

**Ερωτήσεις Κατανόησης στο κεφάλαιο
ΟΡΙΟ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ Α Ψ

Αιτιολόγηση: Δηλώνεται για πεδίο ορισμού της σύνθεσης το $\mathbb{R}^*$.

Όμως το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, δεν είναι υποσύνολο του $D_f = (0, +\infty)$, όπως θα έπρεπε.

Σχόλια: Υπενθυμίζουμε ότι $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ και επομένως πάντα το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της πρώτης συνάρτησης.

Προφανώς, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$ και έτσι για να προκύψει η απλοποιημένη μορφή, προϋπόθεση ήταν η συνθήκη $x > 0$.

β) $(f \circ g)(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$ Α Ψ

Αιτιολόγηση: $D_g = \mathbb{R}$ και $g(D_g) = (0, +\infty) \subseteq (0, +\infty) = D_f$

και συνεπώς $D_{f \circ g} = D_g = \mathbb{R}$. Άρα το δηλωθέν πεδίο ορισμού είναι σωστό.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{-x}) = \ln e^{-x} = -x$. Άρα **και** ο τύπος είναι σωστός.

Σχόλιο: Χρησιμοποιήσαμε το $(0, +\infty) \subseteq (0, +\infty)$ αντί του $(0, +\infty) = (0, +\infty)$, για να υπενθυμίσουμε ότι **αρκεί** το σύνολο εικόνων της πρώτης να είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της δεύτερης, για να είναι πεδίο ορισμού της σύνθεσης ολόκληρο το πεδίο ορισμού της πρώτης.

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Α Ψ

Αιτιολόγηση: Αν $\frac{f(x)}{x-1} = g(x)$, τότε $f(x) = g(x) \cdot (x-1)$.

Αφού προφανώς οι συναρτήσεις g και $h(x) = x-1$ «ορίζονται κοντά στο 1» και επειδή υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$, θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x-1)] = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = l \cdot 0 = 0$$

3. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0$. Α Ψ

Αιτιολόγηση: Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x}$ δεν υπάρχει, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + x} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = +\infty$.

Σχόλιο 1^ο: Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιότητες των ορίων ισχύουν αν εξασφαλιστούν τρεις προϋποθέσεις.

(α) **Όλες** οι συναρτήσεις ορίζονται σε κατάλληλο σύνολο.

Έτσι είναι απαράδεκτο, (Ψευδές κατά το σχ. βιβλίο) το παρακάτω:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + \sqrt{-x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = 0 + 0 = 0$$

Εξήγηση: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ έχει προφανώς πεδίο ορισμού $D_f = \{0\}$, επομένως δεν ορίζεται «κοντά στο 0» και συνεπώς δεν έχει νόημα να μιλάμε για $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + \sqrt{-x})$.

(β) **Υπάρχουν** όλα τα «επί μέρους» όρια. Αυτή είναι η περίπτωση που είδαμε παραπάνω.

(γ) Δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Απαράδεκτο είναι και το παρακάτω:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = 0$$

Η λαθεμένη εφαρμογή των ιδιοτήτων, μας οδήγησε στην απροσδιόριστη μορφή « $0 \cdot (+\infty)$ » και το χειρότερο είναι ότι δεν το αντιληφθήκαμε.

Σχόλιο 2^ο: Για το «λάθος» ευθύνεται η άσκοπη χρήση ιδιοτήτων.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Σχόλιο 3^ο: Χαρακτηρίσαμε το προτεινόμενο, ψευδές (Ψ), επειδή καταλάβαμε ότι η «φιλοσοφία» των συγγραφέων του σχολικού βιβλίου, είναι να χαρακτηρίζεται (Ψ), κάθε τι το απαράδεκτο. Το προτεινόμενο, δεν είναι (Λογική) πρόταση, αφού δε μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε αληθές, ούτε ψευδές. Σωστό είναι να πούμε ότι «δεν έχει νόημα».

Π.χ.: Αν χαρακτηριστεί (Ψ) επειδή στο $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x}$ δεν ισχύει το ίσον,

τότε θα πρέπει να χαρακτηριστεί (Α) το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] \neq \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] > \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} \\ \text{ή} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] < \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} \end{array} \right\}$$

το οποίο προφανώς, με την ίδια λογική, θα πρέπει να χαρακτηριστεί επίσης (Ψ).

4. Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$.

A Ψ

Αιτιολόγηση: Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$, που προφανώς

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1$.

Σχόλιο: Αν κάναμε προσεκτική χρήση της θεωρίας, (Θεώρημα 2^ο, σελίδα 166) θα λέγαμε $f(x) > 1 \Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq 1$ και έτσι θα

αντιμετωπίζαμε με επιφύλαξη το προτεινόμενο.

5. Ισχύει: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$

$\boxed{A}$

Ψ

Αιτιολόγηση: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\frac{1}{x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu u}{u} \right) = 1$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

A

$\boxed{\Psi}$

Αιτιολόγηση: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 \neq 1$, με το κριτήριο παρεμβολής.

$$\left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| = \left| \eta \mu x \cdot \frac{1}{x} \right| = |\eta \mu x| \cdot \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1 \cdot \left| \frac{1}{x} \right| \Rightarrow \left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Rightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right|,$$

στο $(0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \right|$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

6. Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$.

$\boxed{A}$

Ψ

Αιτιολόγηση: Με το κριτήριο παρεμβολής.

$$0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \cdot x^2 \leq x^2 \cdot f(x) \leq x^2 \cdot 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \cdot f(x) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{ και επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0.$$

7. Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

A

$\boxed{\Psi}$

Αιτιολόγηση: 1^η: Μπορεί η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις, και να μην υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \quad \text{π.χ.: } f(x) = \eta \mu x - 1.$$

2^η: Για τη συνάρτηση $f(x) = -1$, που προφανώς ικανοποιεί τις

προϋποθέσεις, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) = -1 \neq 0$.

8. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6) \cdot g(6)$.

A

$\boxed{\Psi}$

Αιτιολόγηση: Δεν είναι όλες οι συναρτήσεις συνεχείς.

$$\text{π.χ.: } f(x) = x - 6 \text{ και } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-6}, & \text{αν } x \neq 6 \\ \alpha \in \mathbb{R}, & \text{αν } x = 6 \end{cases}, \quad (f \cdot g)(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq 6 \\ 0, & \text{αν } x = 6 \end{cases}.$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 6} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 6} ((f \cdot g)(x)) = \lim_{x \rightarrow 6} 1 = 1 \neq 0 = (f \cdot g)(6) = f(6) \cdot g(6).$$

9. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1.$$

A ☐ Ψ

Αιτιολόγηση: Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{|x|}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \text{ ενώ δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

10. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

☐ A Ψ

Αιτιολόγηση: Με το κριτήριο παρεμβολής «κοντά στο x_0 ».

$$|f(x)| \leq |f(x)| \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) \text{ και επομένως } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

11. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$ ισχύει $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$,

τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1.

☐ A Ψ

Αιτιολόγηση: $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και «κοντά στο 4»

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4) \cdot (x - 3)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 3) = 4 - 3 = 1. \text{ Επομένως } f(4) = 1.$$

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4$, $f(1) = 3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \pi$.

☐ A Ψ

Αιτιολόγηση: Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, $f(-1) = 4 \neq 3 = f(1)$ και $3 < \pi < 4$,

από το «Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών» προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \pi$.

II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, $l, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

A) $l < m$

☐ B) $l \leq m$

Γ) $l \geq m$

Δ) $l = m$

E) $m < l$.

Αιτιολόγηση: «κοντά στο x_0 » από τη θεωρία (Θεώρημα 2^ο, σελίδα 166):

$$f(x) < g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow l \leq m$$

2. Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

- A) 8 B) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$ E) -8.

Αιτιολόγηση: Στο $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$\frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3} = \left(\frac{1-2x^2}{x^2+1} \right)^3 = \left(\frac{x^2 \cdot \frac{1}{x^2} - 2}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)^3 = \left(\frac{\frac{1}{x^2} - 2}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)^3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$\text{Άρα} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2}{1 + \frac{1}{x^2}} = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^2} - 2}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)^3 = (-2)^3 = -8 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3} = -8.$$

3. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

- A) $+\infty$ B) $-\infty$ Γ) 1 Δ) -1 E) 0.

Αιτιολόγηση: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ και επομένως υπάρχει διάστημα $(\alpha, +\infty)$ με $\alpha \geq 0$, στο οποίο $x^3 - x^2 - 1 > 0$ και συνεπώς $|x^3 - x^2 - 1| = x^3 - x^2 - 1$.

$$\text{Στο } (\alpha, +\infty) : \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2} = \frac{x^3 - x^2 - 1 - x^3 + x^2}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \quad \text{και επομένως:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0. \quad \text{Προφανώς με } \alpha \geq 0, \text{ ορίζεται το όριο.}$$

Θεωρία: • Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (σελίδα 178)

- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:
 - οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
 - δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. (σελίδα 184)

Σχόλιο 1^ο: Η θεωρία μας εξασφαλίζει «κοντά στο $+\infty$ » και επομένως το ευρύτερο διάστημα ισχύος, μπορεί να είναι $(\beta, +\infty)$ με $\beta < 0$. Είπαμε «υπάρχει διάστημα $(\alpha, +\infty)$ με $\alpha \geq 0$, στο οποίο $x^3 - x^2 - 1 > 0$, αφού αν για μια συνάρτηση f το διάστημα είναι $(\beta, +\infty)$ με $\beta < 0$, τότε προφανώς η σχέση θα ισχύει και στο υποσύνολο $(\alpha, +\infty)$ με $\alpha \geq 0$.

$$\boxed{\beta < 0 \leq \alpha \Rightarrow (\alpha, +\infty) \subseteq (\beta, +\infty)}$$

Σχόλιο 2^ο: Το διάστημα εργασίας, θα μπορούσαμε να το εντοπίσουμε και εμπειρικά.

Έτσι, επειδή $x > 2 \Rightarrow x^3 > 2x^2 = x^2 + x^2 > x^2 + 1 \Rightarrow x^3 > x^2 + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - 1 > 0$, θα έχουμε $x^3 - x^2 - 1 > 0$ και επομένως $|x^3 - x^2 - 1| = x^3 - x^2 - 1$, στο $(2, +\infty)$.

4. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε:

- A) $x_0 = 0$ B) $x_0 = 2$ Γ) $x_0 = -1$ Δ) $x_0 = 1$.

Αιτιολόγηση: $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x} = \frac{x(x^2 - x - 2)}{x(x^2 - 1)} = \frac{x(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x-1}$ και έτσι παρατηρούμε ότι μόνο το $x_0 = 1$ μπορεί να «δημιουργήσει πρόβλημα».

(Ρίζα του παρονομαστή, που δεν είναι και ρίζα του αριθμητή).

Έτσι για $x \in (0, 1)$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x-2) \frac{1}{x-1} \right] \stackrel{\ll -1 \cdot (-\infty) \gg}{=} +\infty$, ενώ για $x \in (1, 2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x-2) \frac{1}{x-1} \right] \stackrel{\ll -1 \cdot (+\infty) \gg}{=} -\infty$$

και επομένως δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$.

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Από τους Παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

A) η g είναι συνεχής στο 2

B) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Αιτιολόγηση: Η g είναι συνεχής (εννοείται στο πεδίο ορισμού της) σαν ρητή.

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ επομένως $D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x + 1}$

B) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x - 1}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$

Δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$

E) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x + 1)]$

ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x - 1)]$.

Αιτιολόγηση: Για να είναι καλώς ορισμένο το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, θα πρέπει η f να ορίζεται «κοντά στο x_0 ».

A) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{20} - x + 1) = 1 > 0$ επομένως $x^{20} - x + 1 > 0$ «κοντά στο 0» και συνεπώς είναι καλώς ορισμένο το $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x + 1}$.

[Γ] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^9 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^9) = +\infty$ επομένως υπάρχει διάστημα $(\alpha, +\infty)$ στο οποίο $3x^9 + x - 1 > 0$ και συνεπώς είναι καλώς ορισμένο το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$.

[Ε] $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x + 1) = 1 > 0$ επομένως $x^3 + x + 1 > 0$ «κοντά στο 0» και συνεπώς είναι καλώς ορισμένο το $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x + 1)]$.

Β) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{20} - x - 1) = -1 < 0$ επομένως $x^{20} - x - 1 < 0$ «κοντά στο 0», άρα δε μπορεί να είναι $x^{20} - x - 1 \geq 0$ «κοντά στο 0» και συνεπώς δεν είναι καλώς ορισμένο το $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x - 1}$.

Δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^9 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^9) = -\infty$ επομένως υπάρχει διάστημα $(-\infty, \alpha)$ στο οποίο $3x^9 + x - 1 < 0$, άρα δεν υπάρχει διάστημα $(-\infty, \beta)$ στο οποίο να είναι $3x^9 + x - 1 \geq 0$ και συνεπώς δεν είναι καλώς ορισμένο το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$.

ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x - 1) = -1 < 0$ επομένως $x^3 + x - 1 < 0$ «κοντά στο 0», άρα δε μπορεί να είναι $x^3 + x - 1 > 0$ «κοντά στο 0» και συνεπώς δεν είναι καλώς ορισμένο το $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x - 1)]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0, 3]$, με $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ και $f(3) = -1$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.

Β) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$.

Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Δ) $[-1, 2] \subseteq f(\Delta)$.

[Ε] Η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

Αιτιολόγηση: Δεν υπάρχει στην υπόθεση η πληροφορία ότι $f \searrow [0, 3]$.

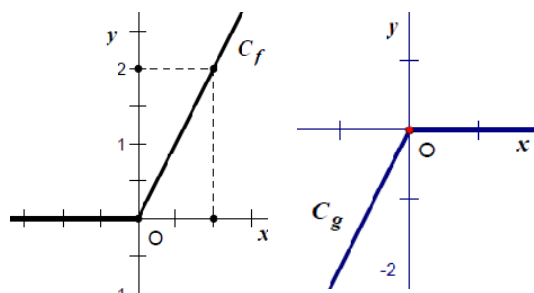
Συμπλήρωμα του «σχολικού βιβλίου»

1. Επισημαίνουμε, ότι μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή «συνάρτηση μηδέν», χωρίς καμία από τις δύο συναρτήσεις, να είναι ίση με τη «συνάρτηση μηδέν».

«συνάρτηση μηδέν»: $f(x) = 0$, με $D_f = \mathbb{R}$

Παράδειγμα: $f(x) = x + |x|$ και $g(x) = x - |x|$,

δηλαδή $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ \text{και} \\ 2x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 0 \\ \text{και} \\ 0, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.



2. Από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι, αν $x_1, x_2 \in D_f$, ισχύει πάντα η συνεπαγωγή:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Σχόλιο: Το αντίστροφο ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση είναι «1-1».

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1-1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

3. Οι συναρτήσεις $f(x)=1$ και $g(x)=\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x$, με $D_f=D_g=\mathbb{R}$, είναι ίσες, ενώ έχουν διαφορετικό τύπο.
4. Από τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης προκύπτει ότι, για συνάρτηση $f \nearrow$ σε διάστημα Δ , αν $x_1, x_2 \in \Delta \subseteq D_f$, ισχύει πάντα η συνεπαγωγή: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Αποδεικνύεται ότι τότε ισχύει και το αντίστροφο της παραπάνω συνεπαγωγής, και επομένως για γνησίως αύξουσα συνάρτηση, ισχύει τελικά η σχέση: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

5. Από τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης προκύπτει ότι, για συνάρτηση $f \searrow$ σε διάστημα Δ , αν $x_1, x_2 \in D_f$, ισχύει πάντα η συνεπαγωγή: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

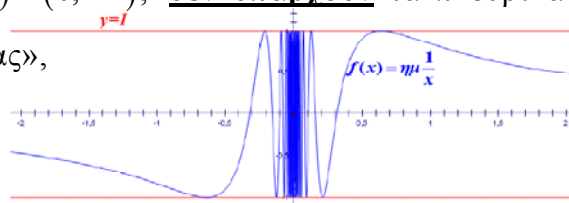
Αποδεικνύεται ότι τότε ισχύει και το αντίστροφο της παραπάνω συνεπαγωγής, και επομένως για γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, ισχύει η σχέση: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

6. Για τη συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\frac{1}{x}$, με $D_f=\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, δεν υπάρχουν τα πλευρικά

όρια στο $x_0=0$. Φαίνεται σαν ο «κατακόρυφος άξονας», να περιβάλλεται από μια «ταινία».

Στην πραγματικότητα πρόκειται για ημιτονοειδείς καμπύλες, με όλο και μικρότερο πλάτος, όσο

πλησιάζουμε την αρχή των αξόνων. Η γραφική παράσταση «κυμαίνεται» πλησιάζοντας τον κατακόρυφο άξονα, χωρίς να κατευθύνεται σε συγκεκριμένο σημείο του.



7. Έχουμε πει, ότι στον υπολογισμό «ορίου σύνθετης συνάρτησης»(σελ. 55), θα ασχοληθούμε με όρια, όπου θα είναι εξασφαλισμένη η αναγκαία συνθήκη, και επομένως δεν θα ελέγχεται. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, η «αναγκαία συνθήκη» δεν υπάρχει, επομένως δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη «θεωρία». Το όριο όμως θα το βρούμε, αφού θα μπορέσουμε να βρούμε τον τύπο της σύνθετης συνάρτησης.

Παράδειγμα: $f(x)=g(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$, και συνεπώς $(f \circ g)(x)=(g(x))=\begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Έτσι, $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. **Προσοχή:** Για $g(x)=u$, και $u_0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$, έχουμε $g(x)=0=u_0$, «κοντά στο 0» και έτσι δεν εξασφαλίζεται η «αναγκαία συνθήκη».

8. Αν δυο συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες «κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ » και ισχύουν:

(α) $f(x) \leq g(x)$ «κοντά στο x_0 », και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

(β) $f(x) \leq g(x)$ «κοντά στο x_0 », και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Ομοίως για $x \rightarrow -\infty$ ή $x \rightarrow +\infty$, και τη σχέση $f(x) \leq g(x)$, να ισχύει σε κατάλληλα διαστήματα, δηλαδή σε διαστήματα $(-\infty, \alpha)$ ή $(\beta, +\infty)$ αντίστοιχα, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

9. Αν μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα

$\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

10. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}=(-\infty, +\infty)$ και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = B$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (A, B) , ενώ αν

είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (B, A) .