a και ύστερα την b. Αν η a μεταφέρει το σημείο A στο B και η b μεταφέρει το B στο C, τότε η c = a+b μεταφέρει το A στο

C και μπορεί έτσι να σημειωθεί με το διαγώνιο διάνυσμα $\vec{AC}$ στο παραλληλόγραμμο ABCD. Εφόσον εδώ $\vec{AD} = \vec{BC} = b$ και $\vec{DC} = \vec{AB} = a$ (Σχήμα 57), ισχύει ο αντιμεταθετικός νόμος $a+b=b+a$ για τη σύνθεση των μεταφορών ή, όπως επίσης λέμε συνήθως, για την πρόσθεση διανυσμάτων. Αυτή η πρόσθεση των διανυσμάτων δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο τρό-



Εικ. 57

πος με τον οποίο συνθέτουμε δύο δυνάμεις a, b για να βρούμε τη συνισταμένη τους $a+b=c$ σύμφωνα με το αποκαλούμενο παραλληλόγραμμο των δυνάμεων. Έχουμε την ταυτότητα ή το μηδενικό διάνυσμα o το οποίο μεταφέρει κάθε σημείο στον εαυτό του, και κάθε μεταφορά a έχει την αντίθετή της $-a$ τέτοια ώστε $a+(-a)=0$. Είναι φανερό τι συμβολίζουν τα 2a, 3a, 4a, ..., συγκεκριμένα, $a+a$, $a+a+a$, $a+a+a+a$ κτλ. Ο γενικός κανόνας με τον οποίο ορίζεται το πολλαπλάσιο na για κάθε ακέραιο *n*, θετικό, μηδέν ή αρνητικό, εκφράζεται από τους τύπους

$$(n+1)a=(na)+a \text{ και } 0a=o.$$

Το διάνυσμα $b=1/3a$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $3b=a$. Ως εκ τούτου είναι φανερό τι σημαίνει λα, αν το λ είναι το κλάσμα *m/n* με ακέραιο αριθμητή *m* και ακέραιο παρονομαστή *n*, για παράδειγμα 2/3 ή −6/13· και ακόμη περαιτέρω, λόγω συνέχειας, είναι φανερό τι σημαίνει για κάθε πραγματικό αριθμό λ, είτε είναι ρητός είτε άρρητος. Δύο διανύσματα e_1, e_2 είναι γραμμικά, ανεξάρτητα αν κανένας γραμμικός συνδυασμός αυτών $x_1e_1+x_2e_2$ δεν είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, εκτός εάν οι δύο πραγματικοί αριθμοί x_1 και x_2 είναι μηδέν. Το επίπεδο είναι δισδιάστατο γιατί κάθε διάνυσμα v μπορεί να παρασταθεί μονοσήμαντα με έναν τέτοιο γραμμικό συνδυασμό $x_1e_1+x_2e_2$ δύο σταθερών γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων e_1, e_2. Οι συντελεστές x_1, x_2 ονομάζονται συντεταγμένες του v σε σχέση με τα βασικά διανύσματα (e_1, e_2). Αφού ορίσουμε ένα σταθερό σημείο O σαν αρχή (και τα βασικά διανύσματα e_1, e_2), μπορούμε να προσδιορίσουμε για κάθε σημείο X δύο συντεταγμένες x_1, x_2 σύμφωνα με τις οποίες $\vec{OX}=x_1e_1+x_2e_2$ και, αντίστροφα, αυτές οι συντεταγμένες x_1, x_2 καθορίζουν τη θέση του X σε σχέση με το «σύστημα των συντεταγμένων» (O, e_1, e_2).

Λυπάμαι που έπρεπε να σας ταλαιπωρήσω μ' αυτά τα στοιχεία από την αναλυτική γεωμετρία. Ο σκοπός αυτής της επινόησης του Καρτέσιου δεν ήταν άλλος από το να δώσει *ονόματα* στα σημεία X του επιπέδου με τα οποία μπορούμε να τα διακρίνουμε και να τα αναγνωρίσουμε. Αυτό έπρεπε να γίνει με συστηματικό τρόπο, γιατί υπάρχουν άπειρα απ' αυτά· και είναι ακόμη πιο αναγκαίο, καθώς τα σημεία, αντίθετα από τους ανθρώπους, είναι όλα τελείως όμοια και, ως εκ τούτου, μπορούμε να τα διακρίνουμε μόνο κολλώντας ετικέτες πάνω τους. Τα ονόματα που χρησιμοποιούμε συμβαίνει να είναι ζεύγη αριθμών (x_1, x_2).

Εκτός από τον αντιμεταθετικό νόμο, η πρόσθεση διανυσμάτων —ακριβέστερα η σύνθεση οσωνδήποτε μετασχηματισμών— πληροί τον προσεταιριστικό νόμο

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

Για τον πολλαπλασιασμό των διανυσμάτων a, b, ... με πραγματικούς αριθμούς λ, μ, ... έχουμε το νόμο

$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$$

και τους δύο επιμεριστικούς νόμους

$$(\lambda+\mu)a=(\lambda a)+(\mu a),$$
$$\lambda(a+b)=(\lambda a)+(\lambda b).$$

Πρέπει να δούμε τώρα πώς οι συντεταγμένες (x_1, x_2) ενός αυθαίρετου διανύσματος v αλλάζουν καθώς περνάμε από ένα ζεύγος βασικών διανυσμάτων (e_1, e_2) σε ένα άλλο (e'_1, e'_2). Τα διανύσματα e'_1, e'_2 εκφράζονται ως προς τα e_1, e_2 και αντίστροφα:

(1) $e'_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2$, $\quad e'_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2$ $\quad$ και

(1)′ $e_1=a'_{11}e'_1+a'_{21}e'_2$, $\quad e_2=a'_{12}e'_1+a'_{22}e'_2$

Ας παρασταθεί το αυθαίρετο διάνυσμα v ως προς τα μεν ή τα δε βασικά διανύσματα

$$v=x_1e_1+x_2e_2=x'_1e'_1+x'_2e'_2$$

Αντικαθιστώντας την (1) στα e'_1, e'_2 ή την (1′) στα e_1, e_2, βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες x_1, x_2, σε σχέση με τα πρώτα βασικά διανύσματα, συνδέονται με τις συντεταγμένες x'_1, x'_2, του δεύτερου συστήματος με τους δύο αμοιβαία αντίστροφους «ομογενείς γραμμικούς μετασχηματισμούς»

(2) $x_1=a_{11}x'_1+a_{12}x'_2$, $\quad x'_2=a'_{21}x'_1+a'_{22}x'_2$,

(2′) $x'_1=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2$, $\quad x'_2=a'_{21}x_1+a'_{22}x'_2$

Οι συντεταγμένες x μεταβάλλονται καθώς μεταβάλλεται το διάνυσμα v αλλά οι συντελεστές

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ , & a_{12} \\ a_{21}\ , & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a'_{11}\ , & a'_{12} \\ a'_{21}\ , & a'_{22} \end{pmatrix}$$

παραμένουν σταθεροί. Είναι εύκολο να βρούμε κάτω από ποιες συνθήκες ένας γραμμικός μετασχηματισμός όπως ο (2) έχει αντίστροφο, συγκεκριμένα, αν και μόνον αν η επονομαζόμενη ορίζουσα $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ είναι διαφορετική του μηδενός.

Εφόσον δεν χρησιμοποιούμε άλλες έννοιες εκτός απ' αυτές που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, δηλαδή (1) την πρόσθεση διανυσμάτων $a+b$, (2) τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος a επί έναν αριθμό λ, (3) την πράξη με την οποία δύο σημεία A,B προσδιορίζουν το διάνυσμα $\vec{AB}$, και έννοιες λογικά καθοριζόμενες σε σχέση με αυτές, κάνουμε ομοπαραλληλική γεωμετρία. Στην ομοπαραλληλική γεωμετρία κάθε διανυσματική βάση e_1, e_2 είναι το ίδιο πρόσφορη όσο οποιαδήποτε άλλη. Η έννοια του *μήκους* $|v|$ ενός διανύσματος υπερβαίνει τα όρια της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας και είναι βασική για τη μετρική γεωμετρία. Το τετράγωνο του μήκους ενός αυθαίρετου διανύσματος v είναι μια τετραγωνική μορφή

(3) $$g_{11}x_1^2+2g_{12}x_1x_2+g_{22}x_2^2$$

των συντεταγμένων του με σταθερούς συντελεστές g_{11}, g_{12}, g_{22}. Αυτό είναι το ουσιαστικό περιεχόμενο του θεωρήματος του Πυθαγόρα. Η μετρική βασική σχέση (3) είναι θετικά ορισμένη, δηλαδή η τιμή της είναι θετική για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών x_1, x_2 εκτός από τις $x_1=x_2=0$. Υπάρχει ένα ειδικό σύστημα συντεταγμένων, το καρτεσιανό σύστημα, στο οποίο αυτή η σχέση λαμβάνει την απλή έκφραση $x_1^2+x_2^2$· αποτελείται από δύο διανύσματα e_1, e_2 κάθετα μεταξύ τους και ίσου μήκους 1. Στη μετρική γεωμετρία όλα τα συστήματα καρτεσιανών συντεταγμένων είναι εξίσου επιτρεπτά. Μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο πραγματοποιείται από έναν *ορθογώνιο μετασχηματισμό*, με άλλα λόγια από έναν ομογενή γραμμικό μετασχηματισμό (2), (2′) ο οποίος αφήνει την παράσταση $x_1^2+x_2^2$ αναλλοίωτη, $x_1^2+x_2^2=x'^2_1+x'^2_2$.

Αλλά με μια μικρή τροποποίηση ένας τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί επίσης να ερμηνευτεί ως η αλγεβρική έκφραση μιας περιστροφής. Αν με μια περιστροφή ως προς ένα σημείο O τα καρτεσιανά βασικά διανύσματα e_1, e_2 περνούν στην καρτεσιανή βάση e'_1, e'_2, τότε το διάνυσμα $v=x_1e_1+x_2e_2$ γίνεται το $v'=x_1e'_1+x_2e'_2$ και, αν γράψουμε αυτή τη σχέση σαν $x'_1e_1+x'_2e_2$, χρησιμοποιώντας την αρχική βάση (e_1, e_2) σαν σύστημα αναφοράς, βλέπουμε ότι το διάνυσμα με συντεταγμένες x_1, x_2 γίνεται εκείνο με συντεταγμένες x'_1, x'_2, όπου

$$x_1e'_1+x_2e'_2=x'_1e_1+x'_2e_2$$

και ως εκ τούτου

(4) $$x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\quad x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$$

[οι τύποι (2) με τα ζεύγη (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) εναλλασσόμενα].

Αν τα διανύσματα αντικατασταθούν από σημεία, οι ομογενείς γραμμικοί μετασχηματισμοί αντικαθίστανται όλοι από μη ομογενείς.

Έστω (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) οι συντεταγμένες του ίδιου τυχαίου σημείου X ως προς δύο συστήματα συντεταγμένων (O, e_1, e_2), (O', e'_1, e'_2). Τότε έχουμε

$$\vec{OX} = x_1e_1+x_2e_2\ ,\ \vec{O'X} = x'_1e'_1+x'_2e'_2$$

και αφού $\vec{OX} = \vec{OO'}+\vec{O'X}$

(5) $$x_i = a_{i1}x'_1+a_{i2}x'_2+b_i\ (i = 1,2)$$

όπου έχουμε θέσει $\vec{OO'} = b_1e_1+b_2e_2$. Οι μη ομογενείς μετασχηματισμοί διαφέρουν από τους ομογενείς κατά τον πρόσθετο όρο b_i.

Η απεικόνιση

(6) $$x'_i = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+b_i\ (i = 1,2)$$

που μεταφέρει το σημείο (x_1, x_2) στο σημείο (x'_1, x'_2) εκφράζει μια ισομετρία, αρκεί το ομογενές μέρος του μετασχηματισμού

(4) $$x'_i = a_ix_1+a_{i2}x_2\ (i = 1,2)$$

που δίνει την αντίστοιχη απεικόνιση των διανυσμάτων, να είναι ορθογώνιο. (Εδώ βέβαια οι συντεταγμένες αναφέρονται στο ίδιο σταθερό σύστημα συντεταγμένων.) Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες ονομάζουμε και τους μη ομογενείς μετασχηματισμούς ορθογώνιους. Ιδιαίτερα μια μεταφορά κατά το διάνυσμα (b_1, b_2) εκφράζεται με το μετασχηματισμό

$$x'_1 = x_1+b_1,\ x'_2 = x_2+b_2.$$

Επιστρέφουμε τώρα στον πίνακα του Λεονάρντο των πεπερασμένων ομάδων περιστροφών στο επίπεδο

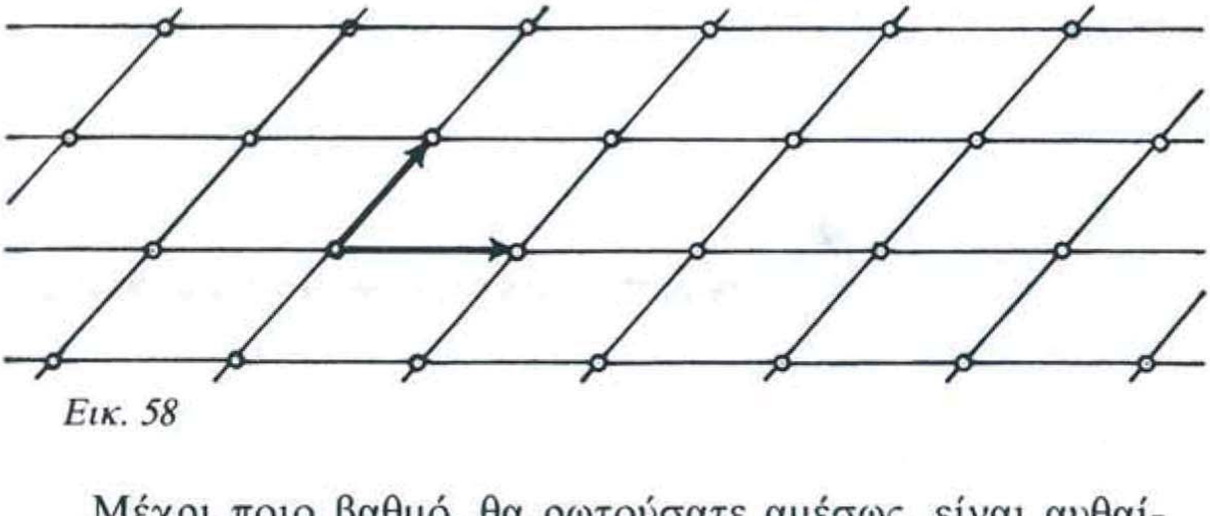
(7) $$\begin{cases} C_1, C_2, C_3, \ldots \\ D_1, D_2, D_3, \ldots . \end{cases}$$

Η αλγεβρική έκφραση των πράξεων σε μια από τις ομάδες C_n δεν εξαρτάται από την εκλογή των καρτεσιανών βασικών διανυσμάτων. Αυτό όμως δεν είναι έτσι για τις ομάδες D_n· εδώ ομαλοποιούμε την αλγεβρική έκφραση εισάγοντας σαν πρώτο βασικό διάνυσμα e_1 ένα διάνυσμα που κείται σε έναν από τους κατοπτρικούς άξονες. Μια ομάδα περιστροφών εκφράζεται σε σχέση με το σύστημα των καρτεσιανών συντεταγμένων σαν μια ομάδα ορθογώνιων μετασχηματισμών. Οι εκφράσεις της ως προς δύο τέτοια συστήματα συντεταγμένων που συνδέονται μ' έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό είναι, όπως λέμε, ορθογωνίως ισοδύναμες. Ως εκ τούτου, αυτό που είχε κάνει ο Λεονάρντο μπορεί σήμερα να τυποποιηθεί στη γλώσσα της άλγεβρας ως ακολούθως: κατάρτισε έναν κατάλογο από ομάδες ορθογώνιων μετασχηματισμών τέτοιων ώστε 1^{ov}: ανά δύο οι ομάδες του καταλόγου του να είναι ορθογωνίως ισοδύναμες, και 2^{ov}: κάθε πεπερασμένη ομάδα ορθογώνιων μετασχηματισμών να είναι ορθογωνίως ισοδύναμη με μία ομάδα που βρίσκεται στον κατάλογο. Εν συντομία λέμε: Κατασκεύασε έναν *πλήρη* κατάλογο πεπερασμένων ομάδων *ορθογωνίως μη ισοδύναμων* ορθογώνιων μετασχηματισμών. Αυτή η διατύπωση φαίνεται σαν ένας άσκοπα περίπλοκος τρόπος για την απόδοση μιας απλής κατάστασης, αλλά τα πλεονεκτήματά της θα γίνουν ευθύς αμέσως φανερά.

Η *συμμετρία των διακοσμήσεων* έχει σχέση με ασυνεχείς ομάδες ισομετρικών απεικονίσεων του επιπέδου. Αν μια τέτοια ομάδα Δ περιέχει μεταφορές θα ήταν παράλογο να θέσουμε αξιωματικά το πεπερασμένο, διότι επανάληψη μιας μεταφοράς a (διαφορετικής από την ταυτότητα o) προκαλεί άπειρα πολλές μεταφορές na ($n=0\pm1, \pm2, \ldots$). Γι' αυτό αντικαθιστούμε το πεπερασμένο με την *ασυνέχεια*: αυτό απαιτεί να μην υπάρχει κανένα στοιχείο στην ομάδα αυθαίρετα κοντά στην ταυτότητα, εκτός από την ίδια την ταυτότητα. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας θετικός αριθμός ϵ τέτοιος ώστε κάθε μετασχηματισμός (6) στην ομάδα μας, για τον οποίο οι αριθμοί

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1, & a_{12}, & b_1 \\ a_{21} & , a_{22}-1, & b_1 \end{pmatrix}$$

κείνται μεταξύ του $-\epsilon$ και $+\epsilon$, να είναι η ταυτότητα (για την οποία όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι μηδέν). Οι μεταφορές που περιέχονται στην ομάδα μας σχηματίζουν μια ασυνεχή ομάδα Λ μεταφορών. Για μια τέτοια ομάδα υπάρχουν τρεις δυνατότητες: ή αποτελείται μόνο από την ταυτότητα, το μηδενικό διάνυσμα 0, ή όλες οι μεταφορές στην ομάδα είναι οι επαναλήψεις xe μια βασικής μεταφοράς $e \neq$ ($x = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$), ή αυτές οι μεταφορές (διανύσματα) σχηματίζουν ένα δισδιάστατο *πλέγμα* , δηλαδή αποτελούνται από τους γραμμικούς συνδυασμούς $x_1e_1+x_2e_2$ με *ακέραιους* συντελεστές x_1, x_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων e_1, e_2. Η τρίτη περίπτωση είναι αυτή της διπλής εις άπειρον σχέσης για την οποία ενδιαφερόμαστε. Εδώ τα διανύσματα e_1, e_2 σχηματίζουν αυτό που ονομάζεται *βάση του πλέγματος*. Πάρτε ένα σημείο Ο σαν αρχή. Εκείνα τα σημεία στα οποία πηγαίνει το Ο απ' όλες τις μεταφορές του πλέγματος σχηματίζουν το παραλληλογραμμικό πλέγμα σημείων (Εικόνα 58).



Εικ. 58

Μέχρι ποιο βαθμό, θα ρωτούσατε αμέσως, είναι αυθαίρετη η εκλογή της βάσης του πλέγματος για ένα δεδομένο πλέγμα; Αν e'_1, e'_2 είναι μια άλλη τέτοια βάση, πρέπει να ισχύει

(1) $$e'_1 = a_{11}e_1+a_{21}e_2\ ,\ e'_2 = a_{12}e_1+a_{22}e_2$$

όπου a_{ij} *ακέραιοι.* Αλλά και οι συντελεστές του αντίστροφου μετασχηματισμού (1') πρέπει να είναι ακέραιοι, διαφορετικά τα e'_1, e'_2 δε θα αποτελούσαν βάση του πλέγματος. Για τις συντεταγμένες παίρνουμε δύο αμοιβαία αντίστροφους γραμμικούς μετασχηματισμούς (2), (2') με ακέραιους συντελεστές

$$(2'') \qquad \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} a'_{11}, a'_{12} \\ a'_{21}, a'_{22} \end{pmatrix}$$

Ένας ομογενής γραμμικός μετασχηματισμός με ακέραιους συντελεστές που έχει αντίστροφο του ίδιου τύπου ονομάζεται από τους μαθηματικούς μονομετρικός (unimodular)· μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με ακέραιους συντελεστές είναι μονομετρικός αν και μόνο αν η ορίζουσά του $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ είναι ίση με $+1$ ή -1.

Για να προσδιορίσουμε όλες τις δυνατές ασυνεχείς ομάδες ισομετριών με διπλή εις άπειρον σχέση συνεχίζουμε τώρα ως ακολούθως. Εκλέγουμε ένα σημείο O σαν αρχή και παριστάνουμε τις μεταφορές της ομάδας μας Δ με το πλέγμα L των σημείων στα οποία μεταφέρεται το O από τις μεταφορές. Κάθε πράξη της ομάδας μπορεί να θεωρηθεί σαν μια περιστροφή ως προς το σημείο O ακολουθούμενη από μεταφορά. Το πρώτο, το περιστροφικό μέρος, μεταφέρει το πλέγμα στον εαυτό του. Επιπλέον, αυτά τα περιστροφικά μέρη σχηματίζουν μια ασυνεχή και ως εκ τούτου *πεπερασμένη* ομάδα περιστροφών $\Gamma = \{\Delta\}$. Στην ορολογία των κρυσταλλογράφων αυτή είναι η ομάδα που καθορίζει την *κλάση* συμμετρίας της διακόσμησης. Η Γ πρέπει να είναι μια από τις ομάδες του πίνακα του Λεονάρντο (7),

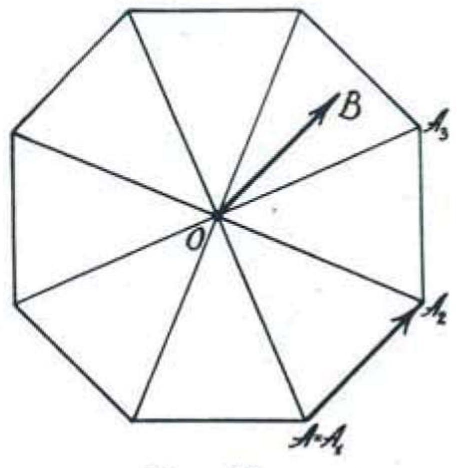
$$(8) \qquad C_n, D_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

αλλά μία της οποίας οι πράξεις μεταφέρουν το πλέγμα L στον εαυτό του. Αυτή η σχέση μεταξύ της ομάδας περιστροφών Γ και του L επιβάλλει κάποιους περιορισμούς και στην ομάδα και στο πλέγμα.

Όσον αφορά τη Γ, αποκλείει από τον πίνακα όλες τις τιμές του n εκτός των $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Σημειώνεται ότι η τιμή $n = 5$ είναι μεταξύ των αποκλειόμενων τιμών! Αφού το πλέγμα επιτρέπει την περιστροφή κατά 180°, η μικρότερη περιστροφή που το αφήνει αμετάβλητο πρέπει να είναι ένα υποπολλαπλάσιο των 180° ή της μορφής

360° δια 2 ή 4 ή 6 ή.8 ή ...

Πρέπει να δείξουμε ότι οι αριθμοί από το 8 και μετά είναι αδύνατοι. Ας πάρουμε την περίπτωση για $n=8$ και έστω A ένα από τα σημεία του πλέγματος $\neq 0$ που είναι πλησιέστερα στο O (Εικόνα 59). Τότε το οκτάγωνο $A=A_1, A_2, A_3, \ldots$ που



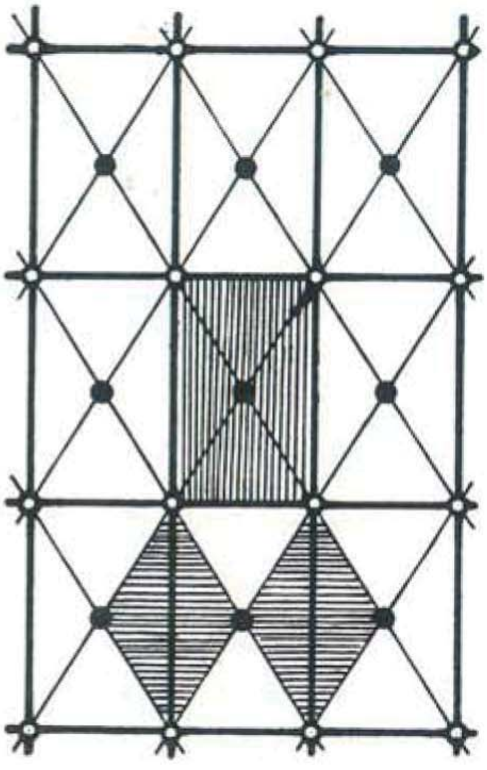
Εικ. 59

προκύπτει από το A διά περιστροφής ξανά και ξανά του επιπέδου ως προς το O κατά γωνία 1/8 της ολικής αποτελείται από σημεία του πλέγματος. Αφού $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ είναι διανύσματα του συνδέσμου, η διαφορά τους, το διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2}$, πρέπει επίσης να ανήκει στο πλέγμα, δηλαδή το σημείο B που καθορίζεται από το $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{A_1A_2}$ θα πρέπει να είναι σημείο του πλέγματος. Όμως αυτό οδηγεί σε αντίφαση αφού το B είναι πλησιέστερα στο O απ' ό,τι το $A=A_1$· πράγματι, η πλευρά A_1A_2 του κανονικού οκταγώνου είναι μικρότερη από την ακτίνα του OA_1. Ως εκ τούτου για την ομάδα Γ έχουμε τις ακόλουθες 10 μόνο δυνατότητες:

(9) $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6 \cdot D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι για καθεμιά από αυτές τις ομάδες υπάρχουν πράγματι πλέγματα που παραμένουν αμετάβλητα από τις διεργασίες της ομάδας.

Είναι φανερό ότι για τη C_1 και τη C_2 οποιοδήποτε πλέγμα μένει αμετάβλητο, γιατί οποιοδήποτε πλέγμα παραμένει αμετάβλητο από την ταυτότητα και την περιστροφή κατά 180°. Αλλά ας εξετάσουμε την D_1, που αποτελείται από την ταυτότητα και τον κατοπτρισμό ως προς έναν άξονα *l* που διέρχεται από το Ο. Υπάρχουν δύο τύποι πλεγμάτων που μένουν αμετάβλητα απ' αυτή την ομάδα : το ορθογώνιο πλέγμα και το ρομβικό (Εικόνα 60). Το ορθογώνιο πλέγμα το



Εικ. 60

λαμβάνουμε διαιρώντας το επίπεδο σε ίσα ορθογώνια με ευθείες παράλληλες και κάθετες στην l. Οι γωνίες των ορθογωνίων είναι τα σημεία του συνδέσμου. Η φυσική βάση του πλέγματος αποτελείται από τις δύο πλευρές e_1, e_2 που ξεκινούν από το Ο του θεμελιώδους ορθογωνίου, του οποίου το Ο βρίσκεται στην κάτω αριστερή γωνία. Το ρομβικό πλέγμα αποτελείται από ίσους ρόμβους στους οποίους διαιρείται το επίπεδο από τις διαγωνίους των ορθογωνίων του πλέγματος. Οι δύο πλευρές του θεμελιώδους ρόμβου του οποίου η αριστερή γωνία έχει κορυφή το O μπορεί να χρησιμοποιηθούν σαν βάση του πλέγματος. Τα σημεία του πλέγματος είναι οι κορυφές ○ και τα κέντρα ● των ορθογωνίων. (Ήταν μια διάταξη δέντρων με τέτοιο σχήμα που ο Thomas Browne την ονόμασε quincuncial (πενταδική), επειδή είχε στο μυαλό του το quincunx ⁚•⁚ ως τη θεμελιώδη μορφή της, μολονότι το πλέγμα στην πραγματικότητα δεν έχει καμιά σχέση με τον αριθμό 5.) Η μορφή και το μέγεθος του θεμελιώδους ορθογωνίου ή του ρόμβου είναι αυθαίρετα.

Αφού βρήκαμε τις δέκα δυνατές ομάδες Γ των περιστροφών και τα πλέγματα L που μένουν αμετάβλητα από καθεμιά τους, έχουμε να συνδυάσουμε μια Γ με μια αντίστοιχη L για να πάρουμε την πλήρη ομάδα των ισομετρικών απεικονίσεων. Πληρέστερη έρευνα έδειξε ότι, ενώ υπάρχουν 10 δυνατότητες για τη Γ, υπάρχουν ακριβώς 17 ουσιωδώς διαφορετικές δυνατότητες για την πλήρη ομάδα Δ των ισομετριών. Έτσι υπάρχουν 17 ουσιωδώς διαφορετικά είδη συμμετρίας που είναι πιθανά για μια δισδιάστατη διακόσμηση με διπλή εις άπειρον σχέση. Παραδείγματα και των 17 ομάδων συμμετρίας βρίσκουμε στα διακοσμητικά σχέδια της αρχαιότητας, ιδιαίτερα στις αιγυπτιακές διακοσμήσεις. Δύσκολα μπορούμε να αποτιμήσουμε το βάθος της γεωμετρικής φαντασίας και εφευρετικότητας που αντικατοπτρίζεται σ' αυτά τα σχέδια. Οι κατασκευές τους κάθε άλλο παρά μαθηματικά τετριμμένες είναι. Η τέχνη της διακόσμησης περιέχει σε έμμεση μορφή τα αρχαιότερα δείγματα των γνωστών σε μας ανώτερων μαθηματικών. Να είστε βέβαιοι, τα εννοιολογικά μέσα για μια πλήρη αφηρημένη διατύπωση του βασικού προβλήματος, δηλαδή η μαθηματική έννοια της ομάδας μετασχηματισμών, δεν υπήρχαν πριν από τον 19° αιώνα· και μόνο πάνω σ' αυτή τη βάση μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι 17 συμμετρίες οι ήδη έμμεσα γνωστές στους Αιγύπτιους τεχνίτες εξαντλούν όλες τις δυνατότητες. Περιέργως, η απόδειξη έγινε μόλις το 1924 από τον George Polya, που σήμερα διδάσκει στο Stanford[2]. Οι Άραβες ασχολήθηκαν πολύ με τον αριθμό 5, αλλά δεν μπόρεσαν να εισαγάγουν ποτέ μια κεντρική συμμετρία του 5 στα διακοσμητικά τους σχέδια με διπλή εις άπειρον σχέση. Δοκίμασαν όμως διάφορους απατηλούς συμβιβασμούς. Μπορούμε να πούμε ότι απέδειξαν πειραματικά το αδύνατο του πενταγώνου σε μια διακόσμηση.

Αφού ήταν σαφές τι εννοούσαμε λέγοντας ότι δεν υπάρχουν άλλες ομάδες περιστροφών που να μπορούν να συσχετιστούν με αμετάβλητο πλέγμα εκτός από τις 10 ομάδες (9), ο ισχυρισμός μας για την ύπαρξη μόνο 17 διαφορετικών διακοσμητικών ομάδων απαιτεί μια εξήγηση. Για παράδειγμα, αν $\Gamma = C_1$, τότε η ομάδα Δ αποτελείται μόνο από μεταφορές· εδώ όμως κάθε πλέγμα είναι δυνατό και το θεμελιώδες παραλληλόγραμμα που ορίζεται από τα δύο βασικά διανύσματα του πλέγματος μπορεί να είναι οποιασδήποτε μορφής και μεγέθους, έχουμε δηλαδή να διαλέξουμε ανάμεσα σε μη αριθμήσιμα άπειρο πλήθος δυνατοτήτων. Φτάνοντας στον αριθμό 17, τις θεωρούμε όλες αυτές ως *μία* μόνη περίπτωση· αλλά με ποιο δικαίωμα; Εδώ χρειάζομαι την αναλυτική μου γεωμετρία. Αν κοιτάξουμε το επίπεδό μας υπό το φως της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας, περιέχει δύο δομές: α) τη μετρική δομή υπό την οποία κάθε διάνυσμα v έχει ένα μήκος το τετράγωνο του οποίου εκφράζεται ως προς τις συντεταγμένες από τη γνήσια θετική τετραγωνική μορφή (3), τη βασική μετρική σχέση· β) μια πλεγματική δομή, που οφείλεται στο γεγονός ότι η διακόσμηση εφοδιάζει το επίπεδο με ένα πλέγμα διανυσμάτων. Στη συνήθη διαδικασία πρώτα παίρνουμε υπόψη τη μετρική δομή και εισάγουμε το σύστημα των καρτεσιανών συντεταγμένων σε σχέση με το οποίο η βασική

2. Βλ. το άρθρο του «Über die Analogie der kristallsymmetrie in der Ebene», *Zeitschr. f. kristallographie 60*, σελ. 278-282. (Συμπλήρωση της ελλ. έκδ.: Ο Polya απεβίωσε πρόσφατα, σε μεγάλη ηλικία.)

μετρική σχέση έχει μια μοναδική κανονικοποιημένη έκφραση $x_1^1+x_2^2$, ενώ στην αλγεβρική έκφραση της συνεχούς πολλαπλότητας των αναλλοίωτων πλεγμάτων παραμένει ένα μεταβλητό στοιχείο. Αλλά, αντί να προσαρμόσουμε τις συντεταγμένες στη μετρική εισάγοντας μόνο τις καρτεσιανές συντεταγμένες, μπορούσαμε να θέσουμε πρώτα τη δομή του πλέγματος και να προσαρμόσουμε τις συντεταγμένες στο πλέγμα, εκλέγοντας τα e_1, e_2 σαν πλεγματική βάση, με την έννοια ότι το πλέγμα είναι τώρα κανονικοποιημένο κατά μονοσήμαντα καθορισμένο τρόπο, όταν εκφραστεί σε σχέση με τις αντίστοιχες συντεταγμένες x_1, x_2. Πράγματι, τα διανύσματα του πλέγματος είναι τώρα αυτά των οποίων οι συντεταγμένες είναι *ακέραιοι*. Γενικά δεν μπορούμε να τα κάνουμε και τα δύο ταυτόχρονα: να έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η βασική μετρική μορφή να εμφανίζεται με την κανονική της μορφή $x_1^2+x_2^2$, και το πλέγμα να αποτελείται από διανύσματα με ακέραιες συντεταγμένες x_1, x_2. Θα ακολουθήσουμε τώρα τη δεύτερη διαδικασία, που καταλήγει να είναι μαθηματικά πιο πλεονεκτική. Θεωρώ ότι αυτή η ανάλυση έχει βασική σημασία για όλη τη μορφολογία.

Σαν παράδειγμα, ας εξετάσουμε για μια ακόμη φορά την D_1. Αν το αναλλοίωτο πλέγμα είναι ορθογώνιο και η πλεγματική βάση έχει εκλεγεί με τον φυσικό τρόπο που περιγράψαμε πιο πάνω, τότε η D_1 αποτελείται από την ταυτότητα και την πράξη

$$x'_1 = x_1 \ , \ x'_2 = -x_2.$$

Η βασική μετρική μορφή μπορεί να είναι οποιαδήποτε θετική μορφή του ειδικού τύπου $a_1x_1^2+a_2x_2^2$. Αν το αναλλοίωτο πλέγμα είναι ρομβικό πλέγμα και οι πλευρές του θεμελιώδους ρόμβου εκλεγούν σαν η πλεγματική βάση, τότε η D_1 περιέχει την ταυτότητα και την πρόσθετη πράξη

$$x'_1 = x_2 \ , \ x'_2 = x_1.$$

Η βασική μετρική μορφή μπορεί να είναι οποιαδήποτε θετική μορφή του ειδικού τύπου $a(x_1^2+x_2^2)+2bx_1x_2$. Αλλά, αντί της D_1, παίρνουμε τώρα δύο ομάδες D_1^a, D_1^b γραμμικών μετασχηματισμών με ακέραιους συντελεστές, οι οποίοι, αν και ορθογώνιοι, δεν είναι πλέον μονομετρικά ισοδύναμοι. Ο ένας αποτελείται από τις δύο πράξεις με συντελεστές τους πίνακες

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

και ο άλλος από τους

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Δύο ομάδες ομογενών γραμμικών μετασχηματισμών ονομάζονται βέβαια μονομετρικά ισοδύναμοι, αν και οι δύο παριστάνουν την ίδια ομάδα πράξεων, η μία ομάδα ως προς τη μία, η άλλη ως προς τη δεύτερη πλεγματική βάση, με άλλα λόγια αν μετατρέπονται η μία στην άλλη με μονομετρικό μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Στο προσαρμοσμένο στο πλέγμα σύστημα συντεταγμένων οι πράξεις Γ εμφανίζονται τώρα σαν ομογενείς γραμμικοί μετασχηματισμοί (4) με ακέραιους συντελεστές a_{ij}· πράγματι, αφού καθεμιά μεταφέρει το πλέγμα στον εαυτό του, τα x'_1, x'_2 παίρνουν ακέραιες τιμές για οποιεσδήποτε ακέραιες τιμές των x_1, x_2. Το αυθαίρετο της εκλογής της πλεγματικής βάσης βρίσκει την έκφρασή του στη συμφωνία να θεωρούμε τις μονομετρικά ισοδύναμες ομάδες γραμμικών μετασχηματισμών το ίδιο και το αυτό. Επιπροσθέτως, καθώς έχουν ακέραιους συντελεστές, οι μετασχηματισμοί Γ θα αφήνουν κάποια γνήσια θετική τετραγωνική μορφή (3) αμετάβλητη. Αλλά αυτό δεν αποτελεί πρόσθετο ουσιαστικό περιορισμό· πράγματι, μπορεί να δειχτεί ότι, για κάθε πεπερασμένη ομάδα γραμμικών μετασχηματισμών με πραγματικούς συντελεστές, μπορούμε να κατασκευάσουμε θετικές τετραγωνικές μορφές που παραμένουν αμετάβλητες από αυτούς τους μετασχηματισμούς[3]. Πόσες διαφορετικές, με άλλα λόγια μονομετρικά

3. Είναι ένα θεμελιώδες θεώρημα που το οφείλουμε στον H. Maschke.

ισοδύναμες, πεπερασμένες ομάδες γραμμικών μετασχηματισμών με ακέραιους συντελεστές σε δύο μεταβλητές υπάρχουν; Δέκα. Δηλαδή οι παλιοί μας γνωστοί (9); Όχι, υπάρχουν περισσότερες, αφότου είδαμε ότι η D_1, για παράδειγμα, χωρίζεται σε δύο μη ισοδύναμες περιπτώσεις D_1^a, D_1^b. Το ίδιο συμβαίνει στην D_2 και D_3, με αποτέλεσμα να υπάρχουν 13 ακριβώς μονομετρικά ισοδύναμες πεπερασμένες ομάδες γραμμικών πράξεων με ακέραιους συντελεστές. Από μαθηματική άποψη, αυτό είναι το πραγματικά ενδιαφέρον αποτέλεσμα και όχι αυτό του πίνακα (9) των 10 ομάδων περιστροφών με αναλλοίωτα πλέγματα.

Σαν τελευταίο βήμα μπορούμε να εισαγάγουμε τα μεταφορικά μέρη των πράξεων, και έτσι παίρνουμε 17 μονομετρικά ισοδύναμες ασυνεχείς ομάδες μη ομογενών γραμμικών μετασχηματισμών που περιέχουν όλες τις μεταφορές

$$x'_1 = x_1 + b_1 \ , \ x'_2 = x_2 + b_2$$

με b_1, b_2 ακεραίους και όχι άλλες μεταφορές. Αυτό το τελευταίο βήμα δεν παρουσιάζει δυσκολία και οι παρατηρήσεις που απομένει να κάνουμε βασίζονται στις 13 πεπερασμένες ομάδες Γ των ομογενών μετασχηματισμών που απορρέουν από την απλοποίηση των μεταφορικών μερών.

Μέχρις εδώ έχουμε λάβει υπόψη μας μόνο την πλεγματική μορφή του επιπέδου. Βέβαια, η μετρική του επιπέδου δεν μπορεί να αγνοηθεί για πάντα. Και σ' αυτό το σημείο παρεμβαίνει η συνεχής όψη του προβλήματος. Για καθεμιά από τις 13 ομάδες Γ υπάρχουν αμετάβλητες θετικές τετραγωνικές μορφές

$$G(x) = g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2.$$

Μια τέτοια μορφή χαρακτηρίζεται από τους συντελεστές της

Η απόδειξη είναι αρκετά απλή: Πάρτε μια οποιαδήποτε θετική τετραγωνική μορφή, π.χ. $x_1^2+x_2^2$, εκτελέστε πάνω της καθέναν από τους μετασχηματισμούς S της ομάδας μας και προσθέστε τις σχέσεις που παίρνετε μ' αυτό τον τρόπο: το αποτέλεσμα είναι μια αμετάβλητη θετική μορφή.

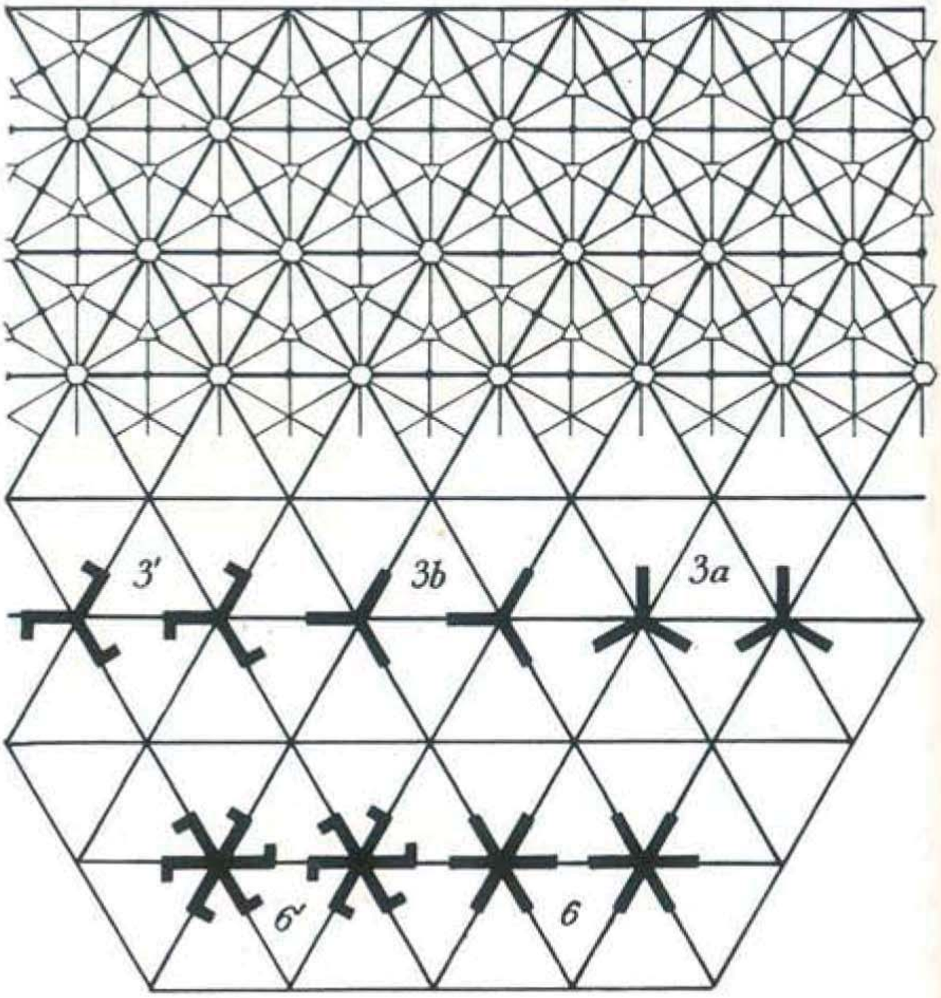
(g_{11}, g_{12}, g_{22}). Η μορφή $G(x)$ δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη από τη Γ· για παράδειγμα, η $G(x)$ μπορεί να αντικατασταθεί από κάθε πολλαπλάσιο $c \cdot G(x)$ με έναν πραγματικό θετικό σταθερό παράγοντα c. Όλες οι θετικές τετραγωνικές μορφές $G(x)$ που μένουν αμετάβλητες από τις πράξεις της Γ σχηματίζουν έναν συνεχή κυρτό «κώνο» απλής φύσεως και μίας, δύο ή τριών διαστάσεων. Αίφνης, στις περιπτώσεις D_1^a και D_1^b είχαμε τις πολλαπλότητες σε δύο διαστάσεις όλων των θετικών μορφών των τύπων $a_1x_1^2+a_2x_2^2$ και $a(x_1^2+x_2^2)+$ $+2bx_1x_2$, αντίστοιχα. Η μετρική βασική σχέση είναι πάντα μία στην πολλαπλότητα των αμετάβλητων μορφών.

Για την πλήρη περιγραφή της διακοσμητικής ομάδας Δ έχουμε καθαρά ξεχωρίσει εκείνα τα γνωρίσματα που είναι ασυνεχή κι εκείνα που μπορούν να μεταβάλλονται με μια συνεχή πολλαπλότητα. Το ασυνεχές γνώρισμα εκτίθεται απεικονίζοντας την ομάδα σε σχέση με τις προσαρμοσμένες στο πλέγμα συντεταγμένες και καταλήγει να είναι μια από τις 17 καθορισμένες διακεκριμένες ομάδες. Σε καθεμία απ' αυτές αντιστοιχεί ένα συνεχές δυνατοτήτων για τη μετρική βασική μορφή $G(x)$, από την οποία πρέπει να επιλεγεί η μία και μόνη πραγματική βασική μετρική μορφή. Το πλεονέκτημα της προσαρμογής του συστήματος των συντεταγμένων στο πλέγμα παρά στη μετρική γίνεται ορατό στο γεγονός ότι τώρα το μεταβλητό στοιχείο $G(x)$ μεταβάλλεται με μια απλή κυρτή συνεχή πολλαπλότητα, ενώ σε σχέση με τις μετρικά προσαρμοσμένες συντεταγμένες το πλέγμα L, που σ' αυτή την περίπτωση εμφανίζεται να είναι το μεταβλητό στοιχείο, μεταβάλλεται σε ένα συνεχές που μπορεί να αποτελείται από πολλά μέρη, όπως έδειξε το παράδειγμα της D_1. Το πλεονέκτημα αποκαλύπτεται πλήρως μόνον αν περάσουμε από την περικομμένη ομογενή ομάδα $\Gamma=\{\Delta\}$ στην πλήρη διακοσμητική ομάδα Δ. Η διάσπαση σε κάτι ασυνεχές και σε κάτι συνεχές μου φαίνεται μια βασική έκβαση όλης της μορφολογίας και η μορφολογία των διακοσμήσεων και των κρυστάλλων επιβάλλει έναν παράγοντα μέσω του σαφούς τρόπου με τον οποίο πραγματοποιείται αυτή η διάκριση.

Μετά από όλες αυτές τις κάπως αφηρημένες μαθηματικές γενικότητες, θα σας δείξω μερικές εικόνες διακοσμήσεων του επιπέδου με διπλή εις άπειρον σχέση. Τις βρίσκετε σε ταπετσαρίες, τάπητες, σε δάπεδα με πλακάκια, σε παρκέ, σε όλα τα είδη των υφασμάτων ενδύσεως, ειδικά στα σταμπωτά κ.ο.κ. Αν προσέξουμε θα εκπλαγούμε από τα αναρίθμητα συμμετρικά σχέδια που μας περιβάλλουν στην καθημερινή μας ζωή. Οι μεγαλύτεροι αριστοτέχνες της γεωμετρικής τέχνης των διακοσμήσεων ήταν οι Άραβες. Ο πλούτος των γύψινων διακοσμήσεων που κοσμούν τους τοίχους των ανακτόρων αραβικής προελεύσεως, όπως αυτό της Αλάμπρας στη Γρανάδα, κυριολεκτικά μας καθηλώνει.

Για την περιγραφή, είναι καλό να γνωρίζετε με τι μοιάζει μια ισομετρική απεικόνιση σε δύο διαστάσεις. Μια γνήσια κίνηση μπορεί να είναι είτε μια μεταφορά είτε μια περιστροφή ως προς ένα σημείο Ο. Αν συμβαίνει μια τέτοια περιστροφή στην ομάδα συμμετρίας μας και αν όλες οι περιστροφές που λαμβάνουν χώρα ως προς το σημείο Ο είναι πολλαπλάσια της περιστροφής κατά 360°/n, ονομάζουμε το Ο πόλο πολλαπλότητας *n* ή απλώς πόλο n. Γνωρίζουμε ότι δεν είναι δυνατές άλλες τιμές εκτός από n = 2, 3, 4, 6. Μια ψευδής ισομετρία είναι ή ο κατοπτρισμός ως προς μια ευθεία l, ή κατοπτρισμός σε συνδυασμό με μια μεταφορά a κατά μήκος της l. Αν κάτι τέτοιο συμβαίνει στην ομάδα μας, το l ονομάζεται άξονας ή άξονας ολισθήσεως, αντίστοιχα. Στη δεύτερη περίπτωση, επανάληψη της ισομετρίας οδηγεί σε μεταφορά κατά το διάνυσμα 2a· ως εκ τούτου, το ολισθαίνον διάνυσμα a πρέπει να είναι το μισό του διανύσματος του πλέγματος της ομάδας μας.

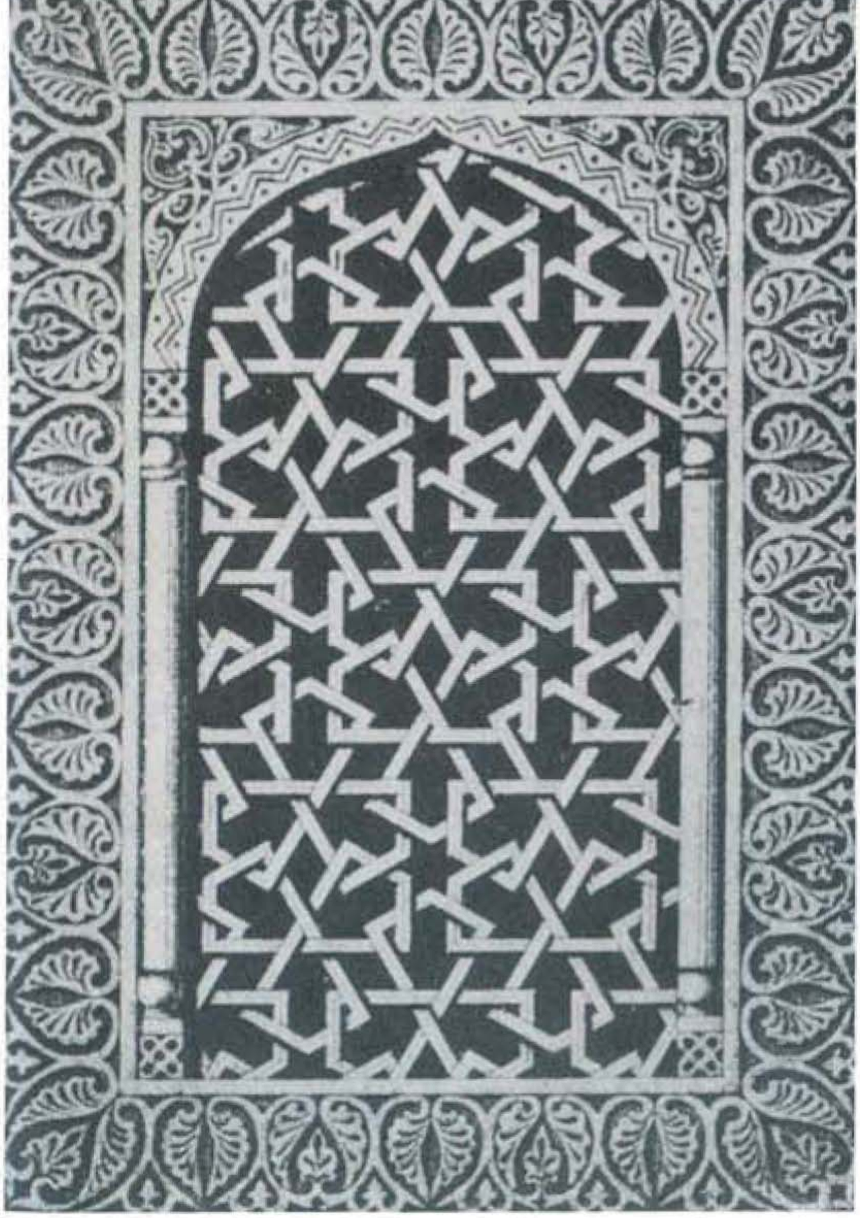
Η Εικόνα 61 είναι ένα σχέδιο με εξαγωνικό πλέγμα που το συζητήσαμε στην αρχή αυτής της διάλεξης. Διαθέτει μια πολύ πλούσια συμμετρία. Υπάρχουν πόλοι πολλαπλότητας



Εικ. 61

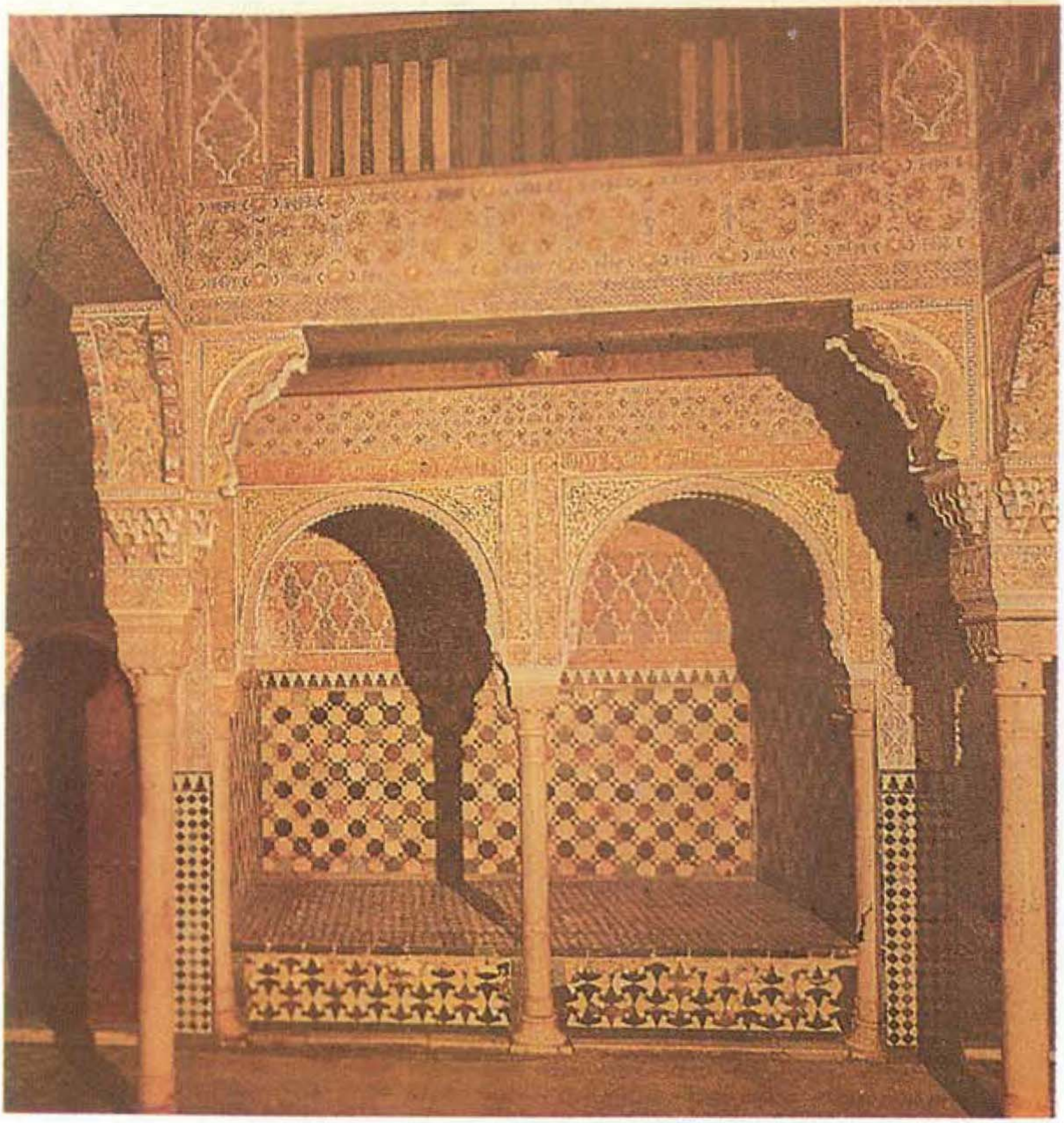
2, 3 και 6, που σημειώνονται στο σχέδιο με τελείες, μικρά τρίγωνα και εξάγωνα, αντίστοιχα. Τα διανύσματα που ενώνουν δύο πόλους πολλαπλότητας έξι είναι τα διανύσματα πλέγματος. Οι γραμμές στην εικόνα είναι οι άξονες. Υπάρχουν και άξονες ολισθήσεως, που δεν δείχνονται στο σχέδιο· αυτοί βρίσκονται στις μεσοπαραλλήλους των αξόνων. Οι δυνατές ομάδες συμμετρίας εξαγωνικού τύπου είναι πέντε στον αριθμό και τις παίρνουμε θέτοντας μία από τις απλές εικόνες 6 ή 6′ ή 3′ ή 3a ή 3b σε έναν πόλο πολλαπλότητας έξι. Τα σχέδια 6 και 6′ διατηρούν την πολλαπλότητα 6 αυτών των πόλων, αλλά το 6′ καταστρέφει τους άξονες συμμετρίας. Τα σχέδια 3′, 3a και 3b ελαττώνουν την πολλαπλότητα αυτών των πόλων στο 3· το 3′ δεν έχει άξονες συμμετρίας, στο 3a οι άξονες διέρχονται από όλους τους πόλους πολλαπλότητας 3, στο 3b οι άξονες διέρχονται μόνο απ' αυτούς (το 1/3 του συνολικού αριθμού) που πριν ήταν πόλοι πολλαπλότητας 6. Οι ομογενείς ομάδες είναι οι D_6, C_6, C_3, D_3^a, D_3^b, αντίστοιχα, όπου D_3^a, D_3^b είναι οι δύο μονομετρικά ισοδύναμες μορφές που τις παίρνουμε από την D_3 σε ένα προσαρμοσμένο στο πλέγμα σύστημα συντεταγμένων.

Ακολουθούν μερικές πραγματικές διακοσμήσεις μαυριτανικής, αιγυπτιακής και κινέζικης προέλευσης. Αυτό το παράθυρο από ένα τζαμί του Καΐρου, του 14^o αιώνα (Εικόνα 62), είναι της εξαγωνικής κλάσης D_6. Η στοιχειώδης εικόνα

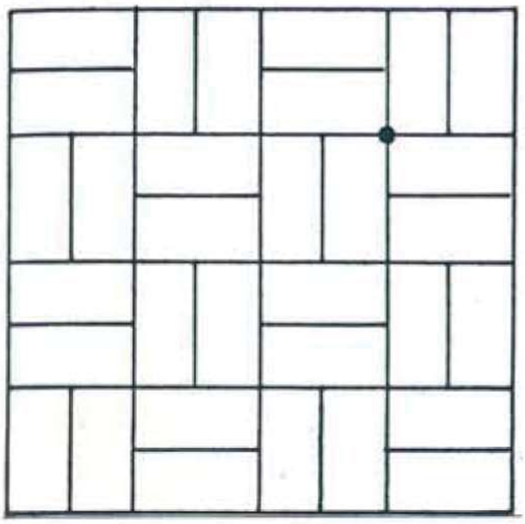


Εικ. 62

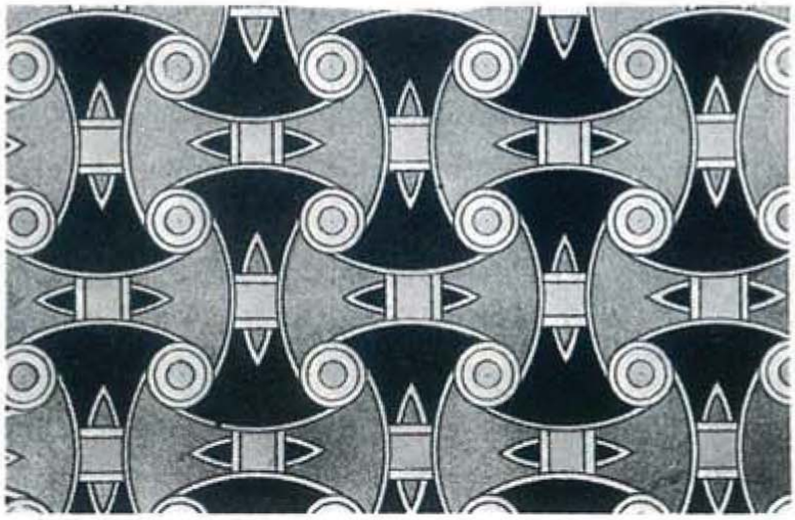
είναι ένα τρίφυλλο διακοσμητικό στοιχείο, οι μονάδες του οποίου διαπλέκονται με έξοχη καλλιτεχνία. Δρόμοι σχεδόν χωρίς τέλος διασχίζουν το σχήμα στις τρεις διευθύνσεις προερχόμενοι από τον οριζόντιο διά περιστροφής κατά 0°, 60° και 120°· οι ευθείες που διέρχονται από το μέσον αυτών των δρόμων είναι άξονες ολισθήσεως. Μπορείτε εύκολα να ανακαλύψετε ευθείες που είναι συνήθεις άξονες. Τέτοιοι άξονες απουσιάζουν από αυτή τη διακόσμηση Azulejos (Εικόνα 63)



Εικ. 63

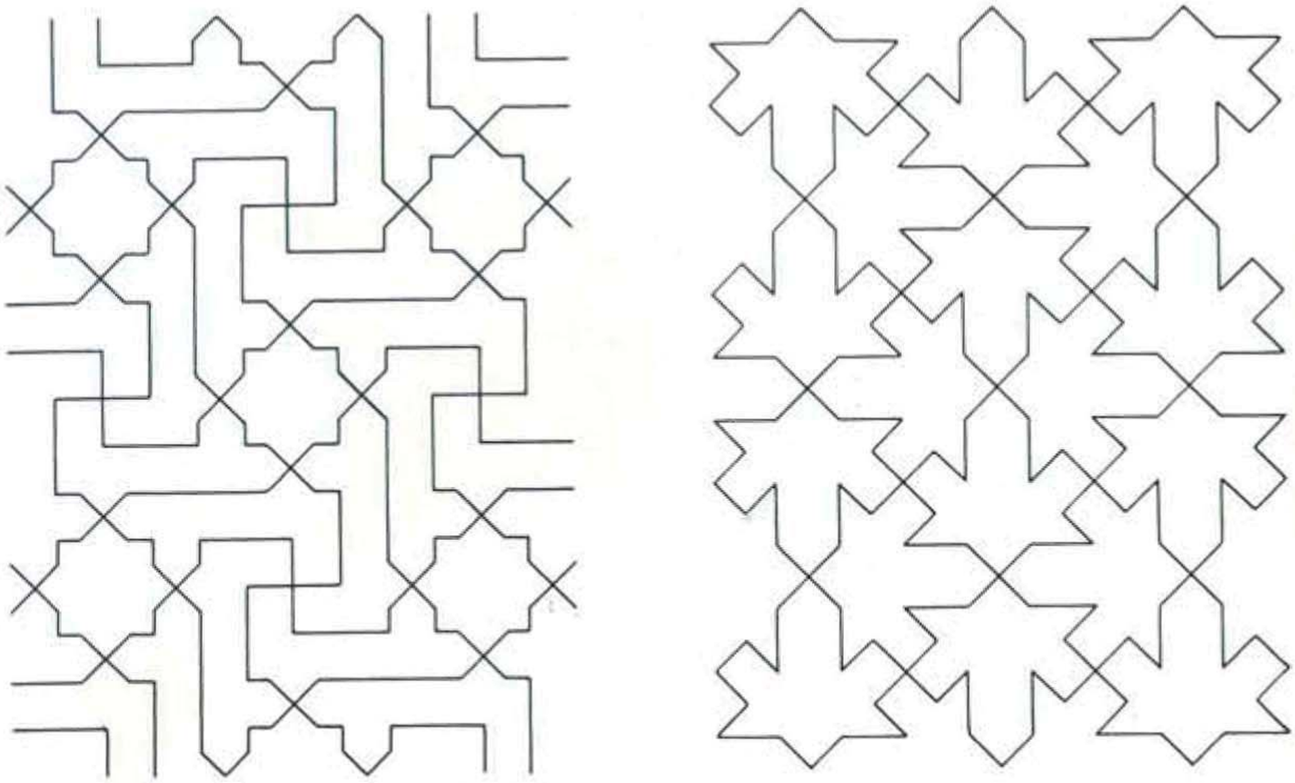


Εικ. 64

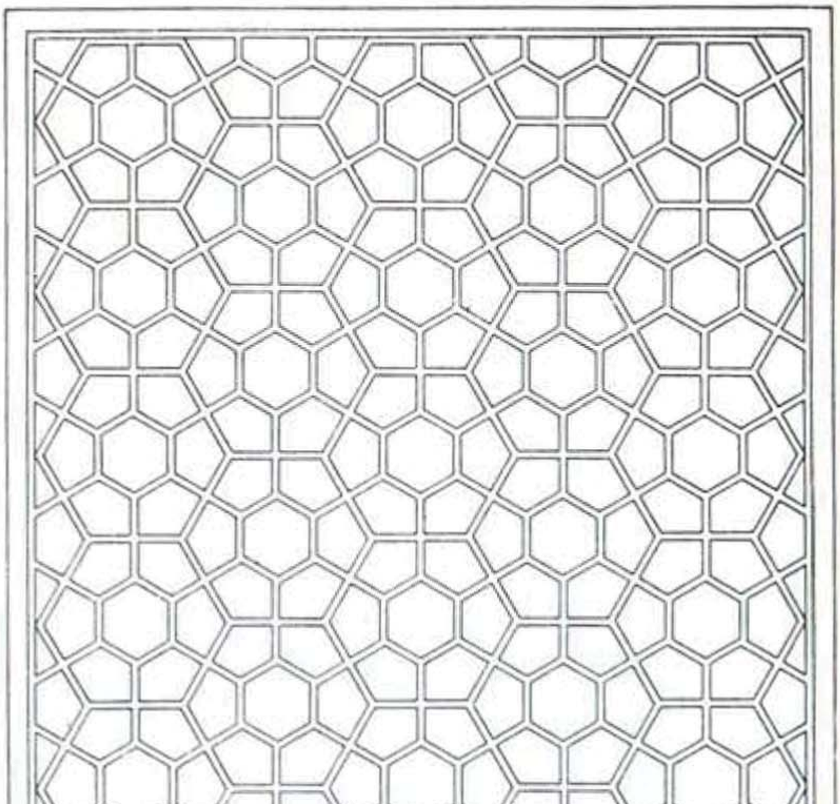


Εικ. 65

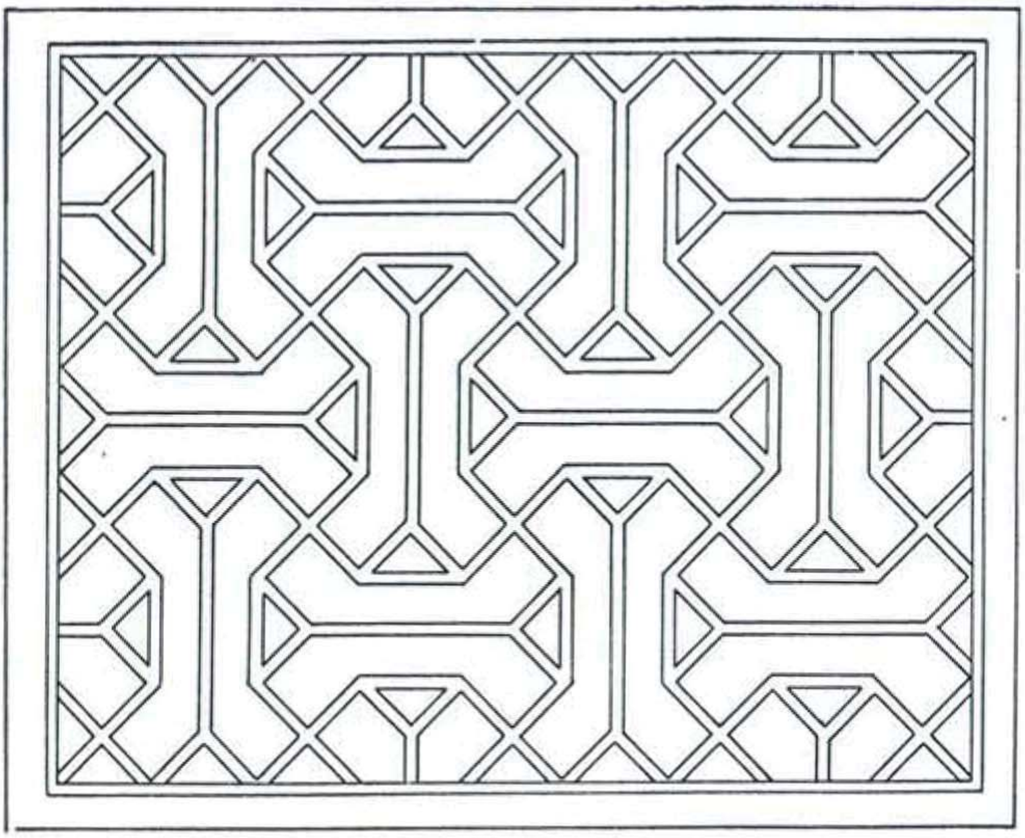
που κοσμεί το πίσω μέρος της εσοχής της Sala de Camas στο ανάκτορο της Αλάμπρας, στη Γρανάδα. Η ομάδα είναι 3' ή 6', ανάλογα με το αν παίρνουμε ή όχι υπόψη μας τα χρώματα. Είναι μια από τις πιο λεπτές δεξιοτεχνίες της διακοσμητικής τέχνης η συμμετρία του γεωμετρικού σχεδίου, όπως εκφράζεται με κάποια ομάδα Δ, να ανάγεται με το χρωματισμό σε έναν μικρότερο βαθμό συμμετρίας εκφραζόμενο από μια υποομάδα της Δ. Μια συμμετρία της τετραγωνικής τάξης D_4 παρουσιάζεται μ' αυτό το πολύ γνωστό σχέδιο (Εικόνα 64) για πλακόστρωτο. Το ενδιαφέρον μ' αυτό είναι ότι από τους πόλους πολλαπλότητας 4 (ένας από τους οποίους σημειώνεται), διέρχονται μόνο άξονες ολισθήσεως. Της ίδιας συμμετρίας είναι η αιγυπτιακή διακόσμηση της Εικόνας 65, καθώς και οι δύο επόμενες μαυριτανικές διακοσμήσεις (Εικόνα 66). Ένα μνημειώδες έργο πάνω στο θέμα μας είναι το *Grammar of ormanents* [Γραμματική των διακοσμήσεων] του Owen Jones, από το οποίο πήραμε και μερικές απ' αυτές τις εικόνες. Πιο ειδικού χαρακτήρα είναι το *Grammar of Chinese lattice* [Γραμματική του κινέζικου πλέγματος] του Daniel Sheets Dye, που πραγματεύεται την εργασία των Κινέζων στα πλέγματα που χρησιμοποιούν για την υποστήριξη των χάρτινων παραθύρων τους. Μεταφέρω εδώ (Εικόνες 67 και



Εικ. 66



Εικ. 67



Εικ. 68

68) δύο χαρακτηριστικά σχέδια από αυτό το έργο, το ένα εξαγωνικού και το άλλο D_4 τύπου.

Θα ήθελα να έχω τη δυνατότητα να αναλύσω μερικές απ' αυτές τις διακοσμήσεις λεπτομερώς. Αλλά αναγκαία προϋπόθεση για μια τέτοια έρευνα θα ήταν μια σαφής αλγεβρική περιγραφή των 17 διακοσμητικών ομάδων. Στόχος αυτής της διάλεξης ήταν μάλλον η διευκρίνιση των γενικών μαθηματικών αρχών που αποτελούν τη βάση της μορφολογίας των διακοσμήσεων (και κρυστάλλων) παρά η θεωρητική ανάλυση των ομάδων των επιμέρους διακοσμήσεων. Η έλλειψη χρόνου με εμπόδισε να είμαι δίκαιος και προς τις δύο πλευρές, την αφηρημένη και τη συγκεκριμένη. Προσπάθησα να εξηγήσω τις βασικές μαθηματικές ιδέες και σας παρουσίασα μερικές εικόνες: Σας υπέδειξα τη γέφυρα ανάμεσά τους, αλλά δεν μπορούσα να σας πάρω να την περάσουμε μαζί βήμα προς βήμα.