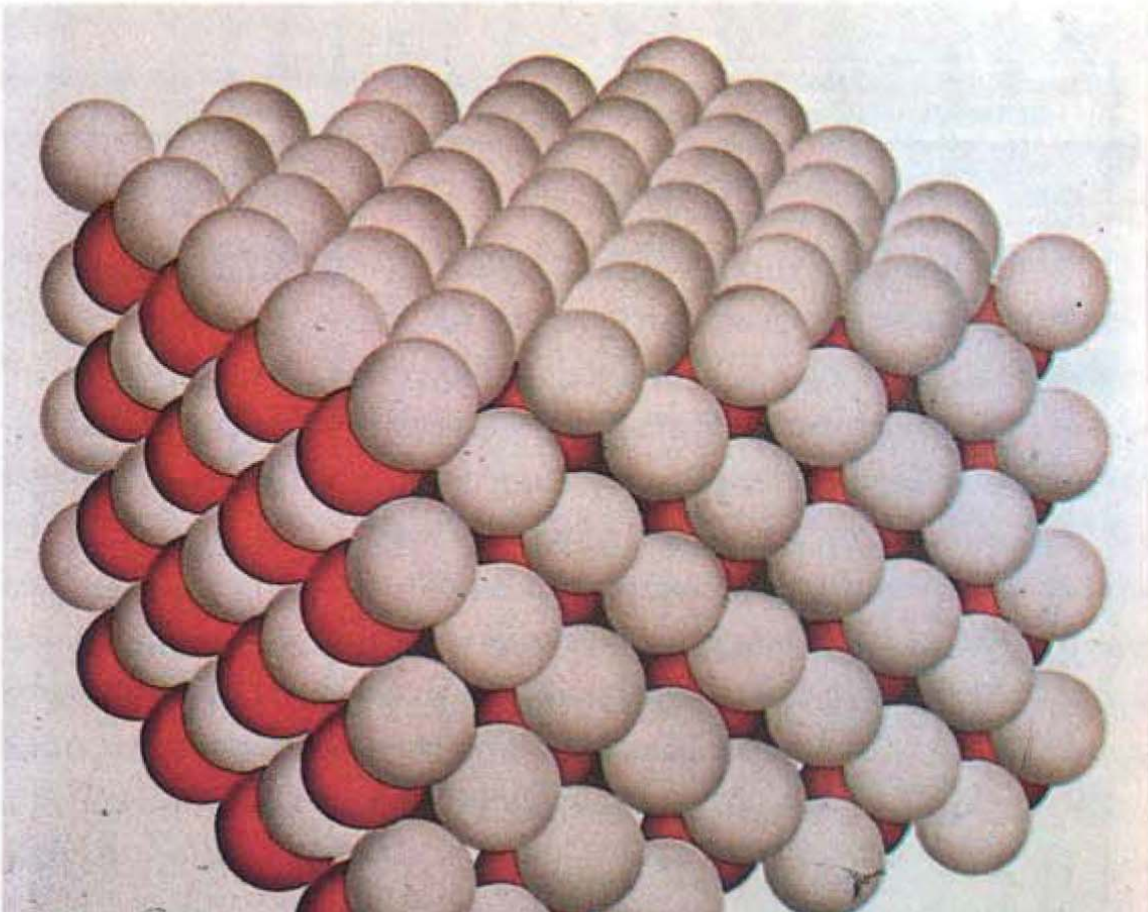
Κρύσταλλοι: Η γενική μαθηματική ιδέα της συμμετρίας



Κρύσταλλοι: Η γενική μαθηματική ιδέα της συμμετρίας

ΣΤΗΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ διάλεξη εξετάσαμε στις δύο διαστάσεις το πρόβλημα της συγκρότησης ενός πλήρους καταλόγου α) όλων των ορθογωνίως μη ισοδύναμων πεπερασμένων ομάδων ομογενών ορθογώνιων μετασχηματισμών, β) όλων αυτών των ομάδων που έχουν αναλλοίωτα πλέγματα, γ) όλων των μονομετρικώς μη ισοδύναμων πεπερασμένων ομάδων ομογενών μετασχηματισμών με ακέραιους συντελεστές, δ) όλων των μονομετρικώς μη ισοδύναμων ασυνεχών ομάδων μη ομογενών γραμμικών μετασχηματισμών που περιέχουν μεταφορές με ακέραιες συντεταγμένες και μόνο.

Το πρόβλημα α) απαντήθηκε από τον κατάλογο του Λεονάρντο

$$C_n, D_n \ (n = 1, 2, 3, 4, \ldots),$$

το β) περιορίζοντας το δείκτη n στις τιμές $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Το πλήθος h_I, h_{II}, h_{III}, h_{IV} των ομάδων σ' αυτούς τους τέσσερις καταλόγους αποδεικνύεται ότι είναι

$$\infty, 10, 13, 17$$

αντίστοιχα. Το σπουδαιότερο πρόβλημα είναι χωρίς αμφιβολία το γ). Μπορούσαμε να θέσουμε αυτές τις ίδιες τέσσερις ερωτήσεις για τη μία διάσταση αντί για τις δύο. Τότε η απάντηση θα ήταν πολύ απλή και θα βρίσκαμε όλους τους αριθμούς h_I, h_{II}, h_{III}, h_{IV} ίσους με 2. Πράγματι, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις α), β), γ), η ομάδα αποτελείται είτε μόνο από την ταυτότητα $x'=x$ είτε από την ταυτότητα και τον κατοπτρισμό $x'=-x$.

Αλλά αυτό που ζητάμε τώρα δεν είναι να κατεβούμε από τις 2 στη 1, αλλά να ανεβούμε από τις 2 στις 3 διαστάσεις. Όλες οι πεπερασμένες ομάδες περιστροφών στις 3 διαστάσεις εκτέθηκαν στον κατάλογο στο τέλος της δεύτερης διάλεξης· τις επαναλαμβάνω εδώ:

Κατάλογος Α:

$C_n, \overline{C}_n, C_{2n}C_n \quad (n=1, 2, 3, ...)$

$D'_n, \overline{D}'_n, D'_{2n}D'_n \quad D'_nC_n \quad (n=2, 3, ...)$

$T, W, P \cdot \overline{T}, \overline{W}, \overline{P} \cdot WT.$

Αν απαιτήσουμε οι πράξεις της ομάδας να αφήνουν αναλλοίωτο ένα πλέγμα, μόνο άξονες περιστροφής πολλαπλότητας 2, 3, 4, 6 είναι επιτρεπτοί. Με αυτό τον περιορισμό ο παραπάνω πίνακας περιορίζεται στον ακόλουθο:

Κατάλογος Β:

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6 \cdot \overline{C}_1, \overline{C}_2, \overline{C}_3, \overline{C}_4, \overline{C}_6 \cdot$

$D'_2, D'_3, D'_4, D'_6 \cdot D'_2, \overline{D}'_3, \overline{D}'_4, \overline{D}'_6 \cdot$

$C_2C_1, C_4C_2, C_6C_3 \cdot D'_4D'_2, D'_6D'_3$

$D'_2C_2, D'_3C_3, D'_4C_4, D'_6C_6 \cdot$

$T, W, \overline{T}, \overline{W}, WT.$

Περιέχει 32 μέλη. Εύκολα πειθόμαστε ότι καθεμιά απ' αυτές τις 32 ομάδες έχει αναλλοίωτα πλέγματα. Στις τρεις διαστάσεις οι αριθμοί h_I, h_{II}, h_{III}, h_{IV} έχουν τις τιμές

$$\infty, 32, 70, 230$$

Στην αλγεβρική του διατύπωση το πρόβλημά μας μπορεί να τεθεί για οποιοδήποτε πλήθος *m* μεταβλητών, x_1, x_2, ..., x_m αντί μόνο 2 ή 3, και τα αντίστοιχα θεωρήματα του πεπερασμένου έχουν αποδειχτεί. Οι μέθοδοι έχουν το μεγαλύτερο μαθηματικό ενδιαφέρον. Ο συνδυασμός «μερική συν πλέγμα» βρίσκεται στη βάση της αριθμητικής θεωρίας των τετραγωνικών μορφών που πρωτοεφαρμόστηκε από τον Gauss και έπαιξε βασικό ρόλο στη Θεωρία Αριθμών κατά το 19ο αιώνα. Ο Dirichlet, ο Hermite και πιο πρόσφατα ο Minkowski και ο Siegel έχουν συνεισφέρει σ' αυτό το είδος της έρευνας. Η διερεύνηση της διακοσμητικής συμμετρίας σε *m* διαστάσεις βασίζεται στα αποτελέσματα που πέτυχαν αυτοί οι συγγραφείς και στην αλγεβρική και πιο εκλεπτυσμένη αριθμητική θεωρία των επονομαζόμενων υπερμιγαδικών συστημάτων αριθμών, για τα οποία έχει καταβάλει μεγάλη προσπάθεια η τελευταία γενιά αλγεβριστών και στη χώρα μας* πάνω απ' όλους ο L. Dickson.

Διακοσμούμε τις επιφάνειες με επίπεδες διακοσμήσεις· η τέχνη ουδέποτε ασχολήθηκε με διακοσμήσεις στο χώρο. Αλλά τέτοιες διακοσμήσεις βρίσκονταν στη φύση. Οι διατάξεις των ατόμων μέσα σε έναν κρύσταλλο είναι τέτοια σχέδια. Τα γεωμετρικά σχήματα των κρυστάλλων με τις επίπεδες επιφάνειές τους είναι ένα γοητευτικό φαινόμενο της φύσης. Ωστόσο η πραγματική φυσική συμμετρία ενός κρυστάλλου δεν φαίνεται τόσο με την εξωτερική του εμφάνιση όσο με την εσωτερική φυσική δομή της κρυσταλλικής ουσίας. Ας υποθέσουμε ότι αυτή η ουσία καλύπτει ολόκληρο το χώρο. Η μακροσκοπική της συμμετρία βρίσκει την έκφρασή της σε μια ομάδα Γ των περιστροφών. Μόνο εκείνοι οι προσανατολισμοί του κρυστάλλου στο χώρο δεν ξεχωρίζουν φυσικά που μεταφέρονται ο ένας στον άλλο με περιστροφή αυτής της ομάδας. Για παράδειγμα, το φως, που γενικά δια-

* Εννοεί τις Η.Π.Α. (Σ.τ.μ.).

δίδεται με διαφορετικές ταχύτητες σε διαφορετικές διευθύνσεις σε ένα κρυσταλλικό μέσο, διαδίδεται με την ίδια ταχύτητα σε οποιεσδήποτε δύο διευθύνσεις που απορρέουν η μία από την άλλη διά περιστροφής από την ομάδα Γ. Το ίδιο ισχύει και για όλες τις άλλες φυσικές ιδιότητες. Για ένα ισότροπο μέσο η ομάδα Γ αποτελείται από όλες τις περιστροφές, αλλά για έναν κρύσταλλο συνίσταται από ένα πεπερασμένο πλήθος περιστροφών, μερικές φορές από καμία άλλη περιστροφή παρά μόνο από την ταυτότητα. Πολύ νωρίς στην ιστορία της κρυσταλλογραφίας ο νόμος των ρητών εκθετών προέκυψε από τη διάταξη των επίπεδων επιφανειών των κρυστάλλων. Οδήγησε στην υπόθεση της πλεγματικής ατομικής κατασκευής των κρυστάλλων. Αυτή η υπόθεση, που εξηγεί το νόμο των ρητών εκθετών, έχει σήμερα οριστικά επιβεβαιωθεί από τα διαγράμματα περιθλάσεως του Laue*, τα οποία στην πραγματικότητα είναι φωτογραφίες των κρυστάλλων με ακτίνες Χ.

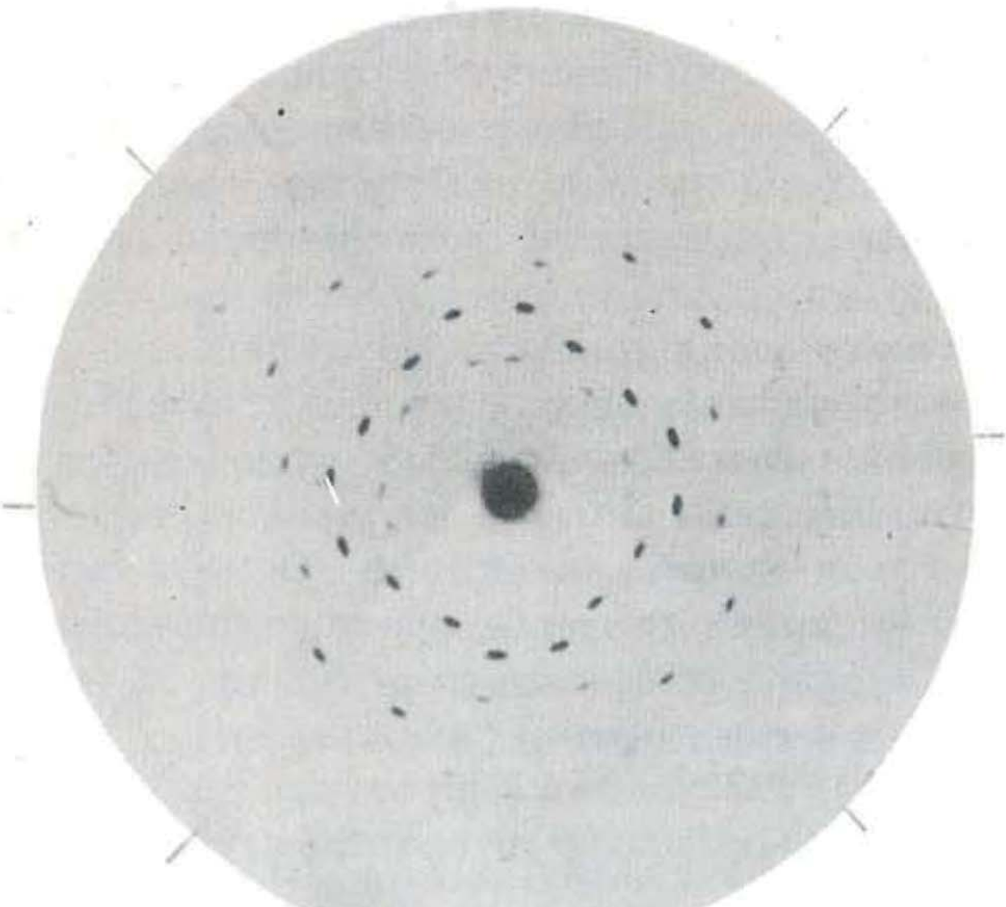
Ακριβέστερα, η υπόθεση καθορίζει ότι η ασυνεχής ομάδα Δ των ισομετριών που μεταφέρει τη διάταξη των ατόμων ενός κρυστάλλου στον εαυτό της περιέχει τον μέγιστο αριθμό 3 των γραμμικώς ανεξάρτητων μεταφορών. Παρεμπιπτόντως, αυτή η υπόθεση μπορεί να περιοριστεί σε πολύ απλούστερες αξιώσεις. Άτομα που μεταπηδούν το ένα πάνω στο άλλο με μια πράξη τής Δ ας ονομάζονται ισοδύναμα. Τα ισοδύναμα άτομα σχηματίζουν ένα κανονικό σύνολο σημείων, με την έννοια ότι το σύνολο μεταφέρεται στον εαυτό του από κάθε πράξη τής Δ και ότι για κάθε δύο σημεία του συνόλου υπάρχει μια πράξη τής Δ που μεταφέρει το ένα επί του άλλου. Μιλώντας για διατάξεις ατόμων αναφέρομαι στις θέ-

* Max Theodor Felix von Laue: Γερμανός φυσικός (1879 - 1960), κάτοχος του Βραβείου Νόμπελ Φυσικής του 1914 για τις εργασίες του στη φυσική στερεάς καταστάσεως και ειδικά για την περίθλαση των ακτίνων Χ από τους κρυστάλλους. (Σ.τ.μ.).

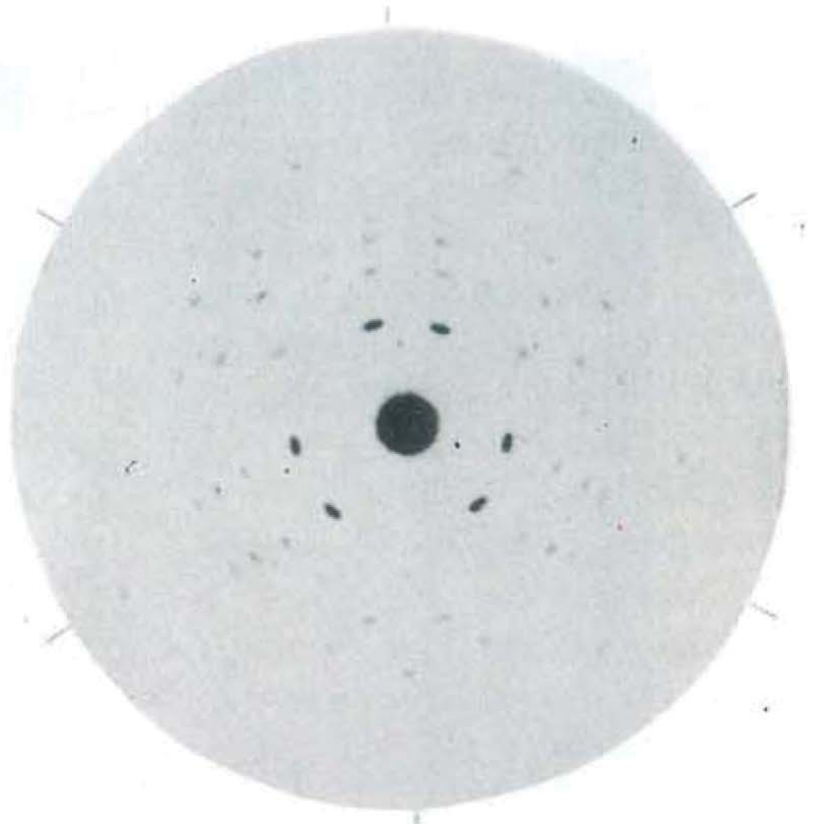
σεις ισορροπίας τους· στην πραγματικότητα τα άτομα ταλαντώνονται γύρω από αυτές τις θέσεις. Ίσως θα μπορούσαμε να παραδειγματιστούμε από την κβαντομηχανική και να αντικαταστήσουμε τις ακριβείς θέσεις των ατόμων με τη μέση πυκνότητα κατανομής τους· αυτή η πυκνότητα, συνάρτηση του χώρου, παραμένει αμετάβλητη ως προς τις πράξεις τής Δ. Η ομάδα $\Gamma = \{\Delta\}$ των περιστροφικών μερών εκείνων των ισομετριών που είναι μέλη της Δ αφήνει αναλλοίωτο το πλέγμα L των σημείων τα οποία προκύπτουν από την αρχή O διαμέσου των μεταφορών που περιλαμβάνονται στη Δ. Οι προκύπτουσες 32 δυνατότητες για τη Γ που απαριθμήθηκαν στον Κατάλογο B αντιστοιχούν στις 32 υπάρχουσες συμμετρικές τάξεις των κρυστάλλων. Για την ίδια την ομάδα Δ έχουμε 230 διακεκριμένες δυνατότητες, όπως αναφέρθηκε παραπάνω[1]. Ενώ η $\Gamma = \{\Delta\}$ περιγράφει την προφανή μακροσκοπική φυσική συμμετρία και συμμετρία του χώρου, η Δ καθορίζει τη μικροσκοπική ατομική συμμετρία που κρύβεται πίσω από την προηγουμένη. Πιθανώς όλοι σας γνωρίζετε πού βασίζεται η επιτυχία της φωτογράφισης των κρυστάλλων από τον von Laue. Η εικόνα ενός αντικειμένου που αποτυπώνεται από το φως κάποιου μήκους κύματος θα είναι αρκετά ακριβής μόνον όσον αφορά λεπτομέρειες σημαντικά μεγαλύτερης τάξης απ' ό,τι το μήκος κύματος, ενώ, αντίθετα, λεπτομέρειες μικρότερων τάξεων υποβαθμίζονται. Το μήκος κύματος του κοινού φωτός είναι περίπου χίλιες φορές μεγαλύτερο απ' ό,τι οι ατομικές αποστάσεις. Όμως οι ακτίνες X είναι ακτίνες φωτός, το μήκος κύματος των οποίων είναι ακριβώς της επιθυμητής τάξεως των 10^{-8} cm. Μ' αυτό τον τρόπο ο von Laue χτύπησε με ένα σμπάρο δυο τρυγόνια : επιβεβαίωσε την πλεγματική δομή των κρυστάλλων και απέδειξε αυτό που προσωρινά είχε υποτεθεί κατά το χρόνο της

1. Βλέπε, για παράδειγμα, P. Niggli, *Geometrische kristallographie des Diskontinuums*, Βερολίνο, 1920.

ανακάλυψής τους (1912), ότι οι ακτίνες X είναι φως μικρού μήκους κύματος. Ακόμη και σ' αυτή την περίπτωση, οι φωτογραφίες των ατομικών σχεδίων που εμφανίζουν τα διαγράμματα δεν είναι φωτογραφίες με την κυριολεκτική έννοια. Παρατηρώντας μια σχισμή της οποίας το πλάτος είναι μόλις μερικά μήκη κύματος, παίρνετε μια κάπως παραμορφωμένη εικόνα της σχισμής φτιαγμένη από κροσσούς συμβολής. Κατά την ίδια έννοια τα διαγράμματα Laue είναι περιθλαστικά πρότυπα του ατομικού πλέγματος. Από την άλλη όμως, μπορούμε να υπολογίσουμε από τέτοιες φωτογραφίες την πραγματική διάταξη των ατόμων· η κλίμακα ορίζεται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας X. Οι Εικόνες 69 και 70 είναι δύο διαγράμματα Laue, και τα δύο από την πρωτότυπη εργασία του Laue (1912)· οι απεικονίσεις είναι παρμένες κατά



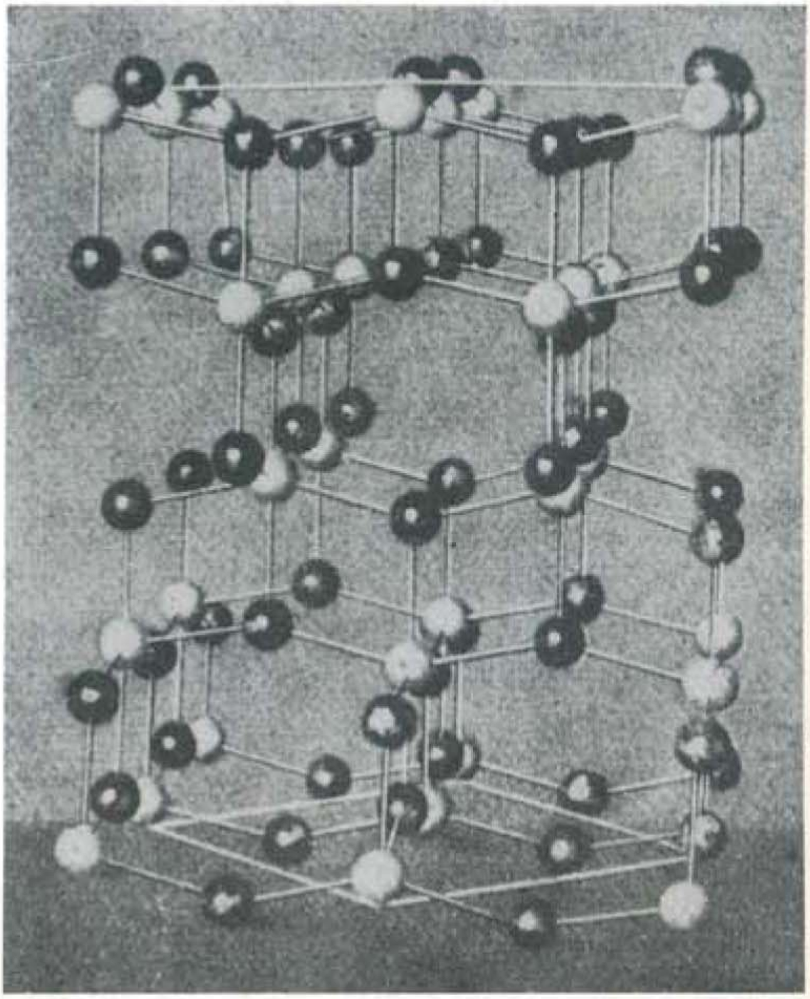
Εικ. 69



Εικ. 70

τέτοιες διευθύνσεις ώστε να παρουσιαστεί η συμμετρία ως προς έναν άξονα 4ης και 3ης τάξης, αντίστοιχα. Δεδομένου ότι κατά τη διάρκεια της διάλεξης μπόρεσα να δείξω διάφορα τρισδιάστατα (μεγεθυμένα) μοντέλα της πραγματικής διάταξης των ατόμων, μια φωτογραφία ενός τέτοιου μοντέλου (Εικόνα 71) ίσως είναι αρκετή για το τυπωμένο κείμενο: Παρουσιάζει ένα μικρό τμήμα ενός κρυστάλλου Ανατάση χημικής συστάσεως TiO_2· οι άσπρες σφαίρες είναι τα άτομα του Ti (Τιτάνιο), οι μαύρες τα άτομα του Οξυγόνου.

Παρ' όλη την παραμόρφωση που αλλοιώνει τις φωτογραφίες με ακτίνες Χ, η συμμετρία του κρυστάλλου απεικονίζεται πιστά. Είναι μια ειδική περίπτωση της ακόλουθης γενικής αρχής: Αν οι συνθήκες που μονοσήμαντα καθορίζουν το αποτέλεσμα, κατέχουν κάποιες συμμετρίες, τότε το αποτέλεσμα θα παρουσιάζει την ίδια συμμετρία. Έτσι ο Αρχιμήδης συμπέρανε ως αρχή ότι ίσα βάρη ισορροπούν σε



Εικ. 71

ζυγαριά με ίσους βραχίονες*. Πράγματι, η όλη διαμόρφωση είναι συμμετρική ως προς επίπεδο κάθετο στο μέσο της ζυγαριάς, και ως εκ τούτου είναι αδύνατο ο ένας βραχίονας να είναι ανεβασμένος και ο άλλος κατεβασμένος. Για τον ίδιο λόγο μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι ρίχνοντας ζάρια, που είναι τέλειοι κύβοι, κάθε πλευρά έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανισθεί, 1/6. Έτσι μερικές φορές έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε προβλέψεις για ορισμένες περιπτώσεις εξαιτίας της συμμετρίας, ενώ η γενική περίπτωση, όπως για παράδειγμα ο νόμος της ισορροπίας για ζυγαριά με βραχίονες

* Στο έργο του περί επιπέδων ισορροπιών ο Αρχιμήδης θέτει αυτή την αρχή ως αξίωμα. Με χρήση της αποδεικνύει τον κανόνα των ροπών. (Σ.τ.επιστ. συμβ.).

διαφορετικού μήκους, μπορεί να καθοριστεί από την πείρα ή από τις αρχές της φυσικής που σε τελευταία ανάλυση βασίζονται στην πείρα. Απ' ό,τι βλέπω, όλοι οι εκ των προτέρων ισχυρισμοί στη φυσική έχουν την καταγωγή τους στη συμμετρία.

Σ' αυτή την επιστημολογική παρατήρηση γύρω από τη συμμετρία προσθέτω μια δεύτερη. Οι μορφολογικοί νόμοι των κρυστάλλων είναι σήμερα κατανοητοί σε σχέση με τη δυναμική των ατόμων: αν ίσα άτομα ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο, ώστε να αποκαθιστούν μια ορισμένη κατάσταση ισορροπίας, τότε τα εν ισορροπία άτομα θα διατάσσονται κατ' ανάγκη σε ένα κανονικό σύστημα σημείων. Η φύση των ατόμων που αποτελούν τον κρύσταλλο καθορίζει, κάτω από δεδομένες εξωτερικές συνθήκες, τη μετρική τους διάταξη, για την οποία η καθαρά μορφολογική έρευνα, που τη συνοψίζει στις 230 ομάδες συμμετρίας Δ, αφήνει ακόμη ένα ανοιχτό πεδίο δυνατοτήτων. Η δυναμική του κρυσταλλικού πλέγματος είναι επίσης υπεύθυνη για τη φυσική συμπεριφορά του κρυστάλλου, ιδιαίτερα για τον τρόπο ανάπτυξής του, κι αυτό με τη σειρά του καθορίζει το χαρακτηριστικό σχήμα που παίρνει υπό την επίδραση παραγόντων του περιβάλλοντος. Δεν είναι άξιο απορίας λοιπόν ότι οι κρύσταλλοι που απαντούν στη φύση εμφανίζουν τους δυνατούς τύπους συμμετρίας σε τέτοια αφθονία διαφορετικών μορφών, που μάγεψαν τον Χανς Κάστορπ στο Μαγικό του Βουνό. Τα ορατά χαρακτηριστικά των φυσικών αντικειμένων συνήθως είναι αποτελέσματα της σύστασής τους και του περιβάλλοντος. Κατά πόσον το νερό, του οποίου τα μόρια έχουν μια καθορισμένη χημική σύσταση, είναι σε στερεά κατάσταση, υγρό ή ατμός εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Η θερμοκρασία είναι ο κατ' εξοχήν περιβαλλοντικός παράγοντας. Τα παραδείγματα από την κρυσταλλογραφία, τη χημεία και τη γενετική γίνονται αιτία να υποπτευτούμε ότι αυτός ο δυϊσμός, που περιγράφεται από τους βιολόγους ως ο δυϊσμός του γονοτύπου και του φαινοτύπου ή της φύσης και της ανατροφής, είναι κατά κάποιον τρόπο συνδεδεμένος με τη διάκριση ασυνεχούς και συνεχούς· και έχουμε δει πώς μια τέτοια διαίρεση σε ασυνεχές και συνεχές μπορεί να πραγματοποιηθεί για τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των κρυστάλλων με πραγματικά πειστικό τρόπο. Αλλά δεν αρνούμαι ότι το γενικό πρόβλημα χρειάζεται περαιτέρω επιστημολογική διευκρίνιση.

Είναι ώρα πια να κλείσω την αναφορά μου στις γεωμετρικές συμμετρίες επιμένοντας σε διακοσμήσεις και κρυστάλλους. Ο κύριος σκοπός αυτής της τελευταίας διάλεξης είναι να δείξω την αρχή της συμμετρίας σε σχέση με προβλήματα φυσικής και μαθηματικών πολύ πιο θεμελιώδους φύσεως και να αντλήσω από αυτά και τις προγενέστερες εφαρμογές τους μια τελική γενική διατύπωση της ίδιας της αρχής.

Στην πρώτη διάλεξη εξήγησα εν συντομία τι έχει να κάνει η *θεωρία της σχετικότητας* με τη συμμετρία: προτού μελετήσουμε τις γεωμετρικές μορφές στο χώρο σχετικά με τη συμμετρία τους, πρέπει να εξετάσουμε τη δομή του ίδιου του χώρου από αυτή την ίδια άποψη. Ο κενός χώρος έχει πολύ υψηλό βαθμό συμμετρίας: κάθε σημείο του είναι όμοιο με οποιοδήποτε άλλο και μέχρις ενός βαθμού δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ των διαφόρων διευθύνσεων. Σας είπα ότι ο Λάιμπνιτς είχε δώσει στη γεωμετρική έννοια της ομοιότητας αυτή τη φιλοσοφική διατύπωση: Όμοια, είπε, είναι δύο πράγματα που δεν διακρίνονται όταν το καθένα εξετάζεται μόνο του. Έτσι δύο τετράγωνα στο ίδιο επίπεδο μπορεί να εμφανίζουν πολλές διαφορές όταν εξετάζουμε τη σχέση μεταξύ τους· για παράδειγμα, οι πλευρές του ενός μπορεί να έχουν κλίση ως προς τις πλευρές του άλλου κατά γωνία 34°. Αλλά, αν πάρουμε το καθένα από μόνο του, κάθε αντικειμενική διαπίστωση που κάνουμε για το ένα θα ισχύει και για το άλλο. Μ' αυτή την έννοια δεν διακρίνονται, και ως εκ τούτου είναι όμοια. Ποιες απαιτήσεις πρέπει να πληροί μια αντικειμενική διαπίστωση θα το διευκρινίσω με το νόημα της λέξης «κάθετος». Αντίθετα με τον Επίκουρο, εμείς οι σύγχρονοι δεν θεωρούμε αντικειμενικό τον ορισμό ότι ευθεία είναι η κάθετος, γιατί παρατηρούμε σ' αυτόν μια σύντμηση του πληρέστερου ορισμού ότι η ευθεία έχει τη διεύθυνση της βαρύτητας σε κάποιο σημείο Ρ. Έτσι το βαρυτικό πεδίο εισέρχεται στην πρόταση σαν απρόβλεπτος παράγοντας και επιπλέον εισέρχεται ένα ατομικά προσδιορισμένο σημείο Ρ πάνω στο οποίο θέτουμε το δάχτυλο με μια επιδεικτική ενέργεια που εκφράζεται με λέξεις όπως εγώ, εδώ, τώρα, αυτό. Ως εκ τούτου, η πεποίθηση του Επίκουρου κλονίζεται αμέσως μόλις γίνει αντιληπτό ότι η διεύθυνση της βαρύτητας είναι διαφορετική στον τόπο όπου ζω και στον τόπο όπου ζούσε ο Στάλιν, και ότι μπορεί επίσης να αλλάξει από μια ανακατανομή της ύλης.

Ας θεωρηθούν αρκετές εδώ αυτές οι σύντομες παρατηρήσεις, αντί για μια πιο λεπτομερή ανάλυση της αντικειμενικότητας. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τη γεωμετρία, έχουμε ακολουθήσει τον Helmholz στην υιοθέτηση της ισομετρίας ως βασικής αντικειμενικής σχέσης στο χώρο. Στην αρχή της δεύτερης διάλεξης μιλήσαμε για την ομάδα των ισομετρικών μετασχηματισμών, η οποία περιλαμβάνεται ως υποομάδα στην ομάδα όλων των ομοιοτήτων. Πριν συνεχίσω επιθυμώ να ξεκαθαρίσω λίγο περισσότερο τη σχέση αυτών των δύο ομάδων. Υπάρχει το ανησυχητικό πρόβλημα της *σχετικότητας του μήκους*.

Στη συνήθη γεωμετρία το μήκος είναι σχετικό : ένα κτίριο και η μακέτα που είναι όμοια· οι διαστολές περιλαμβάνονται μεταξύ των αυτομορφισμών. Αλλά η φυσική αποκάλυψε ότι ένα απόλυτο, πρότυπο μήκος είναι ενσωματωμένο στο άτομο ή, μάλλον, στα στοιχειώδη σωματίδια, συγκεκριμένα το ηλεκτρόνιο, με το καθορισμένο του φορτίο και μάζα. Αυτό το πρότυπο ατομικό μήκος γίνεται προσιτό για μετρήσεις στην πράξη μέσω των μηκών κύματος των φασματικών γραμμών του φωτός που εκπέμπεται από τα άτομα. Έτσι το απόλυτο πρότυπο που προέρχεται από την ίδια τη φύση είναι πολύ καλύτερο από το κλασικό πρότυπο ράβδου ενός μέτρου από ιριδιούχο λευκόχρυσο που φυλάσσεται στο Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών των Σεβρών (κοντά στο Παρίσι). Πιστεύω ότι η πραγματική κατάσταση πρέπει να περιγραφεί ως εξής: Όλα τα φυσικά μεγέθη και όχι μόνο τα σημεία του χώρου μπορούν να καθοριστούν με αριθμούς σχετικά με ένα πλήρες σύστημα αναφοράς. Δύο συστήματα αναφοράς είναι εξίσου επιτρεπτά, αν και στα δύο έχουν την ίδια αλγεβρική έκφραση όλοι οι παγκόσμιοι γεωμετρικοί και φυσικοί νόμοι της φύσης. Οι μετασχηματισμοί που επιτυγχάνονται ανάμεσα σε τέτοια εξίσου επιτρεπτά συστήματα αναφοράς σχηματίζουν την ομάδα των *φυσικών μετασχηματισμών*· οι νόμοι της φύσης παραμένουν αμετάβλητοι σε σχέση με τους μετασχηματισμούς αυτής της ομάδας. Είναι γεγονός ότι ένας μετασχηματισμός αυτής της ομάδας είναι μονοσήμαντα καθορισμένος από εκείνο το τμήμα του που αφορά τις συντεταγμένες των σημείων του χώρου. Έτσι μπορούμε να μιλάμε για τους φυσικούς αυτομορφισμούς *του χώρου*. Η ομάδα τους δεν περιλαμβάνει τις διαστολές, γιατί οι ατομικοί νόμοι ορίζουν ένα απόλυτο μήκος, αλλά περιλαμβάνει τους κατοπτρισμούς, γιατί κανένας νόμος της φύσης δεν υποδεικνύει μια ουσιαστική διαφορά μεταξύ του αριστερού και του δεξιού. Ως εκ τούτου, η ομάδα των φυσικών αυτομορφισμών είναι η ομάδα όλων των γνήσιων και μη γνήσιων ισομετρικών απεικονίσεων. Αν ονομάσουμε δύο σχήματα στο χώρο ισομετρικά, αν εφαρμόζουν το ένα επί του άλλου μέσω μετασχηματισμού αυτής της ομάδας, τότε σώματα που είναι κατοπτρικές εικόνες το ένα του άλλου είναι ισομετρικά. Νομίζω ότι είναι ανάγκη να θέσω αυτό τον ορισμό της ισομετρίας στη θέση εκείνου που εξαρτάται από την κίνηση των στερεών σωμάτων, για τους ίδιους λόγους με εκείνους που έπεισαν τους φυσικούς να θέσουν τον θερμοδυναμικό ορισμό της θερμοκρασίας στη θέση της θερμοκρασίας του κοινού θερμομέτρου. Από τη στιγμή που ορίζεται η ομάδα των φυσικών αυτομορφισμών = ισομετρικών απεικονίσεων, μπορούμε να ορίσουμε τη γεωμετρία ως την επιστήμη που πραγματεύεται τη σχέση ισομετρίας μεταξύ σχημάτων του χώρου και, άρα, οι *γεωμετρικοί αυτομορφισμοί* θα ήταν εκείνοι οι μετασχηματισμοί του χώρου που μεταφέρουν δύο οποιαδήποτε ισομετρικά σχήματα σε ισομετρικά σχήματα — και δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, όπως τον Καντ, ότι αυτή η ομάδα των γεωμετρικών αυτομορφισμών είναι ευρύτερη από αυτή των φυσικών αυτομορφισμών και περιλαμβάνει τις διαστολές.

΄Ολες αυτές οι παρατηρήσεις είναι ελλιπείς ως προς μια άποψη: αγνοούν ότι τα φυσικά φαινόμενα δεν συμβαίνουν μόνο στο χώρο αλλά στο *χώρο και στο χρόνο·* ο κόσμος είναι απλωμένος όχι σε μια τρισδιάστατη αλλά σε μια τετραδιάστατη συνέχεια. Η συμμετρία, η σχετικότητα ή η ομοιογένεια αυτού του τετραδιάστατου μέσου περιγράφηκε για πρώτη φορά σωστά από τον Αϊνστάιν. Ρωτάμε: Η διαπίστωση ότι δύο γεγονότα συμβαίνουν στον ίδιο τόπο έχει κάποια αντικειμενική σημασία; Τείνουμε να πούμε ναι· αλλά είναι ξεκάθαρο ότι, αν το κάνουμε αυτό, εννοούμε τη θέση σαν θέση σχετικά με τη Γη πάνω στην οποία κατοικούμε. Είναι όμως βέβαιο ότι η Γη παραμένει ακίνητη; Σήμερα, ακόμη και τα παιδιά μας στο σχολείο μαθαίνουν ότι η Γη περιστρέφεται και ότι κινείται μέσα στο Διάστημα. Ο Νεύτων έγραψε το έργο του *Philosophiae naturalis principia mathematica* [Μαθηματικές αρχές φυσικής φιλοσοφίας] για να απαντήσει σ' αυτό το πρόβλημα, να συναγάγει, όπως είπε, την απόλυτη κίνηση των σωμάτων από τις διαφορές τους, τις παρατηρούμενες σχετικές κινήσεις, και από τις δυνάμεις που δρουν πάνω στα σώματα. Αλλά, μολονότι πίστευε ακράδαντα στον απόλυτο χώρο, δηλαδή στην αντικειμενικότητα της διαπίστωσης ότι δύο γεγονότα συμβαίνουν στον ίδιο τόπο, δεν κατάφερε να διακρίνει αντικειμενικά την ηρεμία ενός υλικού σημείου από όλες τις άλλες δυνατές κινήσεις. Πέτυχε μόνο να διακρίνει την κίνηση σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα, την ονομαζόμενη ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, από όλες τις άλλες κινήσεις. Ξαναρωτάμε: Η διαπίστωση ότι δύο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα (αλλά σε διαφορετικούς τόπους, ας πουμε στη Γη και στον Σείριο) έχει αντικειμενική σημασία; Μέχρι να εμφανιστεί ο Αϊνστάιν, ο κόσμος έλεγε ναι. Η βάση αυτής της πεποίθησης οφείλεται προφανώς στη συνήθεια των ανθρώπων να θεωρούν ότι ένα γεγονός συμβαίνει τη στιγμή που το παρατηρούν. Αλλά τα θεμέλια αυτής της δοξασίας γκρεμίστηκαν πριν από πολύ καιρό, από την ανακάλυψη του Olaf Roemer ότι το φως διαδίδεται όχι ακαριαία αλλά με πεπερασμένη ταχύτητα. Έτσι φτάνουμε να καταλάβουμε ότι στο τετραδιάστατο συνεχές του χωροχρόνου μόνον η σύμπτωση δύο σημείων του κόσμου, «εδώ-τώρα», ή η εγγύτατη γειτονία τους έχει μια άμεση επαληθευτική σημασία. Αλλά γίνεται αμφίβολο κατά πόσον η διαστρωμάτωση αυτού του τετραδιάστατου συνεχούς σε τρισδιάστατες στρώσεις ταυτοχρονισμού και μια εγκάρσια υφή μονοδιάστατων ινών, οι παγκόσμιες γραμμές των σημείων που παραμένουν στο χώρο, περιγράφουν αντικειμενικά γνωρίσματα της δομής του κόσμου. Ο Αϊνστάιν έκανε το εξής: Χωρίς προκατάληψη συνέλεξε όλες τις φυσικές ενδείξεις που διαθέτουμε για την πραγματική δομή του τετραδιάστατου συνεχούς του χωροχρόνου και έτσι βρήκε την αληθή ομάδα του αυτομορφισμού. Την ονόμασε ομάδα του Lorentz, αφού ο Ολλανδός φυσικός H.A. Lorentz* ήταν εκεί-

* Hendrik Antoon Lorentz: Ολλανδός φυσικός (1853-1928). Το 1902 τιμήθηκε με το Βραβείο Νόμπελ Φυσικής μαζί με τον Zeeman για την ανάπτυξη μιας θεωρίας σχετικής με την ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Ο Λόρεντζ, για να γίνει δυνατή η παρακολούθηση της κίνησης της Γης, δέχτηκε μια συστολή των μηκών κατά τη διεύθυνση της κίνησης. Ο Λόρεντζ επιπλέον προχώρησε στην εισαγωγή ενός «τοπικού χρόνου», ενός καθαρά μαθηματικού τεχνάσματος, αφού αυτός συνδέεται με την έννοια του από-

νος που, σαν τον Ιωάννη τον Βαπτιστή, πρετοίμασε το δρόμο για το ευαγγέλιο της θεωρίας της σχετικότητας του Αϊνστάιν. Κατέληξε ότι σύμφωνα μ' αυτή την ομάδα δεν υπάρχουν ούτε αμετάβλητες στρώσεις ταυτοχρονισμού ούτε αμετάβλητες ίνες ηρεμίας. Ο φωτεινός κώνος, το επίκεντρο όλων των σημείων του κόσμου, με τον οποίο λαμβάνεται, «εδώ-τώρα», ένα φωτεινό σήμα από ένα καθορισμένο σημείο Ο του κόσμου, διαιρεί τον κόσμο σε μέλλον και παρελθόν, σ' εκείνο το τμήμα του που μπορεί ακόμη να επηρεάζεται από αυτό που κάνω στο Ο και σ' εκείνο το τμήμα που δεν μπορεί να επηρεάζεται. Αυτό σημαίνει ότι ουδεμία ενέργεια ταξιδεύει ταχύτερα από το φως και ότι ο κόσμος έχει μια αντικειμενική αιτιολογική δομή που περιγράφεται από αυτούς τους φωτεινούς κώνους που προέρχονται από κάθε σημείο Ο του κόσμου. Εδώ δεν μπορούμε να καταγράψουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz και να διατυπώσουμε πώς η ειδική θεωρία της σχετικότητας με τη σταθερή αιτιολογική και αδρανειακή της δομή έδωσε διέξοδο στη γενική σχετικότητα, όπου αυτές οι δομές έγιναν ελαστικές μέσω της αλληλεπίδρασής τους με την ύλη[2]. Θέλω μόνο να υποδείξω ότι η συμμετρία είναι συμφυής με το τετραδιάστατο συνεχές του χώρου και του χρόνου που πραγματεύεται η σχετικότητα.

Βρήκαμε ότι αντικειμενικότητα σημαίνει αναλλοίωτο ως προς την ομάδα των αυτομορφισμών. Η πραγματικότητα μπο-

λυτου χρόνου. Οι παραπάνω παραδοχές επέτρεψαν στον Λόρεντζ να διατυπώσει τους μετασχηματισμούς που φέρουν το όνομά του. Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξε και τα οποία ουσιαστικά βασίζονται στην παραδοχή της συστολής των μηκών (επομένως και στην αύξηση της μάζας και της διαστολής του χρόνου) χρησίμευσαν σε κάποιο βαθμό στον Αϊνστάιν για να διατυπώσει το 1905 την ειδική θεωρία της σχετικότητας. (Σ.τ.μ.).

2. Μπορείτε να συγκρίνετε την πρόσφατη διάλεξή μου στο Συνέδριο του Μονάχου του Gesellschaft deutscher Naturforscher: «50 Jahre Relativitätstheorie» [50 χρόνια θεωρία σχετικότητας], *Die Naturwissenschaften 38* (1951), σελ. 78-83.

ρεί να μη δίνει πάντοτε ξεκάθαρη απάντηση στο πρόβλημα ποια στ' αλήθεια είναι η ομάδα των αυτομορφισμών, και για κάποιους ερευνητικούς σκοπούς μπορεί να είναι χρήσιμο να την αντικαταστήσουμε με μια ευρύτερη ομάδα. Για παράδειγμα, στην επίπεδη γεωμετρία ενδιαφερόμαστε μόνο για εκείνες τις σχέσεις που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από παράλληλες ή κεντρικές προβολές· αυτή είναι η αρχή της ομοπαραλληλικής και προβολικής γεωμετρίας. Ο μαθηματικός θα προετοιμαστεί για όλα αυτά τα ενδεχόμενα θέτοντας το γενικό πρόβλημα πώς για μια δεδομένη ομάδα μετασχηματισμών θα βρούμε τις αναλλοίωτές της (αναλλοίωτες σχέσεις, αναλλοίωτες ποσότητες κτλ.) και λύνοντάς το για τις σπουδαιότερες ειδικές ομάδες, είτε είναι γνωστό είτε είναι άγνωστο αν οι ομάδες αυτές είναι ομάδες μετασχηματισμών για ορισμένα πεδία που υποδεικνύονται από τη φύση. Αυτό είναι ό,τι ο Felix Klein* ονόμασε «μια γεωμετρία» με την αφηρημένη έννοια. Μια γεωμετρία, είπε ο Klein, ορίζεται από μια ομάδα μετασχηματισμών και διερευνά οτιδήποτε παραμένει αναλλοίωτο από τους μετασχηματισμούς της δεδομένης ομάδας. Για συμμετρία μιλάμε ως προς μία υποομάδα γ της συνολικής ομάδας. Πεπερασμένες υποομάδες αξίζουν ιδιαίτερη προσοχή. Ένα σχήμα, δηλαδή οποιοδήποτε σύνολο σημείων, έχει το χαρακτηριστικό είδος συμμετρίας που καθορίζεται από την υποομάδα γ αν μεταφέρεται στον εαυτό του μέσω των μετασχηματισμών της γ.

Τα δύο μεγάλα γεγονότα στη φυσική του 20ού αιώνα είναι η θεωρία της σχετικότητας και η *κβαντομηχανική*. Υπάρχει άραγε κάποια σχέση ανάμεσα στην κβαντομηχανική και τη συμμετρία; Ναι, υπάρχει. Η συμμετρία παίζει μεγά-

* Christian Felix Klein: Γερμανός μαθηματικός (1849 - 1925) του οποίου η αντίληψη για τη γεωμετρία ως της μελέτης των ιδιοτήτων ενός χώρου που παραμένουν αναλλοίωτες υπό την επίδραση μια δεδομένης ομάδας μετασχηματισμών, επηρέασε βαθιά τη μαθηματική σκέψη. (Σ.τ.μ.).

λο ρόλο στη διάταξη των ατομικών και μοριακών φασμάτων, για την κατανόηση των οποίων το κλειδί το δίνουν οι αρχές της κβαντομηχανικής. Ένας τεράστιος όγκος εμπειρικού υλικού που αφορά τις φασματικές γραμμές, τα μήκη κύματός τους και τις κανονικότητες στη διάταξή τους είχε συλλεγεί πριν η κβαντική φυσική σημειώσει την πρώτη της επιτυχία· αυτή η επιτυχία συνίστατο στην παραγωγή του νόμου των ονομαζόμενων σειρών Balmer των φασμάτων του ατόμου του υδρογόνου και στην απόδειξη του πώς η χαρακτηριστική σταθερά που εισέρχεται σ' αυτόν το νόμο σχετίζεται με τη μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου και τη φημισμένη σταθερά *h* του Plank. Από τότε η ερμηνεία των φασμάτων συνόδευσε την ανάπτυξη της κβαντικής φυσικής, και τα καθοριστικά νέα γνωρίσματα, το ηλεκτρονικό spin και η παράξενη απαγορευτική αρχή του Pauli, ανακαλύφθηκαν κατά τον ίδιο τρόπο. Αποδείχτηκε ότι, από τη στιγμή που έγιναν αυτές οι θεμελιώσεις, η συμμετρία θα μπορούσε να βοηθήσει πολύ στη διευκρίνιση του γενικού χαρακτήρα των φασμάτων.

Ένα άτομο είναι περίπου ένα νέφος ηλεκτρονίων, έστω *n* ηλεκτρονίων, που κινούνται γύρω από έναν σταθερό πυρήνα Ο. Λέω περίπου, αφού η υπόθεση ότι ο πυρήνας είναι σταθερός δεν είναι ακριβώς αληθής και μάλιστα είναι λιγότερο δικαιολογημένη απ' ό,τι η θεώρηση του Ήλιου ως του σταθερού κέντρου του πλανητικού μας συστήματος. Γιατί η μάζα του Ήλιου είναι 300.000 φορές μεγαλύτερη απ' ό,τι η μάζα ενός πλανήτη σαν τη Γη, ενώ, αντίθετα, το πρωτόνιο, ο πυρήνας του ατόμου του υδρογόνου, είναι λιγότερο από 2.000 φορές βαρύτερο από ένα ηλεκτρόνιο. Παρ' όλα αυτά, είναι μια καλή προσέγγιση! Διακρίνουμε τα n ηλεκτρόνια κολλώντας τους τις ετικέτες 1, 2, ..., n· εισέρχονται στους νόμους που διέπουν την κίνησή τους μέσω των συντεταγμένων των θέσεών τους P_1, P_2, ..., P_n αναφορικά με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή Ο. Η επικρατούσα συμμετρία έχει δύο πτυχές. Πρώτον, πρέπει να έχουμε αναλλοίωτο σε σχέση με τη μεταφορά από το ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο άλλο· αυτή η συμμετρία προέρχεται από την περιστροφική συμμετρία του χώρου και εκφράζεται από την ομάδα των γεωμετρικών περιστροφών ως προς το O. Κατά δεύτερον, όλα τα ηλεκτρόνια είναι παρόμοια· η διάκριση με βάση τις ετικέτες τους 1, 2, ..., n δεν είναι ουσιαστική αλλά κατ' όνομα μόνο: δύο «αστερισμοί» ηλεκτρονίων που απορρέουν ο ένας από τον άλλον με αυθαίρετη μετάθεση των ηλεκτρονίων δεν διακρίνονται. Μια μετάθεση συνίσταται σε μια αναδιάταξη των ετικετών· στην πραγματικότητα αποτελεί μια ένα προς ένα απεικόνιση του συνόλου των ετικετών (1, 2, ..., n) επί του εαυτού των ή, αν θέλετε, του αντίστοιχου συνόλου των σημείων (P_1, P_2, ..., P_n). Έτσι, για παράδειγμα, στην περίπτωση n = 5 ηλεκτρονίων οι νόμοι πρέπει να παραμένουν ανεπηρέαστοι, αν τα σημεία P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 αντικατασταθούν από τα P_3, P_5, P_2, P_1, P_4 (μετάθεση $1 \to 3, 2 \to 5, 3 \to 2, 4 \to 1, 5 \to 4$). Οι μεταθέσεις σχηματίζουν μια ομάδα τάξης $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, και το δεύτερο είδος συμμετρίας εκφράζεται από αυτή την ομάδα των μεταθέσεων. Η κβαντομηχανική εκφράζει την κατάσταση ενός συστήματος με ένα διάνυσμα σε ένα χώρο πολλών, πραγματικά απείρως πολλών, διαστάσεων. Δύο καταστάσεις που προκύπτουν η μία από την άλλη, είτε διά περιστροφής του συστήματος των ηλεκτρονίων είτε μέσω μιας από τις μεταθέσεις, συνδέονται με έναν γραμμικό μετασχηματισμό που έχει σχέση με αυτή την περιστροφή ή αυτή τη μετάθεση. Ως εκ τούτου, μπαίνει στο παιχνίδι το βαθύτερο και πιο συστηματικό μέρος της θεωρίας των ομάδων, η θεωρία των παραστάσεων μιας ομάδας από γραμμικούς μετασχηματισμούς. Συγκρατούμαι και δεν σας δίνω ακριβέστερη περιγραφή αυτού του δύσκολου αντικειμένου. Αλλά και εδώ η συμμετρία αποδείχθηκε για άλλη μια φορά το οδηγητικό νήμα προς ένα πεδίο μεγάλης ποικιλίας και σπουδαιότητας.

Από την τέχνη, τη βιολογία, την κρυσταλλογραφία και τη φυσική έρχομαι τελικά στα *μαθηματικά*, τα οποία πρέπει να συμπεριλάβω, πολύ περισσότερο γιατί οι θεμελιώδες έννοιες, ειδικά αυτή της ομάδας, αναπτύχθηκαν κατά πρώτον από τις εφαρμογές τους στα μαθηματικά, ιδιαίτερα στη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων. Ο αλγεβριστής είναι ένας άνθρωπος που έχει να κάνει με αριθμούς, αλλά οι μοναδικές πράξεις που είναι σε θέση να εκτελέσει είναι τα τέσσερα είδη $+$, $-$, $\times$, $\div$. Οι αριθμοί που προκύπτουν από τους αριθμούς 0 και 1 με τη βοήθεια των τεσσάρων αυτών πράξεων είναι οι ρητοί αριθμοί. Το πεδίο F αυτών των αριθμών είναι κλειστό ως προς τις τέσσερις πράξεις, με άλλα λόγια, το άθροισμα, η διαφορά και το γινόμενο δύο ρητών αριθμών είναι ρητοί αριθμοί, όπως επίσης και το πηλίκον τους, εφόσον ο διαιρέτης είναι διαφορετικός του μηδενός. Έτσι οι αλγεβριστές δεν θα είχαν λόγους να βαδίσουν έξω από αυτόν το χώρο F, αν οι απαιτήσεις της γεωμετρίας και της φυσικής δεν εξανάγκαζαν τους μαθηματικούς να ασχοληθούν με το έσχατο καθήκον να αναλύσουν *τη συνέχεια* και να εμφυτεύσουν τους ρητούς αριθμούς στο συνεχές όλων των πραγματικών αριθμών. Αυτή η ανάγκη πρωτοεμφανίστηκε όταν οι αρχαίοι Έλληνες ανακάλυψαν ότι η διαγώνιος και η πλευρά ενός τετραγώνου είναι ασύμμετρα μεγέθη. Όχι πολύ αργότερα, ο Εύδοξος* διατύπωσε τις γενικές αρχές στις οποίες βασίζεται η δημιουργία ενός συστήματος πραγματικών αριθμών, κατάλληλου για όλες τις μετρήσεις. Μετά,

* Εύδοξος ο Κνίδιος (400 - 350 π.Χ.): Ο σπουδαιότερος από τους μαθηματικούς και αστρονόμους της εποχής του Πλάτωνα, γεννημένος στην Κνίδο της Μικράς Ασίας. Προώθησε σημαντικά τη θεωρία των αριθμών αποδεικνύοντας την ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών. Οι δύο βασικές συνεισφορές του Εύδοξου στα μαθηματικά είναι η θεωρία των αναλογιών και η μέθοδος της εξάντλησης για τον υπολογισμό των εμβαδών και των όγκων σχημάτων που περιορίζονται από καμπύλες. (Σ.τ.μ.).

κατά την Αναγέννηση, το πρόβλημα της επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων οδήγησε στην εισαγωγή μιγαδικών αριθμών $\alpha+bi$ με πραγματικούς συντελεστές (α,b). Το μυστήριο που σκέπαζε στην αρχή αυτούς και τη φανταστική τους μονάδα $i=\sqrt{-1}$ λύθηκε τελείως όταν έγινε αντιληπτό ότι δεν είναι τίποτε άλλο παρά ζεύγη (α,b) από συνήθεις πραγματικούς αριθμούς, ζεύγη για τα οποία η πρόσθεση και ο πολλαπλασμός ορίζονται με τέτοιον τρόπο, ώστε να διατηρούν όλους τους συνηθισμένους νόμους της αριθμητικής. Αυτό μπορεί πράγματι να γίνει με τέτοιον τρόπο, ώστε κάθε πραγματικός αριθμός α να μπορεί να ταυτιστεί με τον μιγαδικό αριθμό $(\alpha,0)$ και το τετράγωνο $i\cdot i = i^2$ του $i = (0,1)$ να ισούται με -1, πιο αναλυτικά $(-1,0)$. Έτσι η εξίσωση $x^2+1=0$, που δεν έχει λύση κανέναν πραγματικό αριθμό x, μπορεί να λυθεί. Στις αρχές του 19ου αιώνα αποδείχτηκε ότι η εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών έδωσε λύση όχι μόνο σ' αυτή αλλά σε όλες τις αλγεβρικές εξισώσεις: η εξίσωση

$$f(x) = x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

ως προς x, οποιουδήποτε βαθμού n και συντελεστών a_k, έχει n λύσεις ή «ρίζες» (όπως συνηθίζουμε να λέμε) $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$, έτσι ώστε το πολυώνυμο $f(x)$ αναλύεται σε n παράγοντες

$$f(x) = (x-\theta_1)\,(x-\theta_2)\ldots(x-\theta_n).$$

Εδώ το x είναι μια μεταβλητή ή απροσδιόριστη και για την εξίσωση μπορεί να δοθεί η ερμηνεία πως καθορίζει ότι οι συντελεστές των δύο πολυωνύμων και στα δύο μέλη συμπίπτουν ένας προς έναν.

Τέτοιου είδους σχέσεις μεταξύ δύο απροσδιόριστων αριθμών x, y που είναι σε θέση να δημιουργεί ο αλγεβριστής, με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, μπορούν πάντα να αναχθούν στη μορφή $R(x,y) = 0$, όπου η συνάρτηση $R(x,y)$ των δύο μεταβλητών x,y είναι ένα πολυώνυμο, δηλαδή ένα πεπερασμένο άθροισμα μονωνύμων του τύπου

$$\alpha_{\mu,n}x^{\mu}y^{\nu} \qquad (\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$$

με ρητούς συντελεστές $\alpha_{\mu n}$. Αυτές οι σχέσεις είναι οι προσιτές σ' αυτόν «αντικειμενικές σχέσεις». Με δεδομένους δύο μιγαδικούς αριθμούς α,β, ο αλγεβριστής θα αναζητήσει, συνεπώς, ποια πολυώνυμα $R(x,y)$ υπάρχουν με ρητούς συντελεστές που μηδενίζονται δι' αντικαταστάσεως της τιμής τής μεταβλητής x με α και της μεταβλητής y με β. Από τους δύο μπορούμε να περάσουμε σε οποιοδήποτε πλήθος δεδομένων μιγαδικών αριθμών $\theta_1, ..., \theta_n$. Ο αλγεβριστής θα αναζητήσει τους αυτομορφισμούς του συνόλου Σ αυτών των αριθμών, δηλαδή αυτές τις μεταθέσεις των $\theta_1, ..., \theta_n$ οι οποίες δεν καταργούν καμιά από τις αλγεβρικές σχέσεις $R(\theta_1, ..., \theta_n) = 0$ που υπάρχουν ανάμεσά τους. Εδώ το $R(x_1, ..., x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές των *n* μεταβλητών $x_1, ..., x_n$ με $\theta_1, ..., \theta_n$. Οι αυτομορφισμοί σχηματίζουν μια ομάδα που ονομάζεται *ομάδα του Galois*, προς τιμήν του Γάλλου μαθηματικού Evarist Galois*. Όπως δείχνει αυτή η περιγραφή, η θεωρία του Galois δεν είναι τίποτε άλλο παρά η θεωρία της σχετικότητας για το σύνολο Σ, ένα σύνολο το οποίο, με τον ασυνεχή και πεπερασμένο χαρακτήρα του, είναι εννοιολογικά πολύ απλούστερο απ' ό,τι το άπειρο σύ-

* Evarist Galois (1811 - 1832): Γάλλος μαθηματικός που βρήκε τραγικό θάνατο κατά τη διάρκεια μιας μονομαχίας σε ηλικία 21 χρόνων. Από τότε που ήταν μαθητής αναζητούσε, χρησιμοποιώντας αυτό που σήμερα λέγεται «Θεωρία Γκαλουά», τις βασικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια εξίσωση για να επιλύεται με ριζικά. Η μέθοδός του συνίσταται στην ανάλυση των επιτρεπτών μεταθέσεων των ριζών της εξίσωσης. Δηλαδή, σχημάτισε την ομάδα αυτομορφισμών του σώματος που προκύπτει, επισυνάπτοντας τις ρίζες της εξίσωσης στο σώμα των συντελεστών της. Οι συνθήκες που οδήγησαν στο θάνατό του, στις 31 Μαρτίου 1832, ουδέποτε διελευκάνθησαν πλήρως. Πάντως, σαν να είχε προβλέψει το θάνατό του, έγραψε με πυρετώδη σπουδή μια επιστολή στο φίλο του Ωγκύστ Σεβαλιέ, στην οποία υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Γκαλουά είχε αρχίσει να αναπτύσσει την θεωρία των αλγεβρικών δομών, η πλήρης ανάπτυξη της οποίας έγινε 40 χρόνια μετά το θάνατό του από τον Γερμανό μαθηματικό Μπέρναρντ Ρίμαν (Riemanm) (Σ.τ.μ.).

νολο των σημείων στο χώρο ή στο χωροχρόνο που πραγματεύεται η θεωρία της σχετικότητας. Παραμένουμε εντελώς μέσα στα όρια της άλγεβρας όταν θεωρούμε ιδιαίτερα ότι τα μέλη $\theta_1, \ldots, \theta_n$ του συνόλου Σ καθορίζονται ως οι n ρίζες μιας αλγεβρικής εξίσωσης (1), $f(x)=0$, νυοστού βαθμού, με ρητούς συντελεστές α_k. Μιλάμε τότε για την ομάδα Galois της εξίσωσης $f(x)=0$. Μπορεί να είναι αρκετά δύσκολο να καθοριστεί η ομάδα, επειδή απαιτεί μια αξιολόγηση όλων των πολυωνύμων $R(x_1, \ldots, x_n)$ που ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες. Αλλά, από τη στιγμή που έχει εξακριβωθεί, μπορούμε να μάθουμε από τη δομή της ομάδας πάρα πολλά για τις φυσικές διαδικασίες με τις οποίες λύνεται η εξίσωση. Οι ιδέες του Galois, που για πολλές δεκαετίες έμειναν επτασφράγιστο βιβλίο αλλά αργότερα άρχισαν να ασκούν όλο και πιο βαθιά επιρροή στη συνολική ανάπτυξη των μαθηματικών, περιέχονται σε ένα αποχαιρετιστήριο γράμμα σε ένα φίλο του, γραμμένο την παραμονή μιας ανόητης μονομαχίας, στην οποία βρήκε το θάνατο, στα είκοσι ένα του χρόνια. Αυτό το γράμμα, αν το κρίνουμε από την καινοτομία και την εμβρίθεια των εννοιών που περιέχει, είναι ίσως το πιο ουσιαστικό γραπτό σε όλη τη φιλοσοφία του ανθρώπινου γένους. Σας δίνω δύο παραδείγματα της θεωρίας του Galois.

Το πρώτο είναι παρμένο από την αρχαιότητα. Ο λόγος $\sqrt{2}$ μεταξύ της διαγωνίου και της πλευράς ενός τετραγώνου καθορίζεται από τη δευτεροβάθμια εξίσωση με ρητούς συντελεστές

$$x^2-2=0. \tag{2}$$

Οι δύο ρίζες της είναι $\theta_1=\sqrt{2}$ και $\theta_2=-\theta_1=-\sqrt{2}$,

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2}).$$

Όπως ανέφερα λίγο πριν, οι ρίζες είναι άρρητες. Η βαθιά εντύπωση που έκανε στους στοχαστές της αρχαιότητας αυτή η ανακάλυψη, η οποία αποδίδεται στη σχολή του Πυθαγόρα, μαρτυρείται σε κάμποσα χωρία των διαλόγων του Πλάτωνα. Αυτή η βαθιά γνώση ανάγκασε τους αρχαίους Έλληνες να διατυπώσουν τη γενική θεωρία των αριθμών με γεωμετρικούς παρά με αλγεβρικούς όρους. Έστω $R(x_1, x_2)$ ένα πολυώνυμο των x_1, x_2 με ρητούς συντελεστές, που μηδενίζεται για $x_1=\theta_1, x_2=\theta_2$. Το ζήτημα είναι κατά πόσον το $R(\theta_2, \theta_1)$ είναι επίσης μηδέν. Αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι η απάντηση είναι καταφατική για κάθε R, τότε η μετάθεση

$$\theta_1 \to \theta_2, \qquad \theta_2 \to \theta_1 \tag{3}$$

είναι ένας αυτομορφισμός, όπως είναι και η ταυτότητα $\theta_1 \to \theta_1$, $\theta_2 \to \theta_2$. Η απόδειξη έχει ως ακολούθως: Το πολυώνυμο $R(x,-x)$ μιας μεταβλητής x μηδενίζεται για $x=\theta_1$. Η διαίρεσή του διά x^2-2,

$$R(x,-x) = (x^2-2)\cdot Q(x) + (ax+b)$$

αφήνει ένα υπόλοιπο $ax+b$ 1ου βαθμού με ρητούς συντελεστές a,b. Αντικαθιστούμε το x με το θ_1 : η εξίσωση $a\theta_1+b=0$ που προκύπτει αντιφάσκει με την άρρητη φύση του $\theta_1=\sqrt{2}$, εκτός αν $a = 0$, $b = 0$. Ως εκ τούτου,

$$R(x, -x) = (x^2-2)\cdot Q(x)$$

και, επομένως, $R(\theta_2, \theta_1) = R(\theta_2,-\theta_2) = 0$. Έτσι το γεγονός ότι η ομάδα των αυτομορφισμών περιέχει τη μετάθεση (3) εκτός από την ταυτότητα είναι ισοδύναμο με τον άρρητο της $\sqrt{2}$.

Το άλλο μου παράδειγμα είναι η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη του κανονικού 17-γώνου από τον Γκάους*, την

* Καρλ Φρίντριχ Γκάους (1777 - 1855): Θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Ακολουθώντας την επαναστατική θεωρία των αριθμών, άνοιξε το δρόμο στην αυστηρότητα της ανάλυσης που σημειώθηκε στα μέσα του 19ου αιώνα. Ανάμεσα σε πολλά άλλα επιτεύγματα, χρησιμοποιώντας τη θεωρία αριθμών, ο Γκάους προτείνει μια αλγεβρική λύση στο γεωμετρικό πρόβλημα της κατασκευής του κανονικού πολυγώνου με n πλευρές. Ο Ευκλείδης είχε αποδείξει ότι τα κανονικά πολύγωνα με 3, 4, 5 και 15 πλευρές, καθώς και αυτά που ο αριθμός των πλευρών τους προκύπτει με διπλασιασμό των αριθμών αυτών, μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη. Ο Γκάους ανέπτυξε ένα κριτήριο με το οποίο μπορεί να αποφανθεί κανείς αν είναι δυνατό να κατασκευαστεί γεωμετρικά ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές. Μεταξύ αυτών που κατασκευάζονται είναι και το κανονικό 17-γωνο. (Σ.τ.μ.).

οποία βρήκε όταν ήταν ακόμη παλικάρι 19 ετών. Μέχρι τότε ταλαντευόταν ανάμεσα στην κλασική φιλολογία και τα μαθηματικά. Αυτή η επιτυχία συνέβαλε αποφασιστικά στο να πάρει την τελική του απόφαση υπέρ των μαθηματικών. Σε ένα επίπεδο απεικονίζουμε έναν οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό $z = x+yi$ με ένα σημείο με πραγματικές καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y). Η αλγεβρική εξίσωση

$$z^P-1 = 0$$

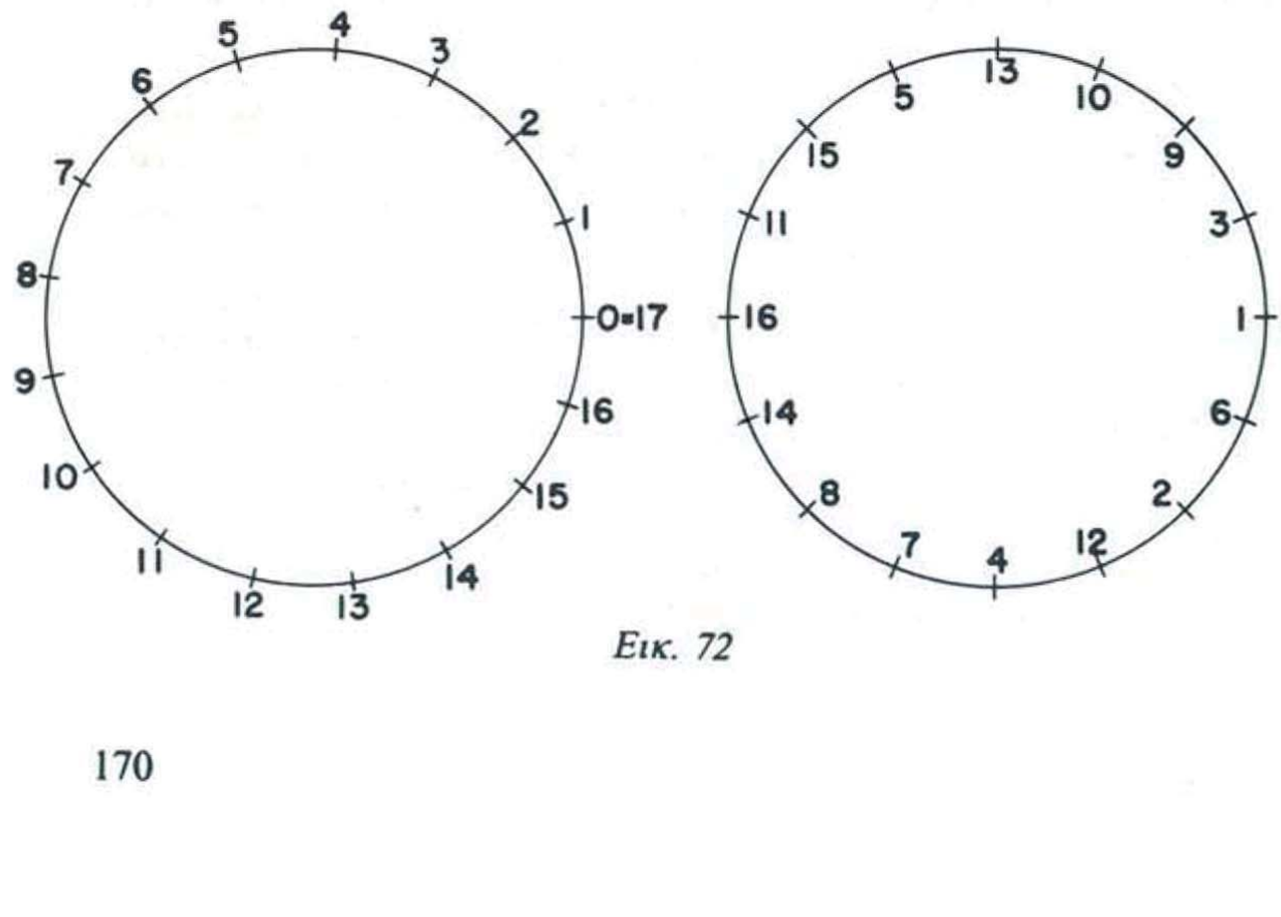
έχει p ρίζες που σχηματίζουν τις κορυφές ενός κανονικού p-γώνου. Η $z = 1$ είναι μία κορυφή· και αφού

$z^P-1 = (z-1)\cdot(z^{P-1}+z^{P-2}+\ldots +z+1)$,

οι άλλες είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^{P-1}+ \ldots +z+1 = 0 \tag{4}$$

Αν p είναι πρώτος αριθμός, όπως τώρα θα υποθέσουμε, οι ρίζες αυτές δεν διακρίνονται μεταξύ τους αλγεβρικά και η ομάδα των αυτομορφισμών των $p-1$ ριζών είναι μια κυκλική ομάδα $p-17$. Το αριστερό 17-βάθμιο καντράν (Εικόνα 72) δείχνει την ονομασία των κορυφών, το δεξιό 16-βάθμιο τις 16 ρίζες της (4) σε μια μυστηριώδη κυκλική διάταξη: η περιστροφή του δεύτερου διαγράμματος, δηλαδή η επανάληψη της περιστροφής κατά 1/16 της όλης περιφέρειας, δίνει



Εικ. 72

τους 16 αυτομορφισμούς σαν μεταθέσεις μεταξύ των 16 ριζών. Η ομάδα C_{16} προφανώς έχει μια υποομάδα C_8 τάξης 2, που λαμβάνεται διά περιστροφής του καντράν κατά 1/8, 2/8, 3/8, ... της πλήρους γωνίας. Με επανάληψη αυτής της διαδικασίας, παραλείποντας κάθε δεύτερο σημείο, βρίσκουμε μια αλυσίδα διαδοχικών υποομάδων ($\supset$ σημαίνει : «περιέχει»)

$$C_{16} \supset C_8 \supset C_4 \supset C_2 \supset C_1,$$

που αρχίζει με την πλήρη ομάδα C_{16} και τελειώνει με την ομάδα C_1 που αποτελείται μόνο από την ταυτότητα, μια αλυσίδα στην οποία κάθε ομάδα περιέχεται στην προηγούμενη σαν υποομάδα τάξης 2. Εξαιτίας αυτής της κατάστασης μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ρίζες της εξίσωσης (4) με μια αλυσίδα τεσσάρων διαδοχικών εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού. Οι εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, τετραγωνικές εξισώσεις, λύνονται (όπως γνώριζαν ήδη οι Σουμέριοι) με την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών. Ως εκ τούτου, η επίλυση του προβλήματός μας απαιτεί, εκτός από τις ρητές πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, τέσσερις διαδοχικές εξαγωγές τετραγωνικών ριζών. Όμως, τα τέσσερα είδη πράξεων και η εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας είναι ακριβώς αυτές οι αλγεβρικές πράξεις που μπορούν να εκτελεστούν γεωμετρικά με *κανόνα και διαβήτη*. Γι' αυτόν το λόγο το ισόπλευρο τρίγωνο, το πεντάγωνο και το 17-γωνο, $p = 3$, 5 και 17, μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη· διότι, για καθεμία απ' αυτές τις περιπτώσεις, η ομάδα των αυτομορφισμών είναι μια κυκλική ομάδα, της οποίας η τάξη $p-1$ είναι δύναμη του 2: $3 = 2^1+1$, $5 = 2^2+1$, $17 = 2^4+1$.

Είναι διασκεδαστικό να παρατηρήσετε ότι, ενώ η (προφανής) γεωμετρική συμμετρία του 17-γώνου περιγράφεται από μια κυκλική ομάδα τάξης 17, η (κρυμμένη) αλγεβρική της συμμετρία, η οποία καθορίζει το κατασκευαστικό της, περιγράφεται από μια ομάδα τάξης 16. Είναι βέβαιο ότι το κανονικό επτάγωνο δεν είναι κατασκευάσιμο ούτε και τα κανονικά πολύγωνα με 11 και 13 πλευρές.

Μόνο αν το p είναι πρώτος αριθμός, τέτοιος ώστε p−1 να είναι δύναμη του 2, $p-1 = 2^2$, τότε, σύμφωνα με την ανάλυση του Gauss, το κανονικό p-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη. Όμως, ο $p = 2^n+1$ δεν μπορεί να είναι πρώτος αριθμός εκτός εάν ο εκθέτης *n* είναι δύναμη του 2. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι 2^ν είναι η ακριβής δύναμη του 2 με την οποία διαιρείται το n, ούτως ώστε $n = 2^\nu \cdot m$, όπου m περιττός αριθμός. Θέτοντας $2^{2\nu} = \alpha$, τότε $2^n+1 = \alpha^m+1$. Αλλά, για m = περιττό, ο αριθμός α^m+1 διαιρείται διά a+1,

$\alpha^m+1 = (a+1)(\alpha^{m-1}-m^{m-2}+ \dots -a+1)$,

και γι' αυτόν το λόγο είναι σύνθετος αριθμός με τον παράγοντα α+1, εκτός για m = 1. Ως εκ τούτου, ο επόμενος αριθμός της μορφής 2^n+1, μετά τους 3, 5 και 17, που έχει τη δυνατότητα να είναι πρώτος αριθμός είναι ο $2^8+1 = 257$. Καθώς αυτός είναι πράγματι πρώτος αριθμός, το κανονικό 257-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη.

Η θεωρία του Galois μπορεί να διατυπωθεί με μια ελαφρά διαφορετική μορφή, καθώς θα εξηγήσω με την εξίσωση (2). Ας θεωρήσουμε όλους τους αριθμούς της μορφής $\lambda = \alpha+b\sqrt{2}$ με ρητούς συντελεστές α, b· τους ονομάζουμε αριθμούς του σώματος $\{\sqrt{2}\}$. Εξαιτίας του άρρητου της $\sqrt{2}$, ένας τέτοιος αριθμός είναι μηδέν μόνο αν α = 0, b = 0. Επομένως, οι ρητοί συντελεστές α, b είναι μονοσήμαντα καθορισμένοι από το λ, αφού $\alpha+b\sqrt{2} = \alpha_1+b_1\sqrt{2}$ δίνει

$$(\alpha-\alpha_1)+(b-b_1)\sqrt{2}=0\cdot$$

$$\alpha-\alpha_1 = 0,\ b-b_1 = 0$$

ή $\alpha = \alpha_1$, $b = b_1$, αρκεί α,b και α_1,b_1 να είναι ρητοί. Προφανώς η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός δύο αριθμών του σώματος δίνουν έναν αριθμό του σώματος. Ούτε η πράξη της διαίρεσης οδηγεί πέραν του σώματος. Διότι έστω ότι $\lambda = \alpha+b\sqrt{2}$ είναι αριθμός του σώματος διάφορος του μηδενός με ρητούς συντελεστές α,b και έστω $\lambda' = \alpha-b\sqrt{2}$ ο «συζυγής» του. Επειδή το 2 δεν είναι το τετράγωνο κανενός ρητού αριθμού, το ονομαζόμενο μέτρο του λ, ο ρητός αριθμός $\lambda\lambda' = \alpha^2-2b^2$, είναι διάφορος του μηδενός και, ως εκ τούτου, παίρνουμε τον αντίστροφο $\frac{1}{\lambda}$ του λ σαν αριθμό του σώματος, ως ακολούθως:

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda\lambda'}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}.$$

Έτσι το σώμα $\{\sqrt{2}\}$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, με την αυτονόητη εξαίρεση της διαίρεσης διά του μηδενός. Μπορούμε τώρα να ζητήσουμε τους αυτομορφισμούς ενός τέτοιου σώματος. Ένας αυτομορφισμός θα ήταν ένα προς ένα απεικόνιση $\lambda\to\lambda^*$ των αριθμών του σώματος, αν τα $\lambda+\mu$ και $\lambda\cdot\mu$ πήγαιναν στο $\lambda^*+\mu^*$ και $\lambda^*\cdot\mu^*$, αντίστοιχα, για κάθε αριθμού λ,μ του σώματος. Αυτό συνεπάγεται αμέσως ότι ένας αυτομορφισμός μετατρέπει κάθε ρητό αριθμό στον εαυτό του και το $\sqrt{2}$ σε έναν αριθμό θ που ικανοποιεί την εξίσωση $\theta^2-2=0$, δηλαδή ή στον αριθμό $\sqrt{2}$ ή στον $-\sqrt{2}$. Ως εκ τούτου, υπάρχουν μόνο δύο δυνατοί αυτομορφισμοί, ο ένας, που μεταφέρει κάθε αριθμό λ του σώματος $\{\sqrt{2}\}$ στον εαυτό του, και ο άλλος, που μεταφέρει κάθε αριθμό $\lambda = \alpha+b\sqrt{2}$ στον συζυγή του $\lambda' = \alpha-b\sqrt{2}$. Είναι προφανές ότι αυτή η δεύτερη πράξη *είναι* αυτομορφισμός και έχουμε έτσι προσδιορίσει την ομάδα όλων των αυτομορφισμών του σώματος $\{\sqrt{2}\}$.

Ένα σώμα είναι ίσως η απλούστερη αλγεβρική δομή που μπορούμε να επινοήσουμε. Τα στοιχεία του είναι αριθμοί. Χαρακτηριστικό της δομής του είναι οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Αυτές οι πράξεις ικανοποιούν κάποια αξιώματα, ανάμεσά τους αυτό που εγγυάται τη μονοσήμαντη αναστροφή της πρόσθεσης, που ονομάζεται αφαίρεση, και τη μονοσήμαντη αναστροφή του πολλαπλασιασμού (αρκεί ο πολλαπλασιαστής να είναι διάφορος του μηδενός), που ονομάζεται διαίρεση. Ο χώρος είναι άλλο ένα παράδειγμα μιας ολότητας που εφοδιάζεται με δομή. Εδώ τα στοιχεία είναι σημεία και η δομή ορίζεται ως προς μερικές βασικές σχέσεις μεταξύ των σημείων, όπως: τα A, B, C κείνται σε μια ευθεία, το AB είναι ισοδύναμο του CD και παρόμοιες. Αυτό που μαθαίνουμε από όλη αυτή τη συζήτηση και πράγματι έχει γίνει μια κατευθυντήρια αρχή στα σύγχρονα μαθηματικά είναι τούτο: *Κάθε φορά που έχετε να κάνετε με μια δομή άρρηκτα συνδεδεμένη με μια ολότητα Σ, προσπαθήστε να προσδιορίσετε την ομάδα των αυτομορφισμών της*, την ομάδα εκείνων των μετασχηματισμών των στοιχείων της που αφήνει όλες τις δομικές σχέσεις αδιατάρακτες. Μ' αυτό τον τρόπο μπορείτε να πετύχετε μια ουσιαστική θεώρηση της κατασκευής του Σ. Μετά απ' αυτό μπορείτε να αρχίσετε να διερευνάτε τους συμμετρικούς σχηματισμούς των στοιχείων, δηλαδή τους σχηματισμούς που είναι αναλλοίωτοι από μια υποομάδα της ομάδας όλων των αυτομορφισμών· και μπορεί να είναι ενδεδειγμένο, πριν ψάξετε για τέτοιους σχηματισμούς, να μελετήσετε τις υποομάδες από μόνες τους, π.χ. την υποομάδα εκείνων των αυτομορφισμών που αφήνουν ένα στοιχείο σταθερό ή δύο διαφορετικά στοιχεία σταθερά, και να διερευνήσετε ποιες ασυνεχείς ή πεπερασμένες υποομάδες υπάρχουν, και ούτω καθεξής.

Κατά τη μελέτη των ομάδων μετασχηματισμών θα κάνουμε καλά να τονίσουμε αυτή καθ' εαυτή τη δομή μιας τέτοιας ομάδας. Αυτό πραγματοποιείται επισυνάπτοντας ετικέτες αυθαίρετα στα στοιχεία της και έπειτα εκφράζοντας σε σχέση μ' αυτές τις ετικέτες, για οποιαδήποτε δύο στοιχεία της ομάδας s,t, ποιο είναι το αποτέλεσμα u = st της σύνθεσής τους. Αν η ομάδα είναι πεπερασμένη, μπορούμε να πινακοποιήσουμε τη σύνθεση των στοιχείων. Το σχήμα της ομάδας ή η αφηρημένη ομάδα που παίρνουμε έτσι είναι από μόνη της μια δομή, η οποία προσδιορίζεται από τον κανόνα ή πίνακα συνθέσεως για τα στοιχεία της, st = u. Εδώ δημιουργούμε έναν φαύλο κύκλο και ίσως είναι για μας μια αρκετά καθαρή προειδοποίηση να σταματήσουμε. Πράγματι, μπορούμε να ρωτήσουμε σχετικά με μια δεδομένη αφηρημένη ομάδα: Ποια είναι η ομάδα των αυτομορφισμών της, ποιες είναι η ένα προς ένα απεικονίσεις $s \rightarrow s'$ της ομάδας στον εαυτό της που κάνει το st να μεταφερθεί στο $s't'$, αν τα αυθαίρετα στοιχεία s,t μεταφέρονται στα s',t', αντίστοιχα;

Η συμμετρία είναι ένα απέραντο θέμα, σημαντικό στην τέχνη και τη φύση. Τα μαθηματικά βρίσκονται στη ρίζα της και θα ήταν δύσκολο να βρούμε κάτι πιο κατάλληλο απ' αυτή για να αποδείξουμε τη λειτουργία της μαθηματικής νόησης. Ελπίζω να μην απέτυχα τελείως να υποδείξω τις πολλές της διακλαδώσεις και να σας οδηγήσω με την ανεμόσκαλα από διαισθητικές έννοιες σε αφηρημένες ιδέες.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α΄

Προσδιορισμός όλων των πεπερασμένων ομάδων των γνήσιων περιστροφών στο χώρο

ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ για την πληρότητα του καταλόγου (5) της διάλεξης II βασίζεται στο γεγονός που κατά πρώτον αποδείχτηκε από τον Leonhard Euler τον 18° αιώνα, ότι κάθε γνήσια περιστροφή στο χώρο που δεν είναι η ταυτότητα I είναι περιστροφή ως προς έναν άξονα, διατηρεί δηλαδή σταθερά όχι μόνο την αρχή Ο αλλά κάθε σημείο πάνω σε μικρή ευθεία γραμμή που διέρχεται από το Ο, τον άξονα l. Αρκεί να θεωρήσουμε τον δισδιάστατο δίσκο Σ μοναδιαίας ακτίνας με κέντρο το Ο, αντί του τρισδιάστατου χώρου· για κάθε περιστροφή μεταφέρει τον Σ στον εαυτό του, άρα είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση του Σ επί του εαυτού του. Κάθε γνήσια περιστροφή $\neq I$ έχει δύο σταθερά σημεία επί του Σ, που είναι μεταξύ τους αντίποδες, συγκεκριμένα τα σημεία όπου ο άξονας l τέμνει το δίσκο.

Με δεδομένη μια πεπερασμένη ομάδα Γ γνήσιων περιστροφών τάξης N, θεωρούμε τα σταθερά σημεία των N−1 πράξεων της Γ που είναι διαφορετικές από την *I*. Τα ονομάζουμε πόλους. Κάθε πόλος p έχει μία καθορισμένη πολλαπλότητα ν (= 2 ή 3 ή 4 ή ...): οι πράξεις S της ομάδας μας που αφήνουν τον p αμετάβλητο συνίστανται από τις επαναλήψεις της περιστροφής ως προς τον αντίστοιχο άξονα κατά 360°/ν και, ως εκ τούτου, υπάρχουν ακριβώς ν τέτοιες πράξεις S. Αυτές σχηματίζουν μία κυκλική υποομάδα Γp τάξης ν. Μια απ' αυτές τις πράξεις είναι η ταυτότητα· ως εκ τούτου, ο αριθμός των πράξεων $\neq I$ που αφήνουν το p σταθερό είναι ν−1.

Για κάθε σημείο p του δίσκου μπορούμε να θεωρήσουμε το πεπερασμένο σύνολο C των σημείων q στα οποία μεταφέρεται το q από τις πράξεις της ομάδας· ας ονομάσουμε τα σημεία αυτά ισοδύναμα με το p. Επειδή η Γ είναι ομάδα, η φύση αυτής της ισοδυναμίας είναι όπως της ισότητας, δηλαδή το σημείο p είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του· αν το q είναι ισοδύναμο με το p, τότε το p είναι ισοδύναμο με το q· και αν τα δύο σημεία, q_1 και q_2, είναι ισοδύναμα με το q, τότε τα q_1 και q_2 είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Λέμε τότε ότι το σύνολό μας είναι μια *κλάση* ισοδύναμων σημείων· κάθε σημείο της κλάσης μπορεί να χρησιμεύει ως το αντιπροσωπευτικό της p, εφόσον η κλάση περιέχει όλα τα σημεία τα ισοδύναμα με το p και κανένα άλλο. Ενώ τα σημεία μιας σφαίρας είναι αδιάκριτα από την ομάδα των γνήσιων περιστροφών, τα σημεία μιας κλάσης παραμένουν αδιάκριτα, ακόμη και μετά τον περιορισμό αυτής της ομάδας στην πεπερασμένη υποομάδα Γ.

Από πόσα σημεία αποτελείται η κλάση C_p των ισοδύναμων με το p σημείων; Η απάντηση: από N σημεία που, φυσικά, μας έρχεται στο νου είναι σωστή εφόσον η *I* είναι η μόνη πράξη της ομάδας που αφήνει το p σταθερό. Γιατί σ' αυτή την περίπτωση οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές πράξεις S_1, S_2 της Γ μεταφέρουν το p σε δύο διαφορετικά σημεία

$q_1 = pS_1$, $q_2 = pS_2$, αφού η σύμπτωσή τους, $q_1 = q_2$, θα συνεπαγόταν ότι η πράξη $S_1S_2^{-1}$ μεταφέρει το p στον εαυτό του, και θα οδηγούσε έτσι στην $S_1S^{-1}{}_2 = I$ και, άρα, στην $S_1 = S_2$. Αλλά ας υποθέσουμε τώρα ότι το p είναι πόλος πολλαπλότητας ν, έτσι ώστε ν πράξεις της ομάδας μεταφέρουν το p στον εαυτό του. Τότε, ισχυρίζομαι, το πλήθος των σημείων q από τα οποία αποτελείται η κλάση C_p ισούται με N/ν. Απόδειξη: Αφού τα σημεία της κλάσης είναι αδιάκριτα ακόμη και υπό τη δεδομένη ομάδα Γ, καθένα πρέπει να έχει την ίδια πολλαπλότητα ν. Ας το αποδείξουμε πρώτα αυτό άμεσα. Αν η πράξη L της Γ μεταφέρει το p στο q, τότε η $L^{-1}SL$ μεταφέρει το q στο q, εφόσον η S μεταφέρει το p στο p. Αντίστροφα, αν T είναι οποιαδήποτε πράξη της Γ που μεταφέρει το q στον εαυτό του, τότε η $S = LTL^{-1}$ μεταφέρει το p στο p και, ως εκ τούτου, η T είναι της μορφής $L^{-1}SL$, όπου S στοιχείο της ομάδας Γp. Έτσι, αν $S_1 = I, S_2, ..., S_\nu$ είναι τα ν στοιχεία που αφήνουν το p σταθερό, τότε

$$T_1 = L^{-1}S_1L, \qquad T_2 = L^{-1}S_2L, ...,$$
$$T_\nu = L^{-1}S_\nu L$$

είναι οι ν διαφορετικές πράξεις που αφήνουν το q σταθερό. Επιπλέον, οι ν διαφορετικές πράξεις $S_1L, ..., S_\nu L$ μεταφέρουν το p στο q. Αντίστροφα, αν U είναι μια πράξη της Γ που μεταφέρει το p στο q, τότε η UL^{-1} μεταφέρει το p στο p και έτσι είναι μια από τις πράξεις S που αφήνουν το p σταθερό· ως εκ τούτου, U = SL, όπου S μια από τις ν πράξεις $S_1, ..., S_\nu$. ΄Εστω τώρα ότι $q_1, ..., q_n$ είναι n διαφορετικά σημεία της κλάσης C = Cp και έστω L_i μια από τις πράξεις της Γ που μεταφέρει το p στο q_i (i = 1, ..., n).

Τότε όλες οι $n \cdot \nu$ πράξεις του πίνακα

$$S_1L_1, ..., S_\nu L_1,$$
$$S_1L_2, ..., S_\nu L_2,$$
$$......................$$
$$S_1L_n, ..., S_\nu L_n$$

είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Πράγματι, κάθε σειρά ξεχωριστά αποτελείται από διαφορετικές πράξεις. Και όλες οι πράξεις της δεύτερης σειράς, ας πούμε, πρέπει να είναι διαφορετικές από αυτές της πέμπτης, αφού η πρώτη μεταφέρει το p στο q_2 και η δεύτερη στο σημείο $q_5 \neq q_2$. Επιπλέον, κάθε πράξη της ομάδας Γ περιέχεται στον πίνακα γιατί καθεμιά απ' αυτές μεταφέρει το p σε ένα από τα σημεία $q_1, \ldots, q_n$, ας πούμε στο q_i και, ως εκ τούτου, πρέπει να εμφανίζονται στην i-οστή σειρά του πίνακά μας.

Αυτό αποδεικνύει τη σχέση $N = n \cdot v$ και έτσι το γεγονός ότι η πολλαπλότητα v είναι διαιρέτης του N. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $v = v_p$ για την πολλαπλότητα του πόλου p· γνωρίζουμε ότι είναι η ίδια για κάθε πόλο p σε μια δεδομένη κλάση C, και μπορεί ως εκ τούτου να συμβολίζεται χωρίς σύγχυση με V_c. *Η πολλαπλότητα* V_c και ο αριθμός n_c των πόλων στην κλάση C συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση $n_c \cdot v_c = N$.

Μετά απ' αυτές τις προετοιμασίες, ας εξετάσουμε τώρα όλα τα ζεύγη (S,p), που αποτελούνται από μια πράξη $S \neq I$, μιας ομάδας Γ και ένα σημείο p που μένει σταθερό από την S– ή, πράγμα που είναι το ίδιο, ενός οποιουδήποτε πόλου p και μιας οποιασδήποτε πράξης $S \neq I$ της ομάδας που αφήνει το p σταθερό. Αυτή η διπλή περιγραφή υποδηλώνει μια διπλή απαρίθμηση αυτών των ζευγών. Από τη μια, υπάρχουν N–1 πράξεις S στην ομάδα που είναι διαφορετικές από τη I, και καθεμιά έχει δύο σταθερά σημεία που είναι αντίποδες· ως εκ τούτου, ο αριθμός των ζευγών είναι ίσος με 2(N–1). Από την άλλη, για κάθε πόλο p υπάρχουν $v_p - 1$ πράξεις $\neq I$ στην ομάδα που αφήνουν το p σταθερό, και άρα το πλήθος των ζευγών είναι ίσο με το άθροισμα

$$\sum_{p} (v_p - 1)$$

που αθροίζεται ως προς όλους τους πόλους p. Συγκεντρώνουμε τους πόλους σε κλάσεις C ισοδύναμων πόλων και έτσι παίρνουμε την ακόλουθη βασική εξίσωση:

$$2(N-1) = \sum_c n_c(\nu_c-1)$$

όπου το άθροισμα στο δεξιό μέλος είναι ως προς όλες τις κλάσεις των πόλων. Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση $n_c \cdot \nu_c = N$ και διαιρώντας διά N, προκύπτει η σχέση

$$2-\frac{2}{N} = \sum_c \left(1-\frac{1}{\nu_c}\right).$$

΄Ο,τι ακολουθεί είναι μια συζήτηση αυτής της εξίσωσης.

I. Η πιο τετριμμένη περίπτωση είναι αυτή κατά την οποία η ομάδα Γ αποτελείται μόνο από την ταυτότητα· τότε $N = 1$, και δεν υπάρχουν πόλοι.

Αφήνοντας κατά μέρος αυτή την τετριμμένη περίπτωση, μπορούμε να λέμε ότι το N είναι τουλάχιστον 2 και, ως εκ τούτου, το αριστερό μέλος της εξίσωσής μας είναι τουλάχιστον 1, αλλά μικρότερο από το 2. Το πρώτο από αυτά τα γεγονότα κάνει αδύνατο για το άθροισμα Σ να αποτελείται από έναν μόνο όρο. ΄Αρα, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κλάσεις C. Σίγουρα όμως όχι παραπάνω από 3. Πράγματι, αφού κάθε ν_c είναι τουλάχιστον 2, το άθροισμα στο δεξιό μέλος θα ήταν τουλάχιστον 2, αν αποτελούνταν από 4 ή περισσότερους όρους. Επομένως, έχουμε ή δύο ή τρεις κλάσεις ισοδύναμων πόλων (περιπτώσεις II και III, αντίστοιχα).

II. Σ' αυτή την περίπτωση, η εξίσωση μας δίνει

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \quad \text{ή} \quad 2 = \frac{N}{\nu_1} + \frac{N}{\nu_2}\cdot$$

Αλλά δύο θετικοί ακέραιοι $n_1 = N/\nu_1$, $n_2 = N/\nu_2$ μπορούν να έχουν άθροισμα 2 μόνο αν καθένας τους είναι ίσος με 1:

$$\nu_1 = \nu_2 = N\cdot\ n_1 = n_2 = 1.$$

΄Αρα, καθεμιά από τις δύο κλάσεις ισοδύναμων πόλων αποτελείται από *έναν* πόλο πολλαπλότητας N. Αυτό που βρήκαμε εδώ είναι η κυκλική ομάδα περιστροφών ως προς έναν (κάθετο) άξονα τάξης N.

III. Σ' αυτή την περίπτωση, έχουμε

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1 + \frac{2}{N}\cdot$$

Διατάσσουμε τις πολλαπλότητες ν κατά φθίνουσα σειρά $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$. Οι αριθμοί ν_1, ν_2, ν_3, δεν μπορούν όλοι να είναι μεγαλύτεροι από το 2. Πράγματι, γιατί τότε το αριστερό μέρος θα έδινε ένα αποτέλεσμα $\leq$ του $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$, αντίθετα προς την τιμή του δεξιού μέλους. Άρα, $\nu_1 = 2$, και

$$\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{2}+\frac{2}{N}.$$

Οι αριθμοί ν_2, ν_3 δεν μπορούν να είναι και οι δύο $\geq$ του 4, γιατί τότε το άθροισμα στο αριστερό μέλος θα ήταν $\leq$½. Άρα, $\nu_2 = 2$ ή 3.

Πρώτη ενναλλακτική περίπτωση III_1 : $\nu_1 = \nu_2 = 2$,

$$N = 2\nu_3.$$

Δεύτερη εναλλακτική περίπτωση III_2 : $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$·

$$\frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{6}+\frac{2}{N}.$$

Θέτουμε $\nu_3 = n$ στην περίπτωση III_1. Έχουμε δύο κλάσεις πόλων πολλαπλότητας 2, που καθεμία αποτελείται από n πόλους, και μια κλάση που αποτελείται από δύο πόλους πολλαπλότητος n. Εύκολα φαίνεται ότι αυτοί οι όροι πληρούνται από τη διεδρική ομάδα D'_n και μόνο από αυτή.

Για τη δεύτερη εναλλακτική περίπτωση III_2 έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\nu_3 \geq \nu_2 = 3$, τις ακόλουθες τρεις δυνατότητες: $\nu_3 = 3$, $N = 12$· $\nu_3 = 4$, $N = 24$·$\nu_3 = 5$, $N = 60$, τις οποίες σημειώνουμε με τα T, W, και P, αντίστοιχα.

T : Υπάρχουν δύο κλάσεις από 4 πόλους τάξης 3 ο καθένας. Είναι φανερό ότι οι πόλοι της μιας κλάσης πρέπει να σχηματίζουν κανονικό τετράεδρο και αυτοί της άλλης είναι οι αντίποδές τους. Λαμβάνουμε λοιπόν την τετραεδρική ομάδα. Οι έξι ισοδύναμοι πόλοι τάξης 2 είναι οι προβολές από το κέντρο της σφαίρας στα μέσα των έξι ακμών.

W : Μια κλάση από 6 πόλους τάξης 4 ο καθένας που σχηματίζουν τις κορυφές ενός κανονικού οκτάεδρου, απ' όπου προκύπτει η οκταεδρική ομάδα. Μια κλάση από 2 πόλους τάξης 3 (που αντιστοιχούν στα μέσα των πλευρών)· μια κλάση από 12 πόλους τάξης 2 (που αντιστοιχούν στα μέσα των ακμών).

P : Μια κλάση 12 πόλων τάξης 5, οι οποίοι πρέπει να σχηματίζουν τις κορυφές ενός κανονικού εικοσάεδρου. Οι 20 πόλοι 3ης τάξης αντιστοιχούν στα κέντρα των 20 εδρών, και οι 30 πόλοι τάξης 2 αντιστοιχούν στα μέσα των 30 ακμών του πολύεδρου.

Παράρτημα Β΄ Συνυπολογισμός των μη γνήσιων περιστροφών

ΑΝ Η ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΟΜΑΔΑ Γ* των περιστροφών στο χώρο περιλαμβάνει μη γνήσιες περιστροφές, έστω Α μια από αυτές και $S_1, ..., S_n$ είναι οι γνήσιες πράξεις στη Γ*. Οι τελευταίες σχηματίζουν μια υποομάδα Γ, και η Γ* περιέχει μια σειρά γνήσιων πράξεων και μια άλλη μη γνήσιων πράξεων

(1) $S_1, ..., S_n$,

(2) $AS_1, ..., AS_n$.

Δεν περιέχει άλλες πράξεις. Πράγματι, αν Τ είναι μια μη γνήσια πράξη της Γ*, τότε $nA^{-1}T$ είναι γνήσια και, ως εκ τούτου, ίδια με μια από τις πράξεις της (1), έστω την S_i, και έτσι $T = AS_i$. Επομένως, η τάξη της Γ* είναι *2n*, μισές από τις πράξεις της είναι γνήσιες και σχηματίζουν την ομάδα Γ, και οι άλλες μισές είναι μη γνήσιες.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η μη γνήσια πράξη z περιέχεται ή όχι στη Γ*. Στην πρώτη περίπτωση εκλέγουμε τη z ως A και έτσι παίρνουμε $\Gamma^* = \overline{\Gamma}$.

Στη δεύτερη περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε τη (2) με τη μορφή

(2΄) $ZT_1, \ldots, ZT_n$

όπου T_i είναι γνήσιες περιστροφές. Αλλά σ' αυτή την περίπτωση, όλες οι T_i είναι διαφορετικές από όλες τις S_i. Πράγματι, αν ήταν $T_i = S_k$, τότε η ομάδα Γ^* θα περιείχε εκτός από τις $ZT_i = ZS_k$ και S_k και το στοιχείο $(ZS_k)S^{-1}_k = Z$, αντίθετα με την υπόθεση. Κάτω απ' αυτές τις συνθήκες, οι πράξεις

(3) $S_1, \ldots, S_n$
$T_1, \ldots, T_n$

σχηματίζουν μια ομάδα Γ΄ γνήσιων περιστροφών τάξης *2n* στην οποία η Γ περιέχεται σαν υποομάδα με δείκτη 2. Πράγματι, ο ισχυρισμός ότι οι δύο σειρές (3) σχηματίζουν ομάδα είναι, όπως εύκολα επαληθεύεται, ισοδύναμος με τον άλλο που λέει ότι οι σειρές (1) και (2΄) αποτελούν ομάδα (συγκεκριμένα την ομάδα Γ*). Έτσι, η Γ* είναι αυτή που συμβολίστηκε στο κύριο κείμενο με Γ΄Γ, και έτσι αποδείξαμε ότι οι δύο μέθοδοι που μνημονεύτηκαν εκεί είναι οι μόνες με τις οποίες μπορούν να κατασκευαστούν πεπερασμένες ομάδες που περιέχουν μη γνήσιες περιστροφές.

"Ο Weyl προσφέρει βαθιά γνώση για την έννοια της συμμετρίας, τη θεμελίωσή της στη θεωρία των ομάδων, τις εφαρμογές της στη φυσική, τη χημεία και τη βιολογία, και το ρόλο της στην τέχνη".
MANFRED EIGEN και RUTHILD WINKLER, στο LAWS OF THE GAME.

" Ο Δρ. Weyl επισκοπεί αριστοτεχνικά και συναρπαστικά τις εφαρμογές και τίς αρχές της συμμετρίας στη γλυπτική,τη ζωγραφική την αρχιτεκτονική, τη διακόσμηση και το σχέδιο. Παρουσιάζει επίσης τις εκδηλώσεις της στην οργανική και την ανόργανη φύση, καθώς και τη φιλοσοφική και μαθηματική της σημασία."
SCIENTIFIC AMERICAN.

Σ Υ Μ Μ Ε Τ Ρ Ι Α

Η συμμετρία είναι μια από τις έννοιες με την οποία ο άνθρωπος διαμέσου των αιώνων προσπάθησε να κατανοήσει και να δημιουργήσει την τάξη, την ομορφιά και την τελειότητα. Ξεκινώντας από την αντίληψη ότι συμμετρία σημαίνει αρμονία των αναλογιών, το βιβλίο αυτό αναπτύσσει σταδιακά τη γεωμετρική της έννοια στις διάφορες μορφές της, όπως την αμφίπλευρη τη μεταφορική, τη διακοσμητική και την κρυσταλλογραφική συμμετρία και καταλήγει στη γενική αφηρημένη μαθηματική της ιδέα, που αποτελεί τη βάση όλων αυτών των ειδικών μορφών.

ISBN 960-7022-22-X